Bùi Hoàng Nam
THPT Chuyên Trần Phú - Hải Phòng

TUYỂN TẬP

NHỮNG BÀI HÌNH HỌC 9 HAY & ĐẶC SẮC

Lời nói đầu

Sau một quá trình được ôn luyện và thành công đỗ vào trường THPT Chuyên Trần Phú, với mong muốn chia sẻ, tác giả mong truyền tải kiến thức của bản thân và tiếp lửa đam mê Toán học tới các bạn học sinh trên mọi miền tổ quốc.

Toán Học là sự bao hàm của rất nhiều phân môn như: Số học, Giải tích, Hình học,. . . Các phân môn này đều thu hút được sự yêu thích cũng như đam mê của các bạn học sinh. Bằng sự yêu thích, đam mê và được sự giúp đỡ của các thầy, mình đã quyết định soạn lên file tài liệu *"Tuyển tập những bài hình học 9 Hay & Đặc Sắc"* dựa theo quan điểm cũng như đánh giá của cá nhân tác giả.

Tác giả muốn cảm ơn tới gia đình của tác giả đã luôn ủng hộ trong suốt quá trình làm file tài liệu này. Tác giả gửi lời cảm ơn tới thầy **Nguyễn Ngọc Tú** và thầy **Nguyễn Đăng Khoa** là hai người thầy đã luôn tận tâm và giúp đỡ tác giả tiến bộ lên từng ngày tháng năm cấp 2.

Mặc dù tài liệu đã được tác giả biên soạn khá kĩ lưỡng nhưng sai sót là điều không thể tránh khỏi. Mong bạn đọc thông cảm và mọi ý kiến đóng góp xin gửi về

- Địa chỉ gmail: *buihoangnamila@gmail.com*
- Zalo: 0922.330.885
- Facebook: Bùi Hoàng Nam (HN)

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 01 năm 2025.
Bùi Hoàng Nam
Khối 10 Toán 2, K39 THPT Chuyên Trần Phú – Hải Phòng

MỘT SỐ KÝ HIỆU SỬ DỤNG TRONG TÀI LIỆU

1. $\square$: Hoàn tất bài toán.
2. $\triangle ABC$: Tam giác ABC.
3. $\angle XYZ$: Góc XYZ.
4. (O) : Đường tròn tâm O.
5. $\overset{\frown}{AB}$: Cung AB.
6. $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$: Tam giác ABC đồng dạng với $\triangle A'B'C'$.
7. P_X : Chu vi hình X.
8. $[X]/S_X$: Diện tích hình X.
9. $d_{(X \perp AB)}$: Đường thẳng qua X vuông góc với AB.
10. $d_{(X || AB)}$: Đường thẳng qua X song song với AB.
11. (MN) : Đường tròn đường kính MN.
12. (ABC) : Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
13. $(ABCD)$: Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.
14. $||$: Song song.
15. $\nparallel$: Không song song.
16. $\perp$: Vuông góc.
17. $\rightarrow$: Suy ra/Kéo theo.
18. $\Leftrightarrow$: Tương đương/Khi và chỉ khi.
19. $\overline{P; Q; R}$: 3 điểm $P; Q; R$ thẳng hàng.

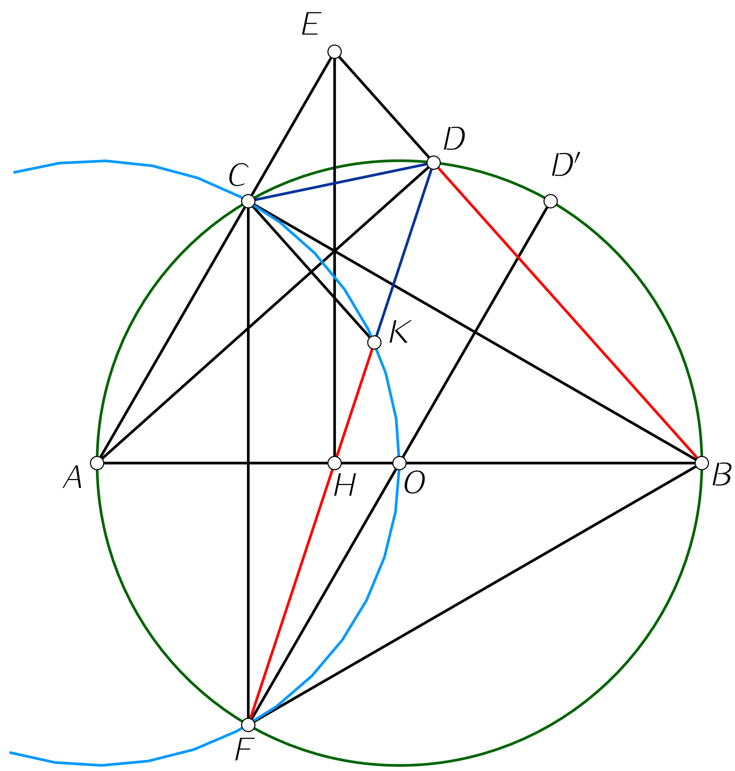
Bài toán 1.

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Lấy C thuộc (O) sao cho $AC = R$. Trên cung nhỏ BC lấy điểm D (D khác B và C). AC cắt BD tại E. Kẻ EH vuông góc với AB tại H. Tia DH cắt (O) tại điểm thứ hai là F.

(a) Chứng minh 4 điểm A, E, D, H cùng thuộc một đường tròn.

(b) Chứng minh $\angle DHE = \angle DFC$, từ đó suy ra $\triangle BCF$ đều.

(c) Xác định vị trí điểm D để chu vi tứ giác $ABDC$ đạt giá trị lớn nhất.



CHỨNG MINH.

a. Ta có $\angle ADE = \angle AHE = 90°$ nên tứ giác $AEDH$ nội tiếp.

b. Tứ giác $AEDH$ và $ACDF$ nội tiếp nên

$$\angle EHD = \angle EAD = \angle CFD,$$

mà hai góc này ở đồng vị $\rightarrow EH \parallel CF$.

Lại có $EH \perp AB \rightarrow CF \perp AB$. Từ đây suy ra $\triangle BCF$ cân tại B.

Vì $AC = OA = OC = R \rightarrow \triangle ACO$ đều $\rightarrow \angle CAB = 60° \rightarrow \angle CFB = 60°$.

Dẫn đến $\triangle BCF$ đều.

c. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle COF$ cắt lại DF tại K. Kẻ đường kính FD' của (O).

Từ câu **b**, ta suy ra được F là điểm cố định.

Vì $\angle CBF = 60° \rightarrow \angle COF = 120° \rightarrow \angle CKF = 120° \rightarrow \angle CKD = 60°$.

Lại có $\angle CDF = \angle CBF = 60° \rightarrow \triangle CDK$ đều $\rightarrow CD = DK = KC$.

Chú ý rằng $\triangle KCF = \triangle DCB$ $(c.g.c) \rightarrow KF = DB$.

Do đó $P_{ABDC} = AC + CD + DB + BA = 3R + DK + KF = 3R + DF \leq 3R + FD' = 5R$. Vậy nên giá trị lớn nhất của P_{ABDC} bằng $5R$. Đẳng thức xảy ra khi $CD \parallel AB$. □

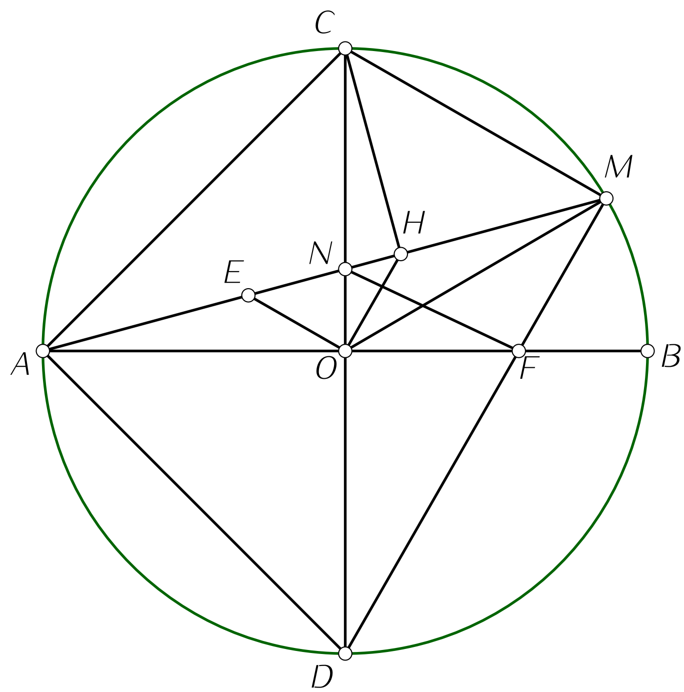
Bài toán 2.

Cho $(O; R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Một điểm M di động trên cung nhỏ BC (M không trùng với C và B), AM cắt CD tại N. Kẻ CH vuông góc với AM tại H. Gọi giao điểm của DM với AB là F.

a. Chứng minh tứ giác $OACH$ nội tiếp.

b. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OH cắt AM tại E. Chứng minh rằng OH song song với DM và $EN \cdot HM = NH \cdot ME$.

c. Tìm vị trí của M trên cung nhỏ BC để S_{MNF} đạt giá trị lớn nhất.



Chứng minh.

a. Ta có $\angle CHA = \angle COA = 90^\circ$ nên tứ giác $OACH$ nội tiếp.

b. Tứ giác $OACH$ và $ACMD$ nội tiếp nên

$$\angle OHN = \angle OCA = \angle DMN,$$

mà hai góc này đồng vị $\to OH \parallel DM$.

Ta có tứ giác $OACH$, $ACMD$ nội tiếp và $OH \parallel DM$ nên

$$\angle NOH = \angle CAM = \angle ODM = \angle OMD = \angle MOH.$$

Suy ra OH là phân giác của $\angle NOM \to OE$ là phân giác ngoài của $\angle NOM$.

Theo tính chất đường phân giác, ta có

$$\frac{HN}{HM} = \frac{EN}{EM} \to EN \cdot HM = NH \cdot ME.$$

c. Ta có $\triangle OAD$ vuông cân tại $O \to \begin{cases} \angle OAD = \angle ODA = 45^\circ, \\ AD^2 = 2R^2. \end{cases}$

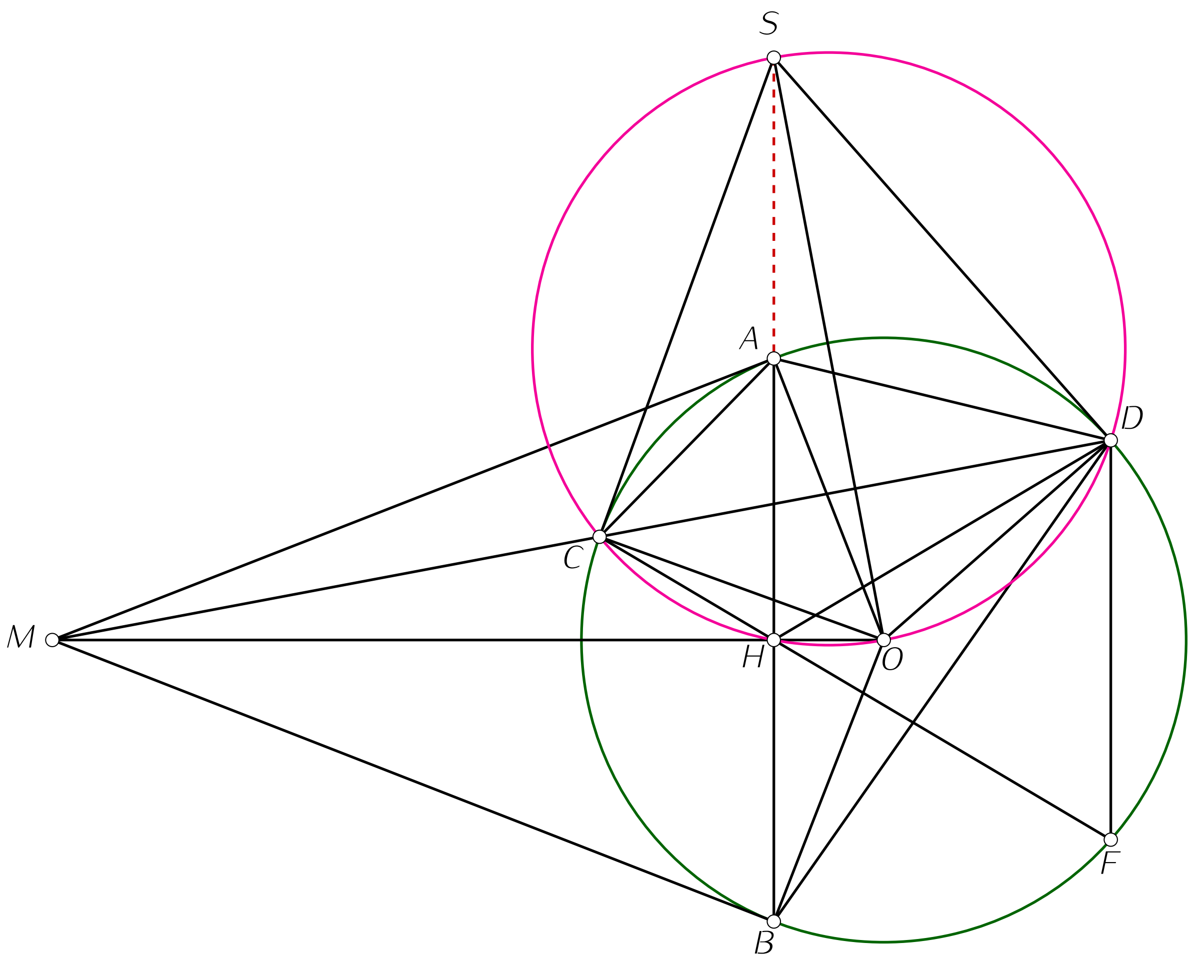
Chú ý rằng tứ giác $CMFO$ và $ACMD$ nội tiếp $\to \angle DFO = \angle DCM = \angle DAM$.

Từ đó, ta có $\triangle DAF \backsim \triangle NDA\ (g.g) \to AF \cdot DN = AD^2 = 2R^2$.

Lại có $S_{ANFD} = \dfrac{1}{2} \cdot AF \cdot DN = R^2$ không đổi,

mà $S_{AMD} = S_{MNF} + S_{ANFD}$ nên S_{MNF} lớn nhất khi và chỉ khi S_{AMD} lớn nhất.
Tới đây, ta thấy AD không đổi nên S_{AMD} lớn nhất khi và chỉ khi M là điểm nằm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$. □

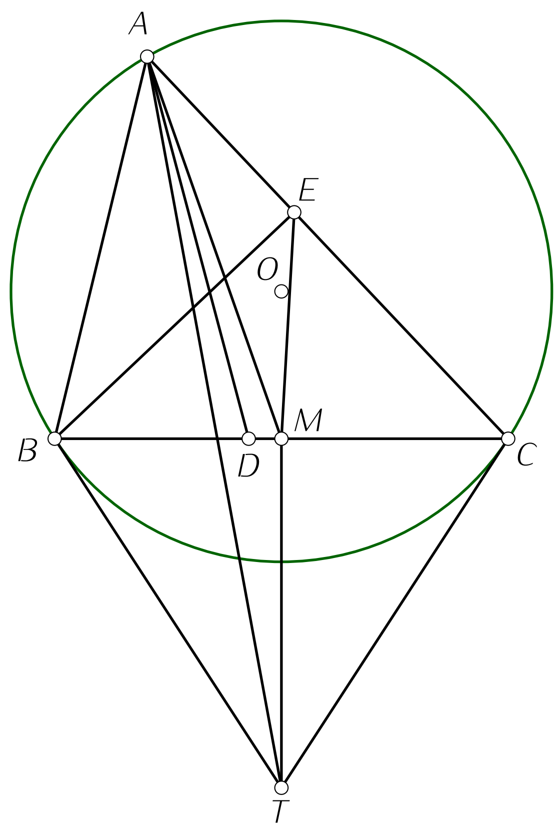
Bài toán 3.
Từ điểm M nằm ngoài (O) dựng các tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là các tiếp điểm) và dựng cát tuyến MCD sao cho tia MD nằm giữa hai tia MA và MO. AB cắt MO tại H. Gọi F là giao điểm thứ hai của CH và (O).
a. Chứng minh rằng $DF \parallel AB$.
b. Chứng minh rằng $\angle ADM = \angle HDB$.
c. Chứng minh tiếp tuyến tại C và D cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng AB.



Chứng minh.
a. Ta có $MH \cdot MO = MA^2 = MC \cdot MD \rightarrow$ tứ giác $CHOD$ nội tiếp.
Suy ra $\angle MHC = \angle CDO = \angle OCD = \angle OHD \rightarrow \angle CHA = \angle DHA$.
Do đó HA là phân giác của $\angle CHD$.
Ta có $\angle DFC = \dfrac{\angle DOC}{2} = \dfrac{\angle DHC}{2} = \angle CHA = \angle BHF$,
mà hai góc này ở vị trí so le trong $\rightarrow DF \parallel AB$.
b. Từ câu **a**, ta suy ra $\angle AHD = \angle DFC \rightarrow \angle BHD = \angle CAD$, kết hợp với $\angle HBD = \angle ACD$.
Suy ra $\triangle DAC \backsim \triangle DHB$ $(g.g) \rightarrow \angle ADM = \angle HDB$.
c. Gọi S là giao điểm của tiếp tuyến tại C và D của (O).
Khi đó tứ giác $SCOD$ nội tiếp, mà tứ giác $CHOD$ nội tiếp nên 5 điểm S, C, H, O, D

nội tiếp đường tròn đường kính SO.
Từ đó ta suy ra được $\angle OHS = 90^\circ = \angle OHA \to S, A, H$ thẳng hàng.
Do đó ta có điều phải chứng minh. □

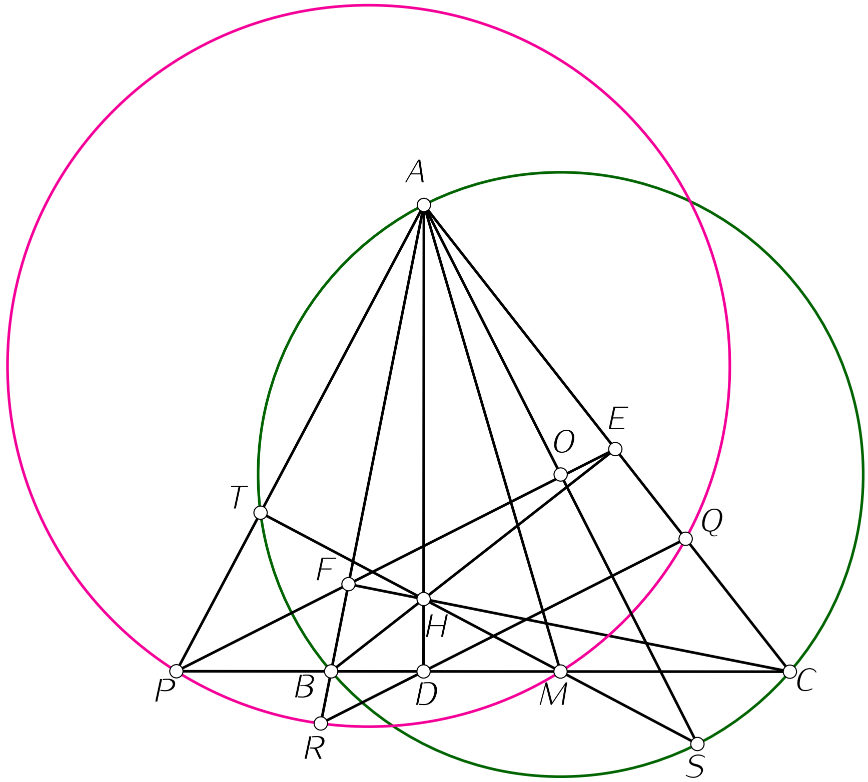
Nhận xét 0.1. *Câu **b** của bài toán, cho ta một tính chất của đường đối trung. Đây là một tính chất hay để giải quyết được nhiều bài toán hay và khó. Tính chất và cách chứng minh được phát biểu như sau.*
"Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O). Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại T. Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó, AT đối xứng với AM qua phân giác của $\angle BAC$ (AT được gọi là đường đối trung của $\triangle ABC$.)"



Chứng minh.
Kẻ phân giác AD ($D \in BC$). Ta sẽ đi chứng minh $\angle BAT = \angle MAC$.
Thật vậy, kẻ $BE \perp AC$. Khi đó $\triangle BMT \backsim \triangle AEB$ $(g.g) \to \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{TB}{BM} = \dfrac{TB}{ME}$.
Lại có $\angle ABT = \angle ABC + \angle TBC = \angle ABC + \angle BAC = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \angle MEC = \angle AEM$.
Do đó $\triangle ABT \backsim \triangle AEM$ $(g.g)$.
Tới đây, dễ dàng ta đưa tới điều phải chứng minh. □

Bài toán 4.
Cho đường tròn (O) và dây BC cố định. Điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm P. Qua D kẻ đường thẳng song song với EF cắt AB tại R, cắt AC tại Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp $\triangle PQR$ luôn đi qua một điểm cố định khi A di động trên cung lớn BC.

HSG 9 Hải Phòng 2023 - 2024



Chứng minh.
Gọi M là trung điểm của $BC \to M$ cố định.
Kẻ đường kính AS của (O). Gọi T là giao điểm thứ hai của AP với (O).
Khi đó, tứ giác $BHCS$ là hình bình hành $\to H, M, S$ thẳng hàng.
Ta có tứ giác $ATBC$ và $EFBC$ nội tiếp nên $PT \cdot PA = PB \cdot PC = PF \cdot PE$,
dẫn đến tứ giác $ATFE$ nội tiếp, kết hợp với tứ giác $AFHE$ nội tiếp.
Suy ra 5 điểm A, T, F, H, E cùng thuộc một đường tròn.
Do đó $\angle ATH = 90^\circ$, mà $\angle ATS = 90^\circ$ nên $T \in HS$.
Dẫn đến 4 điểm T, H, M, S thẳng hàng.
Xét $\triangle AMP$ có $AD \perp MP$, $MT \perp AP \to H$ là trực tâm của $\triangle AMP$
Suy ra $DP \cdot DM = DH \cdot DA$.
Lại có H là trực tâm của $\triangle ABC \to DB \cdot DC = DH \cdot DA = DP \cdot DM$.
Áp dụng định lý Thalès cho $QR \parallel PE$, ta có

$$\frac{DQ}{PE} = \frac{DC}{PC}, \tag{1}$$

$$\frac{DR}{PF} = \frac{DB}{PB}. \tag{2}$$

Nhân theo vế (1) và (2), kết hợp với tứ giác $BFEC$ nội tiếp, ta suy ra

$$\frac{DQ \cdot DR}{PE \cdot PF} = \frac{DC \cdot DB}{PC \cdot PB} \to DQ \cdot DR = DC \cdot DB.$$

Do đó $DQ \cdot DR = DP \cdot DM \to$ tứ giác $PRMQ$ nội tiếp.
Tới đây, ta suy ra được đường tròn ngoại tiếp $\triangle PQR$ luôn đi qua điểm M là trung điểm của BC cố định khi A di động trên cung lớn BC. □

Nhận xét 0.2. *Bài toán trên đưa ta đến một tính chất quen thuộc là S, M, H, T thẳng hàng.*

Bài toán 5.

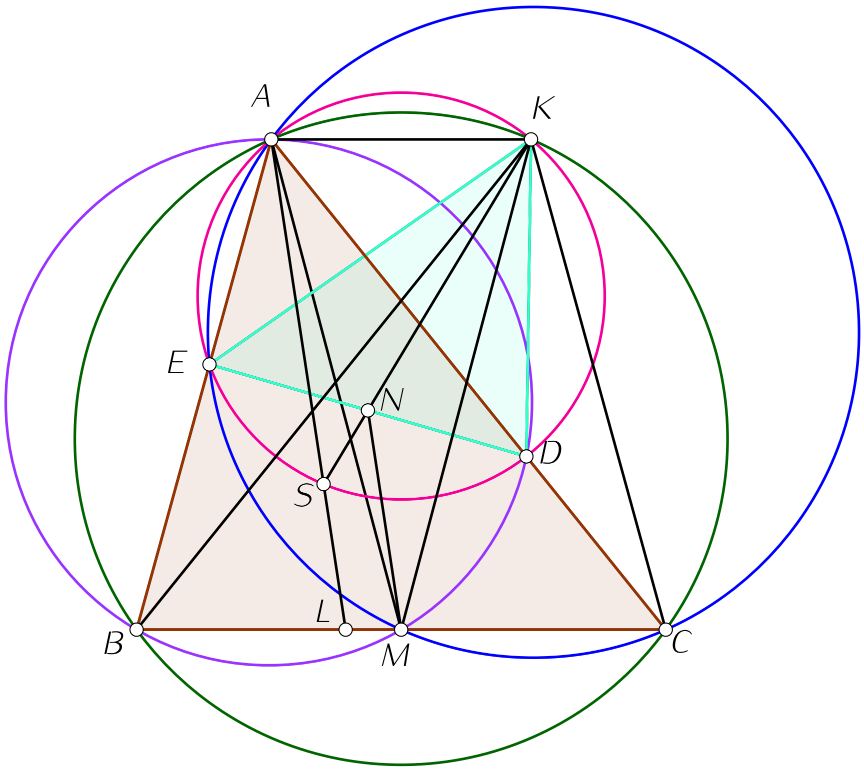
Cho tam giác ABC nhọn, không cân thỏa mãn $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của BC. Đường tròn c_1 ngoại tiếp $\triangle ABM$ cắt cạnh AC tại D. Đường tròn c_2 ngoại tiếp $\triangle ACM$ cắt cạnh AB tại E. Đường tròn c_3 ngoại tiếp $\triangle ADE$ cắt lại (O) tại K.

a. Chứng minh rằng $BE \cdot BA = CD \cdot CA$.

b. Chứng minh rằng $\triangle KDE \backsim \triangle ABC$.

c. Lấy điểm $L \in BC$ sao cho $\angle BAM = \angle CAL$. Gọi N là trung điểm của DE. Chứng minh rằng $MN \parallel AL$.

Thi thử chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa



Chứng minh.

a. Ta có tứ giác $AEMC$, $ADMB$ nội tiếp và M là trung điểm của BC nên

$$BE \cdot BA = BM \cdot BC = CM \cdot BC = CD \cdot CA.$$

b. Dễ thấy $AK \parallel BC \to \angle KED = \angle KAD = \angle KBC = \angle ACB$,
kết hợp với $\angle DKE = \angle BAC \to \triangle KDE \backsim \triangle ABC$ $(g.g)$

c. KN cắt lại (c_3) tại S. Khi đó, dễ thấy A, S, L thẳng hàng.
Chú ý rằng tứ giác $AKCB$ là hình thang cân $\to \triangle ABC = \triangle KCB$.
Từ câu **b**, ta có KN và AM là hai trung tuyến tương ứng nên

$$\frac{KN}{KD} = \frac{AM}{AB} = \frac{KM}{KC},$$

kết hợp với $\angle NKD = \angle MAB = \angle MKC \to \triangle KNM \backsim \triangle KDC$ $(c.g.c)$
Từ đó ta suy ra được

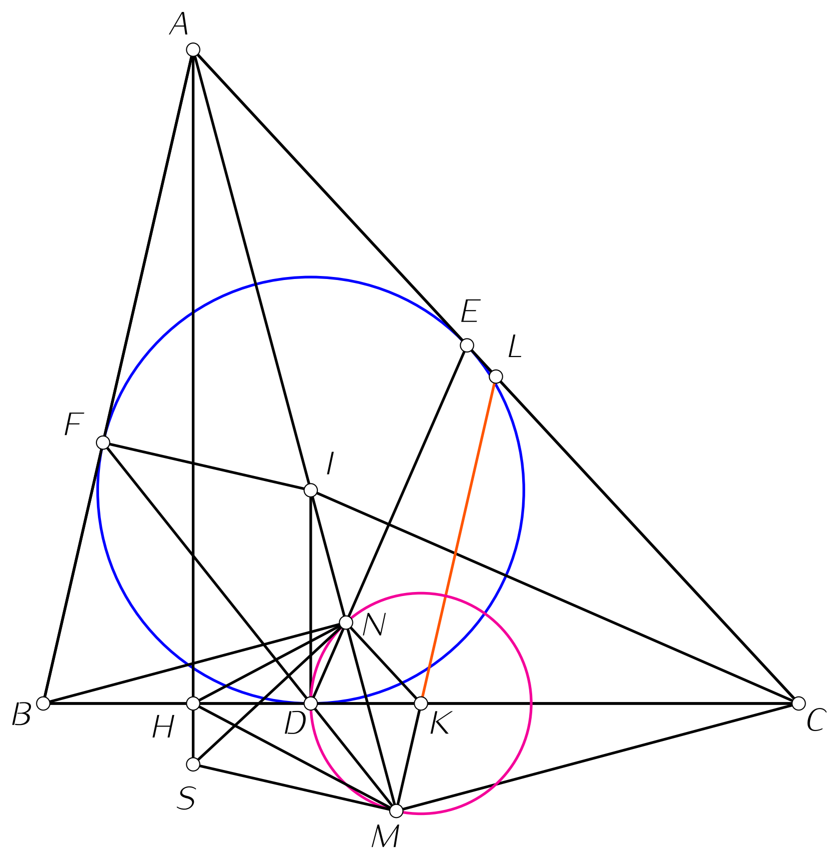
$$\angle KNM = \angle KDC = \angle KEB \to \angle SNM = \angle AEK = \angle ASN,$$

mà 2 góc này so le trong $\to MN \parallel AL$. □

Nhận xét 0.3. *Nếu gọi giao điểm 2 tiếp tuyến tại B và C của (O) là R, khi đó ta sẽ có 4 điểm A, S, L, R thẳng hàng. Cách chứng minh sẽ dựa vào bổ đề đường đối trung tác giả đã nêu ở phần* **Nhận xét** 0.1.

Bài toán 6.

Cho tam giác ABC nhọn thỏa mãn $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi M và N lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với DF và AI với DE.
a. Chứng minh rằng $CM \perp AI$.
b. Gọi K là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\triangle KMN$ cân.
c. Tiếp tuyến tại M và N của $(K; KM)$ cắt nhau tại S. Chứng minh rằng $AS \parallel ID$.



Chứng minh.
a. Ta có

$$\angle IMD = \angle BFD - \angle BAI = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} - \frac{\angle BAC}{2} = \frac{\angle ACB}{2} = \angle ICD.$$

Suy ra tứ giác $IDMC$ nội tiếp $\rightarrow \angle CMA = \angle IDC = 90^\circ$.
Do đó $CM \perp AI$.
b. Gọi L là trung điểm của AC.
Khi đó KL là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên

$$KL \parallel AB \tag{3}$$

Lại có $\triangle ACM$ vuông tại M, trung tuyến ML nên $\angle LMA = \angle LAM = \angle BAM$, suy ra

$$ML \parallel AB \tag{4}$$

Từ (3) và (4), ta suy ra M, K, L thẳng hàng.
Ta có $\triangle BFD$ cân tại B và $MK \parallel BF$ nên

$$\angle KMD = \angle BFD = \angle BDF = \angle KDM,$$

Suy ra $\triangle KDM$ cân tại $K \rightarrow KM = KD$.
Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có $\triangle KND$ cân tại $K \rightarrow KN = KD$,
do đó $KM = KN \rightarrow \triangle KMN$ cân tại K.
c. Hạ đường cao AH của $\triangle ABC$.
Chứng minh tương tự câu **a**, ta suy ra $BN \perp AM \rightarrow$ tứ giác $ANHB$ nội tiếp.
Suy ra $\angle NHK = \angle BAM = \dfrac{\angle BAC}{2}$.
Lại có tứ giác $\angle AHMC$ nội tiếp nên $\angle MHC = \angle MAC = \dfrac{\angle BAC}{2}$.
Do đó ta có

$$\angle MHN = \angle MHK + \angle NHK = \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle BAC}{2} = \angle BAC. \tag{5}$$

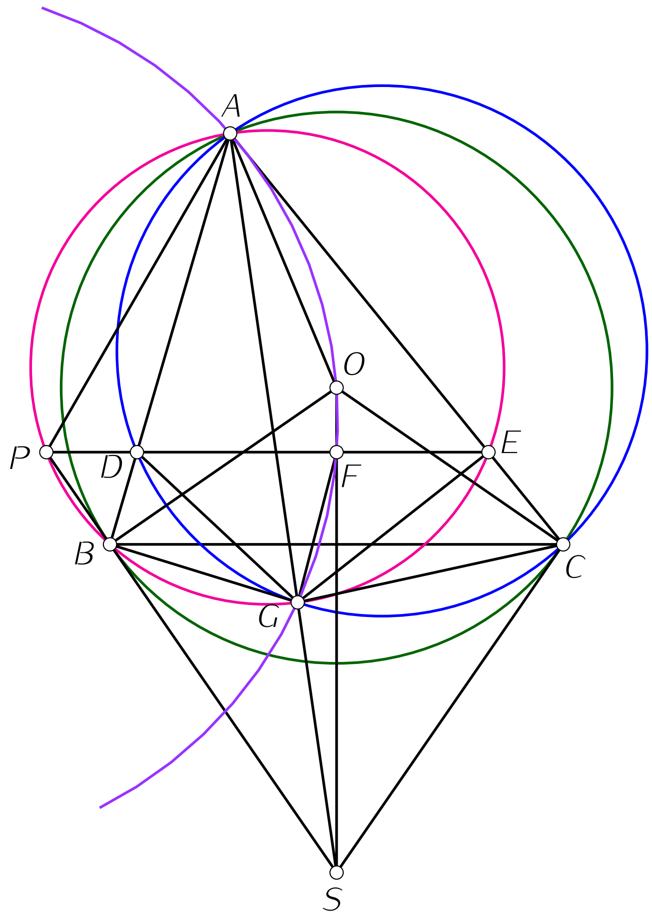
Lại có

$$\angle NKC = 2\angle KNM = 2\angle MAC = \angle BAC \tag{6}$$

Từ (5) và (6), ta suy ra được tứ giác $HNKM$ nội tiếp.
Lại có tứ giác $SNKM$ nội tiếp.
Nên 5 điểm S, H, N, K, M cùng thuộc một đường tròn đường kính $SK \rightarrow HS \perp BC$.
Dẫn đến 3 điểm A, S, H thẳng hàng. Nên $AS \perp BC \rightarrow AS \parallel ID$. □

Bài toán 7.

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O). Lấy $D \in AB, E \in AC$ sao cho $DE \parallel BC$. Kẻ $OF \perp DE$ tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD tại G. Chứng minh rằng A, F, O, G đồng viên.



CHỨNG MINH.
Trước hết, ta sẽ đi chứng minh 2 bổ đề sau: *"Cho $\triangle ABC$. Gọi T là điểm thuộc cạnh BC.*

i. *AT là đường đối trung của $\triangle ABC$ khi và chỉ khi $\dfrac{TB}{TC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.*

ii. *Giả sử AT là đường đối trung của $\triangle ABC$. $X \in AT$ khi và chỉ khi $\dfrac{d_{(X\perp AB)}}{d_{(X\perp AC)}} = \dfrac{AB}{AC}$."*

(cách chứng minh sẽ được trình bày ở phần **Nhận xét** 0.4).

Quay lại bài toán.
Chú ý rằng $\triangle BDG \backsim \triangle ECG$, $DE \parallel BC$ và bổ đề ***ii.***, ta có

$$\frac{d_{(G\perp AB)}}{d_{(G\perp AC)}} = \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC},$$

do đó G thuộc đường đối trung của $\triangle ABC$.
Tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại $S \to A, G, S$ thẳng hàng.
Gọi P là giao điểm của SB và ED.
Khi đó, ta có $\angle BPE = \angle SBC = \angle BAE \to P$ thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABE$.
Tuy nhiên, do $OB \perp SP$ và $OF \perp PE$ nên tứ giác $OFBP$ nội tiếp,
kết hợp với tứ giác $APBG$ nội tiếp, ta suy ra

$$SF \cdot SO = SB \cdot SP = SG \cdot SA.$$

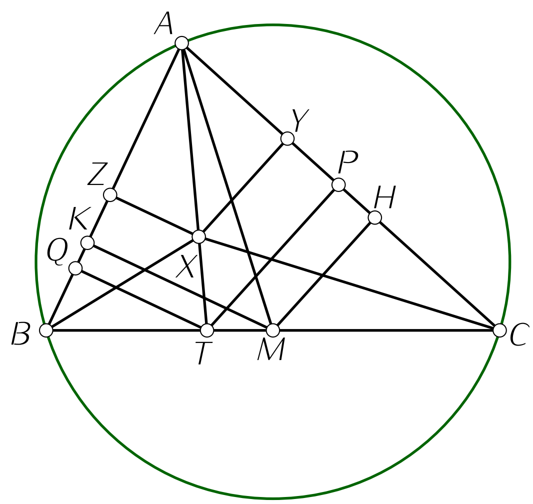
Từ đó, ta suy ra 4 điểm A, F, O, G đồng viên. □

Nhận xét 0.4. *Tiếp tục với tính chất về đường đối trung mà tác giả đã nêu ở* **Nhận xét** *0.1, bổ đề*

của bài toán trên cho ta thêm 2 tính chất nữa của đường đối trung. Sau đây sẽ là cách chứng minh của bổ đề.
"Cho $\triangle ABC$. Gọi T là điểm thuộc cạnh BC.

i. *AT là đường đối trung của $\triangle ABC$ khi và chỉ khi $\dfrac{TB}{TC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.*

ii. *Giả sử AT là đường đối trung của $\triangle ABC$. $X \in AT$ khi và chỉ khi $\dfrac{d_{(X\perp AB)}}{d_{(X\perp AC)}} = \dfrac{AB}{AC}$."*



Chứng minh.
i. Điều kiện cần. Gọi M là trung điểm của BC. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với AC, AB cắt AC, AB lần lượt tại H và K.
Ta ký hiệu $\angle BAT = \angle CAM = \alpha$; $\angle TAM = \beta$.
Ta có

$$\frac{TB}{CM} = \frac{S_{ABT}}{S_{CAM}} = \frac{AB \cdot AT}{AC \cdot AM}, \tag{7}$$

$$\frac{BM}{TC} = \frac{S_{ABM}}{S_{CAT}} = \frac{AB \cdot AM}{AC \cdot AT}. \tag{8}$$

Nhân dọc theo vế (7) và (8), ta suy ra được

$$\frac{TB}{TC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Điều kiện đủ. Kẻ đường đối trung AT' của $\triangle ABC \to \dfrac{T'B}{T'C} = \dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{TB}{TC} \to T \equiv T'$.
ii. Điều kiện cần. Gọi Y, Z lần lượt là hình chiếu của X lên AC và AB.
Theo bổ đề ***i.***, ta suy ra

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{TB}{TC} = \frac{S_{ABX}}{S_{ACX}} = \frac{XZ \cdot AB}{XY \cdot AC},$$

hay là

$$\frac{AB}{AC} = \frac{XZ}{XY}.$$

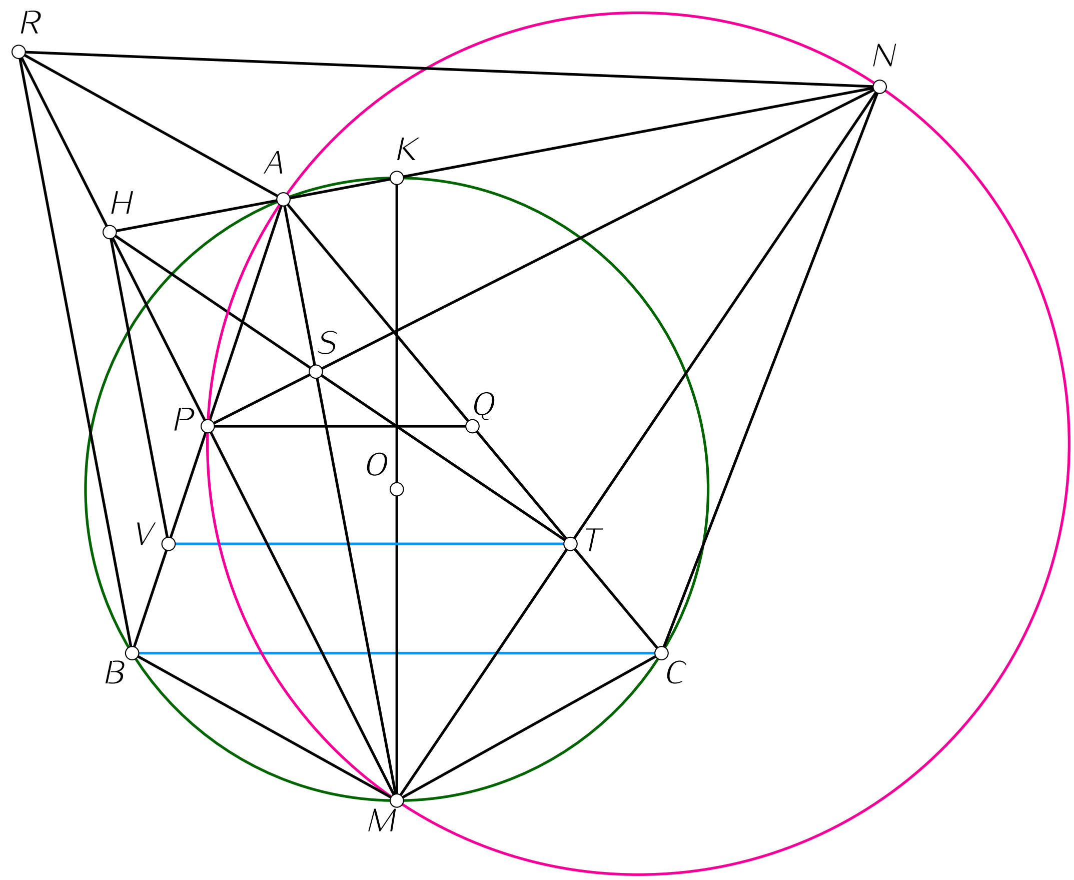
Điều kiện đủ. AX cắt BC tại T'.
Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của T' lên AC và AB.
Áp dụng định lý Thalès cho $XZ \parallel T'Q$ và $XY \parallel T'P$, ta có

$$\frac{T'Q}{T'P} = \frac{XZ}{XY} = \frac{AB}{AC}.$$

Lại có
$$\frac{T'B}{T'C} = \frac{S_{ABT'}}{S_{ACT'}} = \frac{AB \cdot T'Q}{AC \cdot T'P} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{TB}{TC}.$$
Suy ra $T \equiv T'$. Hoàn tất chứng minh. □

Bài toán 8.

Cho tam giác ABC nội tiếp (O). M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Vẽ đường kính MK. Đường thẳng qua AK cắt trung trực AC tại N. MN cắt AC tại T. Qua T kẻ đường thẳng vuông góc với MN cắt AN tại H. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HN cắt AB tại V. Chứng minh rằng $VT \parallel BC$.



CHỨNG MINH.
Gọi P là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMN$ và AB.
Lấy R đối xứng với M qua P.
Do tứ giác $APMN$ nội tiếp nên $\angle MPN = \angle MAN = 90°$.
Dẫn đến NP là đường trung trực của MR.
Từ đó dễ dàng suy ra được $\triangle NAR = \triangle NCM$ $(c.g.c) \rightarrow AY = CM = BM$.
Lại có
$$\angle RAP = 360° - \angle RAN - \angle PAM - \angle MAN = 270° - \frac{\angle BAC}{2} - \angle MCN,$$
$$= 180° - \angle BAC - \angle BCA + \frac{\angle BAC}{2} = \angle ABC + \frac{\angle BAC}{2} = \angle XBM,$$
mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AY \parallel BM$.
Dẫn đến tứ giác $ARBM$ là hình bình hành.
Suy ra P là trung điểm của AB.

Gọi Q là trung điểm của AC. S là giao điểm của AM và HT.
Nhận thấy rằng S là trực tâm của $\triangle HMN \to P, S, N$ thẳng hàng.
Ta có

$$\triangle APM \backsim \triangle AST \to AP \cdot AT = AM \cdot AS, \tag{9}$$

$$\triangle AHS \backsim \triangle AMN \to AM \cdot AS = AN \cdot AH, \tag{10}$$

$$\triangle AHV \backsim \triangle AQN \to AN \cdot AH = AQ \cdot AV. \tag{11}$$

Từ (9),(10),(11), ta suy ra

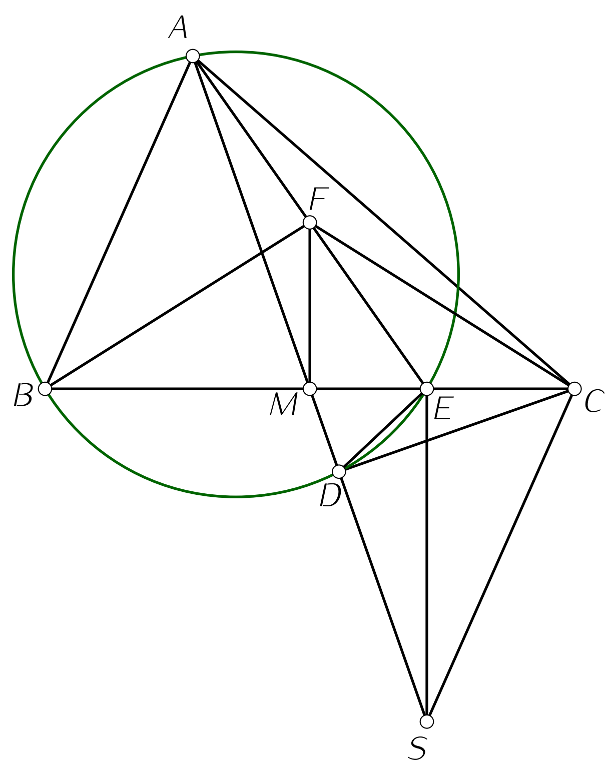
$$AP \cdot AT = AQ \cdot AV \to \frac{AV}{AT} = \frac{AP}{AQ} = \frac{AB}{AC},$$

theo định lý Thalès đảo, ta thu được điều phải chứng minh. □

Bài toán 9.

Cho $\triangle ABC$ nhọn. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy D là hình chiếu của C lên AM. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$ cắt lại cạnh BC tại E. Lấy $F \in AE$ sao cho $FB = FC$. Chứng minh rằng F là trung điểm của AE.

Hong Kong TST 2024



Chứng minh.
Lấy S là điểm đối xứng với A qua M.
Khi đó tứ giác $ABSC$ là hình bình hành. Suy ra

$$\angle MSC = \angle DAB = \angle MED,$$

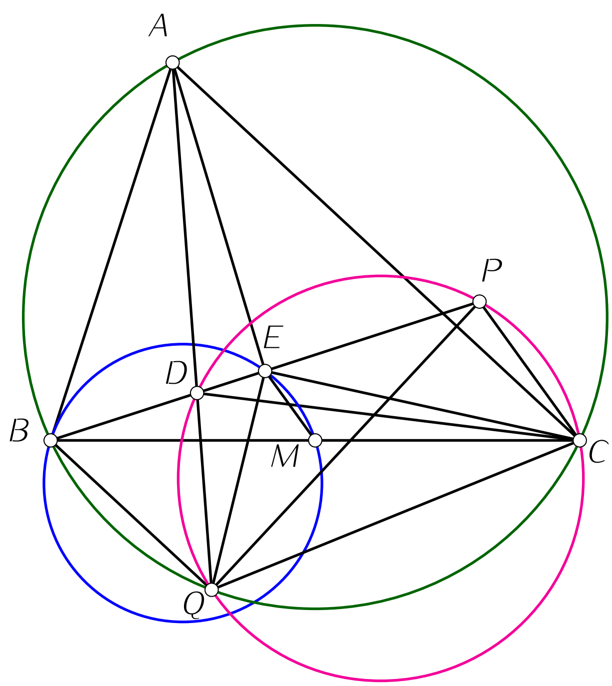
dẫn đến tứ giác $DECS$ nội tiếp nên $\angle SEC = \angle SDC = 90^\circ \to SE \perp BC$.
Lại có $FB = FC$ và $MB = MC$ nên $FM \perp BC$.
Từ đó, ta suy ra ngay được $FM \parallel SE$,

kết hợp với M là trung điểm của AS, dẫn đến F là trung điểm của AE. □

Bài toán 10.

Cho tam giác ABC, điểm D thuộc miền trong của $\triangle ABC$ thỏa mãn $\angle DAC = \angle ACB$ và $\angle BDC = 90^\circ + \angle BAC$. Lấy điểm E thuộc tia BD sao cho $AE = EC$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BEM$.

USAMO 2024



Chứng minh.
Kéo dài AD cắt lại đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại Q.
Gọi P là điểm đối xứng của B qua E.
Ta có

$$\angle AQC = \angle ACB + \angle QCB = \angle DAC + \angle QAB = \angle BAC,$$

suy ra tứ giác $BACQ$ là hình thang cân.
Do $EA = EC$ nên E thuộc đường trung trực của AC $\rightarrow$ E cũng thuộc đường trung trực của $BQ \rightarrow EQ = EB = EP \rightarrow \triangle BQP$ vuông tại Q.
Nên $QP \perp BQ \rightarrow QP \perp AC$.
Khi đó, ta có

$$\angle PQC = 90^\circ - \angle ACQ = 90^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle BDC = \angle CDP.$$

Suy ra tứ giác $PDQC$ nội tiếp.
Chú ý rằng EM là đường trung bình của $\triangle BPC \rightarrow EM \parallel PC$.
Khi đó, ta có

$$\angle BEM = \angle DPC = 180^\circ - \angle DQC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle EBM - \angle ABE,$$

$$\angle ABE = 180^\circ - \angle EBM - \angle BEM = \angle EMB.$$

Tới đây, ta suy ra ngay rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BEM$. □

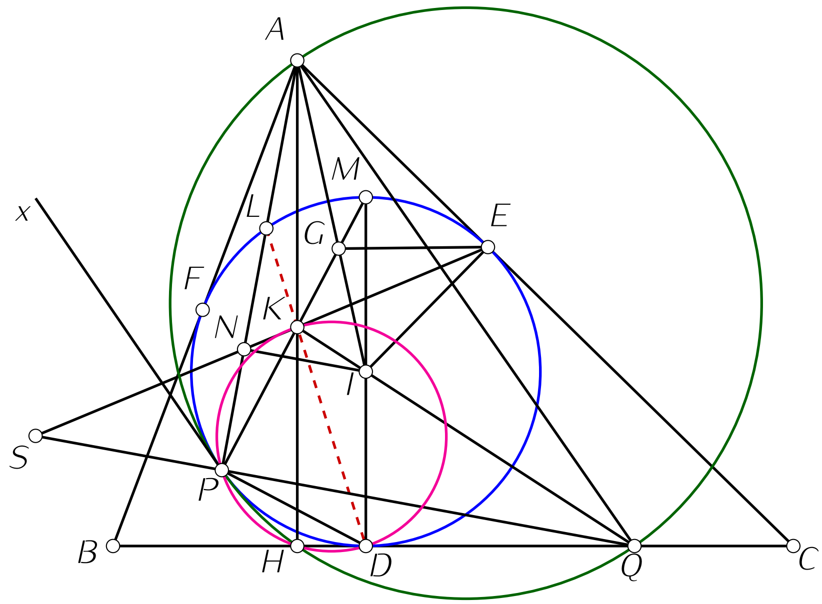
Bài toán 11.

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có đường tròn (I) nội tiếp, tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Kẻ AH vuông góc với BC tại H. Kẻ đường kính DM của (I). Tia phân giác của $\angle AEI$ cắt AI tại G. MG cắt AH tại K.

a. Chứng minh $AK = AE$.

b. Gọi MK cắt lại (I) tại P, AP cắt lại (I) tại L. Chứng minh rằng D, K, L thẳng hàng.

c. KI cắt BC tại Q. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AQ tiếp xúc với (I).



Chứng minh.

a. Áp dụng định lý Thalès cho $AK \parallel IM$ và áp dụng tính chất đường phân giác cho phân giác EG của $\triangle AEI$, ta có

$$\frac{AK}{IM} = \frac{AG}{IG} = \frac{AE}{IE},$$

với chú ý rằng $IM = IE$, ta suy ra ngay $AK = AE$.

b. Ta có $AL \cdot AP = AE^2 = AK^2$, kết hợp với $\angle KAP$ chung, suy ra $\triangle AKL \backsim \triangle APK$.

Do đó $\angle AKL = \angle LPM = \angle LDM$,

mà $AK \parallel DM$ nên ta có D, K, L thẳng hàng.

c. Gọi N là trung điểm của LP. $\rightarrow IN \perp LP$.

Qua P vẽ đường thẳng vuông góc với LP. Khi đó $SP \parallel NI$.

Lại có $\triangle KLP \backsim \triangle KMD$ $(g.g)$ có KN và KI là 2 trung tuyến tương ứng nên

$$\angle SNP = \angle LNK = \angle MIK = \angle QID,$$

kết hợp với $\angle SPN = \angle QDI = 90^\circ$, ta có $\triangle SPN \backsim \triangle QDI$ $(g.g)$.

Do đó

$$\frac{SN}{QI} = \frac{NP}{ID} = \frac{LP}{MD} = \frac{KN}{KI},$$

nên theo định lý Thalès đảo, suy ra $NI \parallel SQ$.

Dẫn đến 3 điểm S, P, Q thẳng hàng.

Kẻ Px là tiếp tuyến tại P của đường tròn đường kính AQ.

Chú ý rằng tứ giác $KPHD$ nội tiếp nên

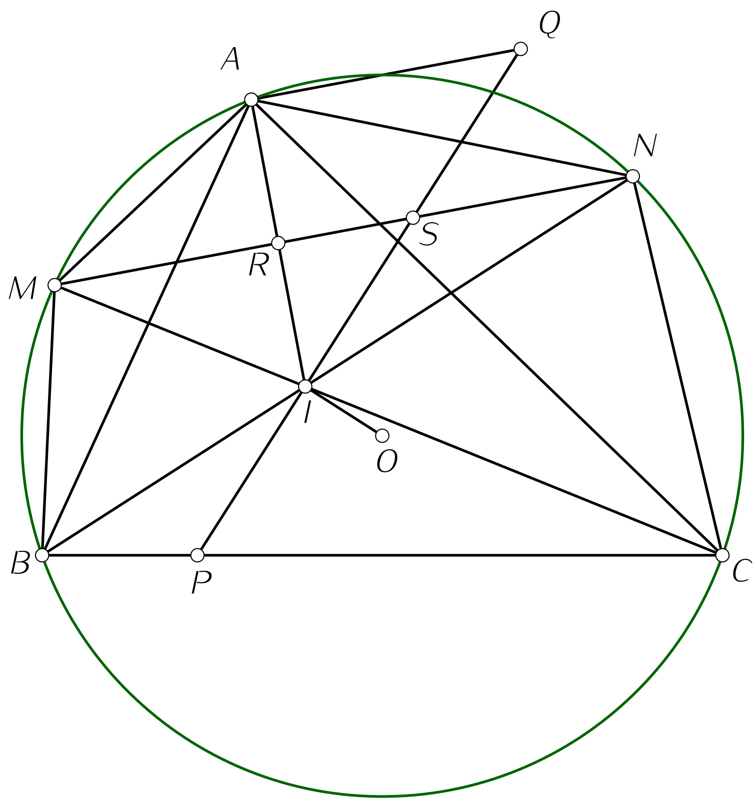
$$\angle LPx = \angle AHP = \angle LDP,$$

suy ra Px là tiếp tuyến của (I).
Tới đây, dễ dàng để suy ra ngay được điều phải chứng minh. □

Bài toán 12.

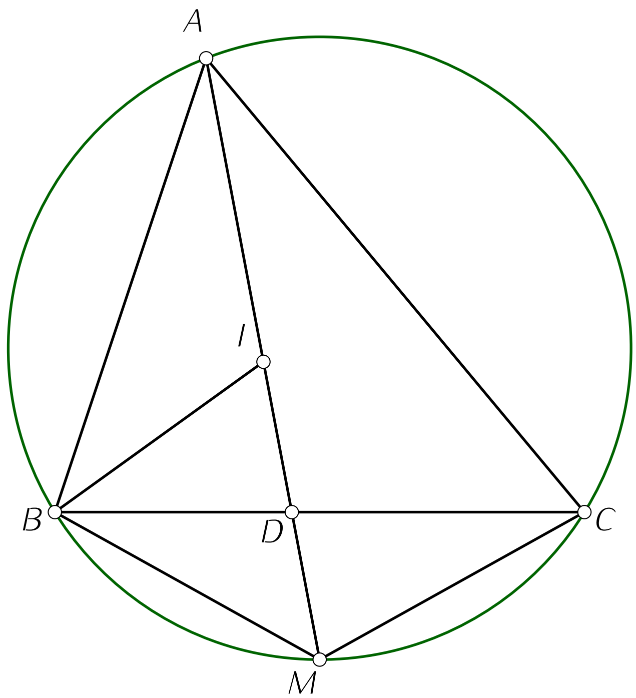
Gọi I và O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle ABC$. Vẽ S_a là phân giác ngoài của $\angle BAC$. Đường thẳng qua I vuông góc với IO, cắt BC và S_a lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng $IP = 2IQ$.

Balkan MO 2021



Chứng minh.
Trong bài toán này, bạn đọc cần biết đến bổ đề bắn và định lý con bướm trong tứ giác nội tiếp. Cách chứng minh sẽ được đề cập tại phần **Nhận xét** 0.5.
Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{AC}$ của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
MN cắt AI và IQ lần lượt tại R và S.
Áp dụng bổ đề bắn, có $NA = NI$ và $MA = MI$, nên MN là đường trung trực của AI.
Do đó R là trung điểm của AI, kết hợp với $RS \parallel AQ$. Suy ra S là trung điểm của IQ.
Dẫn đến $IQ = 2IS$.
Áp dụng định lý con bướm cho tứ giác nội tiếp $BMNC$, có $IP = IS$.
Điều đó chứng tỏ $IQ = 2IP = 2IS$. □

Nhận xét 0.5.
i. *Bổ đề bắn (Shooting lemma)*
"Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M là điểm chính giữa cung BC nhỏ. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. MI cắt BC tại D. Khi đó $MB = MI = MC$ và $MI^2 = MD \cdot MA$."



Chứng minh.
Theo tính chất góc ngoài, ta có

$$\angle MIB = \angle IAB + \angle IBA = \angle MAC + \angle IBD = \angle IBD + \angle CBM = \angle IBM,$$

do đó $MI = MB = MC$.
Ta có $\angle MBD = \angle MAC = \angle MAB$, kết hợp với $\angle BMA$ chung, nên $\triangle MBD \backsim \triangle MAB$ $(g.g)$
Dẫn đến $MD \cdot MA = MB^2 = MI^2$. □

ii. *Định lý con bướm (Butterfly theorem)*
"Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng qua M vuông góc với MO cắt AD và BC lần lượt tại P và Q. Khi đó M là trung điểm của PQ."

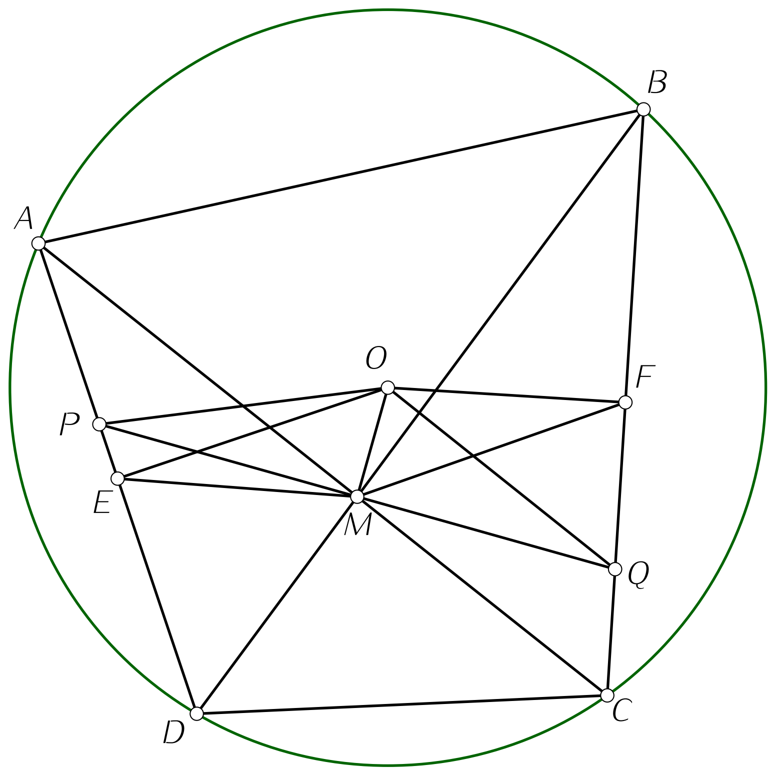
Chứng minh.
Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AD và BC.
Chú ý rằng $\triangle MAD \backsim \triangle MBC$, có ME và MF là 2 trung tuyến tương ứng nên

$$\angle MED = \angle MFC.$$

Lại có tứ giác $MEPO$ và $MQFO$ nội tiếp nên

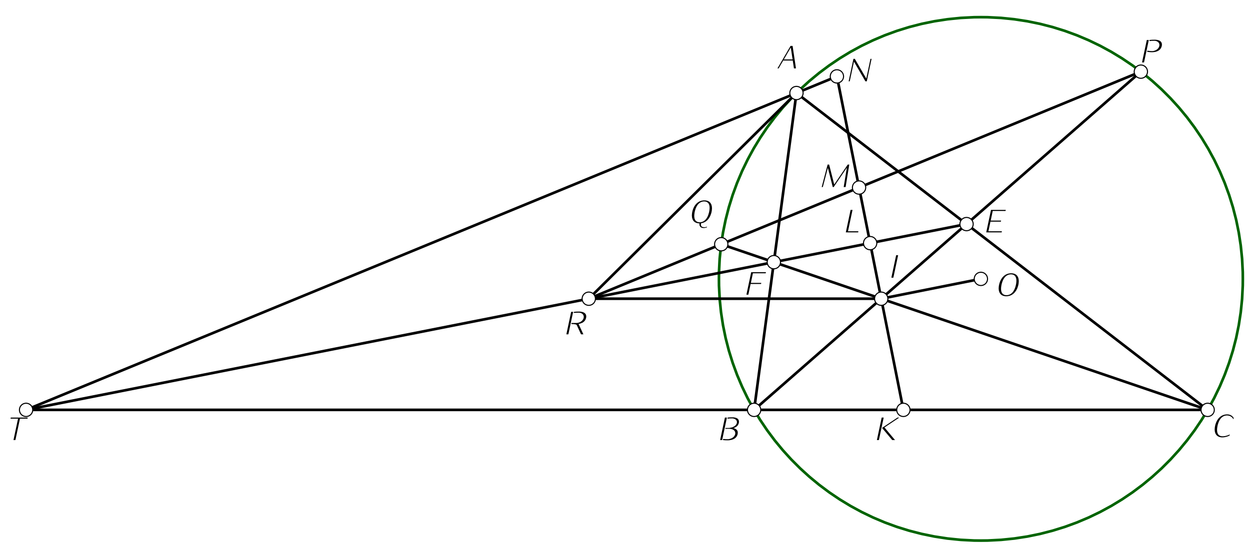
$$\angle OPM = \angle DEM = \angle MFQ = \angle MOQ.$$

Từ đó suy ra $\triangle OPQ$ cân tại O.
Do đó M là trung điểm của PQ.



□

Bài toán 13.
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tâm đường tròn nội tiếp I. Phân giác BE và CF cắt lại (O) tại P, Q.
a. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại A của (O) và EF, PQ đồng quy.
b. Đường thẳng qua I vuông góc với IO cắt BC, EF lần lượt tại K, L. Chứng minh rằng $IK = 2IL$.



Chứng minh.
a. Ta có P là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AC}$.
Nên theo bổ đề bắn, ta có $PI^2 = PA^2 = PE \cdot PB \to \dfrac{PI}{PB} = \dfrac{PE}{PI} = \dfrac{PI - PE}{PB - PI} = \dfrac{IE}{IB}$,
suy ra $\dfrac{EI}{EP} = \dfrac{IB}{IP}$.

Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có $\dfrac{FQ}{FI} = \dfrac{IQ}{IC}$.

Gọi R là giao điểm tiếp tuyến tại A của (O) và PQ thì $\dfrac{RP}{RQ} = \dfrac{AP^2}{AQ^2} = \dfrac{IP^2}{IQ^2} = \dfrac{IC^2}{IB^2}$.

Suy ra

$$\frac{EI}{EP} \cdot \frac{RP}{RQ} \cdot \frac{FQ}{FI} = \frac{IB}{IP} \cdot \frac{IQ}{IC} \cdot \frac{IC^2}{IB^2} = 1.$$

Nên theo định lý Menelaus đảo, ta suy ra ngay được E, F, R thẳng hàng.

b. Kẻ phân giác ngoài AT của $\triangle ABC$ ($T \in BC$).

Áp dụng định lý Menelaus, ta suy ra được E, F, T thẳng hàng.

Goi M và N lần lượt là giao điểm của KI với PQ và AT.

Áp dụng định lý con bướm, ta suy ra $IK = IM$.

Do M nằm trên trung trực của AI nên $MI = MN$.

Áp dụng định lý Thalès cho $RM \parallel NT$ và $RI \parallel TC$, ta có

$$\frac{LM}{LN} = \frac{LR}{LT} = \frac{LI}{LK} = \frac{LM + LI}{LN + LK} = \frac{MI}{NK} = \frac{1}{3},$$

hay là

$$IK = 2IL.$$

Hoàn tất chứng minh. □

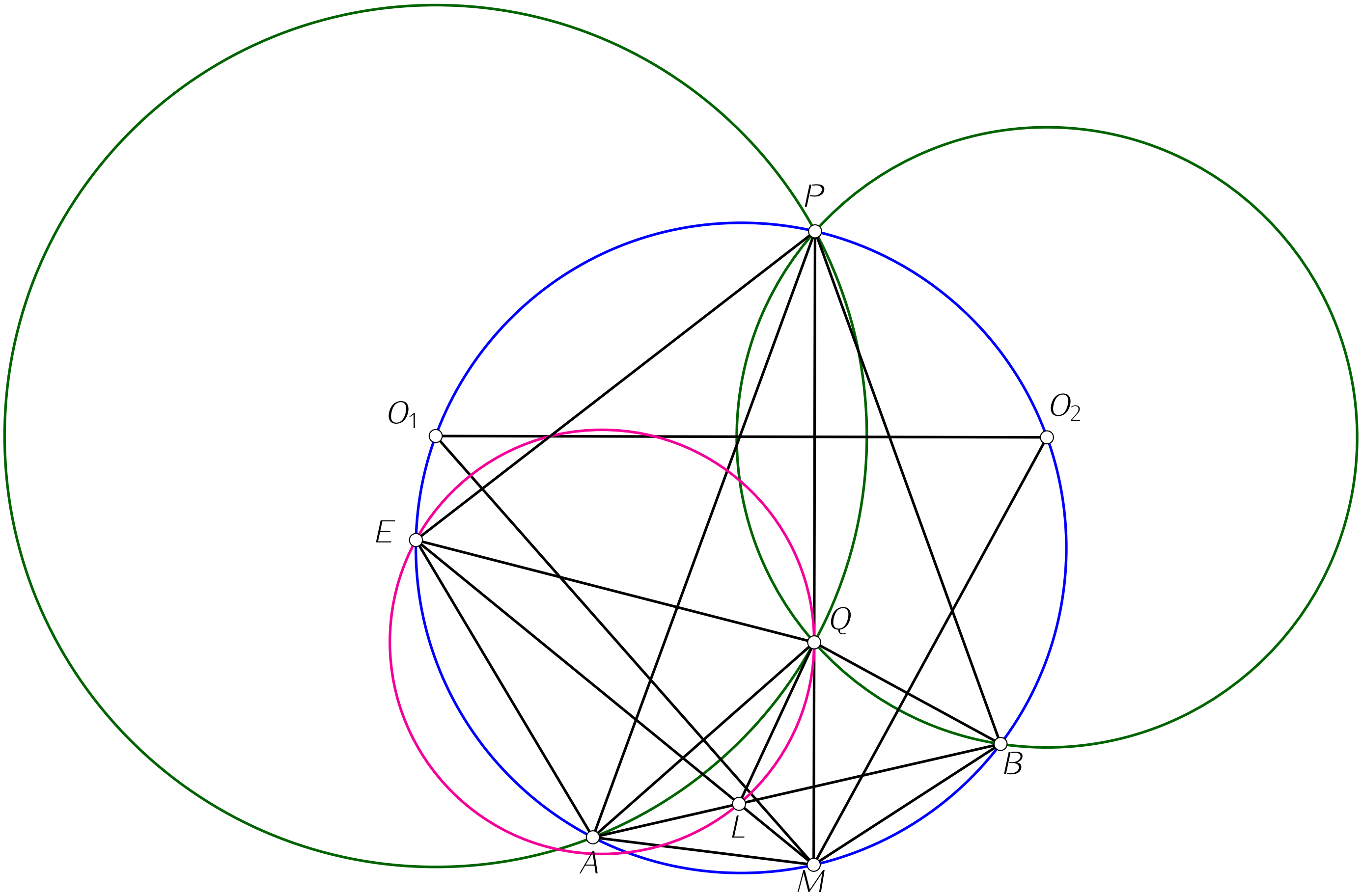
Nhận xét 0.6. *Bạn đọc có thể giải quyết một bài toán đơn giản hơn như sau*

"Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Đường thẳng qua H vuông góc với OH cắt BC, DE lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng $IP = 2IQ$."

Bài toán 14.

Cho hai đường tròn tâm O_1 và O_2 cắt nhau tại 2 điểm P và Q. Gọi ω là đường tròn ngoại tiếp $\triangle PO_1O_2$. Đường tròn ω cắt lại đường tròn tâm O_1 và O_2 lần lượt tại A và B. Điểm Q nằm trong tam giác PAB và PQ cắt ω tại M. Lấy $E \in \omega$ sao cho $PQ = QE$. ME cắt AB tại L. Chứng minh rằng $\angle QLA = \angle MLA$.

AL - KHWARIZMI IJMO 2024



Chứng minh.
Ta có

$$\angle AQP = 180^\circ - \frac{\angle AO_1P}{2} = 90^\circ + \frac{\angle ABP}{2},$$

$$\angle BQP = 180^\circ - \frac{\angle BO_2P}{2} = 90^\circ + \frac{\angle BAP}{2}.$$

Do đó Q là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle PAB$. Theo bổ đề bắn, ta có

$$MQ^2 = ML \cdot ME.$$

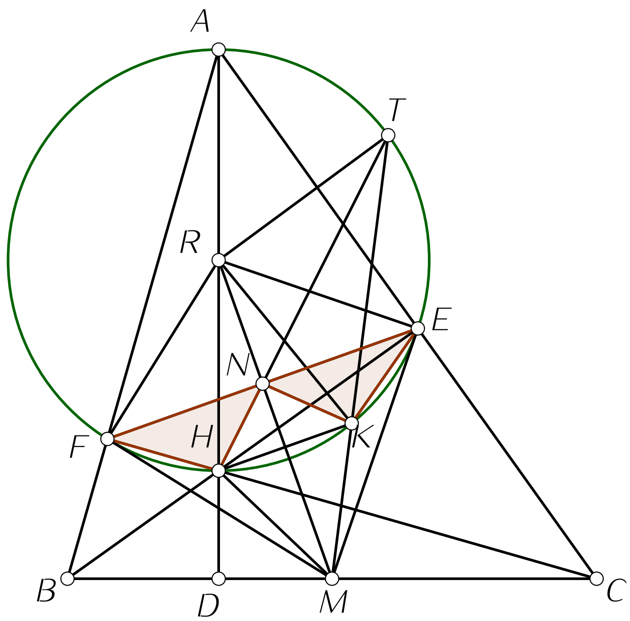
Suy ra MQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle LEQ$.
Do đó

$$\angle MLQ = \angle MQE = 2\angle MPE = 2 \cdot (180^\circ - \angle MAE) = 360^\circ - 2\angle MLA,$$

$$\angle MLA = \angle ALQ.$$

Hoàn tất chứng minh. □

Bài toán 15.
Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, EF. HN cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại T. TM cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại K. Chứng minh rằng $EK = FH$.



CHỨNG MINH.
Gọi R là trung điểm của AH. Khi đó R là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AFHE$.
Ta có

$$\angle MER = \angle REH + \angle HEM = \angle AFE + \angle EBC = \angle ACB + \angle EBC = 90^\circ.$$

Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có $\angle MFR = 90^\circ$.
Suy ra ME và MF là tiếp tuyến của (R) và tứ giác $MERF$ nội tiếp.
Vì tứ giác $RFME$ và $FHET$ nội tiếp nên

$$NH \cdot NT = NF \cdot NE = NR \cdot NM,$$

suy ra tứ giác $RHMT$ nội tiếp nên

$$\angle HRM = \angle HTM. \tag{12}$$

Dễ thấy 3 điểm R, N, M thẳng hàng.
Khi đó, ta có

$$MN \cdot MR = ME^2 = MK \cdot MT,$$

suy ra tứ giác $RNKT$ nội tiếp nên

$$\angle NRK = \angle NTK. \tag{13}$$

Từ (12) và (13), kết hợp với $RH = RK$ và RN chung, ta suy ra $\triangle RNH = \triangle RNK$ $(c.g.c)$.
Dẫn đến $NH = NK$.
Lại có

$$\angle FNH = 90^\circ - \angle HNM = 90^\circ - \angle RNT = 90^\circ - \angle RKT = 90^\circ - \angle RTK = 90^\circ - \angle MNK = \angle KNE,$$

nên $NF = NE$ ta suy ra $\triangle HNF = \triangle KNE$ $(c.g.c)$
Tới đây, ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét 0.7. *Bài toán trên đã nhắc lại cho ta về đường tròn Euler. Bài toán được phát biểu như sau*

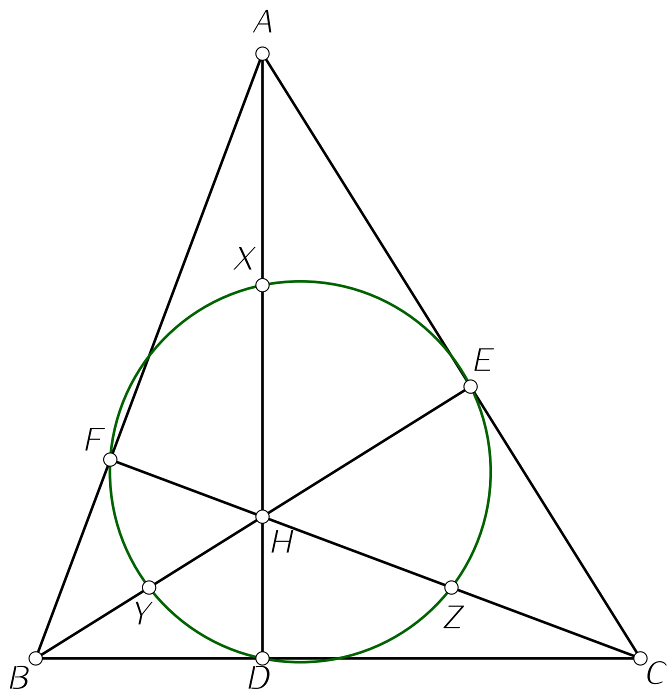
"Cho tam giác ABC với ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của AH, BH, CH. Khi đó 9 điểm D, E, F, M, N, P, X, Y, Z thuộc cùng một đường tròn."

Bài toán 16.

Cho tam giác ABC nhọn với ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cắt lại các cạnh AD, BE, CF lần lượt tại X, Y, Z. Chứng minh rằng

$$\frac{AH}{DX} + \frac{BH}{EY} + \frac{CH}{FZ} \geq 3.$$

Canada MO 2023



Chứng minh.

Ta có

$$\frac{AH}{AD} = \frac{S_{ABH}}{S_{ABD}} = \frac{S_{ACH}}{S_{ACD}} = \frac{S_{ABH} + S_{ACH}}{S_{ABC}}. \tag{14}$$

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có

$$\frac{BH}{BE} = \frac{S_{BCH} + S_{BAH}}{S_{ABC}}, \tag{15}$$

$$\frac{CH}{CF} = \frac{S_{CBH} + S_{CAH}}{S_{ABC}}. \tag{16}$$

Cộng dọc theo vế (14),(15),(16), ta suy ra

$$\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 2.$$

Đặt $\frac{AH}{AD} = a, \frac{BH}{BE} = b, \frac{CH}{CF} = c$. Khi đó

$$a + b + c = 2.$$

Theo đường tròn Euler, tác giả đã nêu ở **Nhận xét 0.7**, suy ra X, Y, Z lần lượt là trung điểm của AH, BH, CH.
Ta có

$$\frac{AH}{DX} = \frac{1}{\frac{AD - AX}{AH}} = \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{2}} = \frac{2a}{2-a} = \frac{2a}{b+c}.$$

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có

$$\frac{BH}{EY} = \frac{2b}{c+a},$$

$$\frac{CH}{FZ} = \frac{2c}{a+b}.$$

Khi đó ta cần chứng minh

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq 3,$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2}.$$

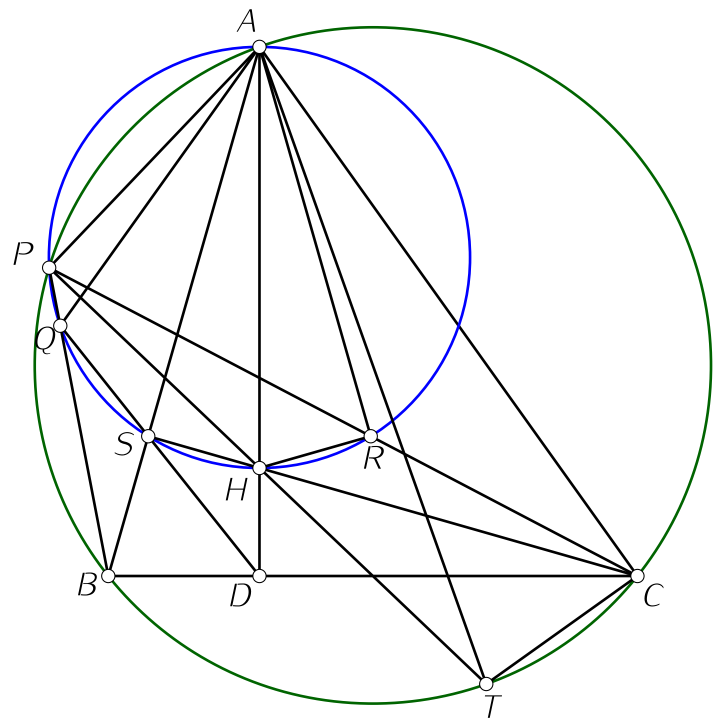
Hoàn tất chứng minh. □

Nhận xét 0.8. *Bài toán trên yêu cầu bạn đọc cần có một chút kiến thức về bất đẳng thức. Bất đẳng thức* $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ *còn có tên là bất đẳng thức Nesbitt.*

Bài toán 17.

Cho tam giác nhọn ABC, có trực tâm H và đường tròn ngoại tiếp k. Đặt ω là đường tròn đường kính AH. P là giao điểm thứ hai của k và ω. BP, CP cắt lại ω lần lượt tại Q và R. Gọi D là hình chiếu của A lên BC. QD cắt lại ω tại S. Chứng minh rằng $HR = HS$.

JBMO Shortlists 2022



CHỨNG MINH.
PH cắt lại k tại T. Theo bài toán quen thuộc ta suy ra ngay AT là đường kính của k.
Ta định nghĩa lại điểm S là giao điểm của AB với ω.
Ta sẽ đi chứng minh $S \in QD$.
Thật vậy, chú ý rằng $\triangle BAD \backsim \triangle TAC$ $(g.g) \rightarrow \angle BAD = \angle TAC \rightarrow \angle BAT = \angle BAD$.
Ta có

$$\angle QAH = \angle QPH = \angle CAD = \angle DSH,$$

kết hợp với tứ giác $AQSH$ nội tiếp, ta suy ra $S \in QD$.
Lại có

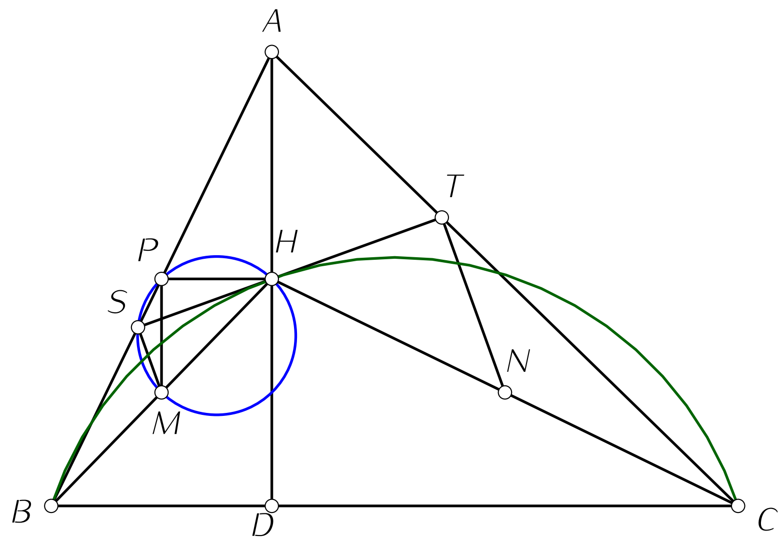
$$\angle RAH = \angle CPT = \angle CAT = \angle SAH.$$

Dẫn đến H là điểm chính giữa $\overset{\frown}{SR}$ của $\omega \rightarrow HS = HR$. Hoàn tất chứng minh. □

Nhận xét 0.9. *Bài toán trên đã sử dụng một bài toán rất đơn giản sau*
"Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Kẻ đường cao AD và đường kính AT. Khi đó, ta có $\angle BAD = \angle TAC$."

Bài toán 18.
Cho tam giác ABC nhọn thỏa mãn $AH = DH$ với H là trực tâm của $\triangle ABC$ và D là hình chiếu của A lên BC. Gọi ℓ là tiếp tuyến tại H của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC. Gọi S và T là giao điểm của ℓ với AB, AC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BH và CH. Chứng minh rằng $SM \parallel TN$.

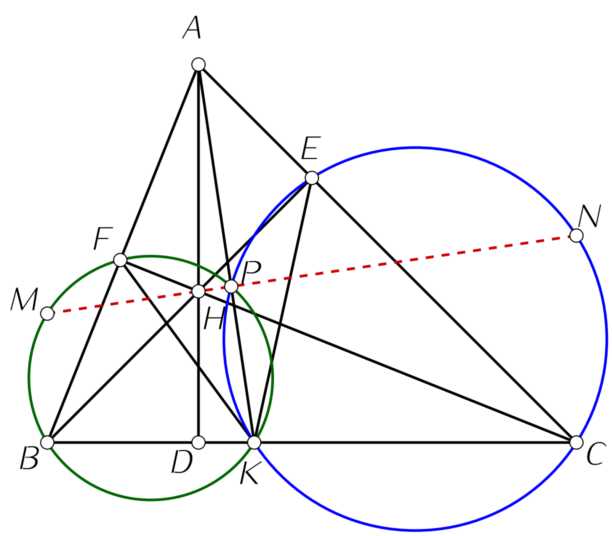
Junior Balkan MO 2022



Chứng minh.
Gọi P là trung điểm của AB. Khi đó PH là đường trung bình của $\triangle ABD \to PH \perp AD$.
Và PM là đường trung bình của $\triangle BHA \to PM \parallel AH$.
Do đó $PM \parallel PH \to \angle MPH = 90^\circ$.
Ta có ST là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BHC$ nên $\angle SHB = \angle HCB = \angle BAH$, kết hợp với $\angle ABH$ chung, ta suy ra $\triangle BSH \backsim \triangle BHA$ $(g.g)$
Do đó $BH^2 = BS \cdot BA = 2 \cdot BS \cdot BP \to BH \cdot BM = BS \cdot BP$.
Dẫn đến tứ giác $HPSM$ nội tiếp.
Nên $\angle MSH = \angle MPH = 90^\circ \to MS \perp ST$.
Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có $TM \perp ST$.
Từ đó, dễ dàng ta có được điều phải chứng minh. □

Bài toán 19.

Cho tam giác ABC nhọn với 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Cho điểm K thuộc cạnh BC $(K \neq B; C)$. Kẻ đường kính KM của đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK, và đường kính KN của đường tròn ngoại tiếp tam giác CKE. Chứng minh rằng 3 điểm M, H, N thẳng hàng.



Chứng minh.
Trước hết, ta sẽ đi chứng minh bổ đề sau
"Cho 3 đường tròn (O); (O_1); (O_2) đôi một cắt nhau sao cho O; O_1; O_2 không thẳng hàng. Gọi A, B

là giao điểm của (O) và (O_1); C, D là giao điểm của (O_1) và (O_2); E, F là giao điểm của (O_2) và (O). Khi đó ta có AB, CD, EF đồng quy."

(cách chứng minh sẽ được đề cập ở phần **Nhận xét** 0.10*)*

Quay lại bài toán.
Gọi P là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BKF$ và đường tròn ngoại tiếp $\triangle CEK$. Khi đó ta có

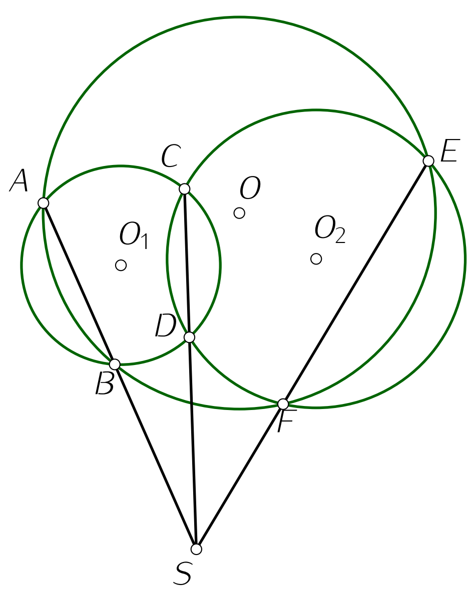
$$\angle KPM + \angle KPN = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

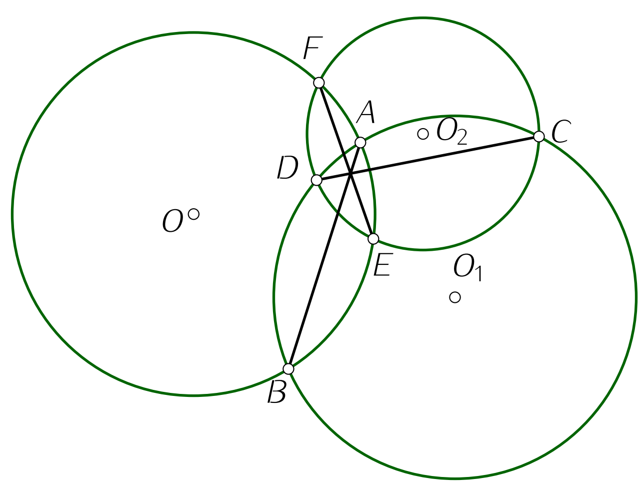
suy ra M, P, N thẳng hàng.
Áp dụng bổ đề cho đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$, đường tròn ngoại tiếp $\triangle BFK$, đường tròn ngoại tiếp $\triangle CEK$ ta suy ra ngay K, P, A thẳng hàng.
Chú ý rằng tứ giác $DHEC$ nội tiếp nên

$$AH \cdot AD = AE \cdot AC = AP \cdot AK,$$

dẫn đến tứ giác $DHPK$ nội tiếp $\rightarrow KP \perp HP$.
Tuy nhiên, không khó để chỉ ra rằng $KP \perp MN$.
Từ đó ta suy ra ngay rằng M, H, N thẳng hàng. □

Nhận xét 0.10. *Bổ đề của bài toán sử dụng còn có tên gọi là trục đẳng phương. Sau đây là cách chứng minh.*
"Cho 3 đường tròn $(O); (O_1); (O_2)$ đôi một cắt nhau sao cho $O; O_1; O_2$ không thẳng hàng. Gọi A, B là giao điểm của (O) và (O_1); C, D là giao điểm của (O_1) và (O_2); E, F là giao điểm của (O_2) và (O). Khi đó ta có AB, CD, EF đồng quy."





Chứng minh.
Thật vậy, gọi S là giao điểm của AB và CD. SE cắt lại (O_2) tại F'. Khi đó, ta có

$$SE \cdot SF' = SC \cdot SD = SA \cdot SB.$$

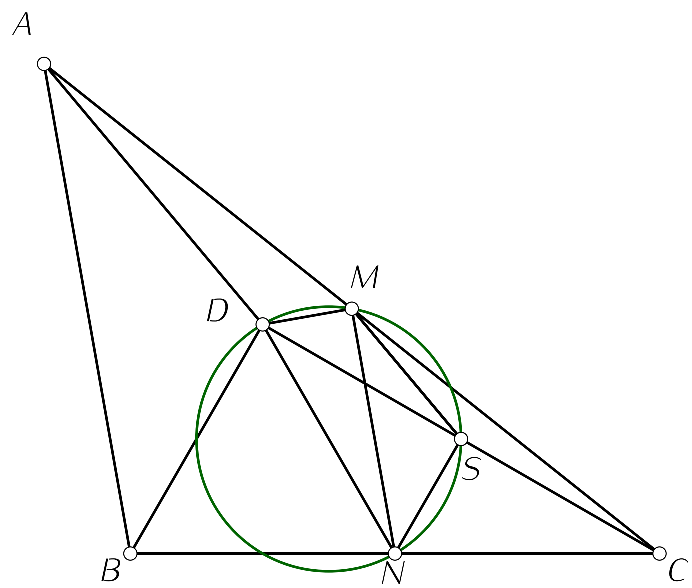
Do đó tứ giác $ABF'E$ nội tiếp nên $F' \equiv F$. Tới đây ta có điều phải chứng minh. □

0. Sự đồng quy của ba đường thẳng này được gọi là tâm đẳng phương của ba đường tròn.

Bài toán 20.

Cho tam giác ABC và điểm D thuộc miền trong của tam giác sao cho $\angle DBC = 60^\circ$ và $\angle DCB = \angle DAB = 30^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Chứng minh rằng $\angle DMN = 90^\circ$.

May Olympiad 2021



Chứng minh.
Gọi S là trung điểm của CD.
Vì $\angle DBC + \angle DCB = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ \to \triangle BDC$ vuông tại D.
Lại có N là trung điểm của BC nên

$$\angle NDC = \angle NCD = 30^\circ. \tag{17}$$

Chú ý rằng MN và MS lần lượt là đường trung bình của $\triangle CBA, \triangle CAD$ nên

$$MN \parallel AB, \quad MS \parallel AD \to \angle SMN = \angle DAB = 30^\circ \tag{18}$$

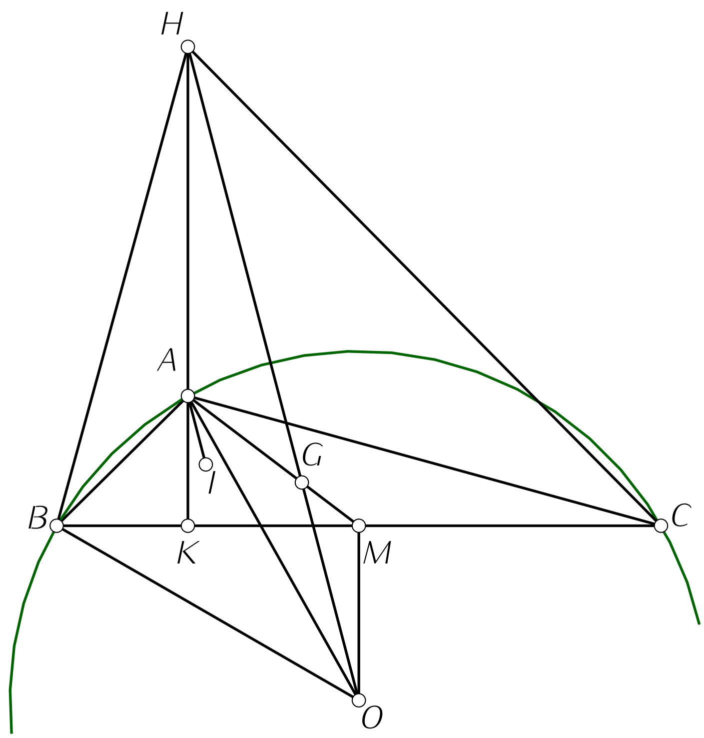
Từ (17) và (18), ta suy ra $\angle NDC = \angle SMN$ nên tứ giác $MDNS$ nội tiếp.
Tiếp tục, ta có SN là đường trung bình của $\triangle CDB \to \angle NSD = 90^\circ$.
Dẫn đến $\angle DMN = 90^\circ$. □

Nhận xét 0.11. *Bài toán trên được đánh giá là khá đơn giản. Cái khó trong bài toán là làm thế nào để có thể dựng hình một cách chính xác. Sau đây là hướng dựng hình của tác giả.*
- Dựng tam giác DBC vuông tại D có $\angle DBC = 60^\circ$ và $\angle DCB = 30^\circ$.
- Trên nửa mặt phẳng bờ BD không chứa điểm C, ta lấy điểm B' sao cho $\angle DBA' = \alpha$ (với $0 < \alpha \leq 90^\circ$).
- Sau đó trên mặt phẳng bờ BD, có chứa điểm B', ta lấy điểm D' sao cho $\angle BDD' = 150^\circ - \alpha$.
- Cho BB' và DD' cắt nhau tại một điểm. Điểm đó chính là điểm A.

Bài toán 21.

Cho tam giác ABC không cân. Gọi I, G, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng $\angle BAC = 120°$ khi và chỉ khi $AI \parallel GO$.

IMO Longlists 1992



Chứng minh.

Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$. Khi đó 3 điểm H, G, O thẳng hàng.
Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó $AK = 2OM$.
Kẻ đường cao AK của $\triangle ABC$. Khi đó, ta có $\angle KAB = \angle OAC \to \angle IAK = \angle IAO$.
Ta có phép biến đối tương đương sau

$$\angle BAC = 120°,$$

$$\angle MOB = 60°,$$

$$AH = 2OM = OB = AO,$$

$$2\angle AOH = \angle KAO = 2\angle IAO,$$

$$\angle AOH = \angle IAO,$$

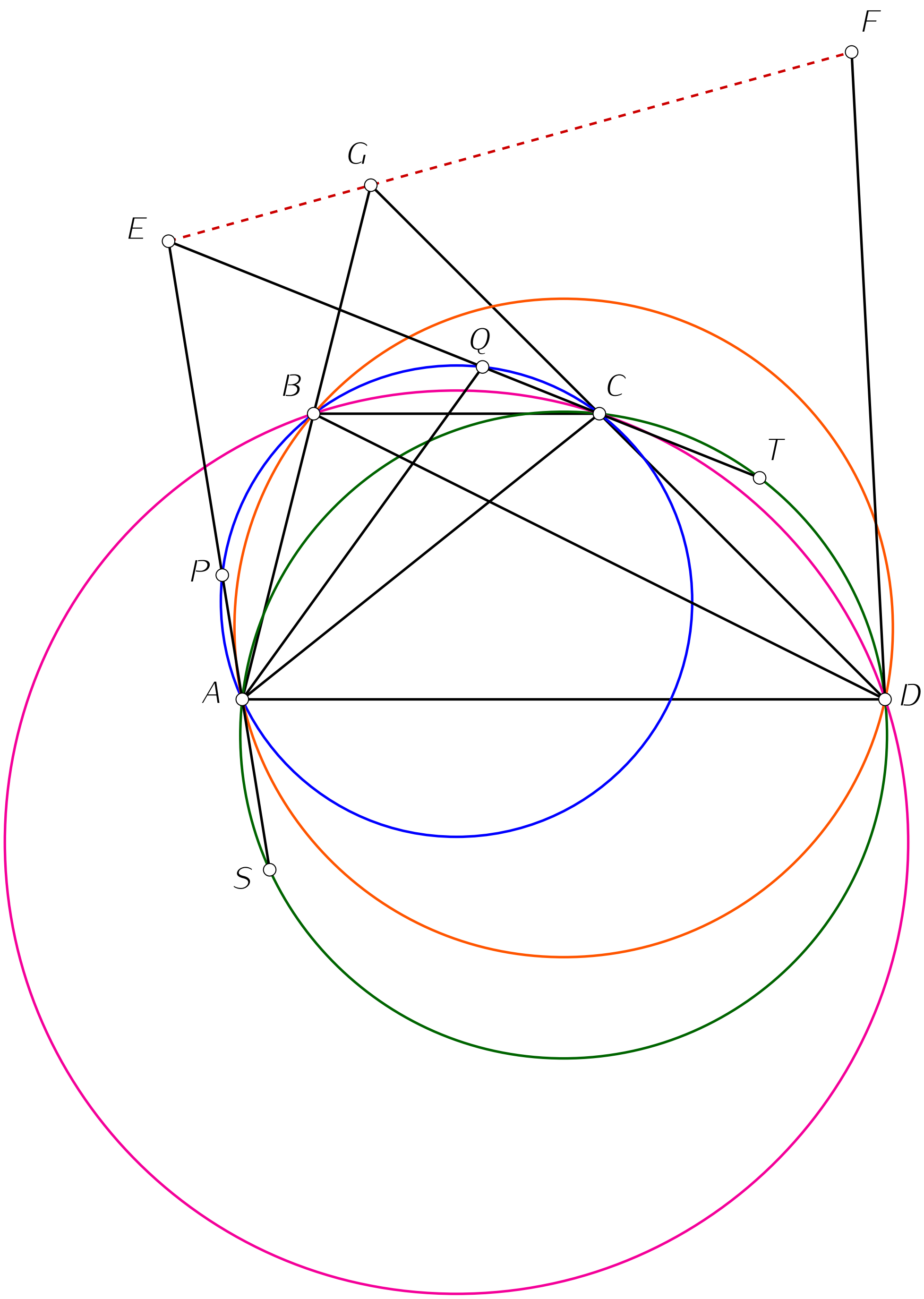
$$AI \parallel OG.$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét 0.12. *Bài toán trên đã nhắc lại cho ta về kiến thức nâng cao năm lớp 7. Đó là đường thẳng Euler. Bài toán được phát biểu như sau*
"Cho tam giác ABC. Gọi H, O, G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm của $\triangle ABC$. Khi đó 3 điểm H, G, O cùng nằm trên một đường thẳng."

Bài toán 22.
Cho hình thang $ABCD$ sao cho $AD \parallel BC$. Tia AB cắt tia DC tại G. Tiếp tuyến chung ngoài của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và $\triangle ACD$ cắt nhau tại E. Tiếp tuyến chung ngoài của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$ và $\triangle CBD$ cắt nhau tại F. Chứng minh rằng 3 điểm E, F, G thẳng hàng.

All – Russian MO 2023 – Grade 9



CHỨNG MINH.
Gọi P và Q là giao điểm của EA và EC với đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
Tiếp tục gọi S và T là giao điểm của EA và EC với đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACD$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\angle AEC = \angle AQC - \angle EAQ = \angle ABC - \frac{\overset{\frown}{PQ}}{2},\\ = 180^\circ - \angle GBA - \frac{\overset{\frown}{ST}}{2} = 180^\circ - \angle GBA - \angle ADC,\\ = \angle AGD = \angle AGC.\end{aligned}$$

Suy ra tứ giác $GEAC$ nội tiếp.
Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng thu được tứ giác $FGBD$ nội tiếp.
Chú ý rằng $EA = EC$ và

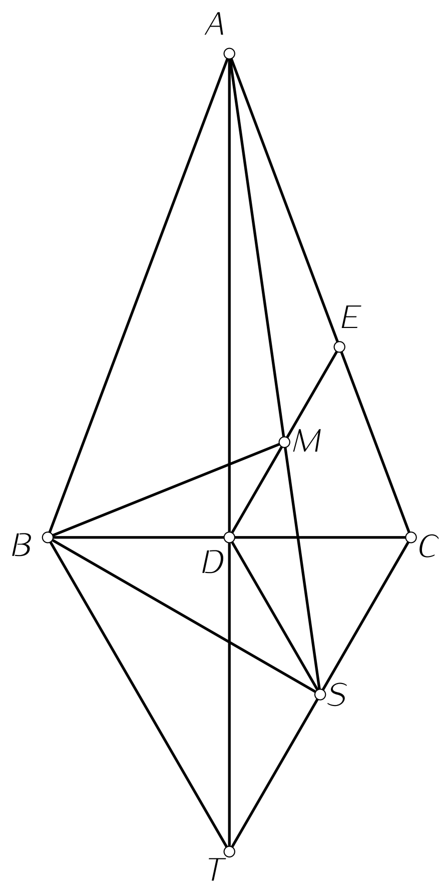
$$\angle EGC = 180^\circ - \angle EAC = 180^\circ - \angle ECA = 180^\circ - \angle EGA.$$

Do đó EG là phân giác ngoài của $\angle AGC$.
Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng chỉ ra được GF là phân giác ngoài của $\angle AGC$.
Do đó ta thu được yêu cầu bài toán. □

Bài toán 23.

Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Gọi D là trung điểm BC. Lấy điểm E trên cạnh AC sao cho $\angle CDE = 60^\circ$ và M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng $\angle AME = \angle BMD$.

Kyiv Mathematical Festival 2019



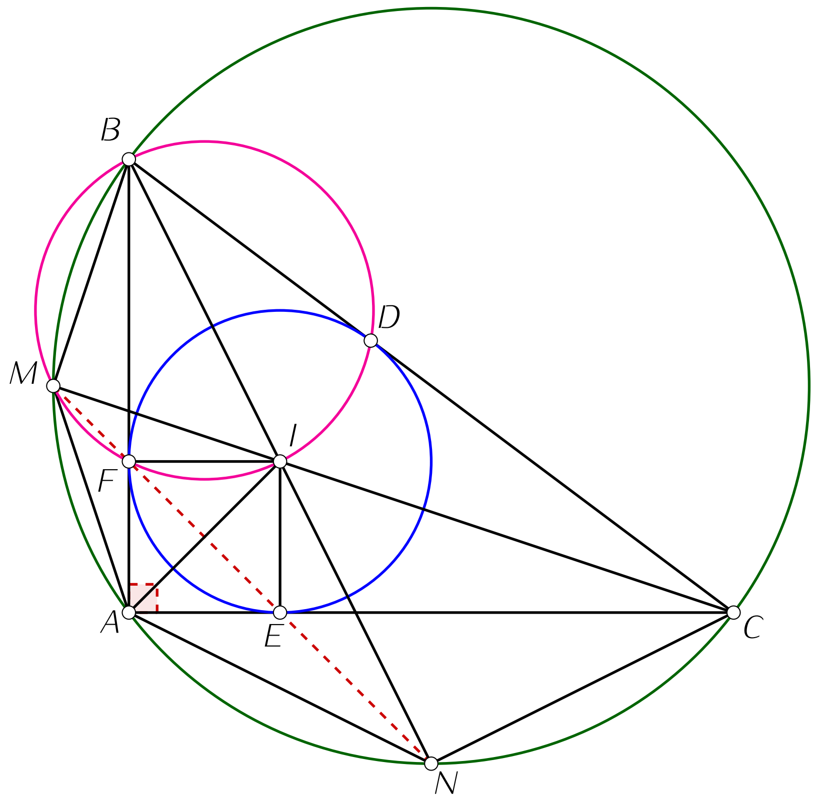
Chứng minh.
Qua C, kẻ đường thẳng song song với DE, cắt AD tại T.
Gọi S là giao điểm của AM và CT.

Khi đó, ta có $\angle TCB = \angle EDC = 60^\circ \to \triangle TBC$ đều $\to BC = BT$.
Lại có theo bổ đề hình thang thì S là trung điểm của CT.
Dẫn đến $BS \perp CT \to MD \perp BS$.
Lại có $DB = DS \to \triangle BMS$ cân tại M.
Suy ra $\angle BMD = \angle DMS = \angle AME$.
Hoàn tất chứng minh. $\square$

Bài toán 24.

Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB, AC. Chứng minh rằng 4 điểm M, F, E, N thẳng hàng khi và chỉ khi $\angle BAC = 90^\circ$.

Indonesia TST 2024



Chứng minh.
0. Nếu M, N, E, F thẳng hàng $\to \angle BAC = 90^\circ$.
Thật vậy, theo bổ đề bắn, ta có

$$MA = MI \quad \text{và} \quad NA = NI.$$

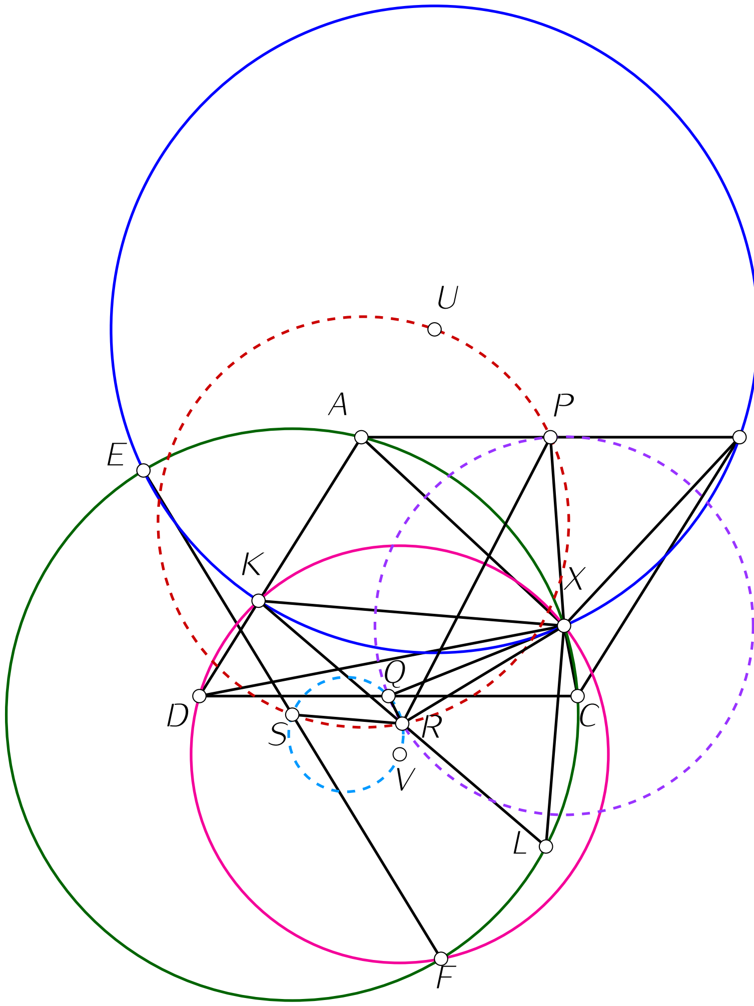
Do đó MN là đường trung trực của $AI \to FI = FA$ và $EI = EA$.
Mà $IE = IF$ nên tứ giác $AFIE$ là hình thoi, kết hợp với $FE \perp AI$.
Suy ra $AFIE$ là hình vuông. Dẫn đến $\angle BAC = 90^\circ$.
0. Nếu $\angle BAC = 90^\circ \to M, N, E, F$ thẳng hàng.
Vì N là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AC} \to MN$ là phân giác của $\angle AMC$.
Dẫn đến $\angle CMN = \angle AMN = \angle ABN = \angle FBI$.
Chú ý rằng tứ giác $BMFI$ nội tiếp nên $\angle FBI = \angle IMF$.
Như vậy, ta thu được $\angle CMN = \angle IMF \to 3$ điểm M, F, N thẳng hàng.
Chứng minh tương tự, ta thu được M, E, N thẳng hàng.

Do đó ta thu được điều phải chứng minh. □

Bài toán 25.

Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy điểm $X \notin AC$ trong hình bình hành $ABCD$ sao cho $\angle AXB = \angle CXD = 90^\circ$. Gọi Ω là đường tròn ngoại tiếp $\triangle AXC$. Kẻ đường kính EF của Ω sao cho 3 điểm E, X, B và F, X, D không thẳng hàng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BXE cắt lại đường tròn ngoại tiếp DXF tại điểm K. Dựng điểm $L \in \Omega$ sao cho $\angle KXL = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AB = KL$.

Poland MO 2024



Chứng minh.
Xét hình vẽ trên, ký hiệu P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, CD, KL.
Gọi S, U, V lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AXC, \triangle BXE, \triangle DXF$.
Dễ dàng chỉ ra rằng tứ giác $SRPU$ và $SQRV$ nội tiếp.
Ta có

$$\angle PRQ = \angle PRS - \angle QRS = 180^\circ - \angle PUS - \angle QVS = \angle BXE - \angle DXF = \angle AXF - \angle DXF = \angle AXD. \tag{19}$$

Tuy nhiên, ta lại có

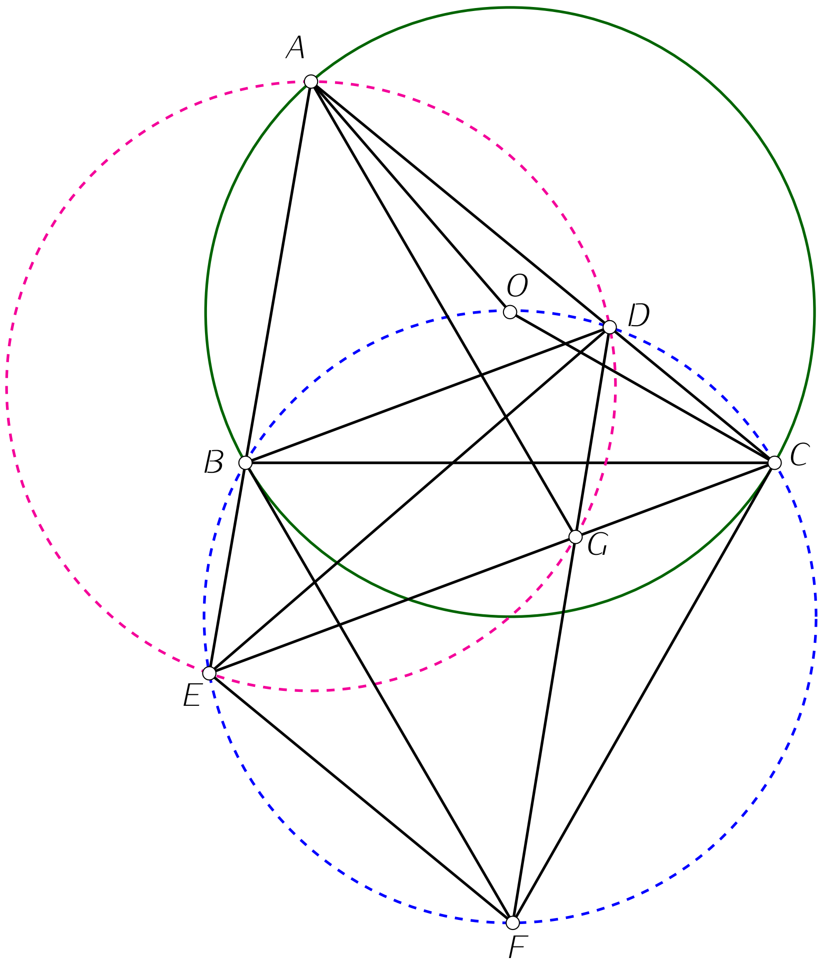
$$\angle PXQ = \angle AXD + 180^\circ - \angle XCD - \angle XBA = \angle AXD + \angle XCB + \angle XBC = 2\angle AXD. \tag{20}$$

Từ (19) và (20), ta suy ra X là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle PQR$.
Do đó $XP = XR \to AB = KL$. □

Bài toán 26.

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) $(AB < AC)$. Lấy $D \in AC$ sao cho $AB = AD$. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AO cắt AB tại E. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt đường thẳng qua E song song với AC tại F. Gọi G là giao điểm của CE và DF. Chứng minh rằng $AG \parallel BF$.

Francophone 2024



Chứng minh.
Nhận thấy rằng tứ giác $BDCE$ là hình thang cân nên tứ giác $BDCE$ nội tiếp.
Ta có

$$180^\circ - \angle EFC = \angle DCF = \angle ACB + \angle BCF = \angle ACB + \angle BAC = \angle EBC,$$

suy ra F thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BDCE$.
Lại có

$$\angle DGC = \angle GDE + \angle DEG = \angle FDE + \angle DEC = \angle FCE + \angle BCE = \angle FCB = \angle BAC = \angle DAE,$$

suy ra tứ giác $ADGE$ nội tiếp.
Như vậy

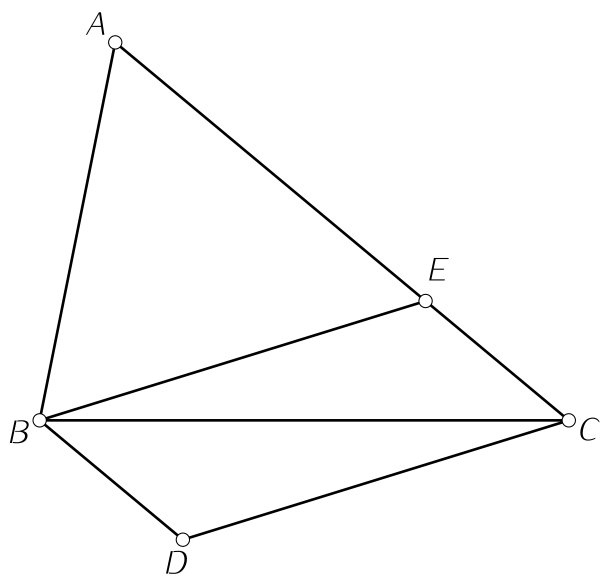
$$\angle GAD = \angle GED = \angle CED = \angle BFE,$$

kết hợp với $EF \parallel AC \to BF \parallel AG$. $\square$

Bài toán 27.

Cho tam giác ABC nhọn. Lấy điểm D thuộc đường thẳng qua B song song với AC, sao cho $\angle BDC = 2\angle BAC$ và tứ giác $ABDC$ lồi. Chứng minh rằng $BD + DC = AC$.

KAMO 2022



CHỨNG MINH.
Qua B, kẻ đường thẳng song song với DC, cắt AC tại E.
Khi đó tứ giác $BECD$ là hình bình hành.
Ta có

$$2\angle BAC = \angle BDC = \angle BEC.$$

Dẫn đến $\triangle AEB$ cân tại $E \to EA = EB = CD$.
Do đó

$$BD + DC = CE + EA = AC.$$

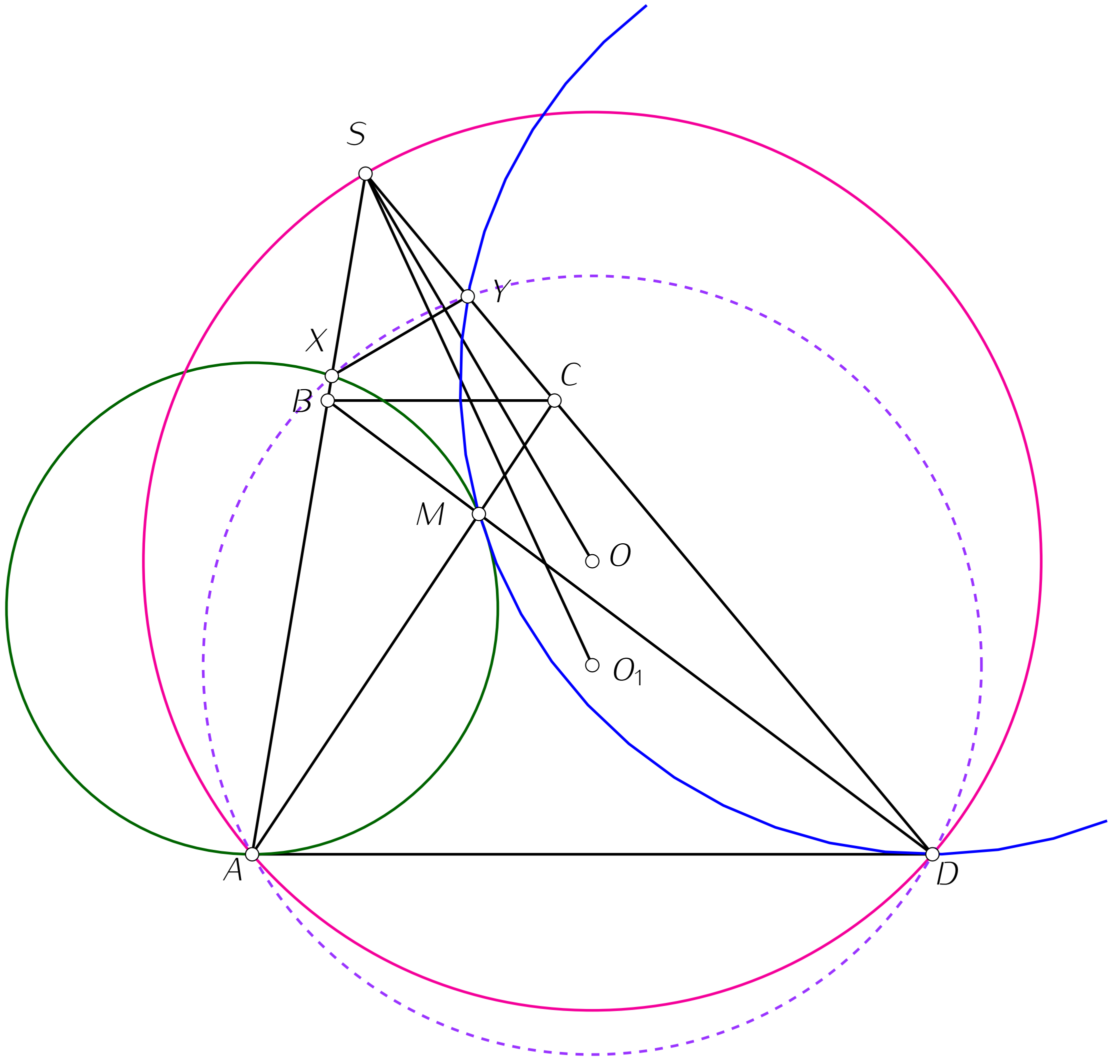
Hoàn tất chứng minh. □

Bài toán 28.

Cho hình thang $ABCD$ có $BC \parallel AD$ và $AD > BC$. AC cắt BD tại M. Gọi Γ_1 là đường tròn qua M và tiếp xúc với AD tại A. Gọi Γ_2 là đường tròn qua M tiếp xúc với AD tại điểm D. AB cắt CD tại S. AS cắt lại Γ_1 tại điểm X. DS cắt lại Γ_2 tại điểm Y. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ASD$. Chứng minh rằng $SO \perp XY$.

Argentina TST 2011

CHỨNG MINH.
Ta có $SX \cdot SA = SY \cdot SD \to$ tứ giác $XYDA$ nội tiếp $\to \angle SYX = \angle SAD = \angle SBC$.
Dẫn đến tứ giác $XYCB$ nội tiếp.



Lại có $\angle MYC = \angle MDA = \angle MBC$, do đó 5 điểm B, X, Y, C, M thuộc cùng 1 đường tròn.
Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AXYC$. Khi đó, ta có

$$SX \cdot SA = SY \cdot SD = SO_1^2 - O_1X^2 = SO_1^2 - O_1Y^2,$$

$$SX \cdot XA = SY \cdot YD = SO^2 - OX^2 = SO^2 - OY^2,$$

$$SX^2 = SX \cdot SA - SX \cdot XA = SO_1^2 - O_1X^2 - SO^2 + OX^2,$$

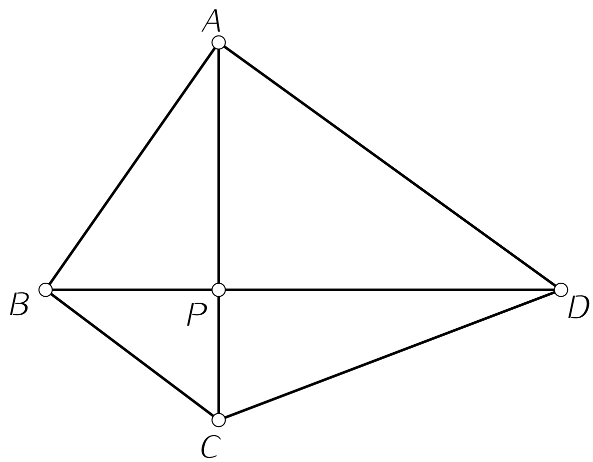
$$SY^2 = SY \cdot SA - SY \cdot YA = SO_1^2 - O_1Y^2 - SO^2 + OY^2,$$

do đó

$$SX^2 - SY^2 = OX^2 - OY^2 \rightarrow SX^2 + OY^2 = SY^2 + OX^2.$$

Theo định lý bốn điểm, ta suy ra $SO \perp XY$. *(cách chứng minh sẽ được đề cập tại phần* ***Nhận xét*** *0.13)* $\square$

Nhận xét 0.13. *Bài toán trên đã đưa ta đến một định lý được sử dụng để chứng minh vuông góc. Định lý bốn điểm được phát biểu như sau*
"Cho 4 điểm A, B, C, D. Khi đó $AC \perp BD$ khi và chỉ khi $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$."



Chứng minh.
0. Điều kiện cần. Gọi P là giao điểm của AC và BD.
Áp dụng đính lý Pythagoras, ta có

$$AB^2 = AP^2 + PB^2,$$

$$AD^2 = AP^2 + PD^2,$$

$$BC^2 = BP^2 + PC^2,$$

$$CD^2 = CP^2 + PD^2.$$

Như vây, ta có

$$AB^2 + CD^2 = AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = AD^2 + BC^2.$$

0. Điều kiện đủ. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A và C lên BD.
Ta có

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2,$$

$$AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2 = a,$$

$$a = AB^2 - AD^2 = HB^2 - HD^2 = HB^2 - (CD \pm HC)^2,$$

$$HC = \mp\frac{a + CD^2}{2CD}.$$

Chứng minh tương tự, ta có

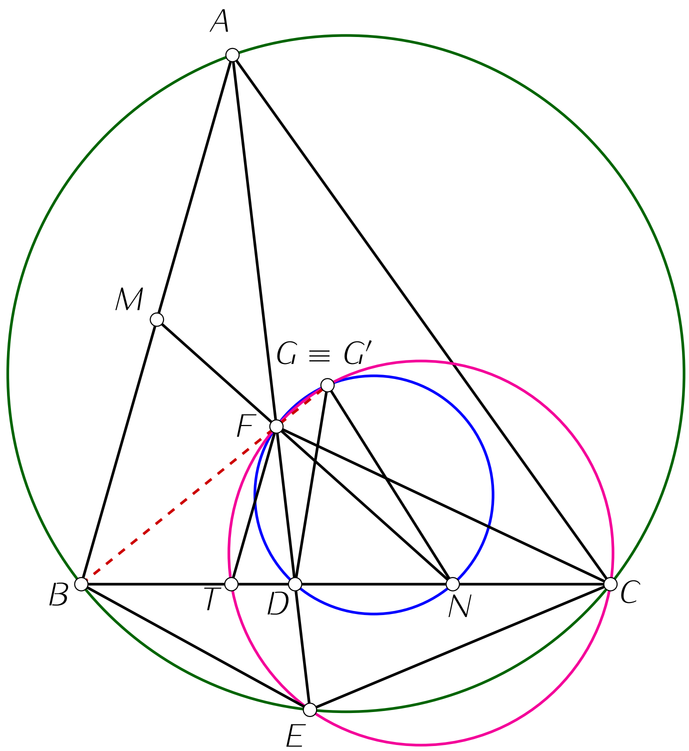
$$KC = \mp\frac{a + CD^2}{2CD}.$$

Dẫn đến $H \equiv K$. Hoàn tất chứng minh. □

Bài toán 29.

Cho tam giác ABC và điểm D thuộc cạnh BC. DA cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm E. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. MN cắt AD tại F. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle DNF$ cắt lại đường tròn ngoại tiếp $\triangle ECF$ tại điểm G. Chứng minh rằng 3 điểm B, F, G thẳng hàng.

Peru Cono Sur TST 2021



Chứng minh.
Gọi G' là giao điểm của BF và (CEF).
(CEF) cắt lại BC tại điểm thứ hai là T.
Khi đó, ta có $BT \cdot BC = BF \cdot BG'$.
Vì tứ giác $TFCE$ và $ABEC$ nội tiếp nên $\angle TFE = \angle BCE = \angle BAE \rightarrow TF \parallel AB$.
Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABD$ với $\overline{N; F; M}$, ta có

$$\frac{NB}{ND} \cdot \frac{FD}{FA} \cdot \frac{MA}{MB} = 1 \rightarrow \frac{FA}{FD} = \frac{NB}{ND} = \frac{NB}{NC} \rightarrow \frac{NB}{BC} = \frac{FA}{AD} = \frac{BT}{BD},$$

suy ra $BN \cdot BD = BT \cdot BC = BF \cdot BG'$.
Dẫn đến tứ giác $NDFG'$ nội tiếp.
Khi đó $G \equiv G'$.
Tới đây bài toán được giải quyết. □

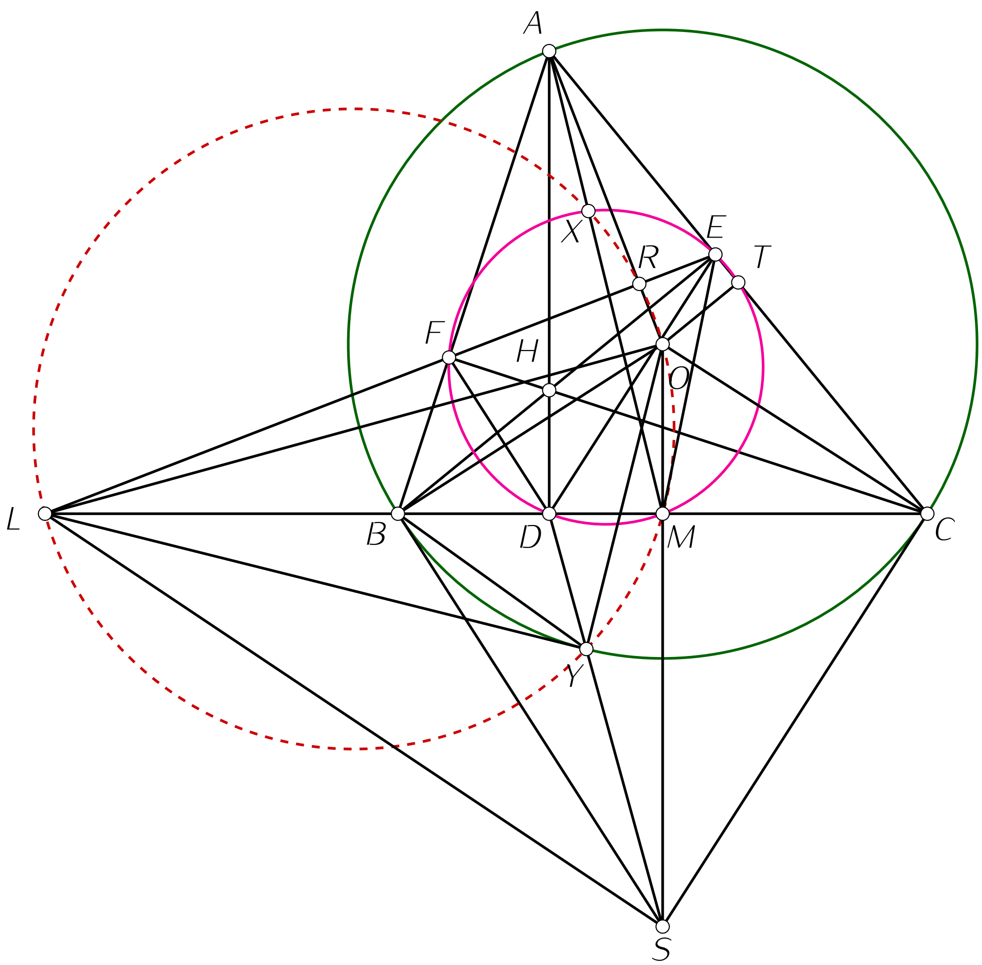
Nhận xét 0.14. *Bài toán trên đưa ta tới hai định lý khá cơ bản trong toán học. Sau đây tác giả sẽ phát biểu lại 2 định lý đó còn phần chứng minh xin dành cho bạn đọc.*
i, *Định lý Menelaus*
"Cho tam giác ABC và $X \in BC$, $Y \in CA$, $Z \in AB$. Khi đó $\overline{X; Y; Z}$ khi và chỉ khi

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1."$$

ii, *Định lý Reim*
"Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Trên AC lấy điểm P và lấy điểm Q trên BD. Khi đó $PQ \parallel AB$ khi và chỉ khi tứ giác $PQCD$ nội tiếp."

Bài toán 30.

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp (O), trực tâm H, đường cao AD, BE, CF; trung tuyến AM; tiếp tuyến SB, SC; EF cắt BC, OA tại L, R; AM cắt (DEF) tại X, SD cắt (O) tại Y. Chứng minh rằng X, Y thuộc (LO).



Chứng minh.

Gọi T là giao điểm (DEF) với AC.
Theo đường tròn Euler, ta suy ra T là trung điểm của AC nên $OT \perp AC$.
Theo tính chất quen thuộc, ta cũng có $AO \perp EF$ tại điểm R.
Dẫn đến tứ giác $RETO$ nội tiếp, kết hợp với $ETMX$ nội tiếp, ta có

$$AX \cdot AM = AE \cdot AT = AR \cdot AO.$$

Dẫn đến tứ giác $XROM$ nội tiếp.
Kết hợp với tứ giác $LROM$ nội tiếp (LO), ta suy ra ngay $X \in (LO)$.
Ta có

$$\angle MDE = \angle BDF = \angle MEL,$$

kết hợp với $\angle EML$ chung, ta suy ra $\triangle MDE \backsim \triangle MEL$ $(g.g)$, dẫn đến

$$MD \cdot ML = ME^2 = MB^2 = MO \cdot MS.$$

Suy ra D là trực tâm của $\triangle OLS \Rightarrow SD \perp OL$,
hay là $SY \perp OL$.

Áp dụng định lý 4 điểm cho $SY \perp OL$ và định lý Pythagoras, ta có

$$LY^2 + SO^2 = OY^2 + SL^2,$$

$$LY^2 + OY^2 = OY^2 + SL^2 - SB^2. \tag{21}$$

Ta sẽ đi chứng minh

$$OY^2 + SL^2 - SB^2 = LO^2, \tag{22}$$

$$SL^2 - LO^2 = SB^2 - OY^2. \tag{23}$$

Đẳng thức (23) luôn đúng do cùng bằng $SM^2 - OM^2$.
Kết hợp (21) và (22), ta suy ra ngay

$$LY^2 + OY^2 = LO^2.$$

Áp dụng định lý Pythagoras đảo, ta suy ra ngay $LY \perp OY$.
Nên $Y \in (LO)$.
Hoàn tất chứng minh. □

Nhận xét 0.15. *Qua bài toán trên, chúng ta đã phát hiện ra một bổ đề khá hay và cách chứng minh tác giả đã trình bày trong quá trình giải quyết bài toán.*
"Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với 3 đường cao AD, BE, CF. Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại S. Gọi T là giao điểm của EF và BC. Khi đó, D là trực tâm của $\triangle OTS$."

Bài toán 31.

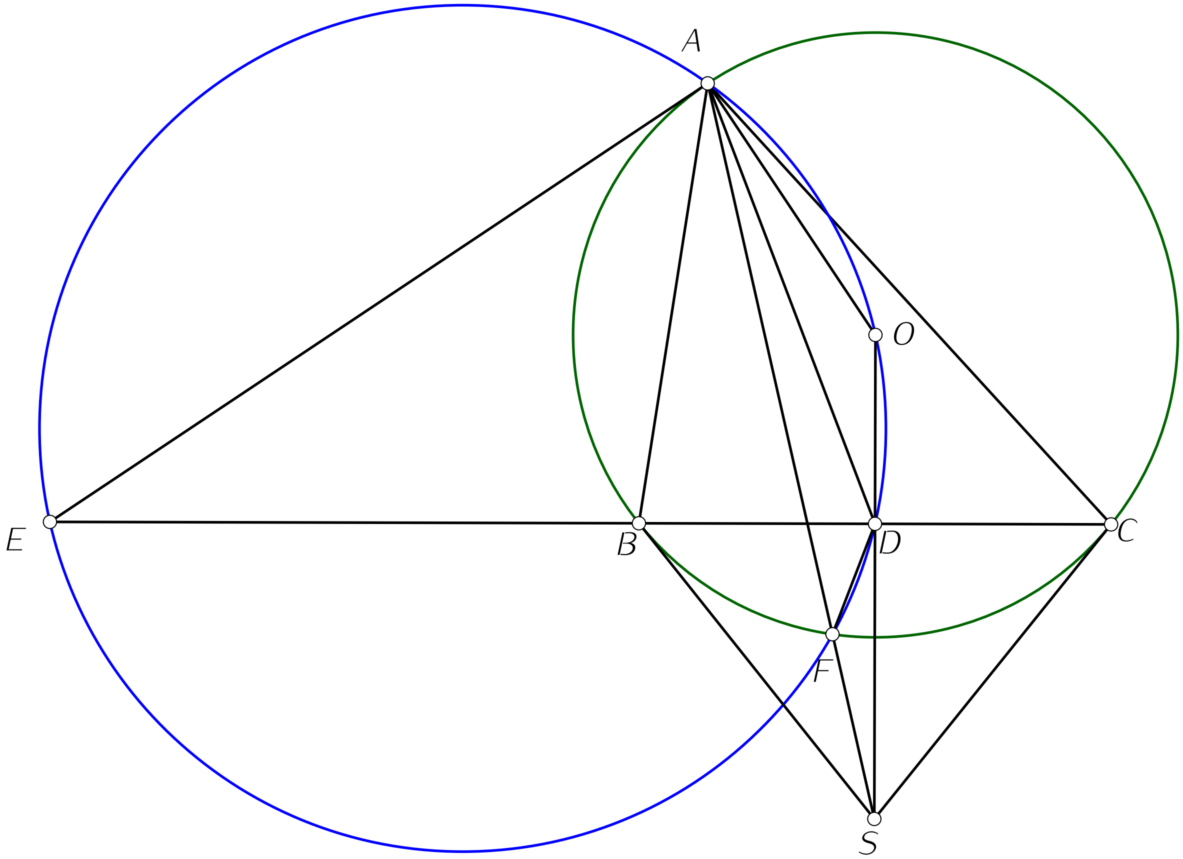
Cho đường tròn (O) và 2 điểm B, C cố định. Gọi D là trung điểm của BC. Vẽ tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại điểm E. (ADE) cắt lại (O) tại điểm F. Chứng minh rằng AF luôn đi qua một điểm cố định khi A di động.

VMO 2014

Chứng minh.
Gọi $\{S\} = AF \cap OD$.
Do tứ giác $AODF$ nội tiếp nên

$$SF \cdot SA = SD \cdot SO = SB^2.$$

Dẫn đến SB là tiếp tuyến của (O).
Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có SC là tiếp tuyến của (O).
Như vậy S là giao điểm 2 tiếp tuyến tại B và C của (O).
Mặt khác, do B và C cố định dẫn đến S cố định.
Do đó, AF đi qua điểm S cố định.

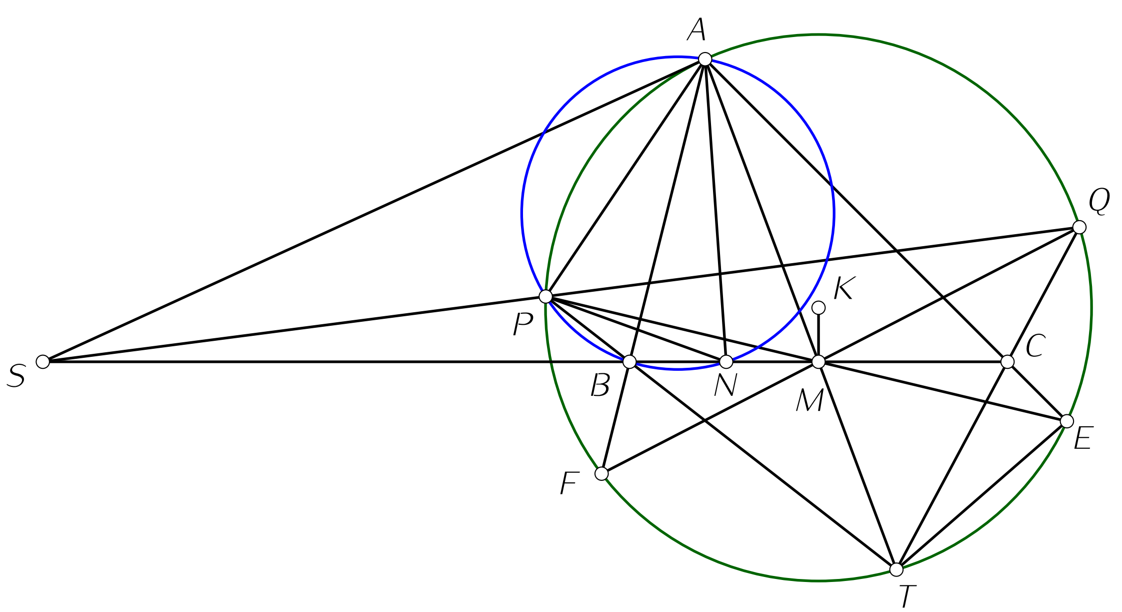


□

Bài toán 32.

Cho tam giác ABC với K là một điểm thuộc trung trực của BC. Đường tròn (K) đi qua điểm A cắt lại CA, AB lần lượt tại điểm E, F. Ký hiệu M là trung điểm của BC. ME, MF cắt lại (K) lần lượt tại điểm P và Q. Chứng minh rằng PQ, BC và tiếp tuyến tại A của (K) đồng quy.

Trần Quang Hùng, KHTN

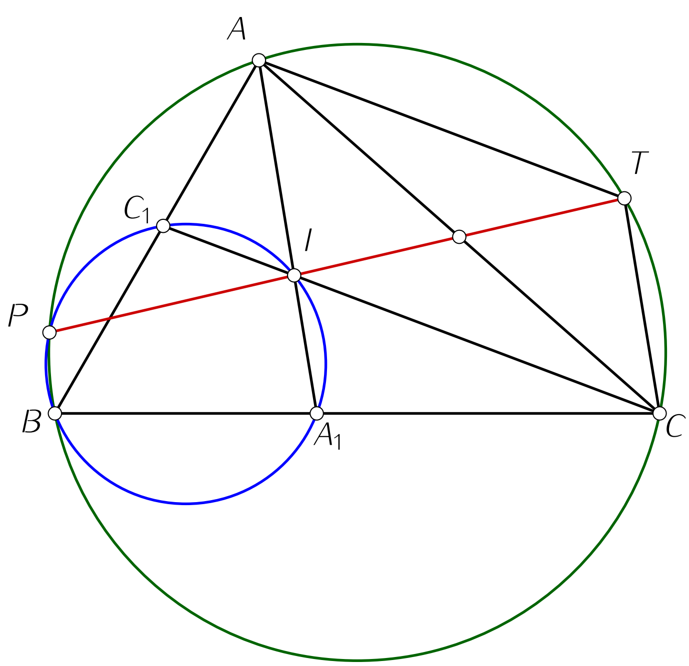


Chứng minh.
Gọi S là giao điểm tiếp tuyến tại A của (K) với BC.
(APB) cắt lại (K) tại điểm N.
AM cắt lại (K) tại điểm T.
Áp dụng định lý con bướm cho tứ giác $AETP, AFTQ$ ta có $\overline{T;B;P}$ và $\overline{T;C;Q}$.
Ta có
$$\angle SNA = 180^\circ - \angle APT = \angle AET = \angle SAM.$$
Do đó SA tiếp xúc với (AMN), suy ra
$$SA^2 = SN \cdot SM. \tag{24}$$
Lại có
$$\angle PQF = \angle PAF = \angle PMB,$$
dẫn đến tứ giác $PNMQ$ nội tiếp nên
$$SN \cdot SM = SP \cdot SQ. \tag{25}$$
Từ (24),(25), ta suy ra $TA^2 = TP \cdot TQ$.
Do đó $\overline{T;P;Q}$. Hoàn tất chứng minh. □

Bài toán 33.

Cho tam giác ABC có $\angle ABC = 60^\circ$. Phân giác AA_1 và CC_1 cắt nhau tại điểm I. Đường tròn (ABC) cắt lại (A_1IC_1) tại điểm P. Chứng minh rằng PI chia đôi AC.

Sharygin 2024



Chứng minh.
Kéo dài PI cắt lại (ABC) tại điểm T.
Vì $\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle AIC = 120^\circ \Rightarrow BA_1IC_1$ nội tiếp.
Vì tứ giác $BPIA_1$ và $BPTC$ nội tiếp nên
$$\angle PIA_1 = 180^\circ - \angle PBC = \angle PTC,$$

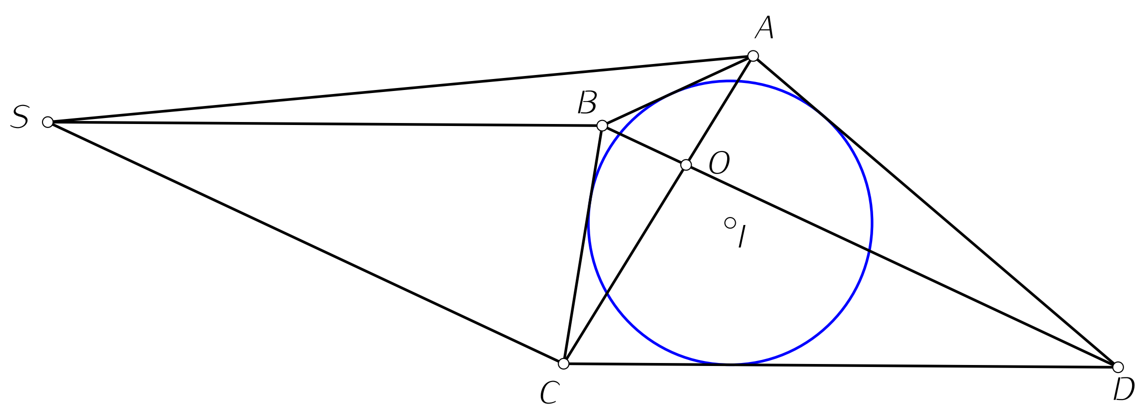
mà 2 góc này đồng vị nên $IA_1 \parallel TC$, hay là $AI \parallel CT$.
Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có $CI \parallel AT$.
Dẫn đến tứ giác $AICT$ là hình bình hành.
Dẫn đến IT đi qua trung điểm của AC, hay ta có yêu cầu bài toán. □

Bài toán 34.

Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn $(I; R)$. Bán kính R không đổi. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2} \leq \frac{1}{4R^2}.$$

Sharygin 2018



Chứng minh.
Ký hiệu O là giao điểm của AC và BC.
Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $\angle AOB \geq 90^\circ$.
Dựng hình bình hành $BDCS$.
Khi đó, ta có

$$AC \cdot BD \geq 2[ABCD] = R \cdot (AB + BC + CD + DA) = 2R\,(AB + CD)\,. \tag{26}$$

Lại có $AB + CD = AB + BS \geq AS$ và $\angle ACS \geq 90^\circ$ nên

$$AS^2 \geq AC^2 + CS^2 = AC^2 + BD^2. \tag{27}$$

Từ (26) và (27), ta thu được

$$AC^2 \cdot BD^2 \geq 4R^2\left(AC^2 + BD^2\right),$$

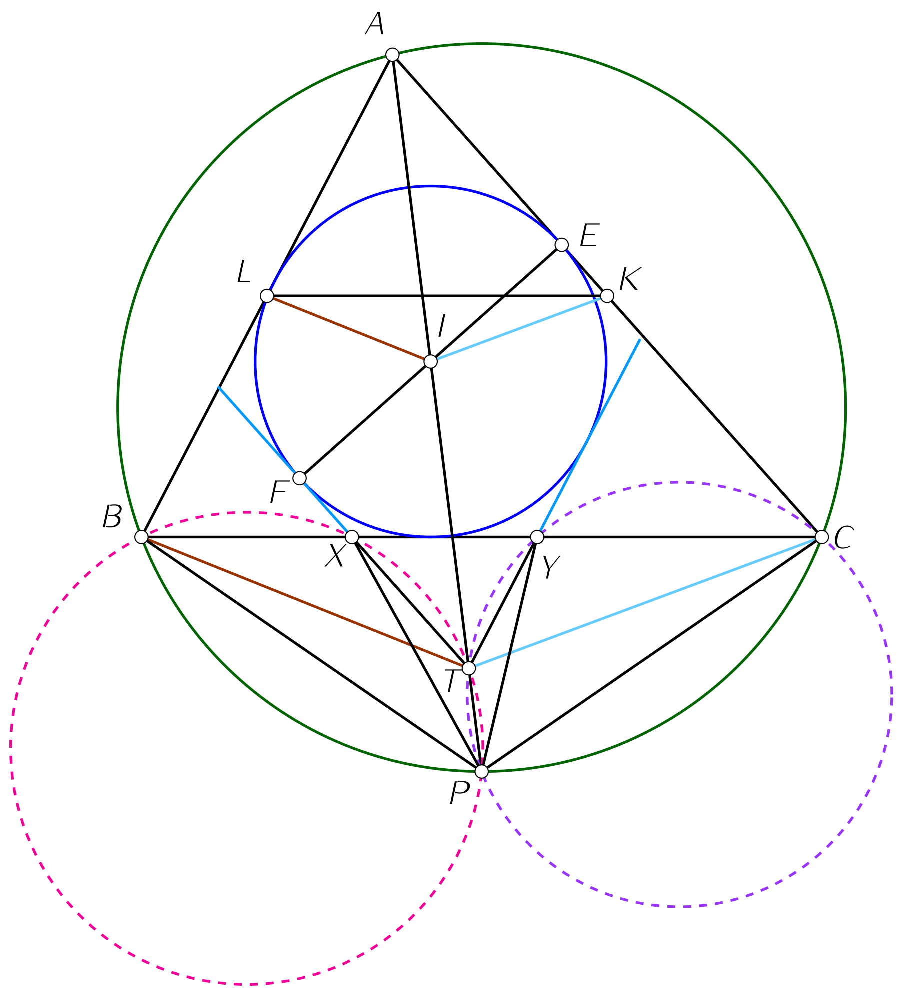
$$\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2} \leq \frac{1}{4R^2}.$$

Hoàn tất chứng minh. □

Bài toán 35.

Cho tam giác ABC với $AB < AC < BC$. Gọi I và ω lần lượt là tâm nội tiếp và đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Gọi X là điểm nằm trên đường thẳng BC, khác C sao cho đường thẳng qua X và song song với AC tiếp xúc với ω. Tương tự, gọi Y là điểm nằm trên đường thẳng BC, khác B, sao cho đường thẳng qua Y và song song với AB tiếp xúc với ω. Đường thẳng AI cắt lại (ABC) tại điểm $P \neq A$. Gọi K và L tương ứng là trung điểm của AC và AB. Chứng minh rằng $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

IMO 2024



Chứng minh.

Gọi E và F lần lượt là điểm tiếp xúc của ω với AC và tiếp tuyến tại X. Hiển nhiên EF là đường kính của ω.

Ký hiệu T là giao điểm của FX với AI.

Khi đó, áp dụng định lý Thalès cho $FT \parallel AE$, ta có

$$\frac{AI}{TI} = \frac{EI}{FI} = 1.$$

Dẫn đến T là điểm đối xứng của A qua I.

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có tiếp tuyến tại Y của ω cũng đi qua điểm T.

Từ đó suy ra

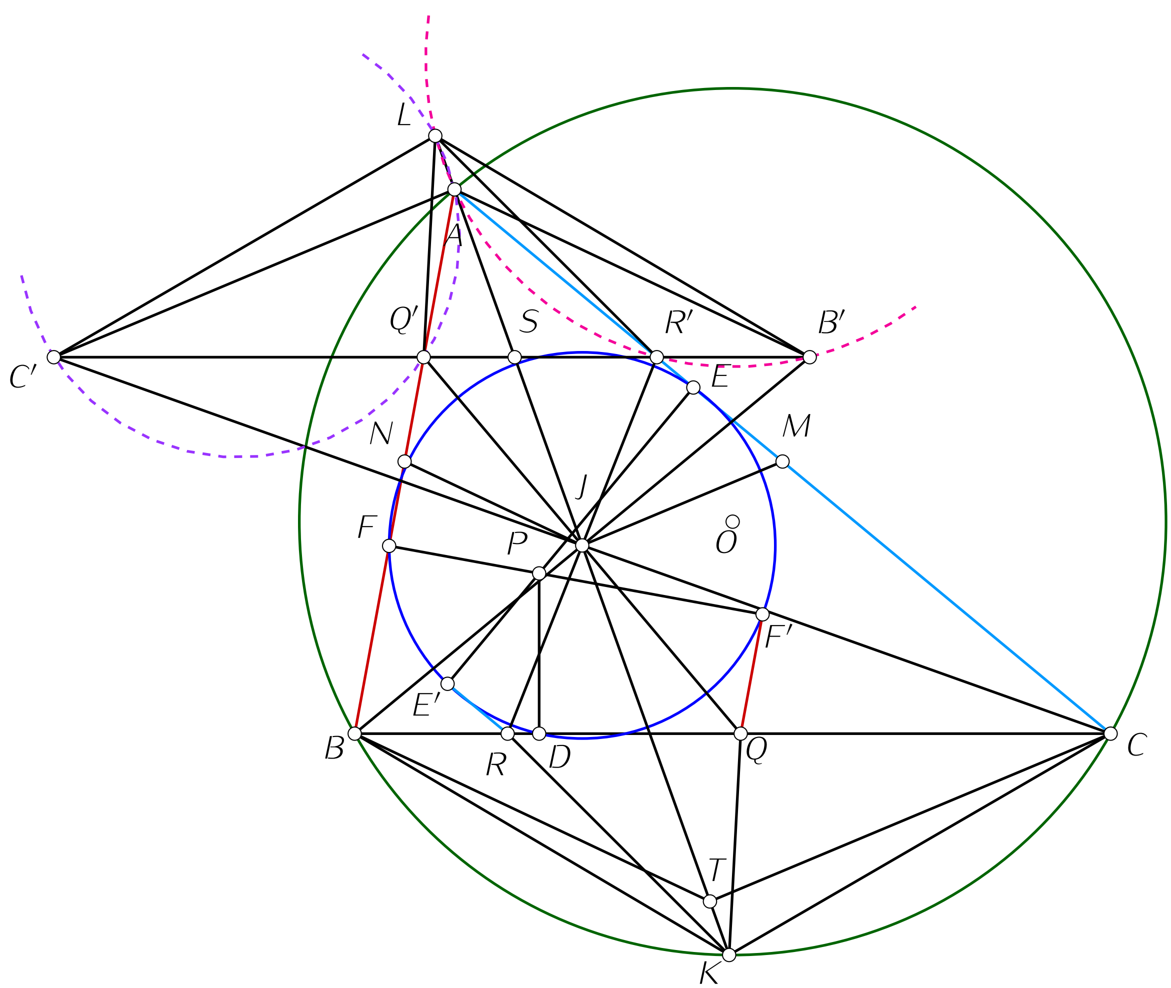
$$\angle LIK = \angle BTC. \tag{28}$$

Lại có
$$\angle XTI = \angle PAC = \angle PBX,$$
nên tứ giác $XTPB$ nội tiếp.
Như vậy, ta cũng có được tứ giác $CYTP$ nội tiếp.
Khi đó, ta có
$$\angle YPX = \angle XPT + \angle YPT = \angle CBT + \angle BCT. \quad (29)$$
Từ (28),(29), ta thu được
$$\angle LIK + \angle XPY = \angle BTC + \angle CBT + \angle BCT = 180^\circ.$$
Hoàn tất chứng minh. □

Bài toán 36.

Cho tam giác ABC nội tiếp (O). P là điểm bất kì thuộc miền trong của $\triangle ABC$. Gọi D, E, F là hình chiếu của P trên BC, CA, AB. Ký hiệu (J) ngoại tiếp $\triangle DEF$. AJ cắt lại (O) tại K. EP, FP cắt lại (J) tại E', F'. Lấy R, Q thuộc BC sao cho $E'R \parallel AC, F'Q \parallel AB$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB. Chứng minh rằng $\angle MJN + \angle RKQ = 180^\circ$.

Phát triển bài toán IMO 2024 - Nguyễn Văn Linh



Chứng minh.
Gọi T là điểm đối xứng với A qua J, L là điểm đối xứng với K qua J.
Ký hiệu B', C', Q', R' lần lượt là điểm đối xứng của B, C, Q, R qua J.
Dễ thấy rằng $\overline{B'; C'; R'; Q'}$ và $\overline{A; Q'; B}$ và $\overline{A; R'; C}$.
Ta có

$$\angle KAR' = \angle KBC = \angle LB'R',$$

suy ra tứ giác $LAR'B'$ nội tiếp.
Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có tứ giác $LAQ'C'$ nội tiếp.
Vì M, J, N lần lượt là trung điểm của AC, AT, AB và $CT \parallel AC'$, $BT \parallel AB'$ nên suy ra

$$\angle MJN = \angle BTC = \angle B'AC'. \tag{30}$$

Vì tứ giác $LAQ'C'$ và $LAR'B'$ nội tiếp, $RK \parallel LR'$, $KQ \parallel LQ'$ nên

$$\angle RKQ = \angle R'LQ' = \angle ALQ' + \angle R'LA = \angle AC'B' + \angle AB'C'. \tag{31}$$

Từ (30) và (31), ta suy ra

$$\angle MJN + \angle RKQ = \angle B'AC' + \angle AC'B' + \angle AB'C' = 180^\circ.$$

Hoàn tất chứng minh. □

Bài toán 37.
Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O, R) với 3 đường cao AK, BE, CF đồng quy tại H. Kẻ đường kính AD của (O). Gọi I là giao điểm của AD và EF. Ký hiệu M là trung điểm của BC, N là giao điểm của AH và EF, P là giao điểm của AD và BC. Cho OM cắt NP tại điểm Q. Chứng minh rằng
(a) Bốn điểm B, D, I, F thuộc cùng một đường tròn.
(b) $AN - NH = 2OQ$.
(c) $\dfrac{AK}{BK} + \dfrac{BE}{CE} + \dfrac{CF}{AF} \geq 3\sqrt{3}$.

Chứng minh.
(a) Theo tính chất quen thuộc, ta có $AD \perp EF$ tại I.
Do đó

$$AI \cdot AD = AE \cdot AC = AF \cdot AB,$$

suy ra tứ giác $BDIF$ nội tiếp.
Nên 4 điểm B, D, I, F thuộc cùng một đường tròn.
(b) Theo tính chất quen thuộc, ta có $\overline{H; M; D}$.
Chú ý rằng $\angle CAD = \angle FAH$, kết hợp với $\angle AFH = \angle ACD = 90^\circ$,
ta suy ra $\triangle HFA \backsim \triangle DCA$ $(g.g)$ và $\triangle AEN \backsim \triangle ABP$ $(g.g)$.
Dẫn đến

$$\frac{AH}{AD} = \frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AN}{AP},$$

áp dụng định lý Thalès đảo, ta suy ra $NP \parallel HD$.
Kết hợp với $NH \parallel QM$, ta suy ra tứ giác $NHMQ$ là hình bình hành $\rightarrow NH = QM$.
Áp dụng tính chất đường phân giác và định lý Thalès cho $OM \parallel AK$, ta có

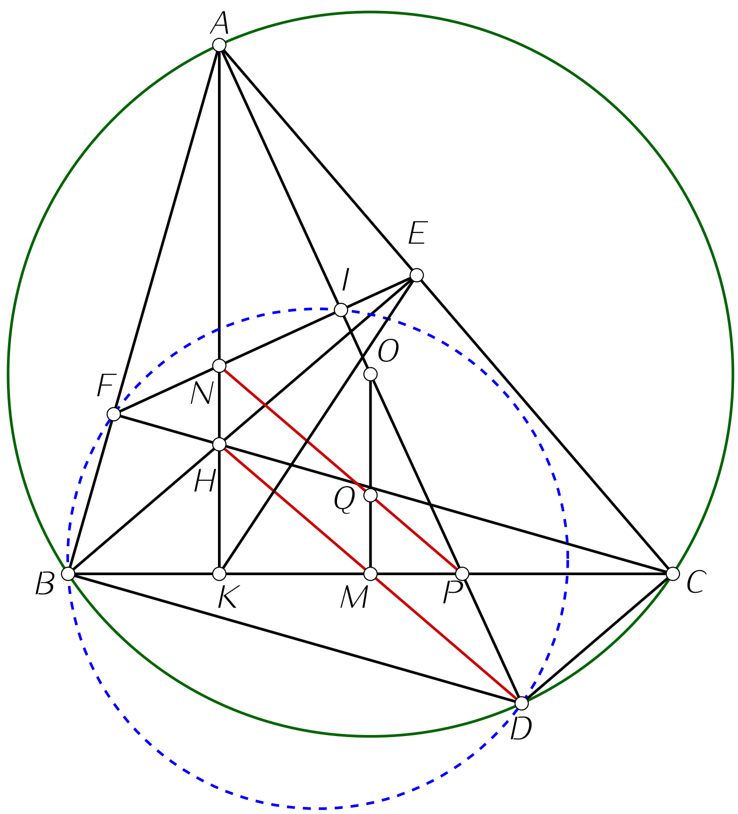
$$\frac{HN}{HK} = \frac{AN}{AK} = \frac{OQ}{OM},$$

$$HN \cdot OM = HK \cdot OQ,$$

$$NH \cdot (OQ + QM) = OQ \cdot HK,$$

$$NH^2 = OQ \cdot (HK - HN),$$

$$\frac{NH}{OQ} = \frac{HK}{NH} - 1. \tag{32}$$



Áp dụng tiếp tục định lý Thalès cho $OM \parallel AK$, ta có

$$\frac{AN}{QO} = \frac{NK}{QM} = 1 + \frac{HK}{NH}. \tag{33}$$

Từ (32) và (33), ta suy ra

$$\frac{AN}{OQ} - \frac{NH}{OQ} = 1 + \frac{HK}{NH} - \frac{HK}{NH} + 1 = 2,$$

$$AN - NH = 2OQ.$$

(c) Trước hết, ta đi chứng minh bổ đề sau: *"Cho tam giác ABC nhọn. Khi đó ta có $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$."*

*(Cách chứng minh sẽ được trình bày ở **Nhận xét 0.16**)*

Ta có

$$\frac{AK}{BK} = \tan B,$$

$$\frac{BE}{CE} = \tan C,$$

$$\frac{CF}{AF} = \tan A.$$

Áp dụng bổ đề, ta có

$$\frac{AK}{BK} + \frac{BE}{CE} + \frac{CF}{AF} = \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C.$$

Áp dụng bất đẳng thức Am-Gm, ta có

$$\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C = \tan A + \tan B + \tan C \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C},$$

lập phương 2 vế rồi lấy căn bậc 2, ta thu được

$$\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \geq 3\sqrt{3}.$$

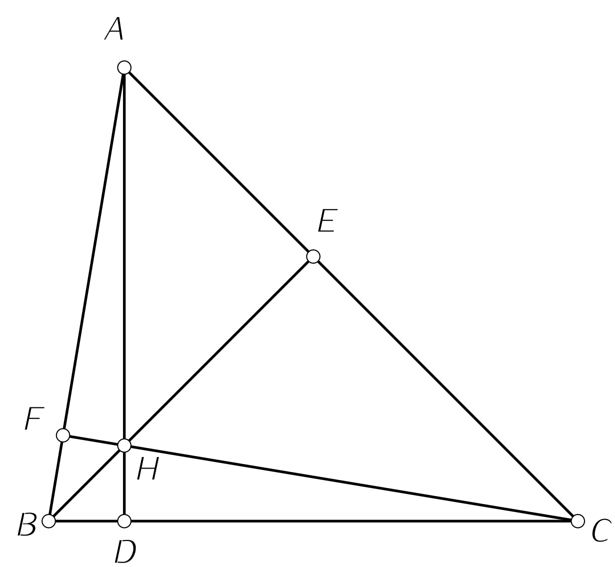
Dẫn đến

$$\frac{AK}{BK} + \frac{BE}{CE} + \frac{CF}{AF} \geq 3\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\triangle ABC$ đều. □

Nhận xét 0.16. *Câu (b) của bài toán, phần chứng minh $NP \parallel HD$ chính là đề thi tuyển sinh vào 10 thành phố Hà Nội 2019. Bài toán trên, tác giả đã trình bày một bổ đề khá hay về tỷ số lượng giác. Sau đây là cách chứng minh bổ đề.*
"Cho tam giác ABC nhọn. Khi đó ta có $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$."

CHỨNG MINH.



Hạ đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H của $\triangle ABC$. Ta có

$$\angle B = \angle DHC \to \tan B = \tan \angle DHC \to \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{HD},$$

$$AD \cdot HD = BD \cdot CD.$$

Lại có

$$\cot B \cdot \cot C = \frac{BD}{AD} \cdot \frac{CD}{AD} = \frac{BD \cdot CD}{AD^2},$$
$$= \frac{HD}{AD} = \frac{[BHC]}{[ABC]}.$$

Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có

$$\cot C \cdot \cot A = \frac{[CHA]}{[ABC]},$$

$$\cot A \cdot \cot B = \frac{[AHB]}{[ABC]}.$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên, ta thu được

$$\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1,$$

$$\frac{1}{\tan A \cdot \tan B} + \frac{1}{\tan B \cdot \tan C} + \frac{1}{\tan C \cdot \tan A} = 1,$$
$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C.$$

Hoàn tất chứng minh. □

Bài toán phát triển từ bổ đề. *Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng*

(a) $\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9$.

(b) $\tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2} \cdot \tan\frac{A}{2} = 1$.

Bài toán 38.

Cho tam giác ABC ($AB < AC < BC$). Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Gọi X là điểm nằm trên đường thẳng BC sao cho đường thẳng qua X song song với AC tiếp xúc với (I). Tương tự gọi Y nằm trên đường thẳng BC sao cho đường thẳng qua Y song song với AB tiếp xúc với (I). Ký hiệu J là tâm bàng tiếp góc A của $\triangle ABC$. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M sao cho $MB = AB$ và trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $NC = AC$. Gọi K, L tương ứng là trung điểm của AN, AM. Chứng minh rằng $\angle KIL + \angle XJY = 180°$.

Phát triển bài toán IMO 2024 - Lê Viết Ân

Chứng minh.

Theo **Bài toán 35.**, ta suy ra tiếp tuyến tại X và Y đi qua điểm T là điểm đối xứng với A qua I. Dẫn đến

$$\angle KIL = \angle MTN. \tag{34}$$

Chú ý rằng tứ giác $BICJ$ nội tiếp nên

$$\angle AJC = \angle IJC = \angle IBC = \frac{\angle ABC}{2} = \angle AMC,$$

suy ra tứ giác $AMJC$ nội tiếp.

Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có tứ giác $ANJB$ nội tiếp.

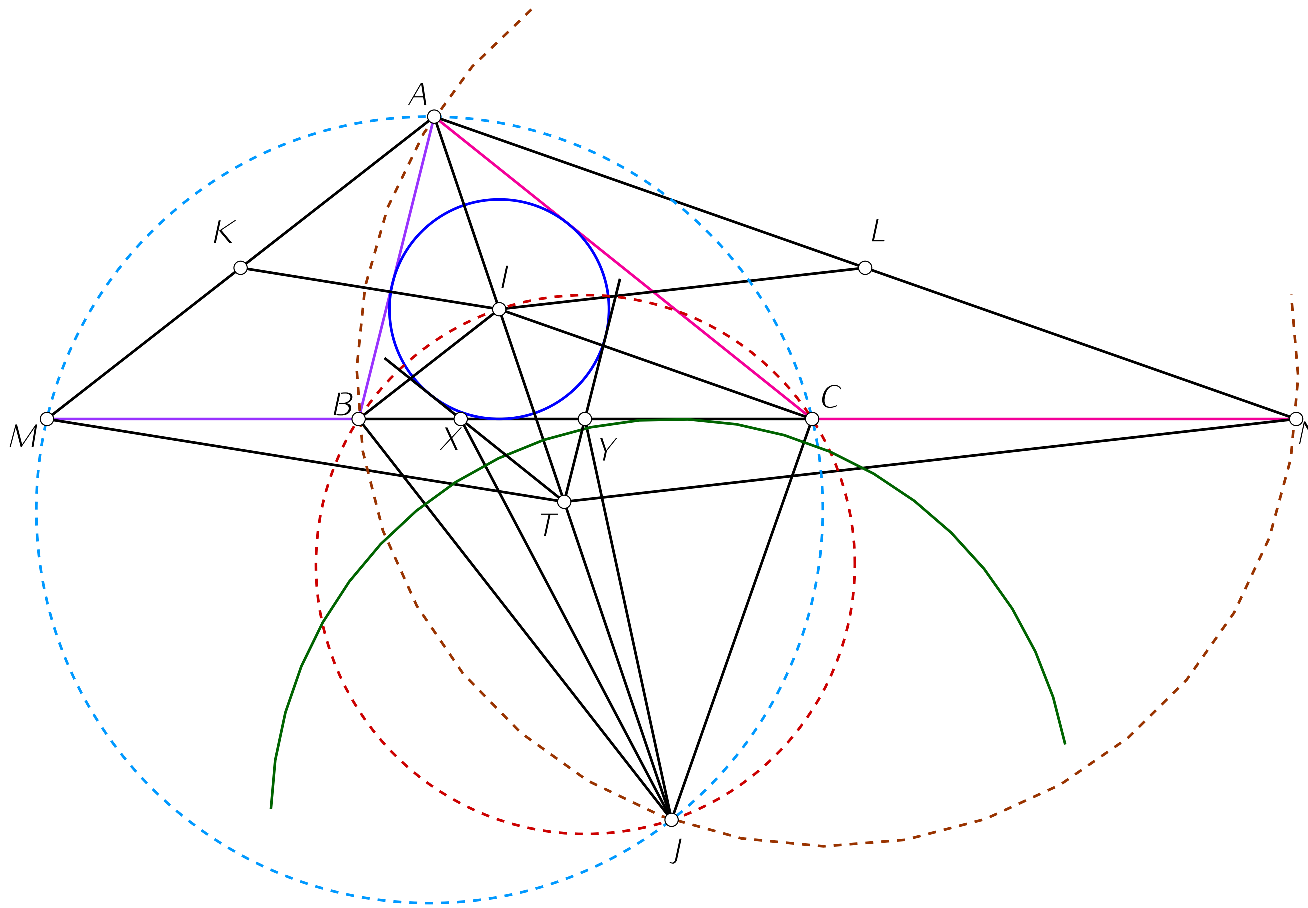
Dẫn đến

$$\angle XJY = \angle XJT + \angle YJT = \angle NMT + \angle MNT. \tag{35}$$

Từ (34) và (35), ta suy ra

$$\angle KIL + \angle XJY = \angle MTN + \angle NMT + \angle MNT = 180°.$$

Hoàn tất chứng minh.



□

Bài toán 39.

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp (O), với ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trung điểm H. Ký hiệu M là trung điểm của BC. Cho EF cắt (O) tại X, Y (với X trên cung AB nhỏ và Y trên cung AC nhỏ).

(a) Chứng minh rằng $\angle XHF = \angle BYM$.

(b) Cho XH cắt MY và cắt lại (O) lần lượt tại điểm S và R. Cho YH cắt MX và cắt lại (O) lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng (DEF) cắt (BHC) tại điểm P và S.

(c) Chứng minh rằng P và S lần lượt là trung điểm của HQ và HR.

Nguyễn Cao Sơn - Thế giới toán học

Bài toán 40.

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong của $\angle BAC$ cắt lại (O) tại điểm D. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AD. Cho BE cắt lại (O) tại điểm F. Lấy điểm P di động trên cạnh AC. Cho BP cắt lại (O) tại Q. Đường thẳng qua C song song với AQ cắt FD tại điểm G.

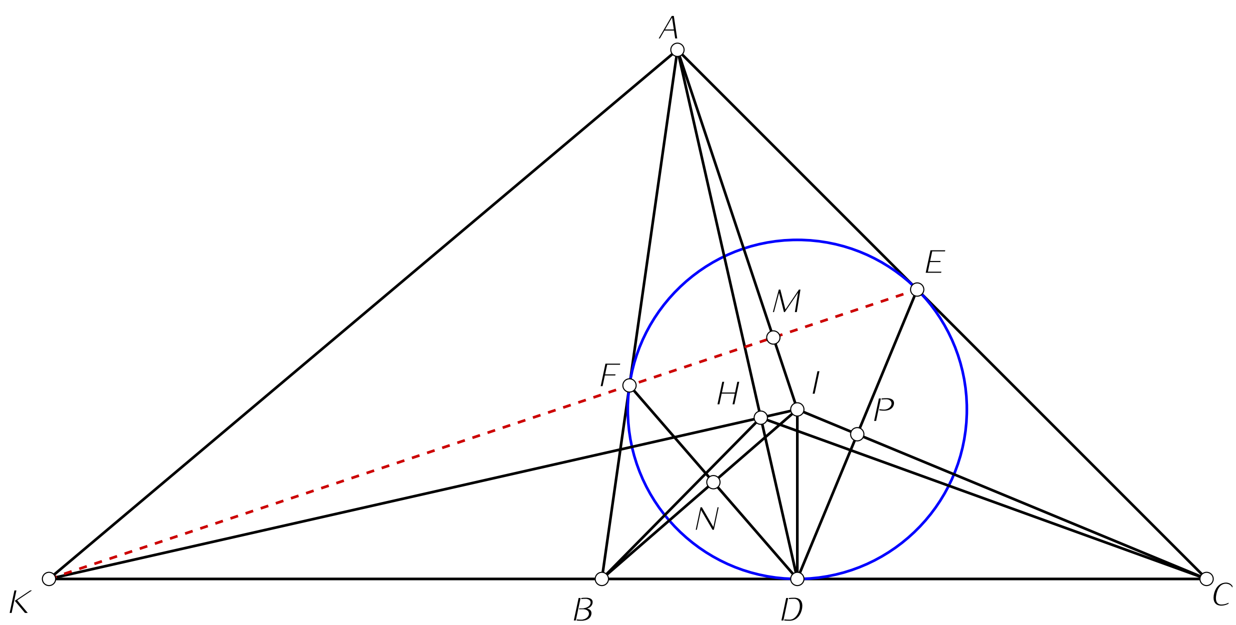
(a) Cho EG cắt BC tại điểm H. Chứng minh rằng 4 điểm B, P, E, H nội tiếp (K).

(b) Cho (K) cắt lại (O) tại điểm L. Chứng minh rằng LP luôn đi qua điểm S cố định khi P di động trên cạnh AC.

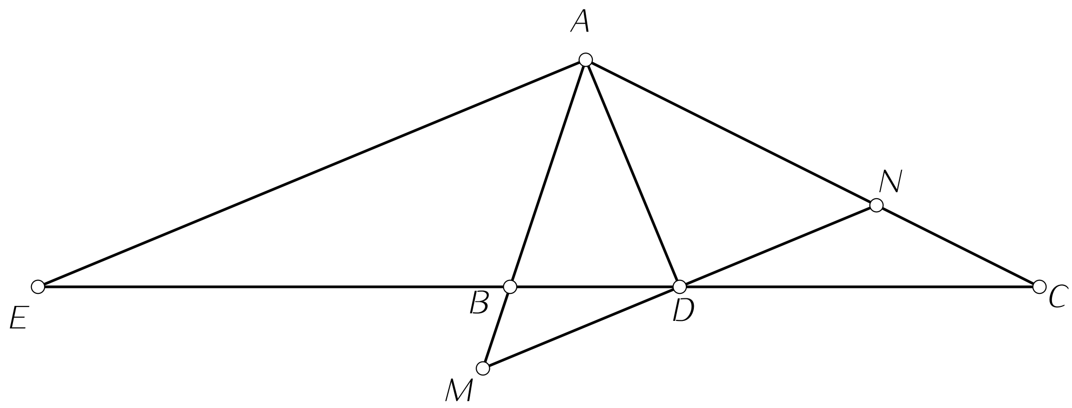
(c) Ký hiệu T là trung điểm của PE. Chứng minh rằng đường thẳng qua T song song với LS chia đôi AF.

Bài toán 41.

Cho tam giác ABC nhọn ngoại tiếp I. Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi H là hình chiếu của I lên AD. Chứng minh rằng HD là phân giác của $\angle BHC$.



Nhận xét 0.17. *Hướng chứng minh số 2 của bài toán đã sử dụng một bổ đề quen thuộc. Sau đây, tác giả sẽ trình bày lại cách chứng minh bổ đề đó.*
"Cho tam giác ABC. Lấy điểm D nằm trên cạnh BC và E nằm trên đường thẳng BC (nằm phía ngoài $\triangle ABC$) thỏa mãn rằng $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{EB}{EC}$ và $\angle DAE = 90°$. Khi đó, AD là phân giác của $\angle BAC$."



Chứng minh.
Qua D, kẻ đường thẳng song song với AE, cắt AB và AC lần lượt tại M và N.
Áp dụng định lý Thalès cho $MD \parallel AE$ và $ND \parallel AE$, ta có

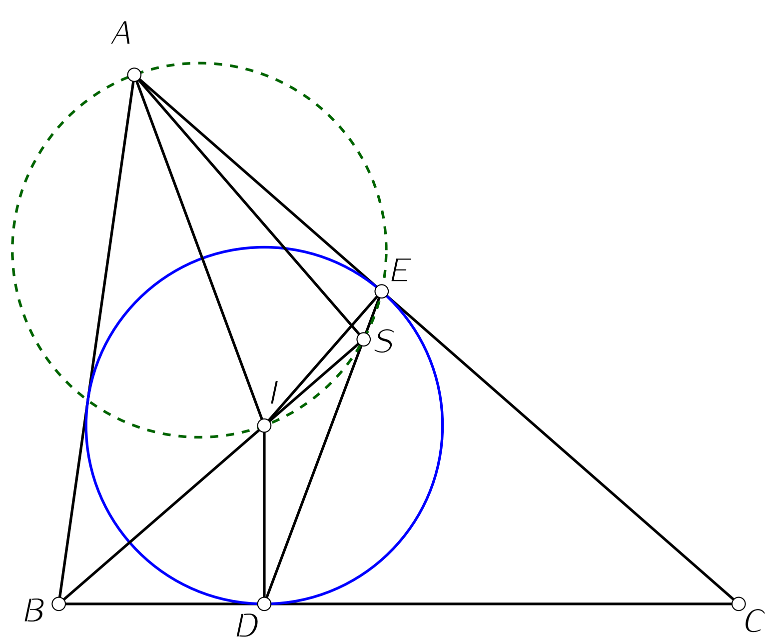
$$\frac{MD}{AE} = \frac{BD}{BE}, \quad \frac{ND}{AE} = \frac{CD}{CE}.$$

Với chú ý rằng $\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} \rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}$, nên

$$\frac{MD}{AE} = \frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE} = \frac{ND}{AE},$$

suy ra $MD = ND$ nên D là trung điểm của MN.
Lại có $MN \parallel AE$ và $AD \perp AE$ nên $MN \perp AD$ dẫn đến $\triangle AMN$ cân tại D.
Từ đó ta có ngay AD là phân giác của $\angle BAC$. □

Bài toán 42.
Cho $\angle ABx$ và các điểm A, B cố định. Một điểm C di động trên tia Bx. Đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc với các cạnh BC, AC lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định khi C di động trên tia Bx.



Chứng minh.
Gọi S là hình chiếu của A lên BI. Khi đó điểm S cố định.
Dó tứ giác $AESI$ nội tiếp nên

$$\angle ESA = \angle EIA = 90^\circ - \angle EAI. \tag{38}$$

Chú ý rằng

$$\triangle ASB \backsim \triangle IDB \to \triangle BIA \backsim \triangle BDS \to \angle BSD = \angle BAI = \angle EAI. \tag{39}$$

Từ (38) và (39), ta thu được

$$\angle BSD + \angle ASE = 90^\circ.$$

Dẫn đến $\overline{D; S; E}$. Hoàn tất chứng minh. □

Bài toán 43.

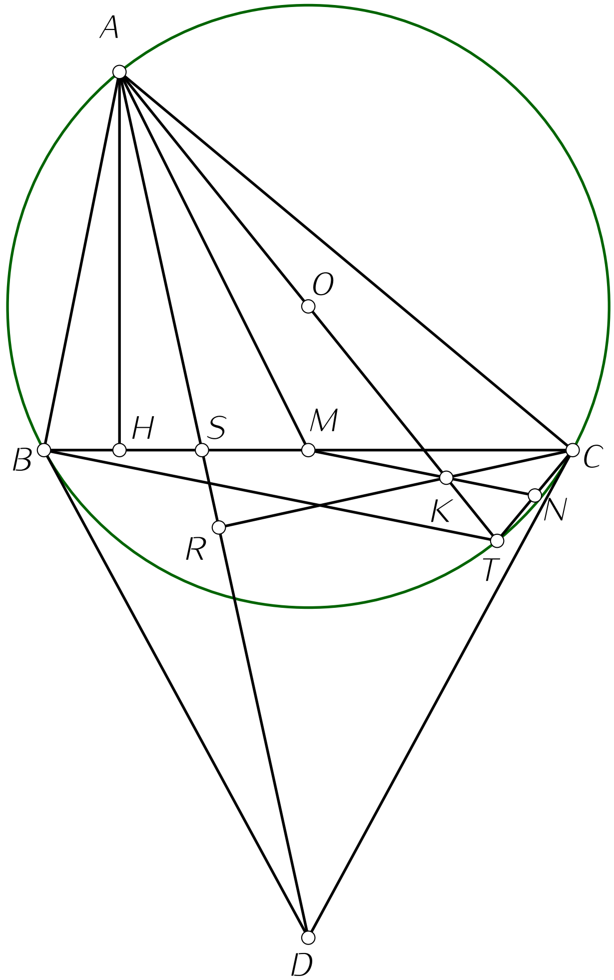
Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại điểm D. Kẻ đường kính AT của (O). Ký hiệu M và N lần lượt là trung điểm của CB và CT. Cho MN cắt AT tại điểm K. Chứng minh rằng $CK \perp AD$.

Tạp chí Tri Thức Trẻ

Chứng minh.
Kẻ đường cao AH của $\triangle ABC$.
Ký hiệu R là giao điểm của CK và AD.
Vì MN là đường trung bình của $\triangle BCT \to MN \parallel BT$ hay $MK \parallel TB$.
Nên theo định lý Reim, ta có tứ giác $MKCA$ nội tiếp.
Ta có AD là đường đối trung của $\triangle ABC$ nên $\angle BAS = \angle CAM$.
Lại có theo tính chất quen thuộc thì $\angle BAH = \angle CAO$.
Dẫn đến

$$\angle HAS = \angle MAK = \angle SMR,$$

suy ra tứ giác $AHRC$ nội tiếp nên $CK \perp AD$.



□

Bài toán 44.

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) với ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M là trung điểm của BC. Cho AM cắt OD tại điểm N. Gọi P và Q là giao điểm của (DEF) với (BOC). Chứng minh rằng 3 điểm P, N, Q thẳng hàng.

Chứng minh.

Cho EF cắt BC tại điểm S.

Ký hiệu O_1 và O_2 lần lượt là tâm (DEF) và (BOC).

Gọi X là giao điểm của SH và AM.

Hạ $OK \perp ST$, $TY \perp SN$.

Theo tính chất quen thuộc, ta có H là trực tâm của $\triangle ASM$ nên $SX \perp AM$.

Vì P và Q là giao điểm của (O_1) và (O_2) nên $PQ \perp O_1O_2$.

Dễ thấy O_1 là tâm đường tròn Euler của $\triangle ABC$ nên O_1 là trung điểm của OH.

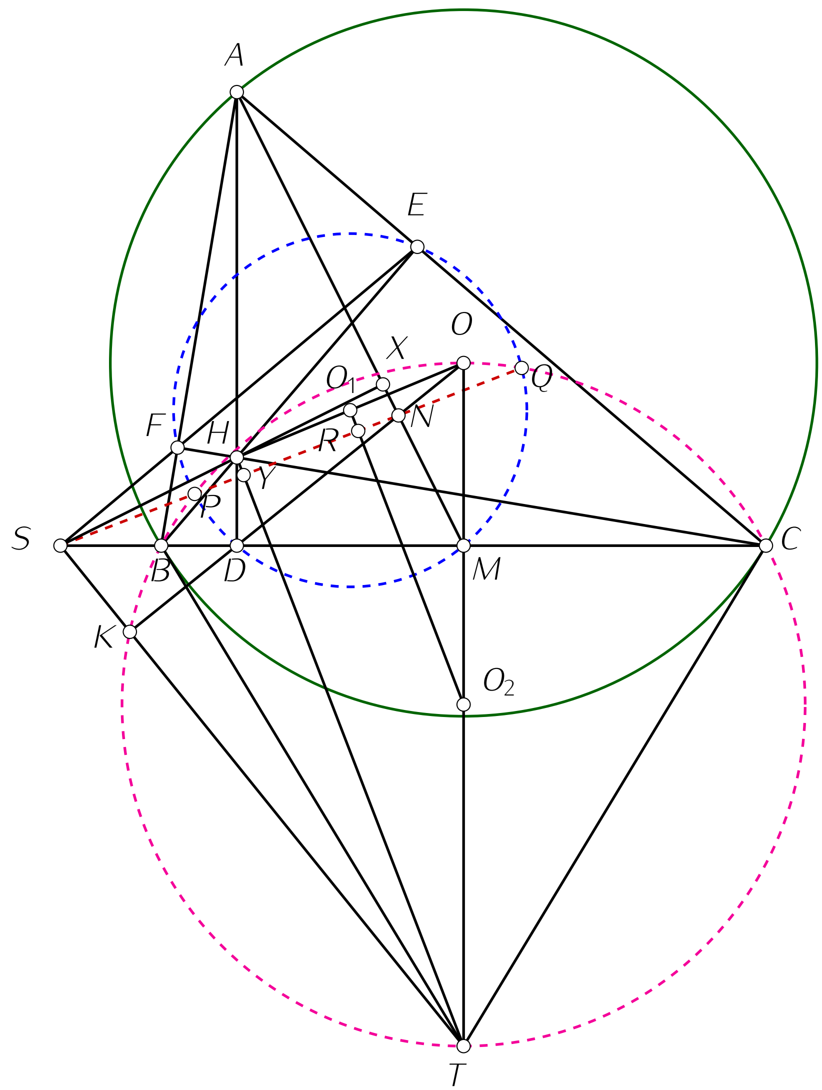
Lại có O_2 là trung điểm của OT nên O_1O_2 là đường trung bình của $\triangle OHT$.

Do đó $O_1O_2 \parallel HT$.

Do các tứ giác $NYKT$, $KBCT$, $BFEC$, $DFEM$, $DHXM$ nội tiếp nên

$$SY \cdot SN = SK \cdot ST = SB \cdot SC = SF \cdot SE = SD \cdot SM = SH \cdot SX,$$

nên tứ giác $HXNY$ nội tiếp.



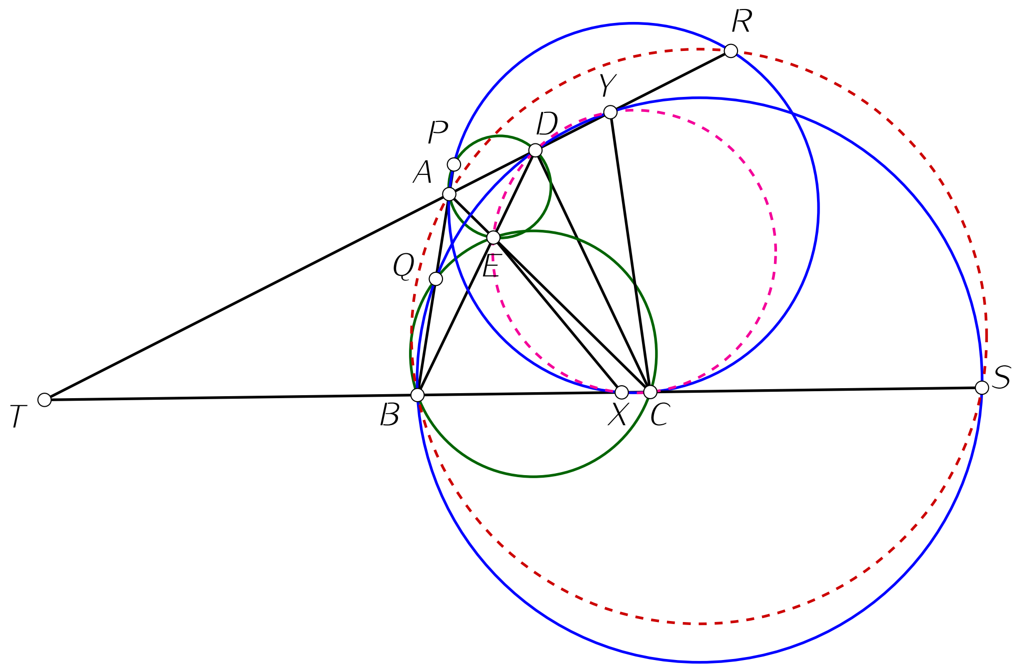
Dẫn đến $SN \perp TH$ tại điểm Y.
Mà $HT \parallel O_1O_2$ nên $SN \perp O_1O_2$.
Áp dụng tính chất của trục đẳng phương ở **Nhận xét 0.10**, ta có $\overline{S; P; Q}$.
Dẫn đến $SN \equiv PQ$ nên $\overline{P; N; Q}$ thẳng hàng. □

Bài toán 45.

Cho tứ giác lồi $ABCD$. Hai đường chéo AC cắt BD tại điểm E. Cho (ADE) và (BCE) cắt lại AB lần lượt tại điểm P và Q, (ACP) cắt lại AD tại điểm R, (BDQ) cắt lại BC tại điểm S. Chứng minh rằng 4 điểm A, B, R, S thuộc cùng một đường tròn.

ELMO 2024

Chứng minh.
Cho (ACP) cắt lại BC tại điểm X, (BDQ) cắt lại AD tại điểm Y.
Gọi T là giao điểm của AD và BC.
Ta có
$$AE \cdot AC = AQ \cdot AB = AD \cdot AY,$$
nên tứ giác $DECY$ nội tiếp.
Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có tứ giác $DEXC$ nội tiếp.



Dẫn đến 5 điểm D, E, C, X, Y cùng thuộc một đường tròn.
Khi đó, ta có

$$TA \cdot TR = TX \cdot TC = TD \cdot TY = TB \cdot TS,$$

nên tứ giác $ARSB$ nội tiếp,
hay 4 điểm A, B, S, R cùng thuộc một đường tròn. □

Bài toán 46.

Cho tam giác ABC và đường tròn nội tiếp (I) cố định. Một đường thẳng s bất kì đi qua điểm I cắt AB và BC lần lượt tại D và E. Ký hiệu P và Q lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ADI$ và $\triangle CEI$. Cho (DAI) cắt lại (CEI) tại điểm F. Chứng minh rằng (PQF) luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng s thay đổi nhưng vẫn luôn đi qua điểm I.

Yasinsky Geometry Olympiad, 2022

Chứng minh.
Vẽ đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Ký hiệu R, S, T lần lượt là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}, \overset{\frown}{AB}$.
Khi đó, hiển nhiên rằng các điểm R, S, T là cố định.
Do tứ giác $ADFI$ và $CEIF$ nội tiếp nên

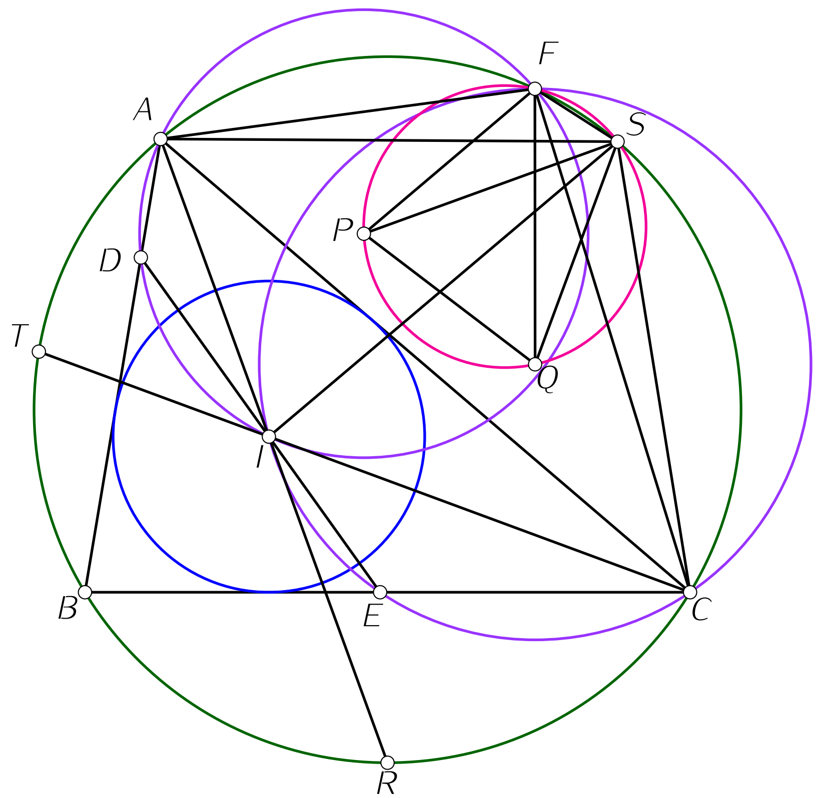
$$\angle AFC = \angle BDI + \angle BEI = 180^\circ - \angle ABC,$$

dẫn đến tứ giác $AFCB$ nội tiếp, hay $F \in (ABC)$.
Do đó

$$\angle AFC = \angle ASC. \tag{40}$$

Áp dụng bổ đề bắn ở **Nhận xét** 0.5, ta suy ra $SA = SI = SC$.
Lại có P và Q lần lượt là tâm của $\triangle DAI$ và $\triangle CEI$ nên SP và SQ lần lượt là phân giác của $\angle ASI$ và $\angle CSI$.
Do đó

$$\angle ASP + \angle CSQ = \frac{\angle ASC}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}}{4} = \angle ACI + \angle CAI = 180^\circ - \angle AIC. \tag{41}$$



Lại có

$$\angle AFP + \angle QFC = \frac{180^\circ - \angle APF}{2} + \frac{180^\circ - \angle CQF}{2} = 180^\circ - \angle AIC. \quad (42)$$

Từ (41) và (42), ta suy ra $\angle AFP + \angle QFC = \angle ASP + \angle CSQ$,
kết hợp với (40), ta suy ra ngay $\angle PFQ = \angle PSQ$.
Dẫn đến tứ giác $PFSQ$ nội tiếp.
Tức là (PFQ) luôn đi qua điểm S cố định. □

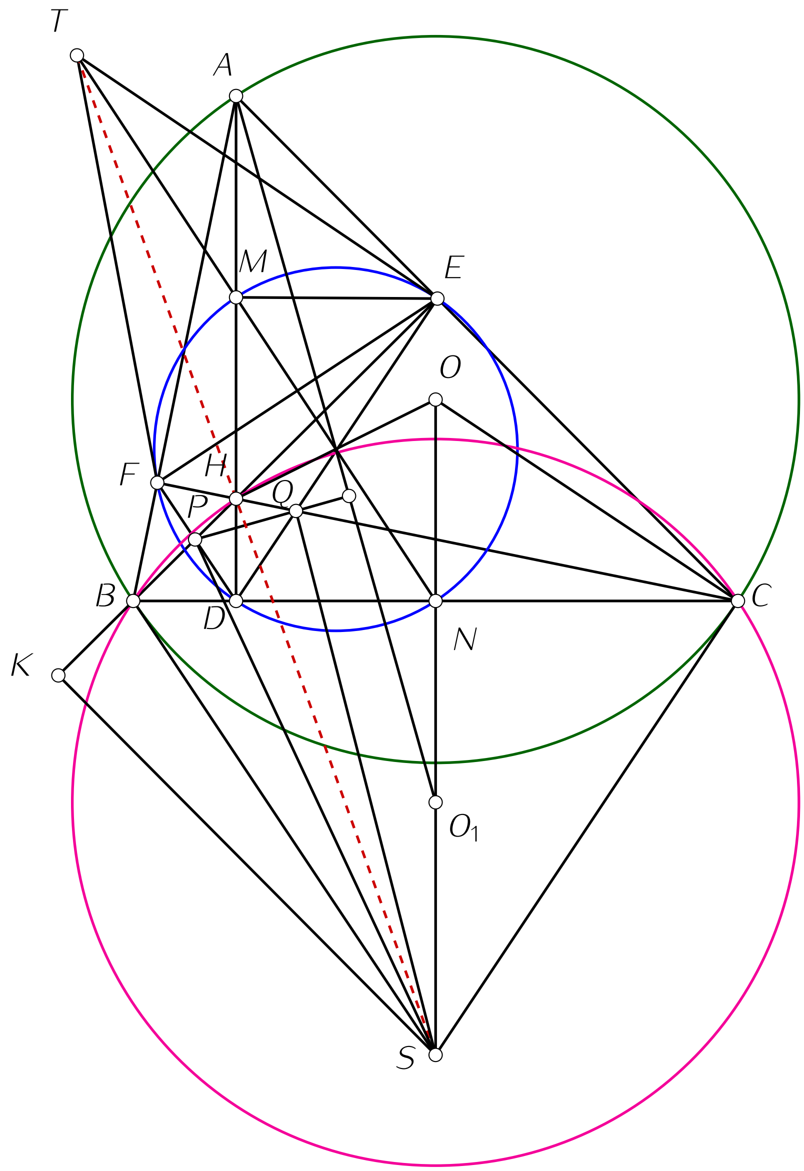
Bài toán 47.

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Ký hiệu S là giao điểm hai tiếp tuyến tại B và C của (O). Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của DE với CH và DF với BH. Gọi T là giao điểm của hai tiếp tuyến tại E và F của (DEF). Chứng minh rằng

(a) Đường thẳng qua A vuông góc với PQ đi qua tâm (BHC).

(b) SH chia đôi PQ.

(c) 3 điểm S, H, T thẳng hàng.



Chứng minh.

(a) Gọi O_1 là tâm của (BHC). Ta sẽ đi chứng minh $PQ \perp AO_1$.
Do điểm đối xứng của H qua BC thuộc (O) nên (O) đối xứng với (O_1) qua BC.
Theo tính chất quen thuộc, ta suy ra ngay AO_1 đi qua trung điểm của OH.
Vì tứ giác $BFHD$ nội tiếp nên

$$PH \cdot PB = PF \cdot PD,$$

dẫn đến P thuộc trục đẳng phương của (DEF) và (O_1).
Bằng cách chứng minh tương tự, ta có Q thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (DEF).
Từ đó ta suy ra ngay $PQ \perp AO_1$.

(b) Hạ $SK \perp BH$. Ta sẽ đi chứng minh $[HPS] = [HQS]$.
Thật vậy, do tứ giác $AFDC$ nội tiếp và SB là tiếp tuyến của (O) nên

$$\angle PDB = \angle BAC = \angle SBC,$$

mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $PD \parallel BS$.
Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có $QD \parallel SC$.

Áp dụng công thức diện tích và định lý sin, ta có

$$[HPS] = \frac{SK \cdot HP}{2} = \frac{SB \cdot \sin\angle HBS \cdot HP}{2} = \frac{BS \cdot \sin\angle HPD \cdot HP}{2},$$
$$= \frac{BS \cdot HD \cdot \sin\angle HDP}{2}$$

Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có

$$[HQS] = \frac{CS \cdot HD \cdot \sin\angle HDQ}{2}.$$

Với chú ý rằng $SB = SC$ và $\angle PDH = \angle QDH$, dẫn đến $[HPS] = [HQS]$.
Từ đó ta suy ra ngay SH đi qua trung điểm của PQ.

(c) Ký hiệu M, N thứ tự là trung điểm của AH và BC. Suy ra $M, N \in (DEF)$ và MN là đường kính của (DEF) nên MN là đường trung trực của EF.
Dẫn đến $\overline{T; M; N}$ và $\overline{O; N; O_1; S}$.
Theo tính chất quen thuộc, ta có $ON = \frac{AH}{2} = HM$.
Ta có

$$\frac{MH}{SN} = \frac{ON}{SN} = \frac{NC^2}{NS^2} = \frac{ON^2}{CN^2}. \tag{43}$$

Từ $TE^2 = TM \cdot TN$, ta suy ra

$$\frac{TM}{TN} = \frac{TE^2}{TN^2} = \frac{ME^2}{NE^2}. \tag{44}$$

Theo tính chất quen thuộc, ta có

$$\angle OCN = \angle ACF = \angle FBH = \angle FDH = \angle MDE = \angle MEN,$$

kết hợp với $\angle MEN = \angle ONC = 90^\circ$, ta suy ra ngay $\triangle MEN \backsim \triangle ONC$ $(g.g)$. Dẫn đến

$$\frac{ME}{NE} = \frac{ON}{CN}. \tag{45}$$

Từ (43),(44),(45), ta suy ra được

$$\frac{MH}{SN} = \frac{TM}{TN}.$$

Từ đó theo định lý Thalès đảo, ta có ngay $\overline{T; H; S}$.
Hoàn tất chứng minh.

□

Nhận xét 0.18. *Câu* (b) *của bài toán, tác giả đã sử dụng định lý sin để giải quyết bài toán. Còn tại câu* (c)*, tứ giác $FMEN$ có tên gọi là tứ giác điều hòa. Sau đây, tác giả sẽ trình bày về lý thuyết của định lý và mô hình tứ giác điều hòa. Phần chứng minh khá đơn giản nên xin phép dành lại cho bạn đọc.*

(i) ***Định lý sin.*** *"Cho tam giác ABC. Kí hiệu $BC = a, CA = b, AB = c$. Khi đó, ta có* $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} =$

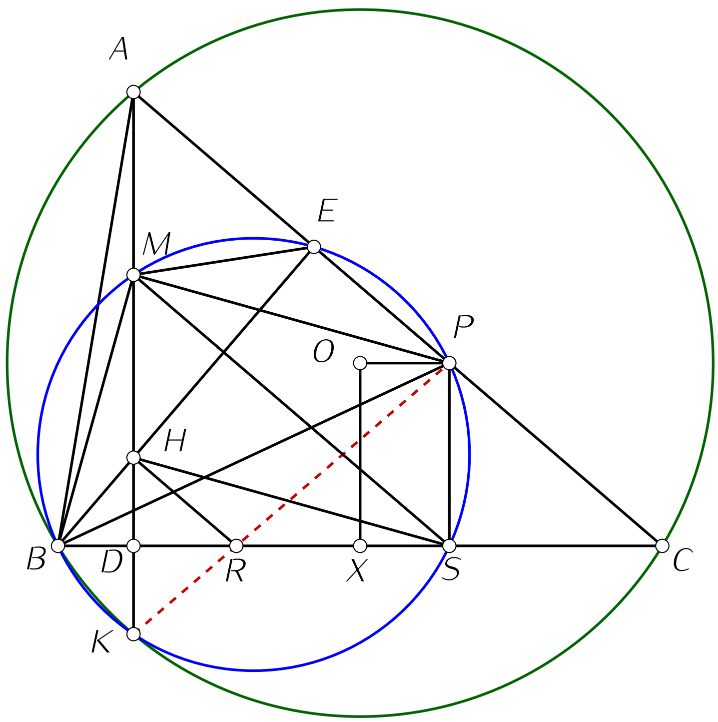
$\frac{c}{\sin C}$."

(ii) ***Mô hình tứ giác điều hòa.*** *"Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Khi đó các điều sau là tương đương*

1. *Tiếp tuyến tại A, C và BD đồng quy;*
2. *Tiếp tuyến tại B, D và AC đồng quy;*
3. *$AD \cdot BC = AB \cdot CD$."*

Bài toán 48.

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Ký hiệu H là trực tâm của $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của AH. Cho AH cắt lại (O) tại điểm K. Lấy điểm P trên cạnh AC sao cho $\angle BMP = 90^\circ$. Cho BC cắt lại (BMP) tại điểm S. Lấy R là điểm đối xứng của C qua S. Chứng minh rằng ba điểm K, R, P thẳng hàng.



Chứng minh.

Qua O kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AC tại điểm P'. Gọi S' và X lần lượt là hình chiếu của P' và O lên cạnh BC.

Dễ thấy tứ giác $OP'S'X$ là hình chữ nhật.

Theo tính chất quen thuộc, ta có

$$2MH = AH = 2OX = 2P'S',$$

do đó $MH = P'S'$, mà $MH \parallel OX \parallel P'S'$, nên tứ giác $HMP'S'$ là hình bình hành.

Từ đó suy ra $S'H \parallel P'M$.

Lại có

$$DH \cdot DM = DK \cdot DM = DB \cdot DS',$$

dẫn đến H là trực tâm của $\triangle BMS'$.

Nên $S'H \perp BM$, dẫn đến $\angle BMP' = 90^\circ = \angle BMP$.

Khi đó $P' \equiv P$ và $S' \equiv S$.

Vì H là trực tâm của $\triangle BMS$ và $\triangle ABC$ nên

$$DH \cdot DM = DB \cdot DS, \quad DH \cdot DA = DB \cdot DC,$$

$$\frac{DM}{DS} = \frac{DB}{DH} = \frac{DA}{DC},$$

theo định lý Thalès đảo, ta suy ra ngay $MS \parallel AC$.
Áp dụng tiếp tục định lý Thalès, ta có

$$\frac{DM}{DS} = \frac{AM}{CS} = \frac{MH}{SR},$$

áp dụng tiếp tục định lý Thalès đảo, ta suy ra ngay $HR \parallel MS \parallel AC$.
Dẫn đến

$$\angle PRC = \angle PCD = \angle DRH = \angle KRD,$$

như vậy ta có ngay $\overline{K; R; P}$. □

Bài toán 49.

Cho hai đường tròn $(O), (O')$ tiếp xúc ngoài nhau tại D. Từ một điểm A bất kì trên (O), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O'). Gọi I là giao điểm của AD và BC. Gọi M là trung điểm của BC. Đường tròn đường kính AI cắt lại đường tròn (O) tại P (P khác A).

(a) Chứng minh rằng AP, IM và tiếp tuyến tại D của dường tròn (O) đồng quy tại một điểm.

(b) Chứng minh $P \in (ABC)$.

(c) Gọi G là giao điểm của PD và BC. Chứng minh rằng (GPM) tiếp xúc với (O).

Chọn đội tuyển VMO – Cần Thơ

Chứng minh.

(a) AP là trục đẳng phương của (O) và (AI).
IM là trục đẳng phương của (O') và (AI).
Tiếp tuyến tại D của (O) là trục đẳng phương của (O) và (O').
Do đó AP, IM và tiếp tuyến tại D của (O) đồng quy tại S.

(b) Do S là tâm đẳng phương của $(O), (O')$ và (AI) nên

$$SP \cdot SA = SC \cdot SB,$$

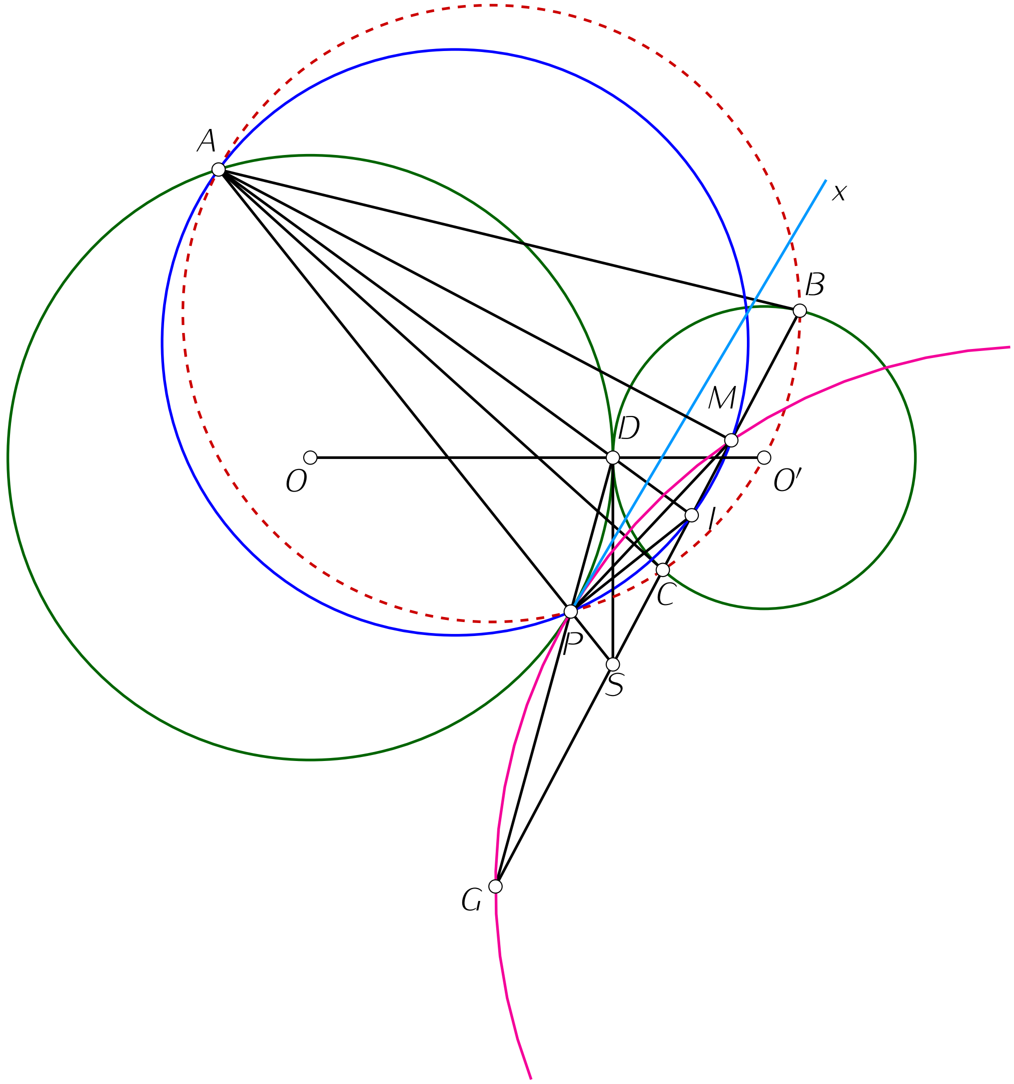
dẫn đến tứ giác $APCB$ nội tiếp nên $P \in (ABC)$.

(c) Kẻ tiếp tuyến Px của (GPM). Khi đó, ta biến đổi góc như sau

$$\angle GPx = 180^\circ - \angle GMP = \angle PMB = 90^\circ + \angle PIA,$$

$$\angle DPx = 90^\circ - \angle AIP = \angle DAP,$$

do đó Px cũng là tiếp tuyến của (O).
Tới đây, ta suy ra ngay (GPM) tiếp xúc với (O).



□

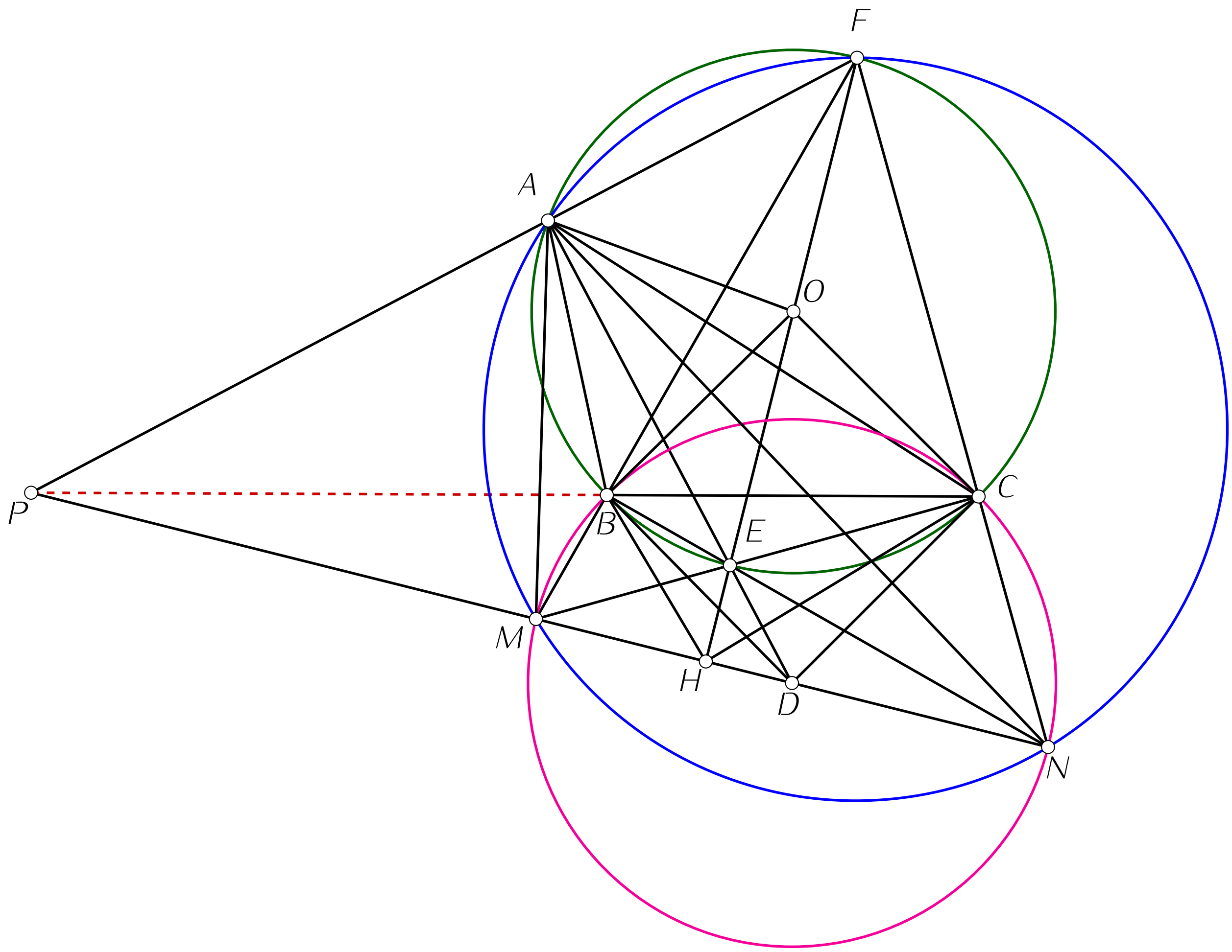
Bài toán 50.

Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định thuộc đường tròn (BC không là đường kính của (O)) Trên cung lớn BC của (O), lấy điểm A di động sao cho $\triangle ABC$ không cân tại A. Tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại D. Đường thẳng AD cắt lại (O) tại điểm E. Kẻ đường kính EF của (O). Ký hiệu M và N lần lượt là giao điểm của BF với CE và CF với BE. Cho AF cắt MN tại điểm P.

(a) Chứng minh rằng D là trung điểm của BC.

(b) Chứng minh rằng P thuộc một đường thẳng cố định.

Chọn đội tuyển VMO - Sóc Trăng



Chứng minh.

(a) Dễ thấy tứ giác $BCNM$ nội tiếp (MN) và $DB = DC$ nên ta chỉ cần chỉ ra rằng $\overline{M; D; N}$ là đủ.
Thật vậy, kéo dài FE cắt MN tại $H \to FH \perp MN$.
Ta có

$$\angle BHC = 2\angle BMC = 2\left(90^\circ - \angle BFC\right) = 180^\circ - \angle BOC,$$

suy ra tứ giác $OBHC$ nội tiếp.
Lại có tứ giác $OBDC$ nội tiếp nên 5 điểm O, B, H, D, C thuộc cùng một đường tròn.
Khi đó

$$\angle OHD = \angle OBD = 90^\circ = \angle OHN,$$

dẫn đến $\overline{H; D; N} \to \overline{M; D; N}$.

(b) Do tiếp tuyến tại B, C và AE đồng quy nên theo mô hình tứ giác điều hòa tại **Nhận xét** 0.18, ta suy ra

$$AB \cdot CE = AC \cdot BE \to \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE} = \frac{BM}{CN},$$

kết hợp với

$$\angle ABM = 180^\circ - \angle ABF = 180^\circ - \angle ACF = \angle ACN,$$

ta suy ra $\triangle ABM \backsim \triangle ACN\ (c.g.c) \to \angle MAB = \angle NAC$.
Dẫn đến

$$\angle MAN = \angle BAC = \angle MFN,$$

suy ra tứ giác $AFNM$ nội tiếp.
Từ đó, ta có P là tâm đẳng phương của $(AFCB), (BCNM), (AFNM)$.
Nên $P \in BC$ cố định.

□

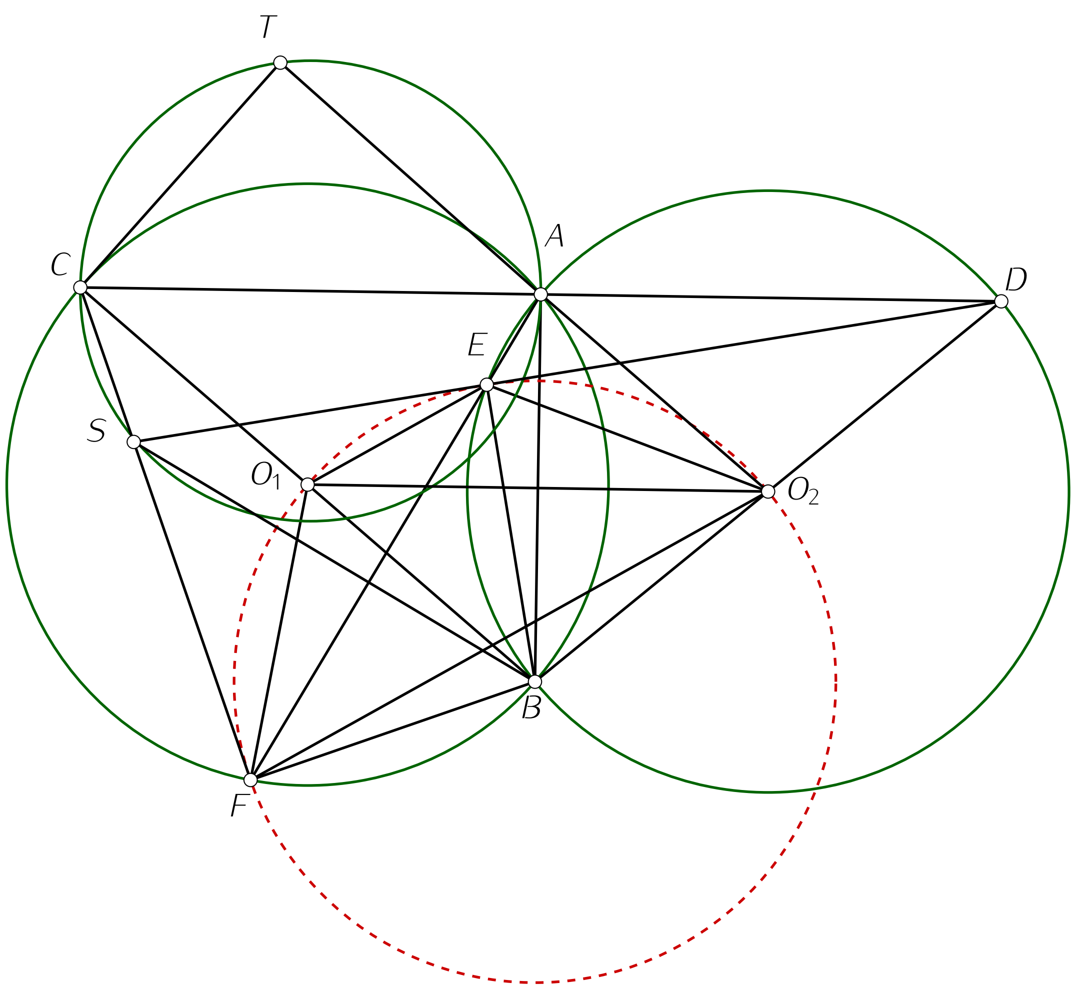
Bài toán 51.

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) có cùng bán kính R, cắt nhau tại hai điểm A, B và $O_1O_2 > R$. Đường thẳng qua A vuông góc với AB cắt lại $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại hai điểm C và D. Trên nửa mặt phẳng bờ CD chứa điểm B, xét tia Ax tạo với tia AC góc $60°$ và tia Ax cắt (O_2) tại E, cắt (O_1) tại F.

(a) Chứng minh rằng O_1, O_2, E, F cùng thuộc một đường tròn. Đồng thời DE cắt CF tại một điểm nằm trên đường thẳng qua B vuông góc với Ax.

(b) Trên nửa đường tròn đường kính CA, khác phía với O_1, dựng T sao cho $CT = R$. Chứng minh rằng $O_1E + O_2F \geq 2TA$.

Chọn đội tuyển VMO - Sóc Trăng



Chứng minh.

(a) Hiển nhiên thấy rằng $\overline{B; O_1; C}$ và $\overline{B; O_2; D}$.
Ta có

$$\angle BO_1F = 2\angle BAF = 60°,$$

mà $\triangle BO_1C$ cân tại O_1 nên $\triangle BO_1C$ đều.
Suy ra $BF = BO_1$.
Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có $BO_2 = BE$.
Do đó

$$BF = BO_1 = BO_2 = BE,$$

nên tứ giác O_1EO_2F nội tiếp.
Cho DE cắt CF tại điểm S.
Khi đó, ta có

$$\angle SEF = \angle AED = \angle ABD = \angle ABC = \angle SFE,$$

dẫn đến BS là đường trung trực EF.
Từ đó ta suy ra ngay $BS \perp EF$.

(b) Dễ thấy AO_2 là đường trung bình của $\triangle DBC \rightarrow AO_2 \parallel CO_1$.
Điều đó chứng tỏ AO_2O_1C là hình bình hành.
Do $O_1F = O_2E$ nên $O_1E \parallel O_2F$ dẫn đến O_1EO_2F là hình thang cân.
Áp dụng định lý Ptolemy, ta có

$$O_1E \cdot O_2F = O_1O_2^2 - R^2 = AC^2 - CT^2 = AT^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Am-Gm, ta có

$$AT^2 = O_1E \cdot O_2F \leq \frac{(O_1E + O_2F)^2}{4},$$

$$O_1E + O_2F \geq 2AT.$$

Đẳng thức xảy ra khi $O_1E = O_2F$.

□

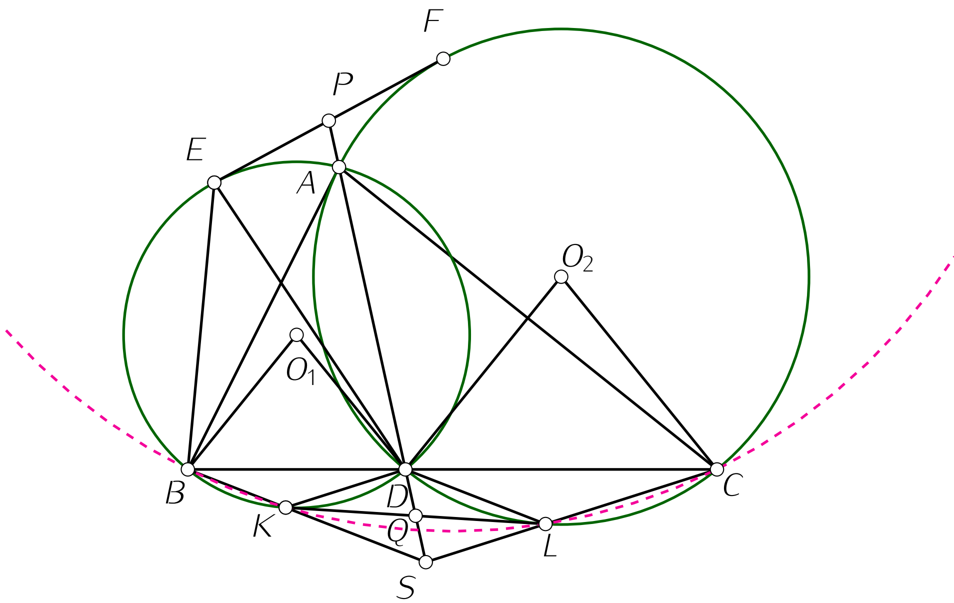
Bài toán 52.

Xét tam giác ABC, đường phân giác AD. Gọi giao điểm của AD với tiếp tuyến chung ngoài của (ABD) và (ACD) là P và Q. Chứng minh rằng $PQ^2 = AB \cdot AC$.

Chứng minh.
Kí hiệu O_1, O_1 thứ tự là tâm của (ABD) và (ACD).
Gọi EF và KL là tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2).
Vì $O_1B \parallel O_2Q$ và $O_1K \parallel O_2L$ nên ta có phép biến đổi góc sau

$$\begin{aligned}\angle BKL = \angle BKD + \angle KBD = 180^\circ - \angle BDK &= 180^\circ - \frac{\angle BO_1K}{2},\\ &= 180^\circ - \frac{\angle DO_2L}{2} = 180^\circ - \angle DCL.\end{aligned}$$

Dẫn đến tứ giác $BKLC$ nội tiếp.



Áp dụng **Nhận xét** 0.10 cho 3 đường tròn $(O_1), (O_2)$ và $(BKLC)$, ta suy ra AD, BK, CL đồng quy tại điểm S.
Lại có $\angle SLK = \angle KBC = \angle LKD$ nên $SL \parallel KD$.
Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có $DL \parallel KS$ và do đó tứ giác $KDLS$ là hình bình hành nên J là trung điểm của DS.
Dễ nhận thấy rằng $PA = DQ$ nên $PQ = AS$.
Mặt khác, do $\triangle SDK \backsim \triangle SBA$ và $\triangle SDL \backsim \triangle SCA$ nên

$$\frac{SK}{KD} = \frac{SA}{AB} \text{ và } \frac{SL}{LD} = \frac{SA}{AC},$$

$$\frac{AS^2}{AB \cdot AC} = \frac{SK}{KD} \cdot \frac{SL}{LD} = 1,$$

$$AS^2 = AB \cdot AC.$$

Hoàn tất chứng minh. □

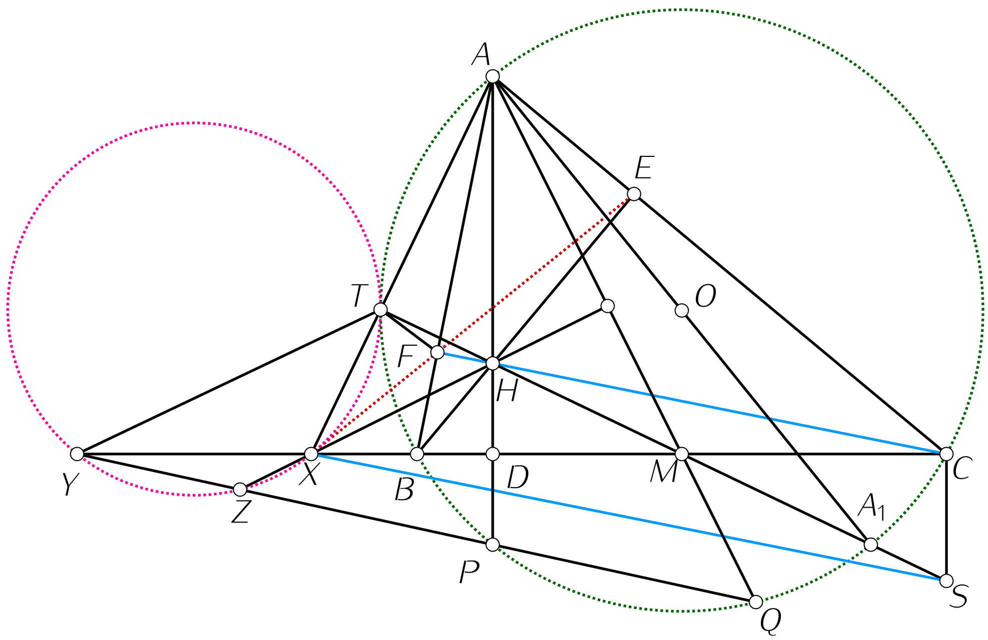
Bài toán 53.

Xét tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Hạ ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Gọi M là trung điểm của BC.

(a) Đường thẳng qua H vuông góc với AM cắt BC tại điểm X. Chứng minh rằng E, F, X thẳng hàng.

(b) Đường thẳng qua C vuông góc với BC cắt HM tại điểm S. Chứng minh rằng $SX \parallel CH$.

(c) Cho AD, AM thứ tự cắt lại (O) thứ tự tại điểm P và Q. Kéo dài PQ cắt BC, HX lần lượt tại hai điểm Y và Z. Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc với (O).



Lời giải.

(a) Ta định nghĩa lại điểm X là giao điểm của EF với BC.
Do đó, ta cần chứng minh $XH \perp AM$.
Thật vậy, kẻ đường kính AA_1 của (O).
Cho AX cắt lại (O) tại điểm T.
Ta có

$$XF \cdot XE = XB \cdot XC = XT \cdot XA,$$

nên tứ giác $ATFE$ nội tiếp.
Mặt khác, ta lại có tứ giác $AFHE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH nên $\angle ATH = 90^\circ$.
Do AA_1 là đường kính của (O) nên $\angle ATA_1 = 90^\circ$ nên ba điểm T, H, A_1 thẳng hàng.
Vì tứ giác $BHCA_1$ là hình bình hành nên H, M, A_1 thẳng hàng.
Điều đó chứng tỏ bốn điểm T, H, M, A_1 thẳng hàng nên $MT \perp AX$.
Khi đó H là trực tâm của $\triangle AXM$ nên $XH \perp AM$.

(b) Ta có tứ giác $AFDC$ và $AEDB$ nội tiếp nên $\widehat{BDF} = \widehat{BAC} = \widehat{CDE}$.
Theo tính chất đường tròn Euler, ta suy ra tứ giác $DFEM$ nội tiếp nên $\widehat{BDF} = \widehat{MEX}$.
Do đó $\widehat{MEX} = \widehat{MDE}$, kết hợp với $\widehat{EMX}$ chung nên

$$\triangle MDE \backsim \triangle MEX \ (g.g) \rightarrow MD \cdot MX = ME^2 = MC^2.$$

Dẫn đến $\dfrac{MB}{MX} = \dfrac{MC}{MX} = \dfrac{MD}{MC}$.
Áp dụng định lý Thalès cho DH CS, ta có $\dfrac{MD}{MC} = \dfrac{MH}{MS} = \dfrac{MA_1}{MS}$.
Do đó $\dfrac{MB}{MX} = \dfrac{MA_1}{MS}$.
Áp dụng định lý Thalès đảo, ta suy ra $BA_1 \parallel SX$.
Chú ý rằng $BA_1 \parallel CH$, ta suy ra ngay $CH \parallel SX$.

(c) Do $\angle ATM = \angle ADM = 90^\circ$ nên tứ giác $ATDM$ nội tiếp.
Khi đó, ta biến đổi góc như sau

$$\angle TMY = \angle TAP = \angle TQY,$$

nên tứ giác $YTMQ$ nội tiếp.
Dẫn đến

$$\angle TYZ = \angle AMT = \angle AXH,$$

nên tứ giác $XZYT$ nội tiếp, hay là $T \in (XYZ)$.
Tới đây, ta biến đổi góc

$$\angle TYX + \angle TAA_1 = \angle TQA + \angle TAA_1 = \angle TA_1A + \angle TAA_1 = 90^\circ = \angle XTA_1,$$

suy ra (XYZ) tiếp xúc với (O) tại điểm T.

Hoàn tất bài toán. $\square$