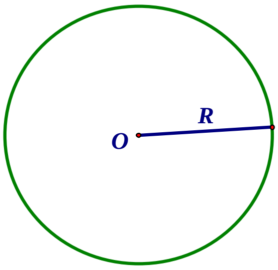
CHƯƠNG 5
ĐƯỜNG TRÒN

BÀI 1
ĐƯỜNG TRÒN
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

1. Khái niệm đường tròn

Trong mặt phẳng, đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là tập hợp các điểm cách điểm O cố định một khoảng R, kí hiệu là: $(O;R)$



Chú ý:

- Một đường tròn hoàn toàn xác định khi biết tâm và bán kính.
- Khi không chú ý đến bán kính của đường tròn $(O;R)$, ta cũng có thể kí hiệu đường tròn (O).

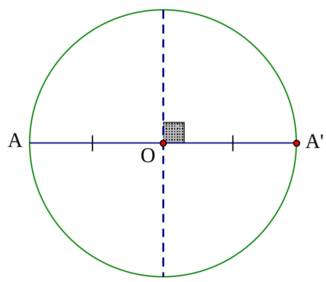
Vị trí tương đối của một điểm đối với đường tròn

Nhận xét:

- Điểm M nằm trên đường tròn (O) nếu $OM = R$
- Điểm M nằm trong đường tròn (O) nếu $OM < R$
- Điểm M nằm ngoài đường tròn (O) nếu $OM > R$

2. Tính chất đối xứng của đường tròn

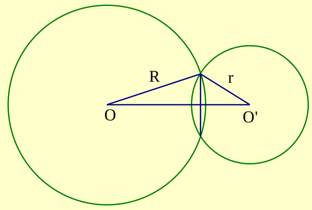
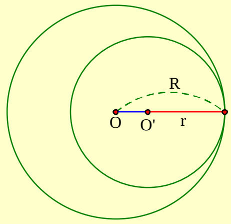
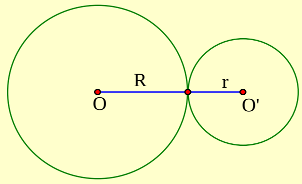
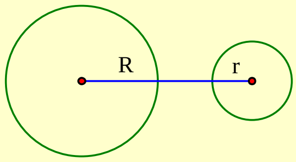
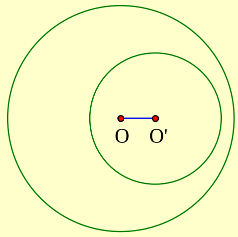
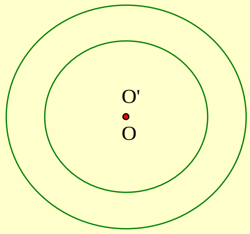
- Đường tròn là hình có tâm đối xứng: Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó
- Đường tròn là hình có trục đối xứng: Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn đó.



3. Liên hệ giữa đường kính và dây của đường tròn

- Đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt thuộc đường tròn được gọi là dây (hay dây cung) của đường tròn.
- Dây đi qua tâm là đường kính của đường tròn. Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính của đường tròn đó

4. Vị trí của hai đường tròn

<table>
<tr><th colspan="2">Vị trí tương đối của hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)(R \geq r)$</th><th>Số điểm chung</th><th>Hệ thức</th><th>Hình vẽ</th></tr>
<tr><td colspan="2">Cắt nhau</td><td>2</td><td>$R-r < OO' < R+r$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tiếp xúc</td><td>Tiếp xúc trong</td><td rowspan="2">1</td><td>$OO' = R-r > 0$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Tiếp xúc ngoài</td><td>$OO' = R+r$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Không cắt nhau</td><td>Ngoài nhau</td><td rowspan="3">0</td><td>$OO' > R+r$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Đựng nhau</td><td>$0 \neq OO' < R-r$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$OO' \equiv O$</td><td>
</td></tr>
</table>

Chú ý:

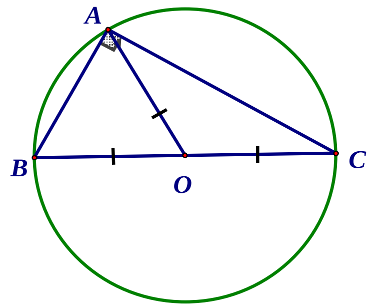
- Đường nối tâm (đường thẳng đi qua tâm 2 đường tròn) là trục đối xứng của hình tạo bởi hai đường tròn.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.
- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

DẠNG 1
CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM CHO TRƯỚC CÙNG NẰM TRÊN MỘT ĐƯỜNG TRÒN
TÍNH BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

Cách 1: Chứng minh các điểm cho trước cùng cách đều 1 điểm cho trước nào đó.

Cách 2: Nếu $\widehat{BAC}=90^0$ thì A thuộc đường tròn đường kính BC.



Xét tam giác vuông ABC, có AO là đường trung tuyến nên $AO=\frac{1}{2}BC \Rightarrow AO=OB=OC$

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB=5cm, AC=12cm$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Tính bán kính của đường tròn đó.

Bài 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=9cm, BC=12cm$.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Xác định tâm đối xứng và hai trục đối xứng của đường tròn đó.

c) Tính bán kính đường tròn đó.

Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Xác định tâm đối xứng và hai trục đối xứng của đường tròn đó.

c) Tính bán kính đường tròn đó theo a.

Bài 4. Cho tam giác đều ΔABC cạnh bằng a, các đường cao BM, CN. Gọi O là trung điểm của BC

a) Chứng minh rằng B, C, M, N cùng thuộc đường tròn (O).

b) Gọi G là giao điểm của BM và CN. Chứng minh điểm G nằm trong, điểm A nằm ngoài đối với đường tròn đường kính BC.

Bài 5. Cho đường tròn tâm (O), đường kính AB và một dây AC bằng bán kính đường tròn.

a) Chứng minh tam giác OAC đều.

b) Tính các góc của ΔABC.

Bài 6. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BCD}+\widehat{ADC}=90^0$ và kéo dài AD và BC cắt nhau tại E. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của AB,BD,DC,CA.

a) Tam giác ECD là tam giác gì?

b) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

c) Chứng minh rằng bốn điểm M,N,P,Q cùng nằm trên 1 đường tròn.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD}=60^0$. Gọi E,F,G,H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC,CD,DA.

a) Chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh rằng 6 điểm E,F,G,H,B,D cùng nằm trên 1 đường tròn

Bài 8. Cho tam giác ABC và điểm M là trung điểm của BC. Hạ MD,ME theo thứ tự vuông góc với AB,AC. Trên tia đối của tia DB và EC lần lượt lấy các điểm I,K sao cho D là trung điểm của BI, E là trung điểm của CK. Chứng minh rằng $B,I,$C,K cùng nằm trên 1 đường tròn.

Bài 9. Gọi I,K theo thứ tự là các điểm nằm trên AB,AD của hình vuông $ABCD$ sao cho $AI=AK$. Đường thẳng kẻ qua A vuông góc với DI ở P và cắt BC ở Q. Chứng minh rằng C,D,P,Q cùng thuộc 1 đường tròn.

Bài 10. Cho tam giác ABC, ba đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Gọi I,J,K,L lần lượt là trung điểm của AB,AC,HC,HB. Chứng minh rằng 6 điểm I,J,K,L,E,F thuộc 1 đường tròn.

Bài 11. Cho hình vuông $ABCD$, gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của OB,CD

a) Chứng minh rằng A,M,N,D thuộc 1 đường tròn.

b) So sánh AN và DM.

Bài 12. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,BC. Gọi E là giao điểm của CM và DN

a) Tính số đo góc CEN

b) Chứng minh A,D,E,M cùng nằm trên 1 đường tròn

c) Xác định tâm của đường tròn đi qua 3 điểm B,D,E

Bài 13. Cho nửa đường tròn $(O;\ R)$ đường kính BC. A là một điểm thay đổi trên đường tròn sao cho $AB>AC$. Tia phân giác $\widehat{BAC}$ cắt đường trung trực BC tại D. Hạ DH và DK lần lượt vuông góc với AB và AC.

a) Chứng minh rằng $AHDK$ là hình vuông.

b) Chứng minh $A,\ B,\ C,\ D$ cùng thuộc một đường tròn.

Bài 14. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH.

a) Biết $AB = 5\,cm,\ BC = 13\,cm$. Tính độ dài cạnh AH và số đo góc $\widehat{BAH}$

b) Gọi O là trung điểm của AC, K là hình chiếu của O trên BC. Chứng minh 4 điểm $A,\ B,\ O,\ K$ cùng nằm trên một đường tròn.

c) Đường thẳng qua A và vuông góc với BO cắt đường thẳng qua C vuông góc với AC tại M. Chứng minh $\Delta ABO \backsim \Delta CAM$ và ba điểm $O,\ K,\ M$ thẳng hàng

Bài 15. Cho ΔABC cân tại A, vẽ hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng bốn điểm $B,\ F,\ E,\ C$ cùng thuộc một đường tròn và chỉ ra tâm của đường tròn đó.

b) Gọi $I,\ K$ lần lượt là hai điểm trên BH và CH sao cho $HE = HI,\ HF = HK$. Chứng minh rằng bốn điểm $E,\ F,\ I,\ K$ cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi M là trung điểm của AH. Tìm điều kiện của ΔABC để điểm M thuộc đường tròn đi qua bốn điểm $E,\ F,\ I,\ K$.

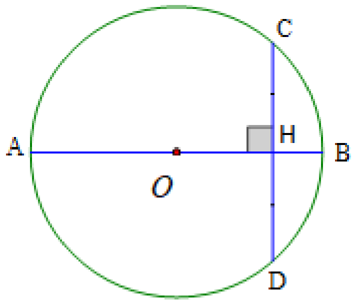
DẠNG 2
LIÊN HỆ GIỮA ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

- Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn đó.
- Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính của đường tròn đó

Bổ đề 1: Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy

Bài toán: Cho đường tròn tâm O và đường kính AB. Trên đường tròn kẻ dây CD sao cho vuông góc AB. Chứng minh AB đi qua trung điểm của CD.

Chứng minh:



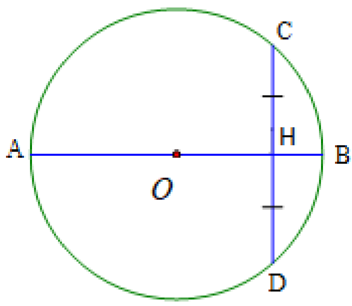
Gọi H là giao điểm của AB và CD.

Xét tam giác COD cân tại O ($OC = OD$) và OH là đường cao nên OH là đường trung trực của đoạn thẳng CD, do đó OH là trung tuyến vì vậy OH đi qua trung điểm CD hay AB đi qua trung điểm của CD.

Bổ đề 2: Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

Bài toán: Cho đường tròn tâm O và đường kính AB. Trên đường tròn kẻ dây CD sao cho AB đi qua trung điểm của CD. Chứng minh AB vuông góc với CD.

Chứng minh:

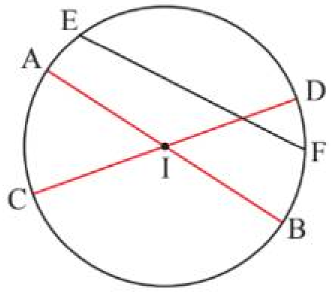


Gọi H là giao điểm của AB và CD.

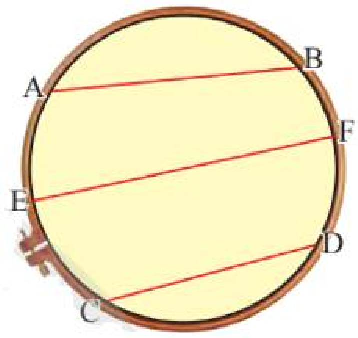
Xét tam giác COD cân tại O ($OC = OD$) và OH là đường trung tuyến nên OH là đường trung trực của đoạn thẳng CD, do đó OH vuông góc CD hay AB vuông góc với CD.

Chú ý: Khi dùng 2 bổ đề trên thì phải chứng minh vì trong sách giáo khoa không có nói đến chúng.

Bài 1. Cho đường tròn (I) có các dây cung AB, CD, EF. Cho biết AB và CD đi qua tâm I, EF không đi qua I (như hình vẽ). Hãy so sánh độ dài AB, CD, EF.



Bài 2. Bạn Minh Hiền căng ba đoạn chỉ AB, CD, EF có độ dài lần lượt là $26cm$, $24cm$ và $30cm$ trên một khung thêu hình tròn bán kính $15cm$ (như hình vẽ). Trong ba dây trên, dây nào đi qua tâm của đường tròn? Giải thích.



Bài 3. Cho đường tròn tâm O bán kính $3cm$ và hai dây AB và AC. Cho biết $AB = 5cm$ $AC = 2cm$.

a) Tính khoảng cách từ O đến dây AB.

b) Tính khoảng cách từ O đến dây AC.

Bài 4. Cho đường tròn tâm $(O;R)$ và một dây cung AB. Gọi I là trung điểm của AB, tia OI cắt cung AB tại M.

a) Cho $R = 5cm, AB = 6cm$. Tính độ dài dây cung MA

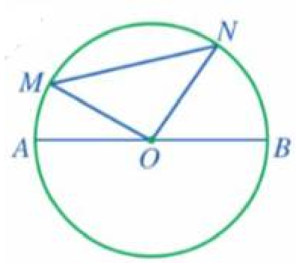
b) Gọi N là điểm đối xứng của M qua O, giả sử $MA = 5cm; AB = 6cm$. Tính bán kính R.

Bài 5. Cho đường tròn tâm O, hai dây AB và CD vuông góc với nhau ở M. Biết $AB = 18cm, CD = 14cm, MC = 4cm$. Hãy tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây AB và CD

Bài 6. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và một dây cung CD. Kẻ AE và BF vuông góc với CD lần lượt tại E và F. Chứng minh $CE = DF$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Quan sát hình vẽ bên dưới.



a) So sánh MN và $OM+ON$.

b) So sánh MN và AB.

Bài 8. Cho đường tròn (O) và dây CD. Từ O kẻ tia vuông góc với CD tại M, cắt (O) tại H. Tính bán kính R của (O) biết: $CD=16cm, MH=4cm$

Bài 9. Cho đường tròn (O) bán kính $OA=11cm$. Điểm M thộc bán kính AO và cách O khoảng 7cm. Qua M kẻ dây CD có độ dài 18cm. Tính độ dài các đoạn thẳng MC và MD

Bài 10. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Dây CD cắt AB tại M, biết $MC=4cm, MD=12cm$. $\widehat{BMD}=30^0$. Hãy tính :

a) Khoảng cách từ O đến CD

b) Bán kính của (O)

Bài 11. Cho đường tròn (O) có các dây $AB=24cm, \text{AC}=20cm, \widehat{BAC}<90^0$ và O nằm trong góc BAC. Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách từ điểm M đến AB bằng 8cm

a) Chứng minh tam giác ABC cân.

b) Tính bán kính của (O)

Bài 12. Cho đường tròn tâm $(O;R)$, A và B di động trên đường tròn (O) thỏa mãn $\widehat{AOB}=120^0$. Vẽ $OH\perp AB=H$

a) Chứng minh H là trung điểm của AB

b) Tính OH, AB và S_{OAB} theo R

c) Tia OH cắt đường tròn $(O;R)$ tại C. Tứ giác $OABC$ là hình gì? Vì sao

Bài 13. Cho tam giác ABC có trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD

a) Chứng minh $BHCD$ là hình bình hành

b) Kẻ đường kính OI vuông góc BC tại I. Chứng minh I, H, D thẳng hàng

c) Chứng minh $AH=2OI$

Bài 14. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD cắt AB tại I. Gọi H, K theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng: $CH=DK$

Bài 15. Cho tam giác ABC ($AB<AC$) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại trực tâm H. Lấy I là trung điểm của BC

a) Gọi K là điểm đối xứng của H qua I. Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành

b) Xác định tâm O của đường tròn qua các điểm A, B, K, C

c) Chứng minh: $OI//CH$

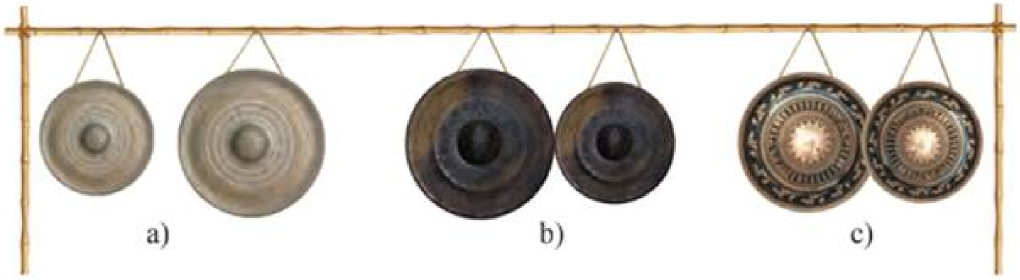
d) Chứng minh rằng: $BE.BA+CD.CA=BC^2$

Bài 16. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên đoạn thẳng OA lấy điểm C và trên đoạn thẳng OB lấy điểm D sao cho $OC = OD$. Từ C và D kẻ hai tia song song cắt nửa đường tròn ở E và F. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh rằng: $S_{CEF} + S_{DEF} = EF.OI$

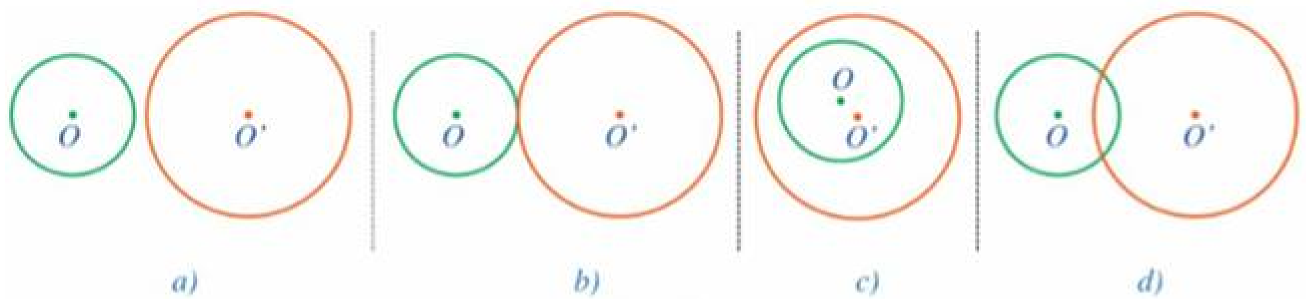
Bài 17. Cho đường tròn $(O;R)$. Các điểm A,B,C,D thuộc $(O;R)$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$

DẠNG 3
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. Mô tả vị trí tương đối giữa mỗi cặp đường tròn trong hình chụp bộ cồng chiêng Tây Nguyên trong hình vẽ bên dưới.



Bài 2. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (O') trong mỗi hình a, b, c, d:



Bài 3. Xác định vị trí tương đối của $(O;R)$ và $(O';R')$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $OO'=18;\ R=10;\ R'=6$

b) $OO'=2;\ R=9;\ R'=3$

c) $OO'=13;\ R=8;\ R'=5$

d) $OO'=17;\ R=15;\ R'=4$.

Bài 4. Cho đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại A, B. Chứng minh OO' là đường trung trực của AB.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Xác định vị trí tương đối của $(O;R)$ và $(O';R')$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $OO'=5;\ R=3;\ R'=2$

b) $OO'=4;\ R=11;\ R'=7$

c) $OO'=6;\ R=9;\ R'=4$

d) $OO'=10;\ R=4;\ R'=1$.

Bài 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Gọi I là trung điểm của OO'. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với IA cắt (O) tại C và cắt (O') tại D. So sánh AC và AD.

Bài 7. Cho hai đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường thẳng qua A cắt (O) tại B và cắt (O') tại C. Chứng minh rằng $OB \parallel O'C$.

Bài 8. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Vẽ hai đường tròn $(I;\ IA)$ và đường tròn $(B;\ BA)$

a) Hai đường tròn (I) và (B) có vị trí như thế nào?

b) Kẻ đường thẳng đi qua A, cắt (I) và (B) lần lượt tại M và N. So sánh AM và MN.

Bài 9. Cho đường tròn (O), đường kính $AD = R$. Vẽ cung tròn tâm D bán kính R cắt (O) ở B và C

a) Tứ giác $OBDC$ là gì ? vì sao ?

b) Tính số đo các góc $\widehat{CBD};\widehat{CBO};\widehat{OBA}$

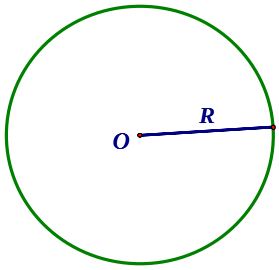
c) Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều

CHƯƠNG 5
ĐƯỜNG TRÒN

BÀI 1
ĐƯỜNG TRÒN
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

1. Khái niệm đường tròn

Trong mặt phẳng, đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là tập hợp các điểm cách điểm O cố định một khoảng R, kí hiệu là: $(O;R)$



Chú ý:

- Một đường tròn hoàn toàn xác định khi biết tâm và bán kính.
- Khi không chú ý đến bán kính của đường tròn $(O;R)$, ta cũng có thể kí hiệu đường tròn (O).

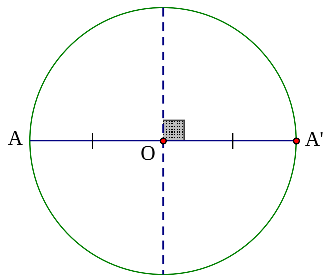
Vị trí tương đối của một điểm đối với đường tròn

Nhận xét:

- Điểm M nằm trên đường tròn (O) nếu $OM = R$
- Điểm M nằm trong đường tròn (O) nếu $OM < R$
- Điểm M nằm ngoài đường tròn (O) nếu $OM > R$

2. Tính chất đối xứng của đường tròn

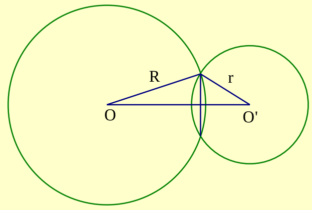
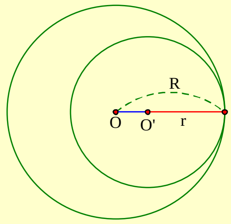
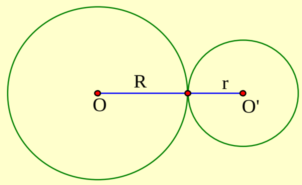
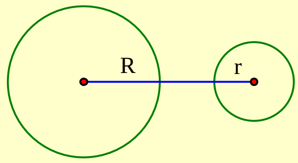
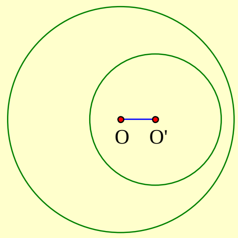
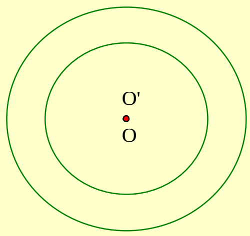
- Đường tròn là hình có tâm đối xứng: Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó
- Đường tròn là hình có trục đối xứng: Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn đó.



3. Liên hệ giữa đường kính và dây của đường tròn

- Đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt thuộc đường tròn được gọi là dây (hay dây cung) của đường tròn.
- Dây đi qua tâm là đường kính của đường tròn. Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính của đường tròn đó

4. Vị trí của hai đường tròn

Vị trí tương đối của hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)(R \geq r)$		Số điểm chung	Hệ thức	Hình vẽ
Cắt nhau		2	$R-r<OO'<R+r$	
Tiếp xúc	Tiếp xúc trong	1	$OO'=R-r>0$	
	Tiếp xúc ngoài		$OO'=R+r$	
Không cắt nhau	Ngoài nhau	0	$OO'>R+r$	
	Đựng nhau		$0 \neq OO'<R-r$	
			$OO' \equiv O$	

Chú ý:

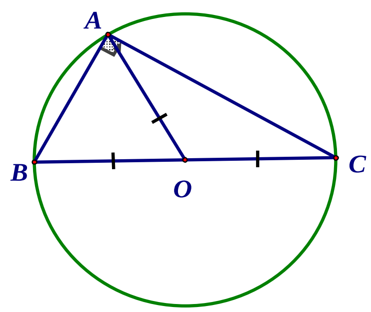
- Đường nối tâm (đường thẳng đi qua tâm 2 đường tròn) là trục đối xứng của hình tạo bởi hai đường tròn.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.
- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

DẠNG 1
CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM CHO TRƯỚC CÙNG NẰM TRÊN MỘT ĐƯỜNG TRÒN
TÍNH BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

Cách 1: Chứng minh các điểm cho trước cùng cách đều 1 điểm cho trước nào đó.

Cách 2: Nếu $\widehat{BAC} = 90^0$ thì A thuộc đường tròn đường kính BC.



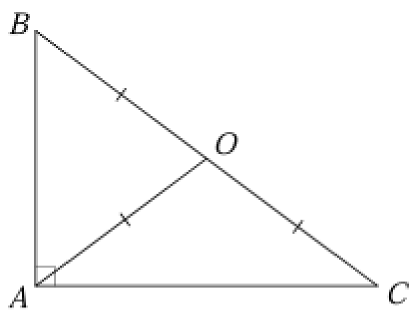
Xét tam giác vuông ABC, có AO là đường trung tuyến nên $AO = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AO = OB = OC$

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = 5cm, AC = 12cm$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải



a) Gọi O là trung điểm BC

Xét tam giác vuông ABC, có AO là đường trung tuyến nên $AO = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AO = OB = OC$

Do đó ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông ABC, ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 13cm$

$\Rightarrow AO = OB = OC = \frac{1}{2}BC = 6,5cm$

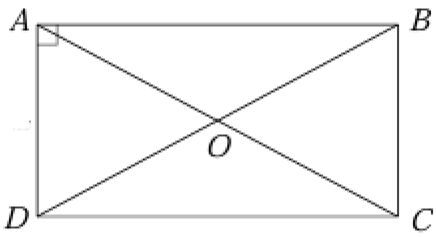
Bài 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 9cm, BC = 12cm$.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Xác định tâm đối xứng và hai trục đối xứng của đường tròn đó.

c) Tính bán kính đường tròn đó.

Lời giải



a) Theo tính chất hình chữ nhật: Hai đường chéo của hình chữ nhật bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Gọi O là giao điểm của AC và BD

$ABCD$ là hình chữ nhật, ta có: $OA = OB = OC = OD$

Do đó bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn (O)

b) Điểm O là tâm đối xứng của đường tròn đó.

Vì AC và BD đi qua tâm O nên AC và BD là hai trục đối xứng của đường tròn đó.

c) Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông ABC, ta có:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15cm$$

$$\Rightarrow AO = OB = OC = OD = \frac{1}{2}AC = 7,5cm$$

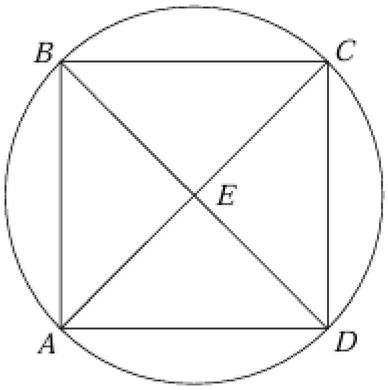
Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Xác định tâm đối xứng và hai trục đối xứng của đường tròn đó.

c) Tính bán kính đường tròn đó theo a.

Lời giải



a) Theo tính chất hình vuông: Hai đường chéo của hình vuông bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Gọi E là giao điểm của AC và BD

$ABCD$ là hình vuông, ta có: $OA = OB = OC = OD$

Do đó bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn (O)

b) Điểm E là tâm đối xứng của đường tròn đó.

Vì AC và BD đi qua tâm E nên AC và BD là hai trục đối xứng của đường tròn đó.

c) Tam giác vuông ABC vuông cân tại B, có cạnh a nên

$AC = a\sqrt{2}$

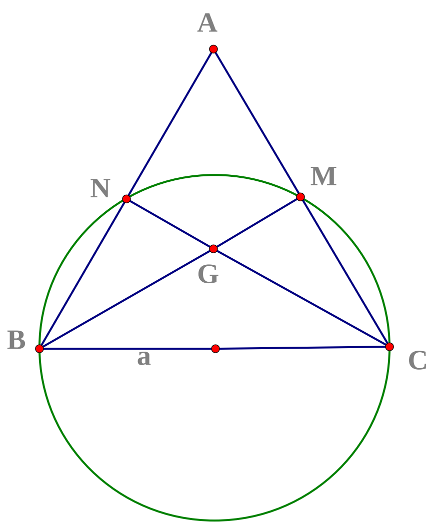
Suy ra $EA = EB = EC = ED = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Bài 4. Cho tam giác đều ΔABC cạnh bằng a, các đường cao BM, CN. Gọi O là trung điểm của BC

a) Chứng minh rằng B, C, M, N cùng thuộc đường tròn (O).

b) Gọi G là giao điểm của BM và CN. Chứng minh điểm G nằm trong, điểm A nằm ngoài đối với đường tròn đường kính BC.

Lời giải



a) Ta có:

Xét tam giác vuông BNC, có NO là đường trung tuyến nên $NO = \dfrac{1}{2}BC \Rightarrow NO = OB = OC$

$\Rightarrow N \in \left(O; \dfrac{BC}{2}\right)$

Xét tam giác vuông BMC, có MO là đường trung tuyến nên $MO = \dfrac{1}{2}BC \Rightarrow MO = OB = OC$

$\Rightarrow M \in \left(O; \dfrac{BC}{2}\right)$

Vậy B, C, M, N cùng thuộc 1 đường tròn $\left(O; \dfrac{BC}{2}\right)$

b) Ta có ΔABC đều có G trực tâm đồng thời là trọng tâm

Xét $\Delta AOB(\widehat{O} = 90^0), R = ON = \dfrac{a}{2}.OA = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} R \Rightarrow A$ nằm ngoài đường tròn (O)

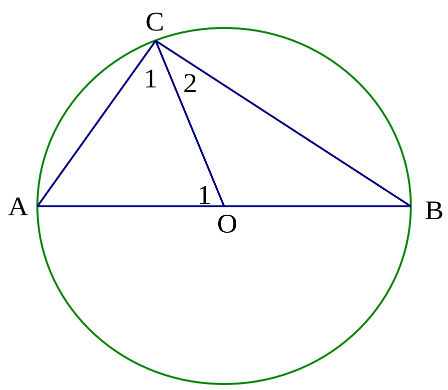
Ta lại có: $OG = \frac{1}{3}OA = \frac{a\sqrt{3}}{6} < R \Rightarrow G$ nằm trong (O).

Bài 5. Cho đường tròn tâm (O), đường kính AB và một dây AC bằng bán kính đường tròn.

a) Chứng minh tam giác OAC đều.

b) Tính các góc của ΔABC.

Lời giải



a) Ta có $AC = OA = OC$ (giả thiết)

Do đó tam giác OAC có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều.

b) Tam giác OAC là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C_1} = \widehat{O_1} = 60^0$

Tam giác OAC có $OB = OC$ nên cân tại $O \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C_2}$

$\widehat{O_1}$ là góc ngoài của $\Delta OBC \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{B} + \widehat{C_2} = 2\widehat{B} = 2\widehat{C_2} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C_2} = \frac{1}{2}\widehat{O_1} = 30^0 \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 90^0$

Vậy $\widehat{A} = 60^0; \widehat{B} = 30^0; \widehat{C} = 90^0$

Có thể lí giải như sau: ΔCAB có trung tuyến CO bằng nửa cạnh đối xứng AB nên vuông tại C

$\widehat{ACB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{A} = 60^0 \Rightarrow \widehat{B} = 30^0$

Vậy ΔABC có $\widehat{C} = 90^0; \widehat{A} = 60^0; \widehat{B} = 30^0$

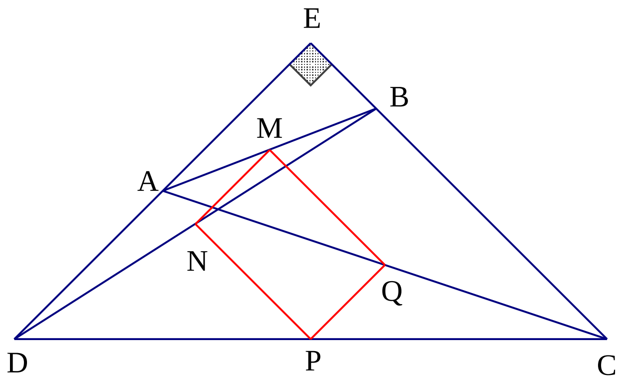
Bài 6. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BCD} + \widehat{ADC} = 90^0$ và kéo dài AD và BC cắt nhau tại E. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC, CA.

a) Tam giác ECD là tam giác gì?

b) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

c) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên 1 đường tròn.

Lời giải



a) Xét tam giác ECD, ta có:

$\widehat{CED}+\widehat{BCD}+\widehat{ADC}=180^0$

$\widehat{CED}+90^0=180^0$

$\widehat{CED}=90^0$

Vậy tam giác ECD là tam giác vuông tại E.

b) Xét tam giác ABC, ta có: $MQ\ //\ BC$ (vì MQ là đường trung bình của ΔABC)

Xét tam giác BDC, ta có: $NP\ //\ BC$ (vì NP là đường trung bình của ΔBDC)

Suy ra $MQ\ //\ NP$

Xét tam giác ABD, ta có: $MN\ //\ AD$ (vì MN là đường trung bình của ΔABD)

Xét tam giác ACD, ta có: $PQ\ //\ AD$ (vì PQ là đường trung bình của ΔACD)

Suy ra $MN\ //\ PQ$

Xét tứ giác $MNPQ$, ta có: $\begin{cases} MQ//NP & (cmt) \\ MN//PQ & (cmt) \end{cases}$, suy ra $MNPQ$ là hình bình hành

Mà $\widehat{CED}=90^0$ hay $ED\perp EC$

Lại có: $\begin{cases} MN//ED \\ MQ//EC \end{cases} \Rightarrow MN\perp MQ \Rightarrow MNPQ$ là hình chữ nhật

c) Vì tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật nên M,N,P,Q nằm trên 1 đường tròn với tâm là giao điểm của 2 đường chéo của hình chữ nhật, bán kính bằng nửa đường chéo.

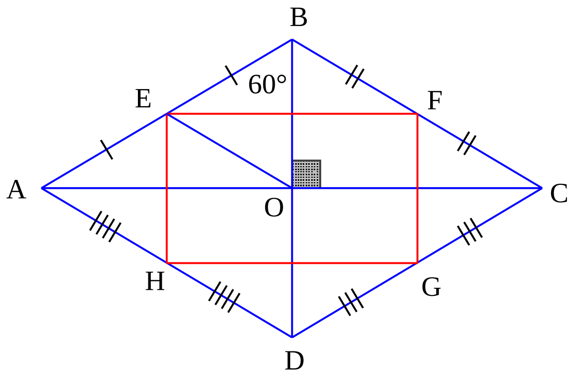
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD}=60^0$. Gọi E,F,G,H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC,CD,DA.

a) Chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh rằng 6 điểm E,F,G,H,B,D cùng nằm trên 1 đường tròn

Lời giải



a) Ta có:

$EF\ //\ AC$ (vì EF là đường trung bình của ΔABC)

$HG\ //\ AC$ (vì HG là đường trung bình của ΔADC)

Suy ra $EF\ //\ HG$

$EH\ //\ BD$ (vì EH là đường trung bình của ΔABD)

$FG\ //\ BD$ (vì FG là đường trung bình của ΔBCD)

Suy ra $EH\ //\ FG$

Xét tứ giác $EFGH$, có: $\begin{cases} EF//GH & (cmt) \\ EH//FG & (cmt) \end{cases}$, suy ra $EFGH$ là hình bình hành

Mà $BD \perp AC$ (đường chéo hình vuông)

Lại có: $\begin{cases} EH\ //\ BD \\ EF\ //\ AC \end{cases} \Rightarrow EH \perp EF$, suy ra $EFGH$ là hình chữ nhật

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của hình chữ nhật $EFGH$

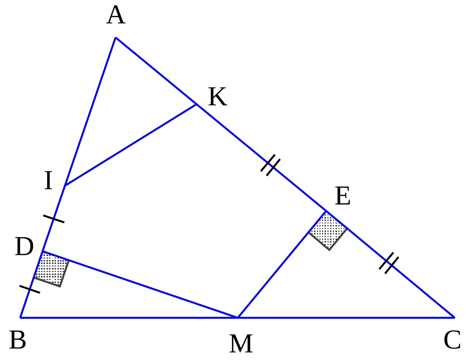
$\Rightarrow OE = OF = OG = OH (1)$

Xét tam giác OBE có: $\begin{cases} OE = BE \\ \widehat{B} = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta OBE$ đều $\Rightarrow OE = OB = OD(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OE = OB = OF = OG = OH = OD \Rightarrow E, B, F, G, D, H \in (O)$

Bài 8. Cho tam giác ABC và điểm M là trung điểm của BC. Hạ MD, ME theo thứ tự vuông góc với AB, AC. Trên tia đối của tia DB và EC lần lượt lấy các điểm I, K sao cho D là trung điểm của BI, E là trung điểm của CK. Chứng minh rằng B, I, C, K cùng nằm trên 1 đường tròn.

Lời giải



Cách 1:

Ta có: M là trung điểm $BC \Rightarrow MB = MC = \frac{1}{2}BC(1)$

MD là trung trực của $BI \Rightarrow MI = MB(2)$

ME là trung trực của $CK \Rightarrow MC = MK(3)$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow MB = MC = MI = MK = \frac{1}{2}BC$ (đpcm)

Cách 2:

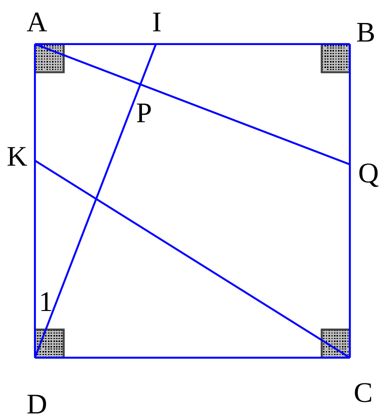
Ta có: MD là trung trực của $BI \Rightarrow MI = MB = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow \Delta BIC$ vuông tại I $\Rightarrow I \in (O; BC)$

ME là trung trực của $CK \Rightarrow MK = MC = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta BKC$ vuông tại $K \Rightarrow K \in (O; BC)$

Vậy: $B, I, C, K \in (O; BC)$.

Bài 9. Gọi I, K theo thứ tự là các điểm nằm trên AB, AD của hình vuông $ABCD$ sao cho $AI = AK$. Đường thẳng kẻ qua A vuông góc với DI ở P và cắt BC ở Q. Chứng minh rằng C, D, P, Q cùng thuộc 1 đường tròn.

Lời giải



Ta có $\Delta ADI = \Delta BAQ(g-c-g) \Rightarrow AI = BQ \Rightarrow \begin{cases} KD = CQ \\ KD // CQ \end{cases} \Rightarrow KDCQ$ là hình bình hành, mà $\widehat{C} = 60^0$

$\Rightarrow \lozenge CDKQ$ là hình chữ nhật.

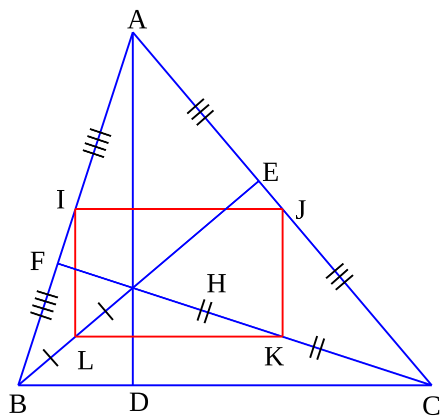
Gọi O là giao điểm của hai đường chéo CK và DQ $\Rightarrow OC = OD = OK = OQ$

ΔPDQ vuông cân tại $P \Rightarrow PQ = OD = OC$

Vậy 5 điểm C, D, K, P, Q cùng thuộc 1 đường tròn.

Bài 10. Cho tam giác ABC, ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AB, AC, HC, HB. Chứng minh rằng 6 điểm I, J, K, L, E, F thuộc 1 đường tròn.

Lời giải



Ta có tứ giác $IJKL$ là hình bình hành (dhnb)

Mà $\widehat{ILK} = 90^0 \Rightarrow \lozenge IJKL$ là hình chữ nhật có hai đường chéo là LJ và IK

Xét tam giác vuông ELJ vuông tại $E \Rightarrow OE = \dfrac{1}{2}LJ = OJ$

Xét tam giác vuông FLK vuông tại $I \Rightarrow OF = \dfrac{1}{2}IK = OJ$

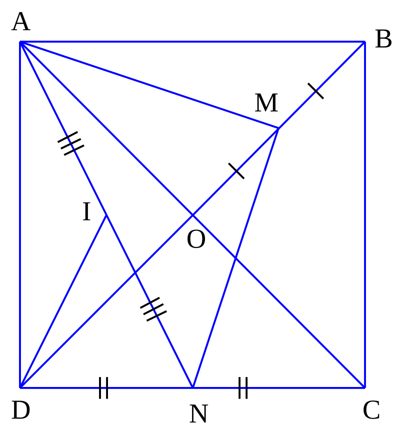
Vậy 6 điểm I, J, K, L, E, F thuộc 1 đường tròn đường kính là đường chéo của hình chữ nhật.

Bài 11. Cho hình vuông $ABCD$, gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB, CD

a) Chứng minh rằng A, M, N, D thuộc 1 đường tròn.

b) So sánh AN và DM.

Lời giải



a) Kẻ NH vuông góc với BD tại H

Xét tam giác OCD, có: $\begin{cases} DN = NC \\ NH // OC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HO = HD = \dfrac{1}{2}CD \\ MO = MB = \dfrac{1}{2}OB \end{cases} \Rightarrow MH = \dfrac{1}{2}BD = OA$

Ta có: $\Delta OAM = \Delta HNM\,(cgc) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{M_1} \\ \widehat{A_1} + \widehat{M_2} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{AMN} = 90^0$

+ Gọi I là trung điểm của $AN \Rightarrow IA = IN = \dfrac{1}{2}AN(1)$

Xét $\Delta ADN(\widehat{D} = 90^0) \Rightarrow ID = \dfrac{1}{2}AN(2); \Delta AMN(\widehat{M} = 90^0) \Rightarrow MI = \dfrac{1}{2}AN(3)$

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow IA = IN = IM = ID \Rightarrow A, M, N, D \in (O)$

b) Xét đường tròn $(I; IA)$ có AN là đường kính, DM là dây không đi qua tâm $\Rightarrow AN > DM$

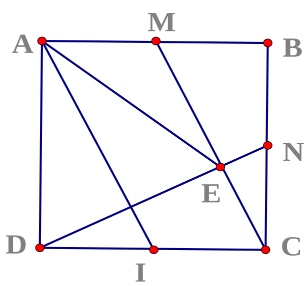
Bài 12. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Gọi E là giao điểm của CM và DN

a) Tính số đo góc CEN

b) Chứng minh A, D, E, M cùng nằm trên 1 đường tròn

c) Xác định tâm của đường tròn đi qua 3 điểm B, D, E

Lời giải



a) Chứng minh $\Delta CMB = \Delta DNC \Rightarrow \widehat{NCE} = \widehat{CDN} \Rightarrow \widehat{CEN} = 90^0$

b) Ta có: A, D, E, M thuộc đường tròn đường kính DM

c) Gọi I là trung điểm CD, chứng minh được $AI // MC$

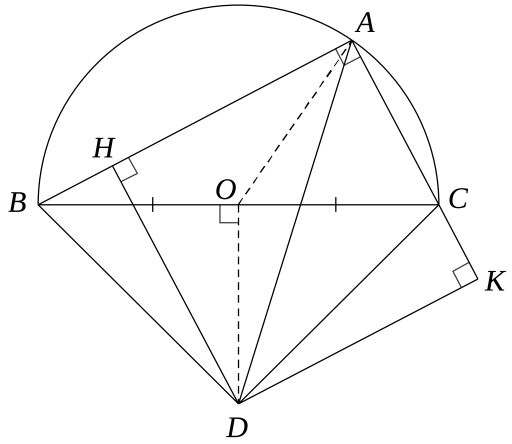
$\Rightarrow \Delta ADE$ cân tại $A \Rightarrow B, D, E \in (A; AB)$

Bài 13. Cho nửa đường tròn $(O;\ R)$ đường kính BC. A là một điểm thay đổi trên đường tròn sao cho $AB > AC$. Tia phân giác $\widehat{BAC}$ cắt đường trung trực BC tại D. Hạ DH và DK lần lượt vuông góc với AB và AC.

a) Chứng minh rằng $AHDK$ là hình vuông.

b) Chứng minh $A,\ B,\ C,\ D$ cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



a) Chứng minh $AHDK$ là hình chữ nhật.

lại có AD là tia phân giác $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{HAD} = 45^0$

Nên ΔAHD vuông cân tại $H \Rightarrow HA = HD$.

Vậy $AHDK$ là hình vuông.

b) Chứng minh $A,\ B,\ C$ cùng thuộc đường tròn $(O;\ OB)$

$DB = DC$ (vì D nằm trên đường trung trực của BC)

Chứng minh $\Delta DHB = \Delta DKC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{HDB} = \widehat{CDK}$.

Khi đó $\widehat{BDC} = \widehat{HDK} = 90^0$

Chứng minh $B,\ D,\ C$ cùng thuộc đường tròn $(O;\ OB)$

Kết luận $A,\ B,\ C,\ D$ cùng thuộc một đường tròn $(O;\ OB)$

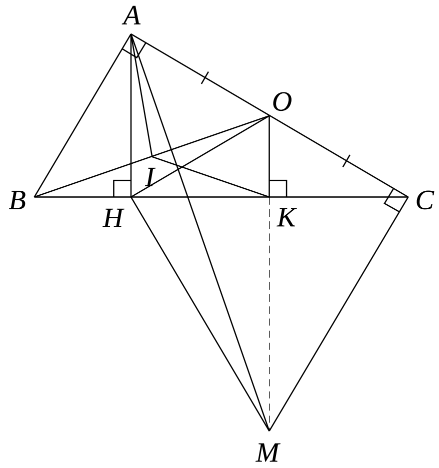
Bài 14. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH.

a) Biết $AB = 5\,cm,\ BC = 13\,cm$. Tính độ dài cạnh AH và số đo góc $\widehat{BAH}$

b) Gọi O là trung điểm của AC, K là hình chiếu của O trên BC. Chứng minh 4 điểm $A,\ B,\ O,\ K$ cùng nằm trên một đường tròn.

c) Đường thẳng qua A và vuông góc với BO cắt đường thẳng qua C vuông góc với AC tại M. Chứng minh $\Delta ABO \backsim \Delta CAM$ và ba điểm $O,\ K,\ M$ thẳng hàng

Lời giải



a) $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2 \Rightarrow AC = 12\,cm$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}AB.AC \Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{5.12}{13} = \frac{60}{13}\,cm$

$cos\,\widehat{BAH} = \frac{AH}{AB} = \frac{60}{13.5} = \frac{60}{65} \Rightarrow \widehat{BAH} \approx 22^0 37'$

b) Gọi I là trung điểm của BO.

ΔABO vuông tại A có AI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $BO \Rightarrow AI = OI = BI$

ΔBKO vuông tại K có KI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $BO \Rightarrow KI = OI = BI$

Vậy bốn điểm $A,\ B,\ O,\ K$ cùng nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh $\widehat{OAM} = \widehat{ABO} \Rightarrow \Delta ABO \backsim \Delta CAM\ (g-g) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BO}{AM}$

Chứng minh $\Delta AHB \backsim \Delta CHA\ (g-g) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH}$

Từ đó $\frac{BO}{AM} = \frac{BH}{AH}$ và $\widehat{HBO} = \widehat{HAI}$

Chứng minh $\Delta HBO \backsim \Delta HAM\ (c-g-c) \Rightarrow \widehat{BHO} = \widehat{AHM} \Rightarrow \widehat{OHM} = 90^0$

Chứng minh $\Delta OHM = \Delta OCM$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow MH = MC \Rightarrow M$ nằm trên đường trung trực của HC.

Mà $O,\ K$ nằm trên đường trung trực của HC nên $O,\ K,\ M$ thẳng hàng.

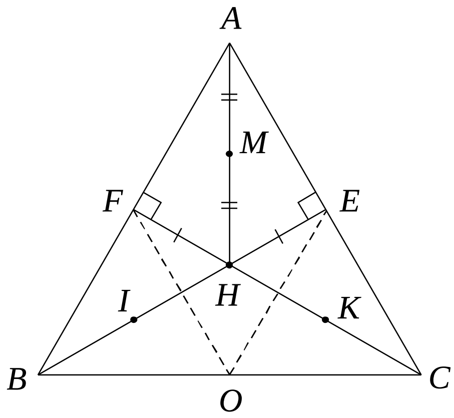
Bài 15. Cho ΔABC cân tại A, vẽ hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng bốn điểm $B,\ F,\ E,\ C$ cùng thuộc một đường tròn và chỉ ra tâm của đường tròn đó.

b) Gọi $I,\ K$ lần lượt là hai điểm trên BH và CH sao cho $HE = HI,\ HF = HK$. Chứng minh rằng bốn điểm $E,\ F,\ I,\ K$ cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi M là trung điểm của AH. Tìm điều kiện của ΔABC để điểm M thuộc đường tròn đi qua bốn điểm $E,\ F,\ I,\ K$.

Lời giải



a) Lấy O là trung điểm của BC

Chỉ ra $FO = BO = CO$ và $EO = BO = CO$.

Vậy bốn điểm $B,\ F,\ E,\ C$ cùng thuộc đường tròn tâm O.

b) ΔABC cân tại A có $BE,\ CF$ là hai đường cao nên $BE = CF$

Và AH vừa là đường cao vừa là phân giác góc $\widehat{BAC}$

Chứng minh $\Delta AFH = \Delta AEH$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow HF = HE$.

Như vậy $HF = HE = HI = HK$ nên $E,\ F,\ I,\ K$ cùng thuộc một đường tròn.

c) Đường tròn đi qua bốn điểm $E,\ F,\ I,\ K$ có tâm là H và bán kinh HE.

ΔAEH vuông tại E có EM là trung tuyến $\Rightarrow ME = MH = MA \Rightarrow \Delta EHM$ cân tại M

Để M thuộc đường tròn $(H;\ HE)$ thì $HM = HE$ khi đó ΔHME là tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{MHE} = 60^0 \Rightarrow \widehat{HAE} = 30^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^0$.

Vậy ΔABC đều thì điểm M thuộc đường tròn (H).

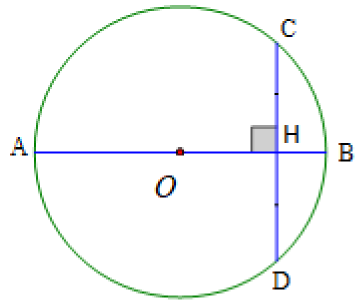
DẠNG 2
LIÊN HỆ GIỮA ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

- Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn đó.
- Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính của đường tròn đó

Bổ đề 1: Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy

Bài toán: Cho đường tròn tâm O và đường kính AB. Trên đường tròn kẻ dây CD sao cho vuông góc AB. Chứng minh AB đi qua trung điểm của CD.

Chứng minh:



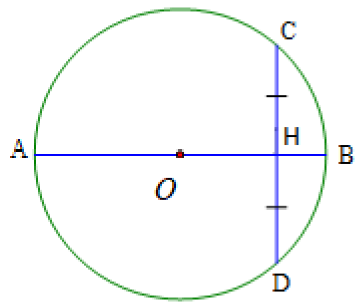
Gọi H là giao điểm của AB và CD.

Xét tam giác COD cân tại O ($OC = OD$) và OH là đường cao nên OH là đường trung trực của đoạn thẳng CD, do đó OH là trung tuyến vì vậy OH đi qua trung điểm CD hay AB đi qua trung điểm của CD.

Bổ đề 2: Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

Bài toán: Cho đường tròn tâm O và đường kính AB. Trên đường tròn kẻ dây CD sao cho AB đi qua trung điểm của CD. Chứng minh AB vuông góc với CD.

Chứng minh:

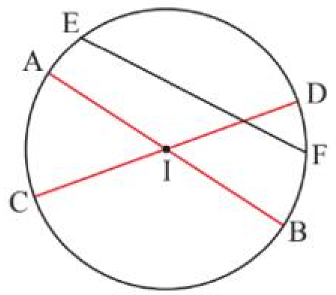


Gọi H là giao điểm của AB và CD.

Xét tam giác COD cân tại O ($OC = OD$) và OH là đường trung tuyến nên OH là đường trung trực của đoạn thẳng CD, do đó OH vuông góc CD hay AB vuông góc với CD.

Chú ý: Khi dùng 2 bổ đề trên thì phải chứng minh vì trong sách giáo khoa không có nói đến chúng.

Bài 1. Cho đường tròn (I) có các dây cung AB, CD, EF. Cho biết AB và CD đi qua tâm I, EF không đi qua I (như hình vẽ). Hãy so sánh độ dài AB, CD, EF.



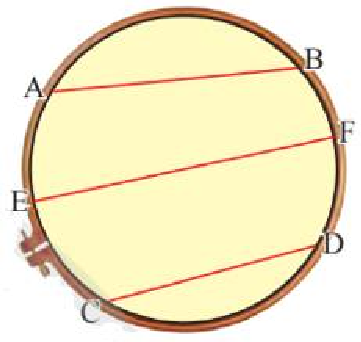
Lời giải

Trong đường tròn (I), AB và CD là đường kính đi qua tâm I, EF là dây cung không đi qua I.

Do đó $AB = CD$ và $EF < AB; EF < CD$.

Vậy $EF < AB = CD$

Bài 2. Bạn Minh Hiền căng ba đoạn chỉ AB, CD, EF có độ dài lần lượt là $26cm$, $24cm$ và $30cm$ trên một khung thêu hình tròn bán kính $15cm$ (như hình vẽ). Trong ba dây trên, dây nào đi qua tâm của đường tròn? Giải thích.



Lời giải

Gọi $(O;R)$ là đường tròn có bán kính $R = 15cm$, suy ra đường kính $30cm$.

Ta có $EF = 30cm = 2.15cm = 2R$

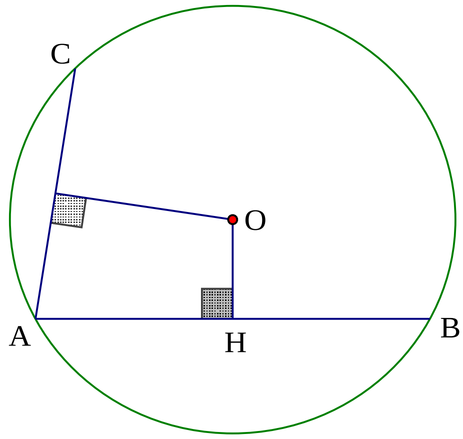
Do đó, trong ba dây AB, CD và EF thì có dây EF đi qua tâm của đường tròn.

Bài 3. Cho đường tròn tâm O bán kính $3cm$ và hai dây AB và AC. Cho biết $AB = 5cm$ $AC = 2cm$.

a) Tính khoảng cách từ O đến dây AB.

b) Tính khoảng cách từ O đến dây AC.

Lời giải



a) Gọi OH là khoảng cách từ O đến AB, suy ra $OH \perp AB$.

ΔOAB cân tại $O \Rightarrow OH$ vừa là đường cao, đường trung tuyến

$\Rightarrow AH = BH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{5}{2} = 2,5cm$.

$OH^2 = OA^2 - HA^2 = 3^2 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{11}{4} \Rightarrow OH = \dfrac{\sqrt{11}}{2}(cm)$

b) Gọi OK là khoảng cách từ O đến AC, suy ra $OK \perp AC$.

ΔOAC cân tại $O \Rightarrow OK$ vừa là đường cao, đường trung tuyến

$\Rightarrow AK = CK = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{2}{2} = 1cm$.

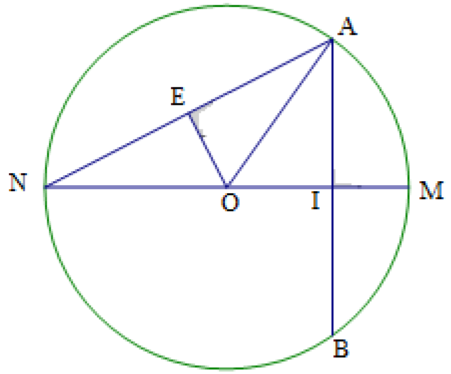
$OK^2 = OA^2 - KA^2 = 3^2 - 1^2 = 8 \Rightarrow OK = 2\sqrt{2}(cm)$

Bài 4. Cho đường tròn tâm $(O;R)$ và một dây cung AB. Gọi I là trung điểm của AB, tia OI cắt cung AB tại M.

a) Cho $R = 5cm, AB = 6cm$. Tính độ dài dây cung MA

b) Gọi N là điểm đối xứng của M qua O, giả sử $MA = 5cm; AB = 6cm$. Tính bán kính R.

Lời giải



a) Vì I là trung điểm của dây AB nên: $IA = IB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{6}{2} = 3(cm)$

ΔOAB cân tại $O \Rightarrow OI$ vừa là đường cao, đường trung tuyến $\Rightarrow OI \perp AB$.

- $\Delta OIA\left(\hat{I}=90^0\right) \Rightarrow OI^2 = OA^2 - IA^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2 \Rightarrow OI = 4cm \Rightarrow IM = 1cm$

- $\Delta AIM\left(\hat{I}=90^0\right) \Rightarrow AM^2 = AI^2 + IM^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow AM = \sqrt{10}$

b) Gọi E là trung điểm của dây AN

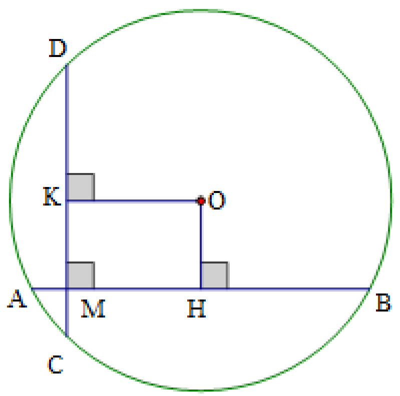
ΔOAN cân tại $O \Rightarrow OE$ vừa là đường cao, đường trung tuyến $\Rightarrow OE \perp NA$.

Ta có: $NE = EA = 2,5cm$

- ΔNEO đồng dạng $\Delta NIA(g-g) \Rightarrow \dfrac{NE}{NI} = \dfrac{ON}{NA} \Rightarrow ON = \dfrac{NA.NE}{NI} = \dfrac{2,5.5}{4} = 3,125(cm)$.

Bài 5. Cho đường tròn tâm O, hai dây AB và CD vuông góc với nhau ở M. Biết $AB = 18cm, CD = 14cm, MC = 4cm$. Hãy tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây AB và CD

Lời giải



Gọi OH là khoảng cách từ O đến AB, suy ra $OH \perp AB$.

ΔOAB cân tại $O \Rightarrow OH$ vừa là đường cao, đường trung tuyến $\Rightarrow HA = HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{18}{2} = 9cm$.

Gọi OK là khoảng cách từ O đến CD, suy ra $OK \perp CD$.

ΔOCD cân tại $O \Rightarrow OK$ vừa là đường cao, đường trung tuyến $\Rightarrow KD = KC = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{14}{2} = 7cm$.

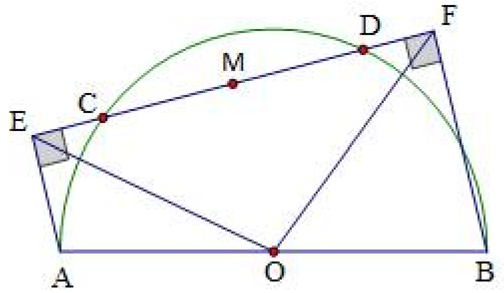
Mà: $KC = KM + MC \Rightarrow KM = KC - MC = 7 - 4 = 3cm \Rightarrow OH = MK = 3cm$

Xét $\Delta OHB(\widehat{H} = 90^0) \Rightarrow OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow OB = OD = 3\sqrt{10}(cm)$

Xét $\Delta OKD(\widehat{K} = 90^0) \Rightarrow OD^2 = OK^2 + DK^2 \Rightarrow OK = \sqrt{41}(cm)$

Bài 6. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và một dây cung CD. Kẻ AE và BF vuông góc với CD lần lượt tại E và F. Chứng minh $CE = DF$

Lời giải



Gọi M là trung điểm $CD \Rightarrow MC = MD$

Xét hình thang $AEFB$, có OM là đường trung bình nên $ME = MF$

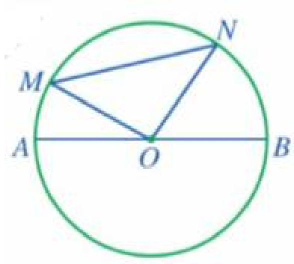
Xét ΔOCD cân tại $O \Rightarrow OM$ vừa là đường cao, đường trung tuyến $MC = MD$.

Ta lại có: $CE = EM - MC$ và $CF = FM - MD$

Nên $CE = DF$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Quan sát hình vẽ bên dưới.



a) So sánh MN và $OM + ON$.

b) So sánh MN và AB.

Lời giải

a) Xét ΔOMN ta có $MN < OM + ON$ (1) (Bất đẳng thức tam giác).

b) Vì A, M, N, B cùng thuộc đường tròn (O) nên $OA = OM = ON = OB$.

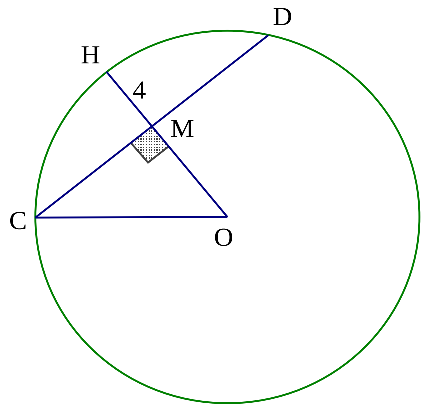
Ta có: $OM + ON = OA + OB$.

Lại có $AB = OA + OB$, do đó $OM + ON < AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN < AB$.

Bài 8. Cho đường tròn (O) và dây CD. Từ O kẻ tia vuông góc với CD tại M, cắt (O) tại H. Tính bán kính R của (O) biết: $CD = 16cm, MH = 4cm$

Lời giải



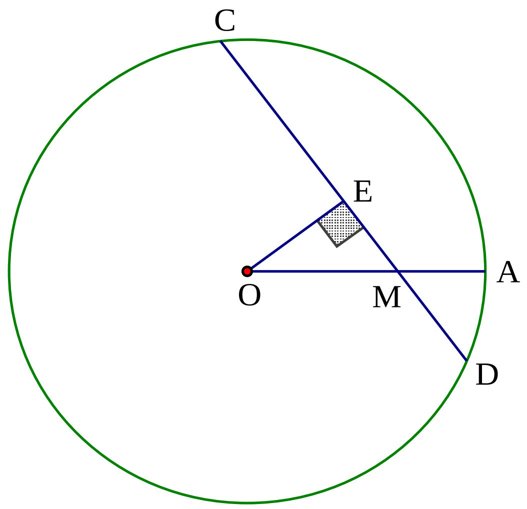
Đặt $OH = x(cm)$.

Ta có $OM = (x-4)(cm)$

Áp dụng định lý Pythagore ta được: $x = 10(cm)$

Bài 9. Cho đường tròn (O) bán kính $OA = 11cm$. Điểm M thộc bán kính AO và cách O khoảng 7cm. Qua M kẻ dây CD có độ dài 18cm. Tính độ dài các đoạn thẳng MC và MD

Lời giải



Kẻ $OE \perp CD, E \in CD.$

Ta có $OC = 11cm, CE = 9cm \Rightarrow OE = 2\sqrt{10}cm$

$OM = 7cm \Rightarrow ME = 43cm \Rightarrow MC = 6cm, MD = 12cm$

Hoặc: $MD = 6cm, MC = 12cm$

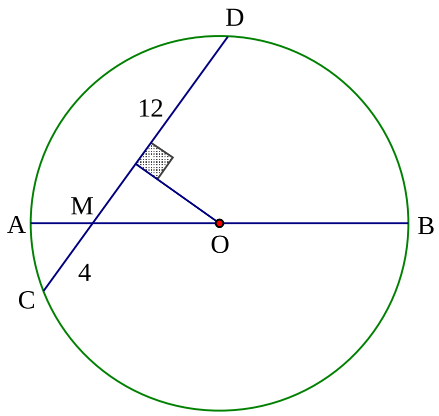
Bài 10. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Dây CD cắt AB tại M, biết $MC = 4cm, MD = 12cm$.

$\widehat{BMD} = 30^0$. Hãy tính :

a) Khoảng cách từ O đến CD

b) Bán kính của (O)

Lời giải



a) Gọi OH là khoảng cách từ O đến $CD \Rightarrow OH \perp CD \Rightarrow CH = HD = 8 \Rightarrow MH = 4cm$

Xét $\Delta MHO(\widehat{H} = 90^0)$, $\tan 30^0 = \dfrac{OH}{MH} \Rightarrow OH = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}(cm)$

b) Bán kính của đường tròn (O) chính là đoạn OD

Ta đi tính độ dài đoạn thẳng OD dựa vào định lý pytago.

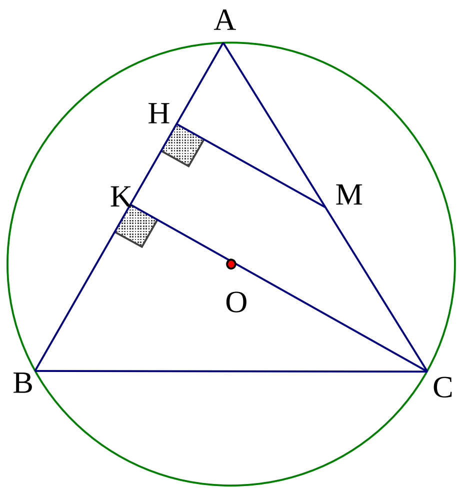
Xét $\Delta OHD(\widehat{H} = 90^0) \Rightarrow OD^2 = OH^2 + HD^2(pytago) \Leftrightarrow OD^2 = 8^2 + \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow OD = \dfrac{4\sqrt{39}}{3}(cm)$

Bài 11. Cho đường tròn (O) có các dây $AB = 24cm, AC = 20cm, \widehat{BAC} < 90^0$ và O nằm trong góc BAC. Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách từ điểm M đến AB bằng 8cm

a) Chứng minh tam giác ABC cân.

b) Tính bán kính của (O)

Lời giải



a) Vẽ $MH \perp AB = H; CK \perp AB = K \Rightarrow MH$ là đường trung bình của

$\Delta CAK \Rightarrow AM = 10cm; AH = 6cm \Rightarrow AK = 12cm \Rightarrow AK = \dfrac{1}{2}AB$

Từ đó chứng minh được ΔABC cân tại C

b) Ta có $CK = 2MH = 16cm$

Đặt $OC = x \Rightarrow OK = 16 - x \Rightarrow CO = 12,5cm$

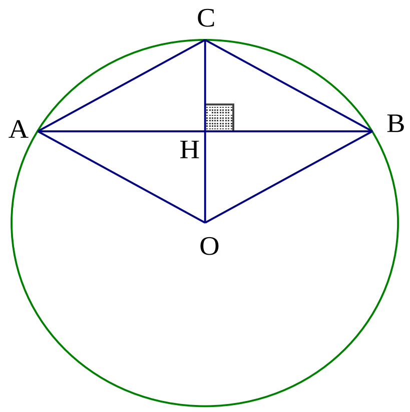
Bài 12. Cho đường tròn tâm $(O;R)$, A và B di động trên đường tròn (O) thỏa mãn $\widehat{AOB} = 120^0$. Vẽ $OH \perp AB = H$

a) Chứng minh H là trung điểm của AB

b) Tính OH, AB và S_{OAB} theo R

c) Tia OH cắt đường tròn $(O;R)$ tại C. Tứ giác $OABC$ là hình gì? Vì sao

Lời giải



a) Ta có AB là dây cung của đường tròn (O); $OH \perp AB \Rightarrow H$ là trung điểm của đoạn thẳng AB

b) ΔOAB cân tại $O(OA = OB = R)$ có: OH là đường trung tuyến nên cũng là đường phân giác

$\Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{HOB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 60^0$

ΔHAO vuông tại H, có $\widehat{AOH} = 60^0$ nên là nửa tam giác đều

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}; AH = \frac{\sqrt{3}}{2}OA = \frac{3}{2}R; AB = 2AH = \sqrt{3}R$

$S_{OAB} = \frac{1}{2}OH.AB = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}R.\sqrt{3}R = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$ (đvdt)

c) $HC = OC - OH = R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R$

$\lozenge OACB$ có $HA = HB; HO = HC = \frac{1}{2}R \Rightarrow \lozenge OACB$ là hình bình hành

Mà: $OA = OB(= R) \Rightarrow \lozenge OACB$ là hình thoi.

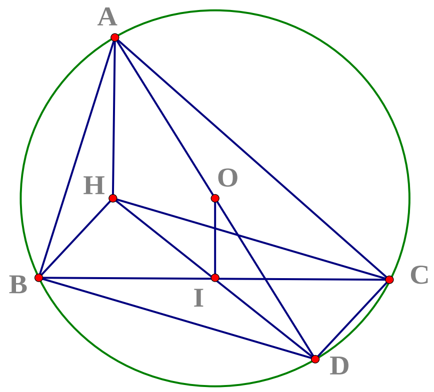
Bài 13. Cho tam giác ABC có trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD

a) Chứng minh $BHCD$ là hình bình hành

b) Kẻ đường kính OI vuông góc BC tại I. Chứng minh I, H, D thẳng hàng

c) Chứng minh $AH = 2OI$

Lời giải



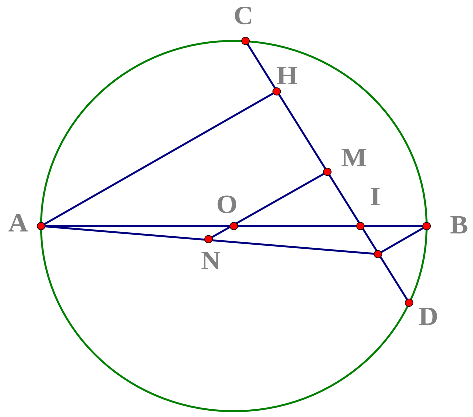
a. Ta có : $\begin{cases} BD//CH \\ BH//CD \end{cases} \Rightarrow BHCD$ là hình bình hành

b. I là trung điểm của $BC \Rightarrow I$ là trung điểm của HD

c. Ta có OI là đường trung bình $\Delta AHD \Rightarrow AH = 2OI$

Bài 14. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD cắt AB tại I. Gọi H, K theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng: $CH = DK$

Lời giải



Ta kẻ OM vuông góc với CD tại $M \Rightarrow MC = MD$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

Gọi N là giao điểm của OM và AK

Xét $\Delta AKB \Rightarrow NA = NK$

Xét $\Delta AHK \Rightarrow MH = MK \Rightarrow MC - MH = MD - MH \Leftrightarrow CH = DK$

Bài 15. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại trực tâm H. Lấy I là trung điểm của BC

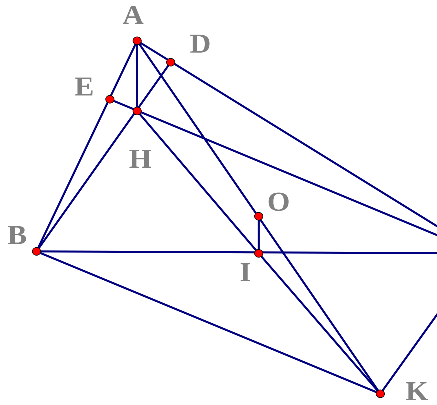
a) Gọi K là điểm đối xứng của H qua I. Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành

b) Xác định tâm O của đường tròn qua các điểm A, B, K, C

c) Chứng minh: $OI // CH$

d) Chứng minh rằng: $BE.BA + CD.CA = BC^2$

Lời giải



a) Xét $BHCK$ có: $\begin{cases} HI = IK(gt) \\ BI = IC(gt) \end{cases} \Rightarrow BHCK$ là hình bình hành

b) Ta có $\Delta AKB, \Delta ACK$ vuông tại B và C nên bốn điểm A, B, K, C nằm trên đường tròn đường kính AC tâm O.

c) Xét ΔAHB có OI là đường trung bình $\Rightarrow OI // AH$

d) Gọi M là giao điểm của AH và BC

Ta có

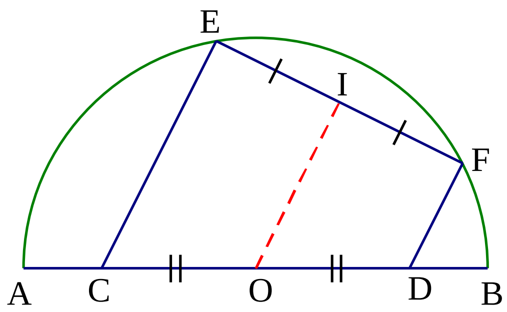
$\Delta BMA \sim \Delta BEC(gg) \Rightarrow BE.BA = BM.BC$

$\Delta CMA \sim \Delta CDB(gg) \Rightarrow CA.CD = CM.BC$

$\Rightarrow BE.BA + CD.CA = (BM + CM).BC = BC^2$ (đpcm)

Bài 16. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên đoạn thẳng OA lấy điểm C và trên đoạn thẳng OB lấy điểm D sao cho $OC = OD$. Từ C và D kẻ hai tia song song cắt nửa đường tròn ở E và F. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh rằng: $S_{CEF} + S_{DEF} = EF.OI$

Lời giải



Vì I là trung điểm của EF nên $OI \perp EF$

Ta có: $CE // EF$ và O là trung điểm của CD nên $\lozenge CEFD$ là hình thang

Lại có OI là đường trung bình của hình thang $\Rightarrow OI // CE // DF$

Mà $OI \perp EF \Rightarrow CE \perp EF; DF \perp EF \Rightarrow OI = \frac{1}{2}(CE + DF)$

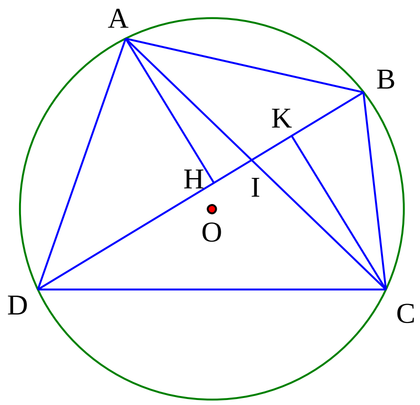
$S_{CEF}=\frac{1}{2}CE.EF$

$S_{DEF}=\frac{1}{2}DE.EF$.

$\Rightarrow S_{CEF}+S_{DEF}=\frac{1}{2}CE.EF+\frac{1}{2}DE.EF=\frac{1}{2}EF\left(CE+DF\right)=EF.OI$

Bài 17. Cho đường tròn $(O;R)$. Các điểm A,B,C,D thuộc $(O;R)$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$

Lời giải



Vẽ $AH\perp BD\left(H\in BD\right),CK\perp BD\left(K\in BD\right)$

Gọi I là giao điểm của AC,BD

Ta có: $AH\perp HI\Rightarrow AH\le AI;CK\perp KI\Rightarrow CK\le CI\Rightarrow AH+CK\le AI+IC=AC$

Mà $AC,BD\le 2R$ (AC,BD là các dây cung của đường tròn $(O;R)$)

Ta có : $S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{BCD}=\frac{1}{2}BD.AH+\frac{1}{2}BD.CK=\frac{1}{2}BC\left(AH+CK\right)\le\frac{1}{2}BD.AC$

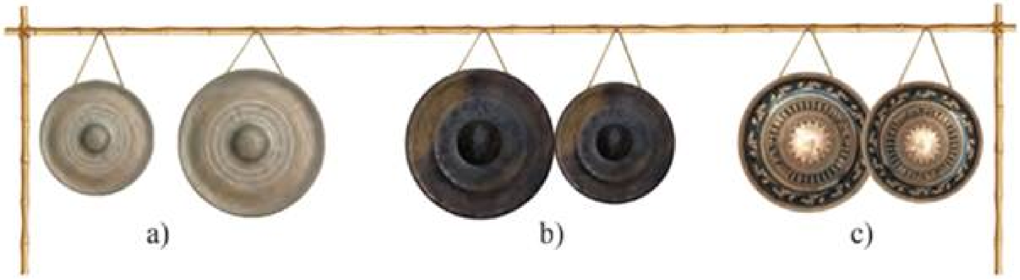
Do vậy $S_{ABCD}\le\frac{1}{2}2R.2R=2R^2$

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}BD=2R\\AC=2R\\H\equiv I\equiv K\end{cases}\Leftrightarrow AC,BD$ là hai đường kính vuông góc nhau

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$ là $2R^2$.

DẠNG 3
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. Mô tả vị trí tương đối giữa mỗi cặp đường tròn trong hình chụp bộ cồng chiêng Tây Nguyên trong hình vẽ bên dưới.



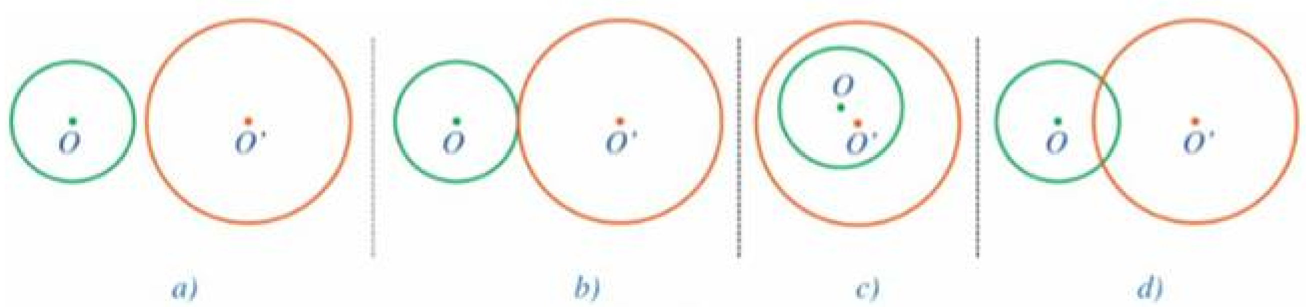
Lời giải

Hình a): Hai đường tròn ở ngoài nhau.

Hình b): Hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

Hình c): Hai đường tròn cắt nhau.

Bài 2. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (O') trong mỗi hình a, b, c, d:



Lời giải

a) Hình a): Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ không có điểm chung và $OO' > R + R'$. Do đó hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau.

b) Hình b): Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ có 1 điểm chung duy nhất và $OO' = R + R'$. Do đó hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài.

c) Hình c): Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ không có điểm chung và $OO' < R' - R$. Do đó đường tròn (O') đựng đường tròn (O).

d) Hình d): Ta thấy hai đường tròn (O) và (O') có 2 điểm chung nên hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau.

Bài 3. Xác định vị trí tương đối của $(O;R)$ và $(O';R')$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $OO' = 18;\ R = 10;\ R' = 6$

b) $OO' = 2;\ R = 9;\ R' = 3$

c) $OO' = 13;\ R = 8;\ R' = 5$

d) $OO' = 17;\ R = 15;\ R' = 4$.

Lời giải

a) Ta có $18>10+6$ nên $OO'>R+R'$, suy ra hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ ở ngoài nhau.

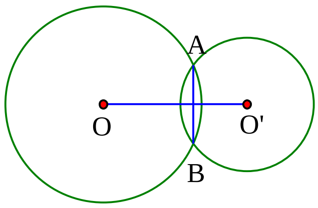
b) Ta có $2<9-3$ nên $OO'<R-R'$, suy ra đường tròn $(O;R)$ đựng đường tròn $(O';R')$

c) Ta có $13=8+5$ nên $OO'=R+R'$, suy ra hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài.

d) Ta có $15-4<17<15+4$ nên $R-R'<OO'<R+R'$, suy ra hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau.

Bài 4. Cho đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại A,B. Chứng minh OO' là đường trung trực của AB.

Lời giải



Ta có:

$OA=OB=R$

$O'A=O'B=R'$

Do đó O,O' thuộc đường trung trực của AB

Vậy OO' là đường trung trực của dây AB.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Xác định vị trí tương đối của $(O;R)$ và $(O';R')$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $OO'=5;\ R=3;\ R'=2$

b) $OO'=4;\ R=11;\ R'=7$

c) $OO'=6;\ R=9;\ R'=4$

d) $OO'=10;\ R=4;\ R'=1$.

Lời giải

a) Ta có $5=3+2$ nên $OO'=R+R'$, suy ra hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài.

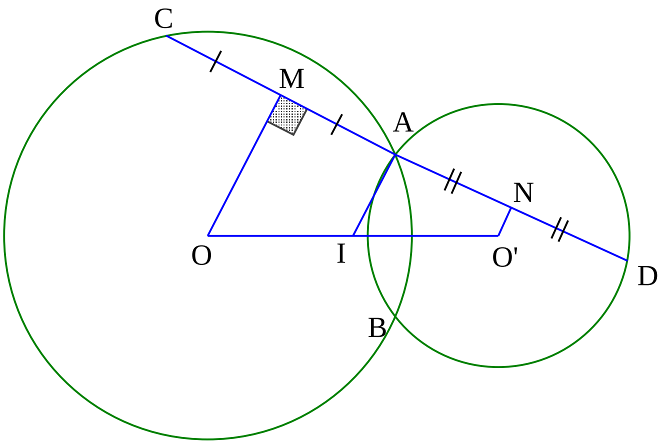
b) Ta có $4=11-7$ nên $OO'=R-R'$, suy ra đường tròn $(O;R)$ và đường tròn $(O';R')$ tiếp xúc trong.

c) Ta có $9-4<6<9+4$ nên $R-R'<OO'<R+R'$, suy ra hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau.

d) Ta có $10>4+1$ nên $OO'>R+R'$, suy ra hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ ở ngoài nhau.

Bài 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A,B. Gọi I là trung điểm của OO'. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với IA cắt (O) tại C và cắt (O') tại D. So sánh AC và AD.

Lời giải



Vẽ $OM \perp AC = M \Rightarrow MA = MC = \frac{1}{2}AC\,(1)$

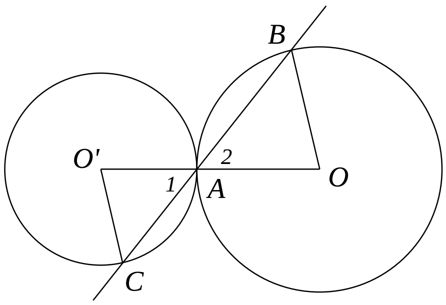
Vẽ $O'N \perp AD = N \Rightarrow NA = ND = \frac{1}{2}AD\,(2)$

Hình thang $OO'NM$ có: $IO = IO'$ và $IA//OM//O'N \Rightarrow MA = NA$

Từ $(1)(2) \Rightarrow AC = AD$

Bài 7. Cho hai đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường thẳng qua A cắt (O) tại B và cắt (O') tại C. Chứng minh rằng $OB // O'C$.

Lời giải



Chứng minh $\Delta O'AC$ cân tại $O' \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A_1}$

Chứng minh ΔOAB cân tại $O \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{A_2}$

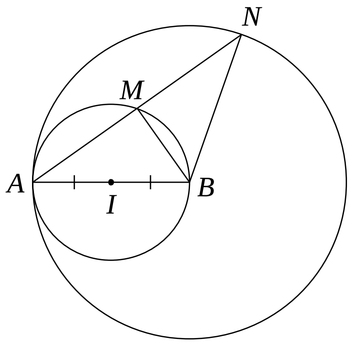
Mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$, mà hai góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ so le trong nên $O'C // OB$.

Bài 8. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Vẽ hai đường tròn $(I;\ IA)$ và đường tròn $(B;\ BA)$

a) Hai đường tròn (I) và (B) có vị trí như thế nào?

b) Kẻ đường thẳng đi qua A, cắt (I) và (B) lần lượt tại M và N. So sánh AM và MN.

Lời giải



a) Ta có $IB = AB - AI$

Nên đường tròn (I) và đường tròn (B) tiếp xúc trong.

b) Chứng minh ΔABN cân tại B.

Chứng minh $BM \perp AN \Rightarrow AM = MN$

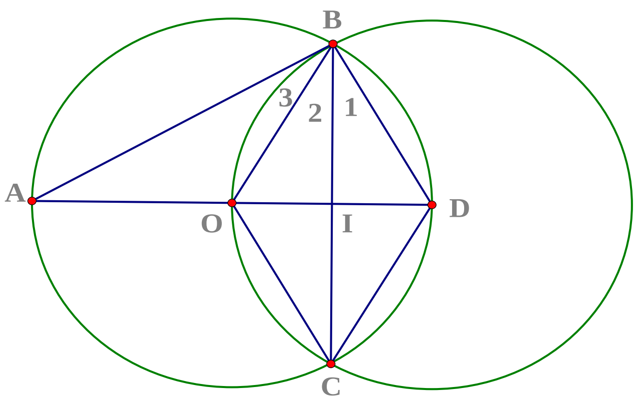
Bài 9. Cho đường tròn (O), đường kính $AD = R$. Vẽ cung tròn tâm D bán kính R cắt (O) ở B và C

a) Tứ giác $OBDC$ là gì ? vì sao ?

b) Tính số đo các góc $\widehat{CBD}; \widehat{CBO}; \widehat{OBA}$

c) Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều

Lời giải



a) Xét $\lozenge OBDC$, có: $OB = OC = DC = R \Rightarrow \lozenge OBDC$ là hình thoi

b) Xét ΔOBD, có: $OB = OD = BD = R \Rightarrow \Delta OBD$ là tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{OBD} = 60^0 = \widehat{ODB} \Rightarrow$ BC là tia phân giác $\widehat{OBD}$

$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \frac{1}{2}\widehat{OBD} = 30^0$

Ta có $B \in (O) \Rightarrow \widehat{ABD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{B_3} = 30^0$

c) $OBDC$ là hình thoi $\Rightarrow OD \perp BC \equiv I; IB = IC$

Xét ΔABC, có AI là đường cao đồng thời là đường trung tuyến nên ΔABC cân tại A

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{B_2} + \widehat{B_3} = 60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

BÀI 2

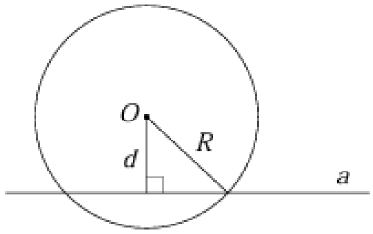
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

1. Đường thẳng và đường tròn cắt nhau

Khi đường thẳng và đường tròn có hai điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn cắt nhau.

Nếu đường thẳng và đường tròn cắt nhau thì mỗi điểm chung được gọi là một giao điểm.

Nhận xét: Đường thẳng a cắt đường tròn $(O;R)$ khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a nhỏ hơn R và ngược lại.

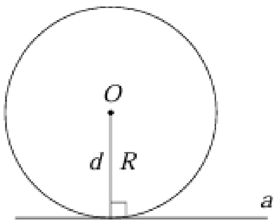


2. Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau

Khi đường thẳng và đường tròn có đúng một điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau tại điểm chung đó.

Nếu đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng được gọi là **tiếp tuyến** của đường tròn, điểm chung được gọi là **tiếp điểm**.

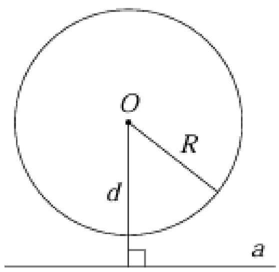
Nhận xét: Đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a bằng R và ngược lại.



3. Đường thẳng và đường tròn không giao nhau

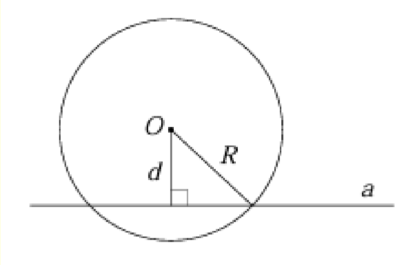
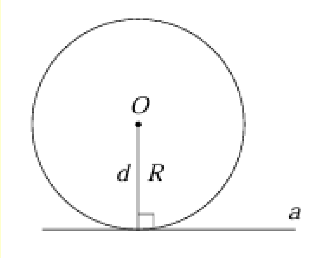
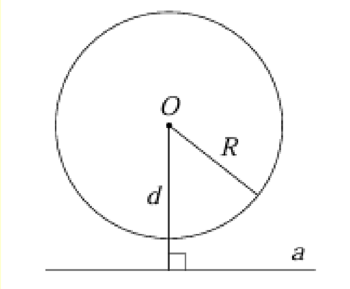
Khi đường thẳng và đường tròn không có điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn không giao nhau.

Nhận xét: Đường thẳng a và đường tròn $(O;R)$ không giao nhau khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a lớn hơn R và ngược lại.



Bảng tóm tắc vị trí tương đối đường thẳng và đường tròn

(d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a)

Hệ thức	Số điểm chung	Quan hệ	Hình vẽ
$d < R$	2	Đường thẳng a cắt đường tròn $(O;R)$ tại 2 điểm	
$d = R$	1	Đường thẳng a tiếp xúc đường tròn $(O;R)$	
$d > R$	0	Đường thẳng a không cắt đường tròn $(O;R)$	

Bài 1. Cho điểm M cách đường thẳng xy một đoạn bằng 6cm, vẽ đường tròn $(M;10cm)$

a) Chứng minh rằng đường tròn tâm M và đường thẳng xy cắt nhau.

b) Gọi hai giao điểm là P và Q. Tính PQ

Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 3cm, AC = 4cm$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính $2,8cm$.

a) Tính cạnh BC.

b) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC với đường tròn tâm A bán kính $2,8cm$.

Bài 3. Cho ΔABC vuông tại A có BD là đường phân giác $\widehat{ABC}$ $(D \in AC)$. Vẽ đường tròn tâm D bán kính DA.

a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng AB với đường tròn tâm D bán kính DA.

b) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC với đường tròn tâm D bán kính DA.

Bài 4. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0, AD = 2cm, BC = 6m, CD = 8cm$. Chứng minh rằng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$, trên đường chéo BD lấy điểm I sao cho $BI = BA$. Đường thẳng kẻ qua I vuông góc với BD cắt AD ở E.

a) So sánh: AE, EI, ID

b) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BD với đường tròn $(E; EA)$

Bài 6. Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ tia Ax, By vuông góc với AB. Trên các tia Ax và By lấy theo thứ tự hai điểm C và D sao cho $\widehat{COD} = 90^0$, kẻ $OH \perp CD$

a) Chứng minh rằng H thuộc đường tròn tâm O đường kính AB

b) Xác định vị trí tương đối của CD với đường tròn (O)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Lấy điểm A nằm bên ngoài đường tròn $(O;8cm)$ sao cho $OA = 12cm$. Kẻ tia Ax tạo với OA một góc 30^0. Gọi H là hình chiếu của O trên tia Ax.

a) Xét vị trí tương đối của tia Ax và đường tròn (O).

b) Tia Ax cắt đường tròn (O) tại hai điểm M, N. Tính MN.

Bài 8. Cho điểm A cách đường thẳng xy một khoảng 12 cm

a) Chứng minh $(A;13cm)$ cắt đường thẳng xy tại hai điểm phân biệt

b) Gọi hai giao điểm của $(A;13cm)$ với xy là B, C. Tính độ dài đoạn thẳng BC

Bài 9. Cho ΔABC vuông cân tại A. Vẽ tia phân giác BI

a) Chứng minh rằng đường tròn $(I; IA)$ tiếp xúc với đường thẳng AB, AC

b) Cho biết $AB = a$. Tính IA theo a.

Bài 10. Cho điểm (O) cách đường thẳng a là $6cm$. Vẽ đường tròn $(O,10cm)$

a) Chứng minh rằng (O) có hai giao điểm với đường thẳng d

b) Gọi hai giao điểm nói trên là B và C. Tính độ dài BC

Bài 11. Cho đường thẳng d và đường tròn $(O;R)$ không giao nhau. A là điểm trên (O). Xác định vị trí điểm A để khoảng cách từ A đến đường thẳng d lớn nhất

Bài 12. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Đường thẳng d qua A, gọi B và C là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (O). Xác định vị trí của đường thẳng d để tổng $AB+AC$ lớn nhất

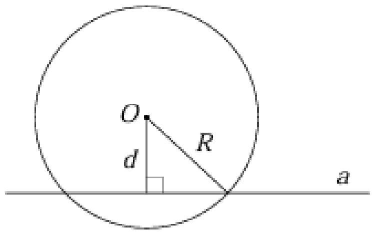
BÀI 2
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

1. Đường thẳng và đường tròn cắt nhau

Khi đường thẳng và đường tròn có hai điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn cắt nhau.

Nếu đường thẳng và đường tròn cắt nhau thì mỗi điểm chung được gọi là một giao điểm.

Nhận xét: Đường thẳng a cắt đường tròn $(O;R)$ khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a nhỏ hơn R và ngược lại.

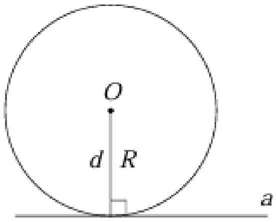


2. Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau

Khi đường thẳng và đường tròn có đúng một điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau tại điểm chung đó.

Nếu đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng được gọi là **tiếp tuyến** của đường tròn, điểm chung được gọi là **tiếp điểm**.

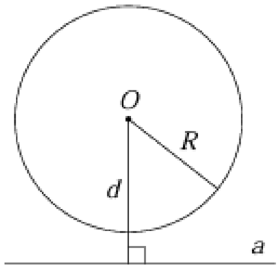
Nhận xét: Đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a bằng R và ngược lại.



3. Đường thẳng và đường tròn không giao nhau

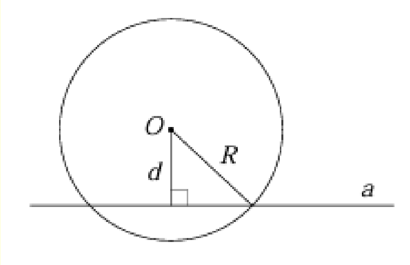
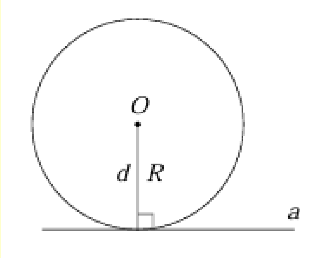
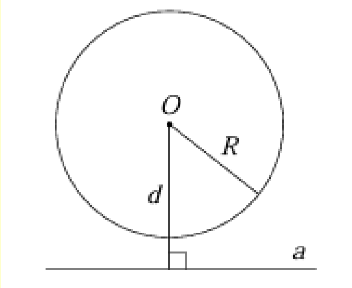
Khi đường thẳng và đường tròn không có điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn không giao nhau.

Nhận xét: Đường thẳng a và đường tròn $(O;R)$ không giao nhau khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a lớn hơn R và ngược lại.



Bảng tóm tắc vị trí tương đối đường thẳng và đường tròn

(d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a)

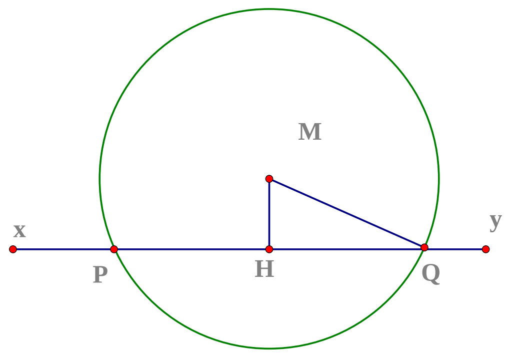
Hệ thức	Số điểm chung	Quan hệ	Hình vẽ
$d < R$	2	Đường thẳng a cắt đường tròn $(O;R)$ tại 2 điểm	
$d = R$	1	Đường thẳng a tiếp xúc đường tròn $(O;R)$	
$d > R$	0	Đường thẳng a không cắt đường tròn $(O;R)$	

Bài 1. Cho điểm M cách đường thẳng xy một đoạn bằng 6cm, vẽ đường tròn $(M;10cm)$

a) Chứng minh rằng đường tròn tâm M và đường thẳng xy cắt nhau.

b) Gọi hai giao điểm là P và Q. Tính PQ

Lời giải



a) Kẻ $MH \perp xy = H \Rightarrow MH$ là khoảng cách từ M đến xy

$\Rightarrow \begin{cases} MH = 6cm \\ R = 10cm \end{cases} \Rightarrow MH < R \Rightarrow xy$ cắt $(O;10cm)$ tại P và Q

b) Xét tam giác PMQ cân tại M và $MH \perp PQ$ nên MH cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow HP = HQ = \frac{1}{2}PQ$

$\Rightarrow PQ = 2.HQ$

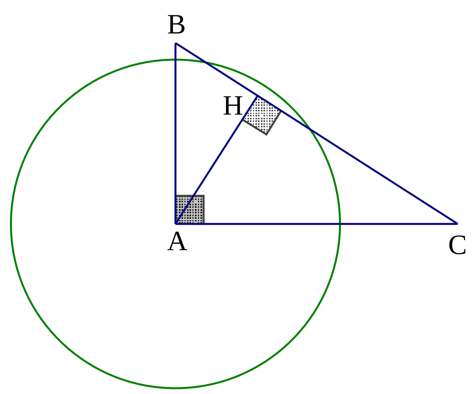
Xét $\Delta MHQ(\widehat{H} = 90^0) \Rightarrow HQ = \sqrt{MQ^2 - MH^2} = 8cm \Rightarrow PQ = 16(cm)$

Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 3cm, AC = 4cm$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính $2,8cm$.

a) Tính cạnh BC.

b) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC với đường tròn tâm A bán kính $2,8cm$.

Lời giải



a) ΔABC vuông tại A, theo pythagore ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5cm$

b) Vẽ AH là đường cao của tam giác vuông ABC

Ta có: ΔABH đồng dạng ΔABC (g-g)

Nên $\dfrac{AH}{AC}=\dfrac{AB}{BC}$ hay $AH=\dfrac{AB.AC}{BC}=\dfrac{3.4}{5}=2,4cm$

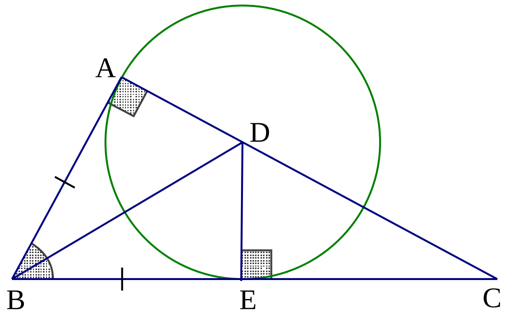
Vì $2,4cm<2,8cm\left(d<r\right)$, do đó đường thẳng BC và đường tròn $\left(A;2,8cm\right)$ cắt nhau.

Bài 3. Cho ΔABC vuông tại A có BD là đường phân giác $\widehat{ABC}$ $\left(D\in AC\right)$. Vẽ đường tròn tâm D bán kính DA.

a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng AB với đường tròn tâm D bán kính DA.

b) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC với đường tròn tâm D bán kính DA.

Lời giải



a) Ta có $AB\perp DA$ $\left(do\ AB\perp AC\right)$ và $A\in\left(D;DA\right)$ nên đường thẳng AB tiếp xúc đường tròn $\left(D;DA\right)$

b) Vẽ $DE\perp BC\left(E\in BC\right)$

Xét hai tam giác vuông ABD và EBD, ta có:

BD là cạnh chung

$\widehat{ABD}=\widehat{EBD}$ (vì BD là đường phân giác $\widehat{ABC}$)

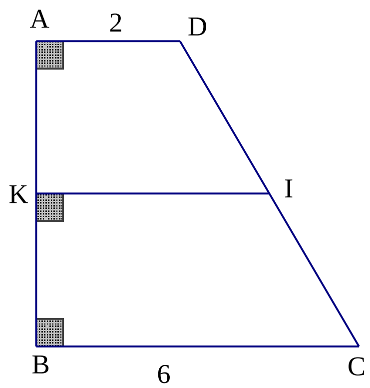
Suy ra $\Delta ABD=\Delta EBD$

Nên $DE=DA$ hay $E\in\left(D;DA\right)$

Do đó đường thẳng BC và đường tròn tâm D bán kính DA tiếp xúc nhau.

Bài 4. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A}=\widehat{B}=90^0$, $AD=2cm,BC=6m,CD=8cm$. Chứng minh rằng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD

Lời giải



Gọi I,K lần lượt là trung điểm của CD và AB

Ta có: IK là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow IK = \dfrac{AD+BC}{2} = 4(cm)$

Lại có: $AD//IK, AD \perp AB \Rightarrow IK \perp AB; IK = \dfrac{CD}{2}(=4cm), IK \perp AB$

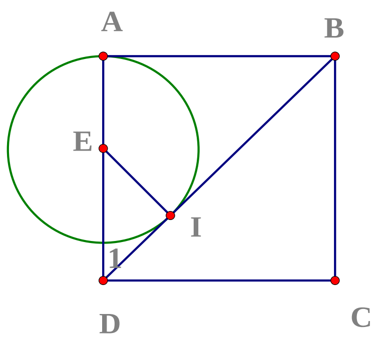
Do đó AB tiếp xúc với đường tròn tâm I đường kính CD.

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$, trên đường chéo BD lấy điểm I sao cho $BI = BA$. Đường thẳng kẻ qua I vuông góc với BD cắt AD ở E.

a) So sánh: AE, EI, ID

b) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BD với đường tròn $(E;EA)$

Lời giải



a) Ta có : $\Delta AEB = \Delta IEB (ch-cgv) \Rightarrow AE = EI (1)$

$\Delta EID (\hat{I} = 90^0), \widehat{D_1} = 45^0 \Rightarrow$ vuông cân $\Rightarrow IE = ID (2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow AE = EI = ID$

b) Ta lại có $EI = EA \Rightarrow I \in (E;EA) \Rightarrow R = EI$

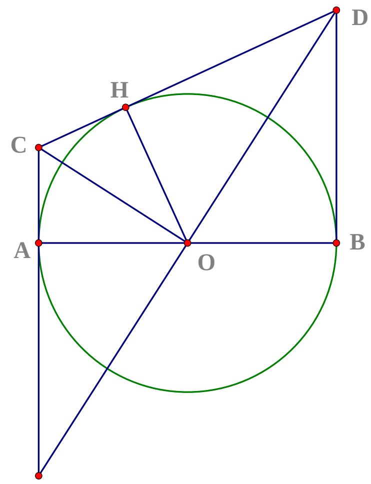
mặt khác: $EI \perp BD \Rightarrow d = EI \Rightarrow d = R \Rightarrow$ đường thẳng BD tiếp xúc với $(E;EA)$

Bài 6. Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ tia Ax, By vuông góc với AB. Trên các tia Ax và By lấy theo thứ tự hai điểm C và D sao cho $\widehat{COD} = 90^0$, kẻ $OH \perp CD$

a) Chứng minh rằng H thuộc đường tròn tâm O đường kính AB

b) Xác định vị trí tương đối của CD với đường tròn (O)

Lời giải



a) Kéo dài DO cắt AC ở E, ta có :

$\Delta AOE = \Delta BOD(gcg) \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{D}; OD = OE \Rightarrow \Delta OHD = \Delta OAE(ch - gn) \Rightarrow OH = OA = OB \Rightarrow H \in (O; AB)$

b) Ta có H thuộc đường tròn (O), $CD \perp OH$ tại H $\Rightarrow$ khoảng cách từ O đến CD bằng bán kính của (O).

Vậy CD tiếp xúc với (O) tại H.

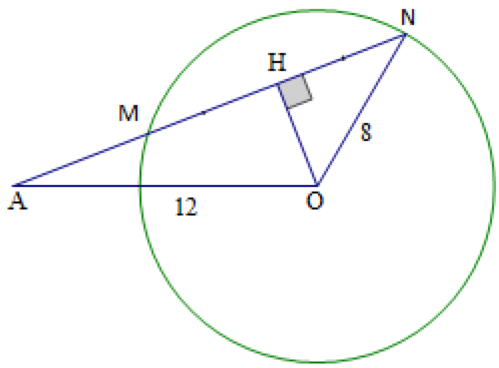
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Lấy điểm A nằm bên ngoài đường tròn $(O; 8cm)$ sao cho $OA = 12cm$. Kẻ tia Ax tạo với OA một góc 30^0. Gọi H là hình chiếu của O trên tia Ax.

a) Xét vị trí tương đối của tia Ax và đường tròn (O).

b) Tia Ax cắt đường tròn (O) tại hai điểm M, N. Tính MN.

Lời giải



a) Từ ΔAOH vuông tại H, ta có: $OH = OA.\sin A = 12.\sin 30^0 = 12.0,5 = 6(cm)$

$\Rightarrow OH < R$ (bán kính)

Vậy tia Ax và đường tròn (O) cắt nhau tại hai điểm.

b) ΔOHN vuông tại H, ta có: $HN^2 = ON^2 - OH^2 = 8^2 - 6^2 = 28 \Rightarrow HN = 2\sqrt{7}cm$

ΔOMN cân tại O, có $OH \perp MN$ nên OH vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến $\Rightarrow MN = 2HN$

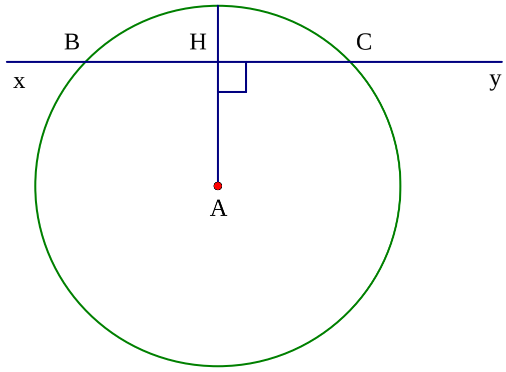
Do đó $MN = 2.2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}cm$

Bài 8. Cho điểm A cách đường thẳng xy một khoảng 12 cm

a) Chứng minh $(A;13cm)$ cắt đường thẳng xy tại hai điểm phân biệt

b) Gọi hai giao điểm của $(A;13cm)$ với xy là B,C. Tính độ dài đoạn thẳng BC

Lời giải



a) Kẻ $AH \perp xy \Rightarrow AH = 12cm < R \Rightarrow (A)$ cắt xy tại hai điểm B và C

b) ΔOBC cân tại O, có $OH \perp BC$ nên OH vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến $\Rightarrow BC = 2HB$

ΔOHB vuông tại H, ta có: $HB^2 = OB^2 - OH^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow HB = 5cm$

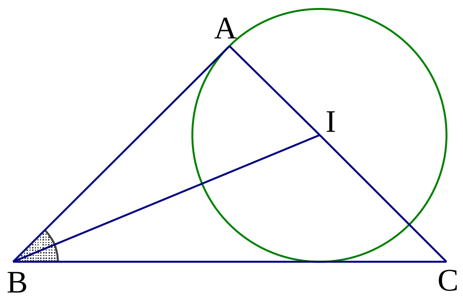
Do đó $BC = 2.5 = 10cm$

Bài 9. Cho ΔABC vuông cân tại A. Vẽ tia phân giác BI

a) Chứng minh rằng đường tròn $(I;IA)$ tiếp xúc với đường thẳng AB, AC

b) Cho biết $AB = a$. Tính IA theo a.

Lời giải



a) Ta có $IA \perp BA \Leftrightarrow IA = d(I, BA) \Leftrightarrow (I, IA)$ tiếp xúc với BA tại A

mặt khác BI là tia phân giác của $\widehat{ABC}$

Do đó đường tròn (I, IA) tiếp xúc với BC

b) Áp dụng tính chất tia phân giác trong ΔABC, ta có:

$$\frac{IA}{IB} = \frac{IC}{BC} = \frac{AC - IA}{AB.\sqrt{2}}$$

$$\frac{IA}{a} = \frac{a - IA}{a\sqrt{2}}$$

$\sqrt{2}.IA = a - IA$

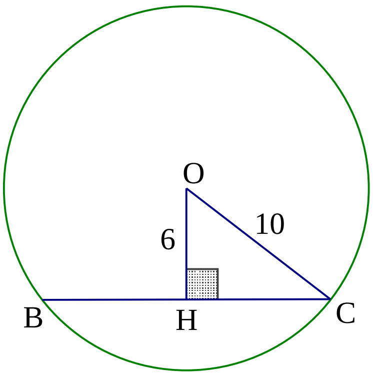
$IA = \dfrac{a}{\sqrt{2}+1} = a\left(\sqrt{2}-1\right)$

Bài 10. Cho điểm (O) cách đường thẳng a là $6cm$. Vẽ đường tròn $(O,10cm)$

a) Chứng minh rằng (O) có hai giao điểm với đường thẳng d

b) Gọi hai giao điểm nói trên là B và C. Tính độ dài BC

Lời giải



a) Kẻ $OH \perp a \Rightarrow OH = 6cm$ là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a

Do $6 < 10 \Rightarrow (O)$ có hai giao điểm với đường thẳng a

b) Vì $OH \perp a \Rightarrow OH \perp BC \Rightarrow BH = HC = \dfrac{BC}{2}$

Áp dụng hệ thức pythagore vào ΔOHC vuông tại H có cạnh huyền $OC = 10cm$, ta được:

$OC^2 = CH^2 + HO^2$

$10^2 = CH^2 + 6^2$

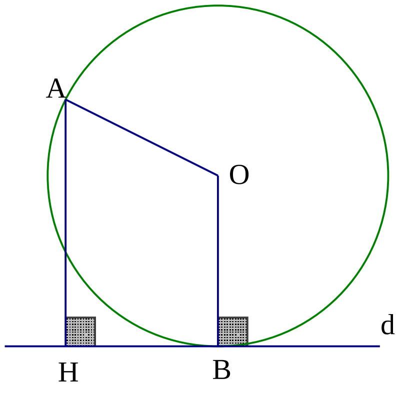
$CH^2 = 8^2$

$CH = 8(cm)\,(CH > 0)$

Vậy $BC = 16(cm)$.

Bài 11. Cho đường thẳng d và đường tròn $(O;R)$ không giao nhau. A là điểm trên (O). Xác định vị trí điểm A để khoảng cách từ A đến đường thẳng d lớn nhất

Lời giải



Gọi H, B lần lượt là hình chiếu của A, O trên đường thẳng d, ta có: B cố định

$AH \perp HB \Rightarrow AH \le AB$

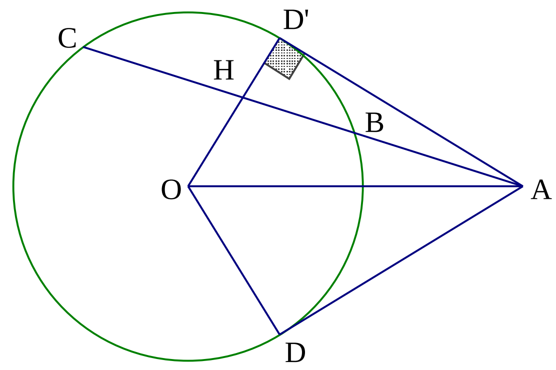
Xét ba điểm OA, B ta có: $AB \le OA + OB \Rightarrow AH \le R + OB, R + OB$ không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} H \equiv B \\ O\, nam\, giua\, A\, va\, B \end{cases}$

Vậy khi A là giao điểm của tia đối tia OB và đường tròn (O) (B là hình chiếu của (O) trên d) thì khoảng cách từ A đến d lớn nhất.

Bài 12. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Đường thẳng d qua A, gọi B và C là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (O). Xác định vị trí của đường thẳng d để tổng $AB + AC$ lớn nhất

Lời giải



Vẽ đường thẳng qua A tiếp xúc với đường tròn tại D và D', ta có D và D' cố định

- Nếu d trùng với AD hoặc AD'

Ta có các điểm B, C, D trùng nhau nên: $AB + AC = 2AD = 2AD'$

- Nếu d không trùng với AD hoặc AD'

Vẽ $OH \perp d\,(H \in d)$. Ta có H là trung điểm của BC (đị lý đường kính vuông góc với dây cung) và có

$OH < R \Rightarrow AB + AC = AH + HB + AH - HC = 2AH$

Xét ΔOAH vuông tại $H \Rightarrow OH^2 + AH^2 = OA^2$

Xét ΔOAD vuông tại $D \Rightarrow OD^2 + AD^2 = OA^2$

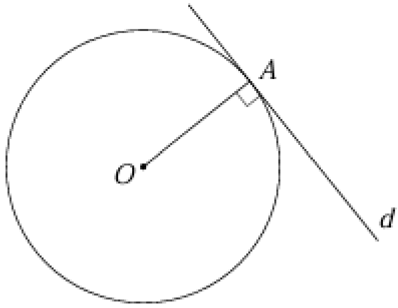
Do đó : $OH^2 + AH^2 = OD^2 + AD^2$, mà $OH < OD = R \Rightarrow AH > AD \Rightarrow AB + AC > 2AD$

Vậy khi đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn thì $AB + AC$ nhỏ nhất.

BÀI 3
TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. Nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Định lí: Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

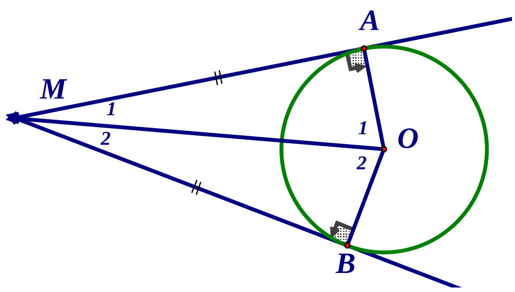


Nhận xét: Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì đường thẳng đó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

2. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Định lí: Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.



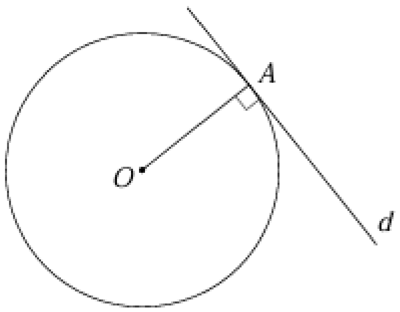
DẠNG 1
CHỨNG MINH MỘT ĐƯỜNG THẲNG LÀ TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN
TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG, GÓC LIÊN QUAN TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. Để chứng minh đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại tiếp điểm A, ta có thể làm theo một trong các cách sau:

Cách 1: Chứng minh A nằm trên (O) và OA vuông góc với d tại A.

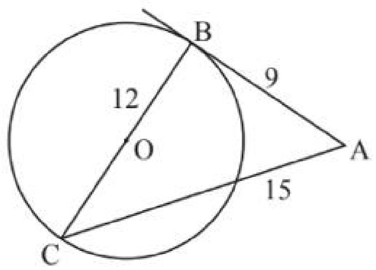
Cách 2: Kẻ OH vuông góc với d tại H và chứng minh $OH = OA = R$.

Cách 3: Vẽ tiếp tuyến d' của (O) và chứng minh d trùng với d'.



2. Để tính độ dài đoạn thẳng, góc, … liên quan đến tiếp tuyến ta thường sử dụng định lí Pythagore, tỉ số lượng giác, định lí Thalès.

Bài 1. Trong hình vẽ bên dưới, $AB = 9, BC = 12, AC = 15$ và BC là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Bài 2. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 10cm$ và Bx là tiếp tuyến của (O). Gọi C là một điểm trên (O) sao cho $\widehat{CAB} = 30^0$ và E là giao điểm của các tia AC và Bx.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AC và BC.

b) Tính độ dài đoạn thẳng EC và BE.

Bài 3. Cho đường tròn $(O;2cm)$ và một điểm A chạy trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy. Trên xy lấy một điểm M sao cho $AM = 2\sqrt{3}(cm)$.

a) Tính OM.

b) Hỏi điểm M di động trên đường nào khi A chạy trên (O).

Bài 4. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $AB=\frac{8}{5}R$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, cắt các tia OA,OB lần lượt tại M,N và tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ tại K. Gọi H là trung điểm AB.

a) Tính OH theo R.

b) Tính diện tích tam giác OMN theo R.

Bài 5. Cho đường tròn tâm (O) có bán kính $OA=R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA.

a) Tứ giác $OACB$ là hình gì ? Vì sao ?

b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B, cắt đường thẳng OA tại E. Tính độ dài BE theo R.

Bài 6. Cho $(O;R)$ đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB}=30^0$, trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM=R$.

a) Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Chứng minh $MC^2=3R^2$.

Bài 7. Từ điểm A ở ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm), C là điểm trên đường tròn (O) sao cho $AC=AB$.

a) Chứng minh rằng AC là tiếp điểm của đường tròn (O).

b) D là điểm trên AC. Đường thẳng qua C vuông góc với OD tại M cắt đường tròn (O) tại E ($E\neq C$). Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 8. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD,CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh bốn điểm A,D,H,E cùng nằm trên 1 đường tròn.

b) Gọi (O) là đường tròn đi qua bốn điểm A,D,H,E và M là trung điểm của BC. Chứng minh ME là tiếp tuyến của (O).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 9. Cho tam giác ΔABC có $AB=6cm, AC=8cm, BC=10cm$. Vẽ đường tròn $(B;BA)$. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (B).

Bài 10. Cho đường tròn (O) và một dây AB. Gọi M là trung điểm của AB, vẽ bán kính OI đi qua M. Từ I vẽ đường thẳng $xy//AB$. Chứng minh rằng xy là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 11. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và tiếp tuyến xAy. Trên xy lấy một điểm M, kẻ dây cung BN song song với OM. Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 12. Cho ΔABC cân tại A có các đường cao AH và BK cắt nhau tại I. Chứng minh

a) Đường tròn đường kính AI đi qua K.

b) HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

Bài 13. Cho ΔABC, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng MD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 8cm, AC = 15cm$. Vẽ đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Vẽ đường tròn đường kính CD cắt AC ở E.

a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Tính HE.

Bài 15. Cho đường tròn (O) có dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở C.

a) Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn .

b) Cho bán kính của (O) bằng $15cm$ và dây $AB = 24cm$. Tính độ dài đoạn thẳng OC.

Bài 16. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn tâm I đường kính BH cắt AB tại E, đường tròn tâm J đường kính HC cắt AC tại F.

a) Chứng minh rằng AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (J) tại H.

b) Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến của (I) tại E, tiếp tuyến của (J) tại F.

Bài 17. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm (O). Vẽ hình bình hành $ABCD$, tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt đường thẳng AD tại N.

a) Chứng minh đường thẳng AD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Chứng minh ba đường thẳng AC, BD, ON đồng quy.

Bài 18. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ đường tròn tâm D đường kính BC cắt AC và AB lần lượt ở E và F. Gọi H là giao điểm của BE và CF.

a) Chứng minh A, E, H, F cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn ở câu a.

Bài 19. Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao, $AB = 8cm, BC = 16cm$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Vẽ đường tròn đường kính CD cắt AC ở E.

a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Tính độ dài đoạn thẳng HE.

Bài 20. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn $(O;R)$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt tia AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia AB tại M.

a) Xác định hình dạng của tứ giác $AMON$.

b) Điểm A phải cách O một khoảng là bao nhiêu để cho MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 21. Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ $CD \perp OA$ tại trung điểm I của OA. Các tiếp tuyến với đường tròn tại C và D cắt nhau ở M.

a) Chứng minh rằng A, B, M thẳng hàng.

b) Tứ giác $OCAD$ là hình gì ?

c) Tính $\widehat{CMD}$.

d) Chứng minh đường thẳng MC là tiếp tuyến của đường tròn $(B; BI)$.

Bài 22. Cho đường tròn $(O; R)$, bán kính OA, dây CD là trung trực của OA. Kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C, tiếp tuyến này cắt đường thẳng OA tại I.

a) Chứng minh ΔOAC là tam giác đều.

b) Chứng minh tứ giác $OCAD$ là hình thoi.

c) Tính CI theo R.

Bài 23. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và M là điểm nằm trên (O). Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của (O) lần lượt ở C và D. Đường thẳng AM cắt OC tại E, đường thẳng BM cắt OD tại F.

a) Chứng minh $\widehat{COD} = 90^0$.

b) Tứ giác $MEOF$ là hình gì? Vì sao ?

c) Chứng minh OB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

Bài 24. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Lấy M thuộc (O) sao cho $MA < MB$. Vẽ dây MN vuông góc với AB tại H. Đường thẳng AN cắt BM tại C. Đường thẳng qua C vuông góc với AB tại K và cắt BN tại D.

a) Chứng minh A, M, C, K cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh BK là tia phân giác của $\widehat{MBN}$.

c) Chứng minh ΔKMC cân và KM là tiếp tuyến của (O).

d) Tìm vị trí của M trên (O) để tứ giác $MNKC$ trở thành hình thoi.

Bài 25. Cho nửa đường tròn tâm $(O; R)$ đường kính AB. Một đường thẳng xy tiếp xúc với đường tròn tại C. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của A và B trên xy.

a) Chứng minh rằng điểm C là trung điểm của DE.

b) Chứng minh rằng: $AD + BE$ không đổi khi C di động trên nửa đường tròn.

c) Chứng minh rằng: $4.AD.BE = DE^2$.

Bài 26. Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ tia Ax, By vuông góc với AB. Trên các tia Ax và By lấy theo thứ tự hai điểm C và D sao cho $\widehat{COD} = 90^0$, kẻ $OH \perp CD$.

a) Chứng minh rằng H thuộc đường tròn tâm O đường kính AB.

b) Xác định vị trí tương đối của CD với đường tròn (O).

Bài 27. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, M là 1 điểm thuộc nửa đường tròn, qua M vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn. Gọi D và C theo thứ tự là các hình chiếu của A và B trên tiếp tuyến ấy.

a) Chứng minh rằng M là trung điểm của CD.

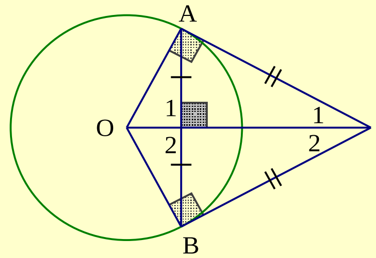
b) Chứng minh: $AB = BC + AD$.

c) Giả sử: $\widehat{AOM} > \widehat{BOM}$, gọi E là giao điểm của AD với nửa đường tròn. Xác định dạng của tứ giác $BDCE$.

d) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn sao cho tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo bán kính của nửa đường tròn đã cho.

DẠNG 2
TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU
TÍNH ĐỘ DÀI, DIỆN TÍCH, GÓC LIÊN QUAN TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU
CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC LIÊN QUAN ĐẾN HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

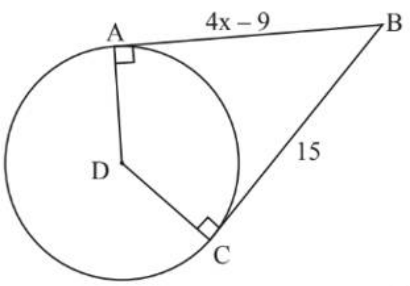
Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Giả thiết	Tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau tại M (A và B là tiếp điểm)	
Kết luận	- $MA = MB$ - $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ - $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ - MO là trung trực của AB	

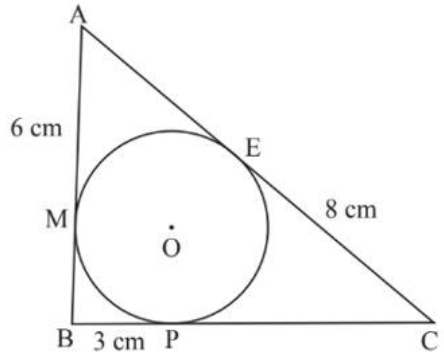
Chú ý: MO là trung trực của AB thì phải chứng minh chứ không được dùng là giả thiết bài toán nhé. Ta chứng minh như sau:

ΔAMB cân tại (do $MA = MB$) và MO là đường phân giác $\widehat{AMB}$ (do $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$) nên là MO là trung trực của AB.

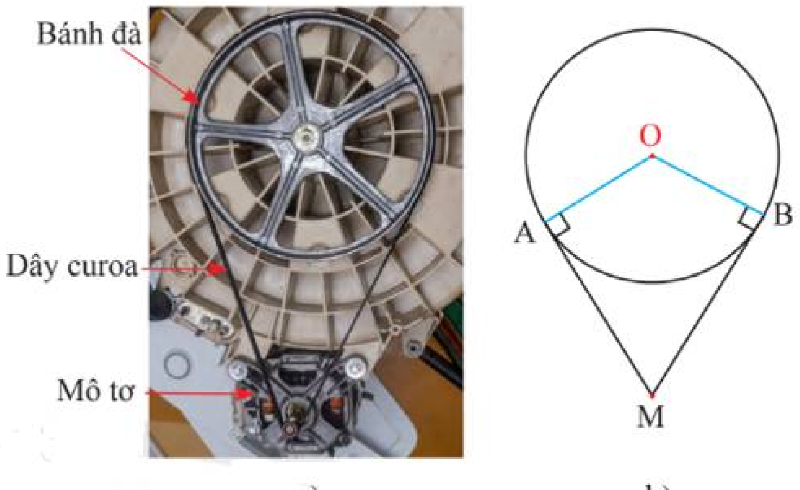
Bài 1. Tìm giá trị của x trong hình vẽ bên dưới.



Bài 2. Cho tam giác ABC có đường tròn (O) nằm trong và tiếp xúc với ba cạnh của tam giác. Biết $AM = 6cm, BP = 3cm, CE = 8cm$ (Hình vẽ). Tính chu vi tam giác ABC.



Bài 3. Bánh đà của một động cơ được thiết kế có dạng là một đường tròn tâm O, bán kính $15cm$ được kéo bởi một dây curoa. Trục của mô tơ truyền lực được biểu diễn bởi điểm M (Hình vẽ). Cho biết khoảng cách OM là $35cm$.



a) b)

a) Tính độ dài của hai đoạn dây curoa MA và MB (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

b) Tính số đo $\widehat{AMB}$ tạo bởi hai tiếp tuyến MA, MB và số đo $\widehat{AOB}$ (kết quả làm tròn đến phút).

Bài 4. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến ME, MF (E, F là các tiếp điểm) sao cho $\widehat{EMO} = 30^0$. Biết chu vi tam giác MEF là $30cm$.

a) Tính độ dài dây EF.

b) Tính diện tích ΔMEF.

Bài 5. Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau ở A.

a) Chứng minh AO là trung trực của đoạn thẳng BC.

b) Vẽ đường kính CD của (O). Chứng minh $BD // AO$.

Bài 6. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt AB tại M.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AMON$ là hình thoi.

b) Điểm A cách O một khoảng là bao nhiêu để MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 7. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến PA, PB với A và B là các tiếp điểm. Đường thẳng CA cắt đường thẳng BP tại D. Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ A đến đường kính BC.

a) Tính $\widehat{BAC}$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{PBA} = \widehat{PAB}$.

c) Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm I của AH.

Bài 8. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn cùng phía đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh rằng $CD = AC + BD$

b) Tính $\widehat{COD}$.

c) Chứng minh $MC.MD$ không đổi khi M di động trên nửa đường tròn.

d) Cho biết $OC = BA = 2R$. Tính AC và BD theo R.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn (A, AH), kẻ các tiếp tuyến BD và CE với đường tròn (A) (D, E là các tiếp điểm khác H).

a) Chứng minh rằng $BC = AC + BD$

b) Chứng minh rằng: D, A, E thẳng hàng.

c) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn với đường kính BC.

Bài 10. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ $BE \perp AC; CF \perp AB \left(E \in AC, F \in AB\right), BE \cap CF = H$.

a) Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.

b) Chứng minh ba điểm A, O, H thẳng hàng.

c) Xác định $\widehat{OAC}$ để H nằm trên (O).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 11. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O), cắt các tiếp tuyến AB, AC lần lượt tại D và E.

a) Chứng minh chu vi $\Delta ADE = 2AB$.

b) Chứng minh rằng: $\widehat{BOC} = 2\widehat{DOE}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn $(A; AH)$. Từ B, C kẻ các tiếp tuyến BD, CE với (A) trong đó D, E là các tiếp điểm.

a) Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng.

b) Chứng minh: $BD.CE = \frac{DE^2}{4}$.

c) Gọi M là trung điểm của CH. Đường tròn tâm M đường kính CH cắt (A) tại N với N khác H. Chứng minh: $CN // AM$.

Bài 13. Cho đường tròn $(O; 2cm)$ các tiếp tuyến MA, MB kẻ từ M đến đường tròn vuông góc với nhau tại M (A, B là các tiếp điểm).

a) Tứ giác $MBOA$ là hình gì? Vì sao?

b) Gọi C là điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ AB. Qua C kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt MA, MB tại D và E. Tính chu vi tam giác MDE.

c) Tính $\widehat{DOE}$.

Bài 14. Cho đường tròn (O) và 1 điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) trong đó B, C là các tiếp điểm.

a) Chứng minh đường thẳng OA là trung trực của BC.

b) Gọi H là giao điểm của AO và BC. Biết $OB = 2cm, OH = 1cm$, tính chu vi và diện tích tam giác ABC và diện tích tứ giác $ABOC$.

Bài 15. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn đó (M, N là các tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng: $OA \perp MN$.

b) Vẽ đường kính NOC. Chứng minh rằng $MC // AO$.

c) Tính độ dài các cạnh của tam giác AMN biết $OM = 3cm, OA = 5cm$.

Bài 16. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax, lấy P trên Ax ($AP > R$). Từ P kẻ tiếp tuyến PM với (O).

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, P, M, O cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh: $BM // OP$.

c) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành.

d) Giả sử AN cắt OP tại K; PM cắt ON tại I; PN cắt OM tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Bài 17. Cho đường tròn $(O; R)$. Từ A trên (O), kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kỳ (M khác A), kẻ cát tuyến MNP, gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MP, kẻ $AC \perp MB, BD \perp AM$. Gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh bốn điểm A, M, B, O cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng thuộc 1 đường tròn.

c) Chứng minh: $OI.OM = R^2$ và $OI.IM = IA^2$.

d) Chứng minh $OAHB$ là hình thoi.

e) Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.

Bài 18. Cho $\left(O;R\right)$ và M là một điểm di động trên đường thẳng d cố định nằm ngoài $\left(O\right)$. Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $\left(O\right)$ (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là hình chiếu vuông góc của $\left(O\right)$ trên d, dây cung AB cắt OH, OM lần lượt tại I, K.

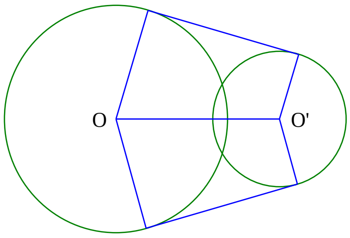
a) Chứng minh $OI.OH = OK.OM = R^2$.

b) Chứng minh AB luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên d.

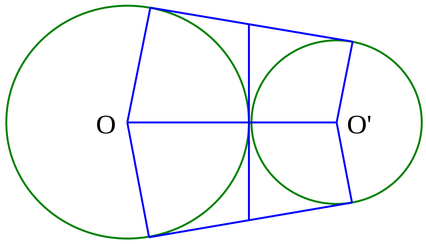
DẠNG 3
BÀI TOÁN LIÊN QUAN VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI VÀ TIẾP TUYẾN CHUNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó. Ta có các trường hợp tiếp tuyến chung của hai đường tròn như sau:

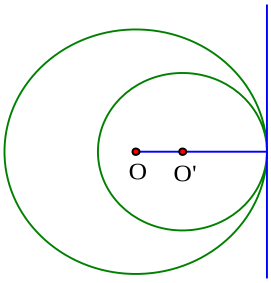
1) Hai đường tròn cắt nhau có hai tiếp tuyến chung ngoài.



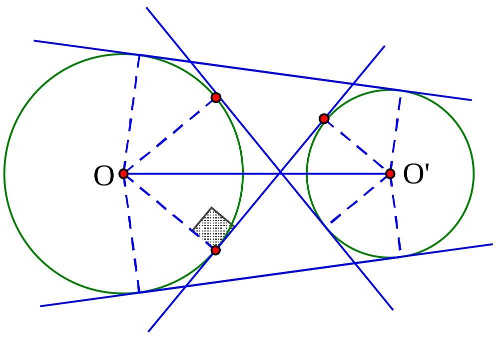
2) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài có hai tiếp tuyến chung ngoài và một tiếp tuyến chung.



3) Hai đường tròn tiếp xúc trong chỉ có một tiếp tuyến chung.



4) Hai đường tròn ngoài nhau có hai tiếp tuyến chung ngoài và hai tiếp tuyến chung trong.



Chú ý:

- Hai đường tròn chứa nhau không có tiếp tuyến chung.
- Hai đường tròn đồng tâm không có tiếp tuyến chung.

Bài 1. Cho hai đường tròn $(O;8cm)$ và $(O';5cm)$ tiếp xúc ngoài tại M. Gọi AB là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(A\in(O);B\in(O'))$.

a) Tính độ dài OO'.

b) Tính độ dài AB (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Bài 2. Cho hai đường tròn $(O;12cm)$ và $(O';5cm)$, $OO'=13cm$.

a) Chứng tỏ rằng hai đưuòng tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi A,B là giao điểm của hai đường tròn (O) và (O'). Chứng minh rằng OA là tiếp tuyến của đường tròn (O'), OA là tiếp tuyến của đường tròn (O). Tính độ dài AB.

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ ở ngoài nhau. Gọi MN là tiếp tuyến chung ngoài, EF là tiếp tuyến chung trong (M và E thuộc (O), N và F thuộc $(O;)$). Tính bán kính của đường tròn (O) và (O') trong các trường hợp sau:

a) $OO'=10cm, MN=8cm, EF=6cm$.

b) $OO'=13cm, MN=12cm, EF=5cm$.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') nằm ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài AB và CD ($A,C\in(O);B,D\in(O')$). Tiếp tuyến chung trong MN cắt AB,CD theo thứ tự tại E,F, $(M\in(O),N\in(O'))$.

a) Chứng minh $AB=EF$.

b) Chứng minh $EM=FN$.

Bài 5. Cho hai đường tròn $(O;5cm)$ và $(O';3cm)$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài $BC(B\in(O);C\in(O'))$. Vẽ đường tròn $(I;r)$ tiếp xúc với BC tại M và tiếp xúc ngoài với hai đường tròn (O) và (O') tại N và P. Tính độ dài r (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ các đường kính AOB và $AO'C$. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn. Gọi M là giao điểm của BD và CE.

a) Tính $\widehat{DAE}$.

b) Tứ giác $ADME$ là hình gì ? Vì sao ?

c) Chứng minh rằng MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

d) Chứng minh: $MD.MB=ME.MC$.

e) Gọi H là trung điểm của BC, chứng minh rằng $MH\perp DE$.

Bài 7. Cho ba điểm J,I,J' cùng nằm trên 1 đường thẳng theo thứ tự đó. Cho biết $IJ=10cm$, $IJ'=4CM$. Vẽ đường tròn (O) đường kính IJ và đường tròn (O') đường kính IJ'.

a) Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc ngoài ở I.

b) Gọi A là 1 điểm trên đường tròn (O), tia AI cắt (O') ở A'. Chứng minh rằng $\Delta AIJ \sim \Delta A'IJ'$.

c) Qua điểm I kẻ 1 cát tuyến cắt (O) ở B (B và A thuộc hai nửa mặt phẳng bờ IJ), cắt đường tròn (O') ở B'. Chứng minh: $\Delta IAB \backsim \Delta IA'B'$.

d) Chứng minh rằng: $\Delta OAB \backsim \Delta OA'B'$.

e) Tứ giác $ABA'B'$ là hình gì vì sao ?

Bài 8. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng đi qua A (không đi qua hai tâm) cắt (O) tại C và cắt (O') tại D. Vẽ các đường kính AOE và $AO'F$.

a) Chứng minh ba điểm E, B, F thẳng hàng.

b) Chứng minh $EC//FD$.

c) Chứng minh $OO' = \frac{1}{2}EF$.

Bài 9. Cho hai đường tròn (O) và (O') giao nhau tại M và N. Gọi I là trung điểm của OO'. Đường thẳng kẻ qua M vuông góc MI cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt ở A và B. Hai đường thẳng vuông góc với AB tại A và B cắt đường tròn (O) ở P, (O') ở Q.

a) Chứng minh rằng M là trung điểm của AB.

b) MI cắt PQ ở E, chứng minh: $EP = EQ$.

c) Chứng minh: $IH = IK$.

Bài 10. Cho góc vuông xOy. Lấy các điểm I và K lần lượt trên các tia Ox, Oy. Đường tròn $(I; OK)$ cắt tia Ox tại M (I nằm giữa O và M), đường tròn $(K; OI)$ cắt tia Oy tại N (K nằm giữa O và N).

a) Chứng minh (I) và (K) luôn cắt nhau.

b) Tiếp tuyến tại M của (I), tiếp tuyến tại N của (K) cắt nhau tại C. Chứng minh tứ giác $OMCN$ là hình vuông.

c) Gọi A, B là các giao điểm của (I) và (K) trong đó B ở miền trong góc xOy. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

d) Giả sử I và K theo thứ tự đi động trên các tia Ox và Oy sao cho $OI + OK = a$ không đổi. Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 11. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Vẽ các đường tròn $(O; OA)$ và $(B; BA)$. Kẻ một đoạn thẳng qua A cắt hai đường tròn (O) và (B) theo thứ tự tại C và D.

a) Chứng minh Hai đường tròn (O) và (B) tiếp xúc tại A.

b) Chứng minh $AB = CD$.

c) Chứng minh $OC // BD$.

Bài 12. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ hai bán kính OM và $O'N$ song song với nhau thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ OO'. Tam giác MAN là tam giác gì?

Bài 13. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ tiếp xúc ngoài tại M. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài AB và CD với $A,C \in (O)$ và $B,D \in (O')$.

a) Chứng minh $\Delta IBD \sim \Delta IAC$.

b) Chứng minh $\Delta BO'D \sim \Delta AOC$.

c) Chứng minh $BD // AC$.

Bài 14. Cho hai đường tròn tâm O_1 và tâm O_2 tiếp xúc ngoài tại A. Tiếp tuyến chung ngoài có tiếp điểm với hai đường tròn lần lượt ở M và N. Tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tại A cắt MN tại I.

a) Chứng minh tam giác MAN và OIO' là các tam giác vuông.

b) Xác định vị trí tường đối của đường thẳng MN với đường tròn đường kính OO'.

c) Tính $S_{OIO'}$ biết bán kính của hai đường tròn tâm O và O' lần lượt bằng $48cm$ và $27cm$.

Bài 15. Cho đường tròn (O) đường kính AB và C là điểm nằm giữa A và O. Vẽ đường tròn tâm (I) có đường kính CB.

a) Xét vị trí tương đối của (I) và (O).

b) Kẻ dây DE của (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC. Tứ giác $ADCE$ là hình gì?

c) Gọi K là giao điểm của đoạn thẳng DB và (I). Chứng minh ba điểm E,C,K thẳng hàng.

d) Chứng minh HK là tiếp tuyến của (I).

Bài 16. Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC với B thuộc (O), C thuộc (O'). Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I.

a) Vẽ đường kính BOD và $CO'E$. Chứng minh các bộ ba điểm B, A, E và C, A, D thẳng hàng.

b) Chứng minh $\Delta BAC, \Delta DAE$ có diện tích bằng nhau.

c) Gọi K là trung điểm của DE. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\Delta OKO'$ tiếp xúc với BC .

d) Cho $OA = 4,5cm; O'A = 2cm$. Tính AI, BC, CA.

Bài 17. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC với $B \in (O), C \in (O')$. Đường thẳng vuông góc với OO' kẻ từ A cắt BC ở M.

a) Tính MA theo R và r.

b) Tính diện tích tứ giác $BCO'O$ theo R và r.

c) Tính diện tích ΔBAC theo R và r.

d) Gọi I là trung điểm của OO'. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn $(I;IM)$.

Bài 18. Cho 3 điểm A,B,C theo thứ tự đó trên một đường thẳng và $AB=4BC$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AC vẽ nửa đường tròn tâm O đường kính AB và nửa đường tròn tâm O' có đường kính BC. Tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn có tiếp điểm với đường tròn (O) ở F với nửa đường tròn (O') ở G, cắt các tiếp tuyến vẽ từ A và C của hai nửa đường tròn đó ở D và E. Tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn ở B cắt DE ở I.

a) Chứng minh các tam giác OIO', OID, $O'IE$ là các tam giác vuông.

b) Đặt $O'C=a$ (a là độ dài cho trước). Tính BI, EG và AD theo a.

c) Tính diện tích tứ giác $ADEC$ theo a.

Bài 19. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc (O) và (O') lần lượt ở B và C. Tiếp tuyến chung trong cắt BC ở I. Gọi E,F thứ tự là giao điểm của IO với AB của IO' với AC.

a) Chứng minh bốn điểm A,E,I,F cùng thuộc một đường tròn, xác định tâm K của đường tròn này.

b) Chứng minh: $IE.IO+IF.I'O=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2\right)$.

c) Gọi P là trung điểm của OA. Chứng minh PE tiếp xúc với (K).

d) Cho OO' cố định và có độ dài $2a$. Tìm điều kiện của R và R' để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Bài 20. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB, C là một điểm bất kỳ nằm giữa A và B. Vẽ đường tròn tâm I, đường kính CA; đường tròn tâm (K), đường kính CB.

a) Hai đường tròn (I) và (K) có vị trí như thế nào đối với nhau.

b) Đường vuông góc với AB tại C cắt đường tròn (O) ở D và E. DA cắt đường tròn (I) ở M, DB cắt đường tròn (K) ở N.

c) Xác định vị trí của C trên đường kính AB sao cho MN có độ dài lớn nhất.

d) Xác định vị trí của điểm C trên đường kính AB sao cho tứ giác $DMCN$ có diện tích lớn nhất.

Bài 21. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ cắt nhau tại A và B sao cho tâm đường tròn này nằm trên đường tròn kia. Tính theo R diện tích tứ giác $OAO'B$.

Bài 22. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B (O và O' thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Kẻ các đường kính BOC và $BO'D$.

a) Chứng minh rằng ba điểm C,A,D thẳng hàng.

b) Biết $OO'=5cm, OB=4cm, O'B=3cm$. Tính diện tích tam giác BCD.

Bài 23. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi M là trung điểm của OO'. Đường thẳng qua A cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt ở C và D.

a) Khi $CD \perp AB$. Chứng minh: $AC = AD$.

b) Khi CD đi qua A và không vuông góc với MA. Vẽ đường kính AE của (O), AE cắt (O') ở H. Vẽ đường kính AF của (O'), AF cắt (O) ở G.

- Chứng minh AB, EG, FH đồng quy.

- Tìm vị trí của CD để đoạn CD có độ dài lớn nhất.

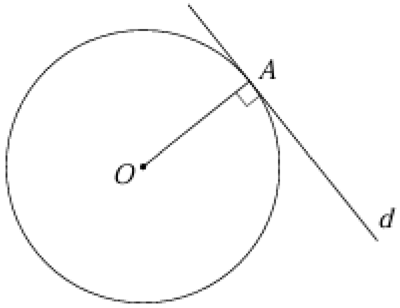
Bài 24. Cho hai đường tròn $(O; 6cm)$ và $(O'; 2cm)$ nằm ngoài nhau. Gọi AB là tiếp tuyến chung ngoài, CD là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn ($A, C \in (O); B, D \in (O')$). Biết $AB = 2CD$, tính độ dài đoạn nối tâm OO'.

Bài 25. Cho hai đường tròn đồng tâm O, có bán kính lần lượt là R và r. Dây MN của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại A và B. Gọi BC là đường kính của đường tròn nhỏ. Tính giá trị của biểu thức $\left(AC^2 + AM^2 + AN^2\right)$ theo R và r.

BÀI 3
TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. Nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Định lí: Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

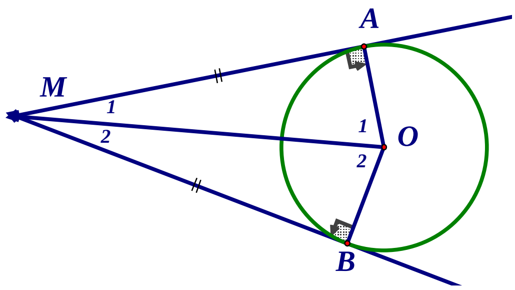


Nhận xét: Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì đường thẳng đó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

2. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Định lí: Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.



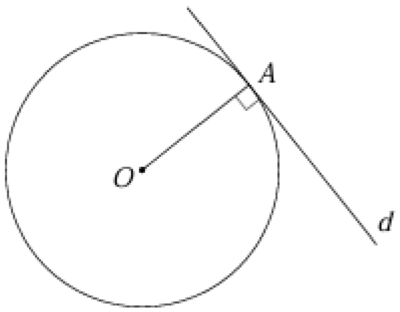
DẠNG 1
CHỨNG MINH MỘT ĐƯỜNG THẲNG LÀ TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN
TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG, GÓC LIÊN QUAN TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. Để chứng minh đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại tiếp điểm A, ta có thể làm theo một trong các cách sau:

Cách 1: Chứng minh A nằm trên (O) và OA vuông góc với d tại A.

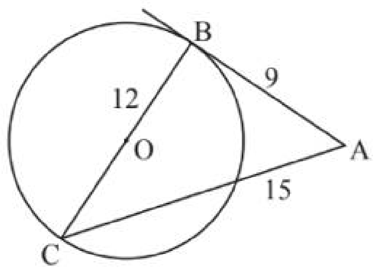
Cách 2: Kẻ OH vuông góc với d tại H và chứng minh $OH = OA = R$.

Cách 3: Vẽ tiếp tuyến d' của (O) và chứng minh d trùng với d'.



2. Để tính độ dài đoạn thẳng, góc, … liên quan đến tiếp tuyến ta thường sử dụng định lí Pythagore, tỉ số lượng giác, định lí Thalès.

Bài 1. Trong hình vẽ bên dưới, $AB = 9, BC = 12, AC = 15$ và BC là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Lời giải

Xét ΔABC có:

$AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 225$

$AC^2 = 15^2 = 225$

Do đó $AB^2 + BC^2 = AC^2$

Theo định lí Pythagore đảo, ta có ΔABC vuông tại B.

Suy ra $AB \perp BC$ hay $AB \perp OB$.

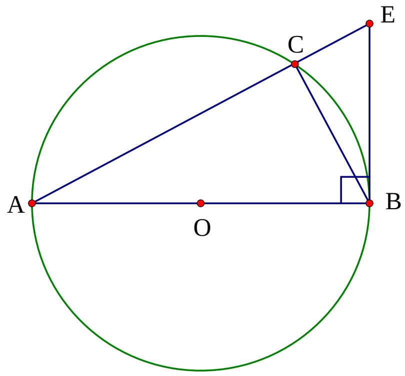
Xét đường tròn (O) có $AB \perp OB$ tại B thuộc đường tròn (O) nên AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 2. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 10cm$ và Bx là tiếp tuyến của (O). Gọi C là một điểm trên (O) sao cho $\widehat{CAB} = 30^0$ và E là giao điểm của các tia AC và Bx.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AC và BC.

b) Tính độ dài đoạn thẳng EC và BE.

Lời giải



a) Ta có $CO = OA = OB = \frac{1}{2}AB$ (bán kính) nên tam giác ACB vuông tại C hay $\widehat{ACB} = 90^0$

Xét tam giác ACB vuông tại C, ta có:

$$AC = AB.\cos 30^0 = 10.\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}cm$$

$$BC = AB.\sin 30^0 = 10.\frac{1}{2} = 5cm$$

b) Ta có $\widehat{CAB} + \widehat{AEB} = 90^0$ (2 góc phụ nhau)

Nên $\widehat{AEB} = 60^0$

Xét tam giác BCE vuông tại C, ta có:

$$CE = BC.\cot 60^0 = 5.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}cm$$

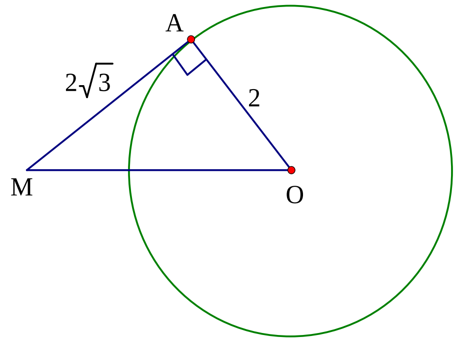
$$BE = \frac{BC}{\sin 60^0} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}cm.$$

Bài 3. Cho đường tròn $(O;2cm)$ và một điểm A chạy trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy. Trên xy lấy một điêm M sao cho $AM = 2\sqrt{3}(cm)$.

a) Tính OM.

b) Hỏi điểm M di động trên đường nào khi A chạy trên (O).

Lời giải



a) Xét tam giác OAM vuông tại A, theo định lí Pythagore, ta có:

$$OM=\sqrt{OA^2+MA^2}=\sqrt{2^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=4cm$$

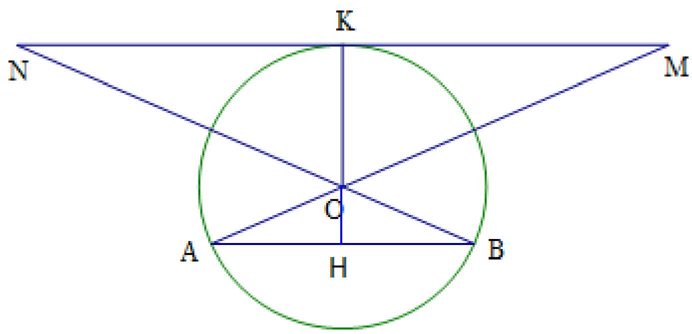
b) Khi A chạy trên (O) thì độ dài OM luôn bằng $4cm$, do đó điểm M di chuyển trên $(O;4cm)$

Bài 4. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $AB=\frac{8}{5}R$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, cắt các tia OA,OB lần lượt tại M,N và tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ tại K. Gọi H là trung điểm AB.

a) Tính OH theo R.

b) Tính diện tích tam giác OMN theo R.

Lời giải



a) Tam giác AOB cân tại O (vì $OA=OB=R$), mà OH là đường trung tuyến nên OH cũng là đường cao hay $\widehat{OHA}=90^0$

Xét tam giác AHO vuông tại H, theo định lí Pythagore, ta có:

$$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{OA^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{4}{5}R\right)^2}=\frac{3}{5}R$$

b) Vì $AB//MN$ nên $OK\perp AB$, do đó 3 điểm K,O,H thẳng hàng.

Vì $AB//MN$ nên theo định lí Thalès, ta có :

$$\frac{MN}{AB}=\frac{OK}{OH}$$

Suy ra $MN=AB.\frac{OK}{OH}=\frac{8}{5}R.\frac{R}{\frac{3}{5}R}=\frac{8}{3}R$

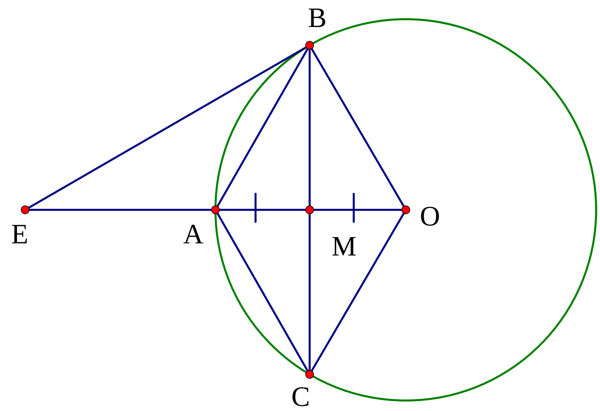
Do đó diện tích tam giác OMN là: $S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}OK.MN=\frac{1}{2}R.\frac{8}{3}R=\frac{4}{3}R^2$

Bài 5. Cho đường tròn tâm (O) có bán kính $OA=R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA.

a) Tứ giác $OACB$ là hình gì ? Vì sao ?

b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B, cắt đường thẳng OA tại E. Tính độ dài BE theo R.

Lời giải



a) ΔOBC cân tại O, có $BC\perp OM$, suy ra OM vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến. Do đó M là trung điểm của BC

Tứ giác $OACB$ có hai đường chéo AO và BC vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình thoi.

b) $OACB$ là hình thoi nên $OB=AB=R$

mà $OA=OB=R$

do đó $OA=OB=AB=R$

Suy ra ΔOAB đều hay $\widehat{AOB}=60^0$

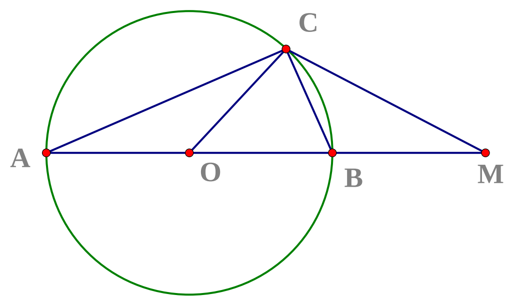
ΔOBE vuông tại B, ta có: $BE=OB\tan 60^0=R\sqrt{3}$

Bài 6. Cho $(O;R)$ đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB}=30^0$, trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM=R$.

a) Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Chứng minh $MC^2=3R^2$.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{ACB}=90^0 \Rightarrow \widehat{ABC}=60^0 \Rightarrow \Delta BOC$ đều $\Rightarrow BC=OB=BM=R$

Vậy ΔOCM vuông tại C (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền) $\Rightarrow OM\perp OC \Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

b) ΔBMC cân tại $B \Rightarrow \widehat{BCM}=\widehat{M}=30^0$

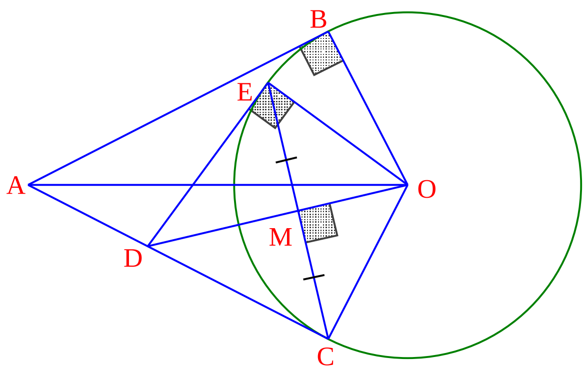
$$\Delta BCM \sim \Delta CAM\,(g-g) \Rightarrow \frac{MC}{MA}=\frac{MB}{MC} \Rightarrow MC^2=MA.MB=3R^2$$

Bài 7. Từ điểm A ở ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm), C là điểm trên đường tròn (O) sao cho $AC=AB$.

a) Chứng minh rằng AC là tiếp điểm của đường tròn (O).

b) D là điểm trên AC. Đường thẳng qua C vuông góc với OD tại M cắt đường tròn (O) tại E ($E\neq C$). Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



a) Xét ΔOAC và ΔOAB, ta có:

$OC=OB(=R)$

$OA: chung$

$AC=AB(gt)$

$\Rightarrow \Delta OAC=\Delta OAB(ccc)$

$\Rightarrow \widehat{OCA}=\widehat{OBA}=90^0 \Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

b) $OD\perp EC(gt)$ và ΔCOE cân tại $O \Rightarrow M$ là trung điểm của EC

OD là đường trung trực của đoạn thẳng $EC \Rightarrow DE=DC \Rightarrow \widehat{OED}=\widehat{OCD}=90^0$ (tính chất đối xứng trục)

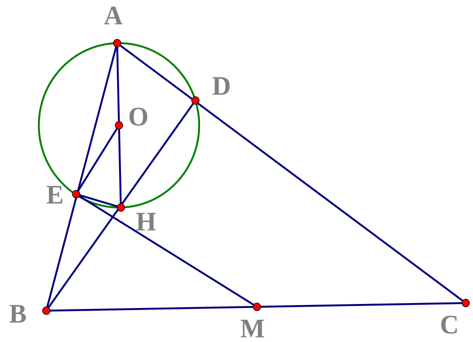
Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 8. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên 1 đường tròn.

b) Gọi (O) là đường tròn đi qua bốn điểm A, D, H, E và M là trung điểm của BC. Chứng minh ME là tiếp tuyến của (O).

Lời giải



a) Xét $\Delta ADH(\widehat{H}=90^0) \Rightarrow D \in \left(O;\dfrac{AH}{2}\right)$

$\Delta AEH\left(\widehat{E}=90^0\right) \Rightarrow E \in \left(O;\dfrac{AH}{2}\right)$

Vậy 4 điểm A, D, H, E cùng thuộc 1 đường tròn

b) Xét $\Delta BEC\left(\widehat{E}=90^0\right)$, M là trung điểm của $BC \Rightarrow EM = MC \Rightarrow \Delta EMC$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{CEM} = \widehat{ECM}$

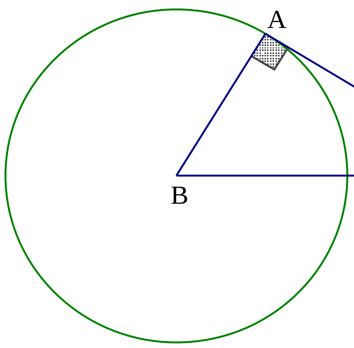
Ta lại có ΔAOE cân tại $O \Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{EAO}$

Mặt khác $\widehat{EAO} = \widehat{EAM}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) và $\widehat{AEO} + \widehat{OEC} = 90^0 \Rightarrow OE \perp ME \Rightarrow ME$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 9. Cho tam giác ΔABC có $AB = 6cm, AC = 8cm, BC = 10cm.$ Vẽ đường tròn $(B; BA)$. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (B).

Lời giải



Xét ΔABC có:

$BC^2 = 100$

$AB^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100$

Do đó $BC^2 = AB^2 + AC^2$

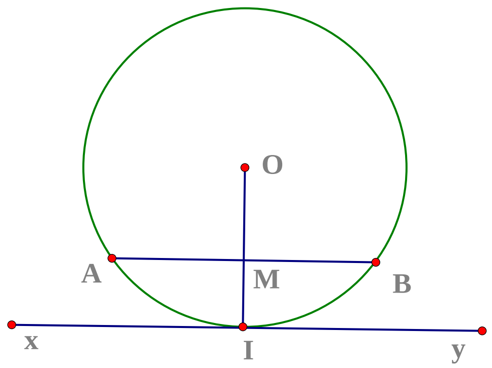
Theo định lí Pythagore đảo, ta có ΔABC vuông tại A.

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow BA \perp AC$

Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (B).

Bài 10. Cho đường tròn (O) và một dây AB. Gọi M là trung điểm của AB, vẽ bán kính OI đi qua M. Từ I vẽ đường thẳng $xy//AB$. Chứng minh rằng xy là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải

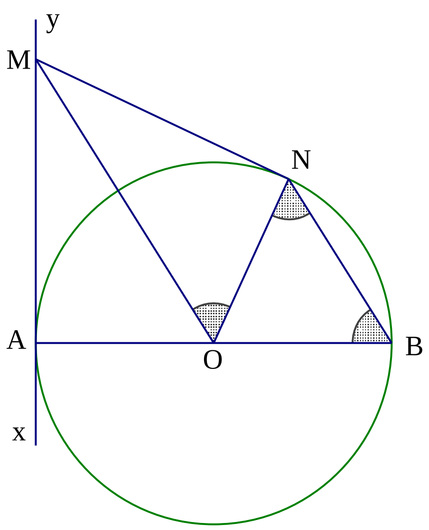


Xét đường tròn (O), ta có $OI \perp AB$ (đường kính đi qua trung điểm của dây thì vuông góc với dây)

Mà $xy//AB \Rightarrow OI \perp xy \Rightarrow xy$ là tiếp tuyến của đường tròn.

Bài 11. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và tiếp tuyến xAy. Trên xy lấy một điểm M, kẻ dây cung BN song song với OM. Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



Vì $BN//OM \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{ABN}; \widehat{MON} = \widehat{ONB}$

Mà ΔOBN cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{ONB} \Rightarrow \widehat{MON} = \widehat{AOM}$

Ta có: $\Delta OAM = \Delta ONM \left(OA = ON = R; \widehat{AOM} = \widehat{MON}; OM : chung\right) \Rightarrow \widehat{ONM} = \widehat{OAM}$

Ta lại có: $\widehat{OAM} = 90^0$ (vì xy là tiếp tuyến tại A), nên ta có: $\widehat{ONM} = 90^0 \Leftrightarrow MN \perp ON$

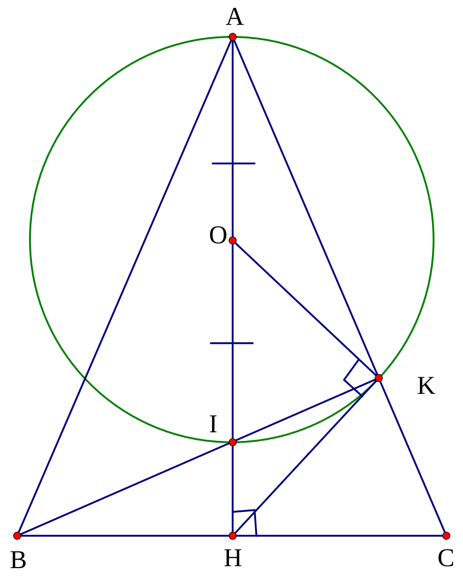
Vậy MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 12. Cho ΔABC cân tại A có các đường cao AH và BK cắt nhau tại I. Chứng minh

a) Đường tròn đường kính AI đi qua K.

b) HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

Lời giải



a) Chứng minh được: $\widehat{BKA} = 90^0$

b) Gọi O là trung điểm của AI. Ta có:

- $OK = OA \Rightarrow \widehat{OKA} = \widehat{OAK}$

- $\widehat{OAK} = \widehat{HBK}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$)

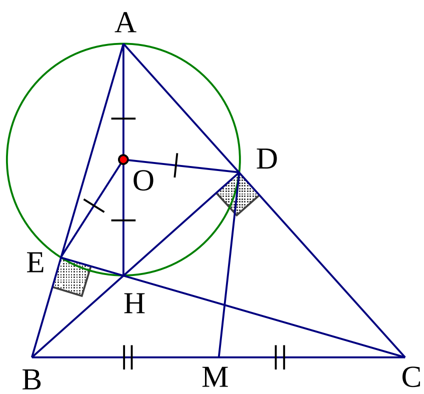
$HB = HK \Rightarrow \widehat{HBK} = \widehat{HKB} \Rightarrow \widehat{OKA} = \widehat{HBK} \Rightarrow \widehat{HKO} = 90^0$

Bài 13. Cho ΔABC, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng MD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

Lời giải



a) Gọi O là trung điểm của AH

Xét ΔADH và ΔAEH vuông tại D và E ta có: $OD = OE = OA = OH = \dfrac{1}{2}AH$

Suy ra bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH

b) Tam giác DBC vuông tại D có DM là đường trung tuyến nên $MD = MB = \frac{1}{2}BC$

Ta có: $\widehat{ODA} = \widehat{OAD}$ (ΔOAD cân)

$\widehat{OAD} = \widehat{DBC}$ (phụ với $\widehat{ACB}$)

$\widehat{DBC} = \widehat{BDM}$ (Vì ΔMBD cân)

Do đó: $\widehat{ODA} = \widehat{BDM}$

Ta có: $\widehat{ODA} + \widehat{ODB} = 90^0\left(BD \perp AC\right) \Rightarrow \widehat{BDM} + \widehat{ODB} = 90^0\left(\widehat{ODA} = \widehat{BDM}\right)$

Hay $\widehat{ODM} = 90^0 \Rightarrow MD \perp OD$

Vậy MD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

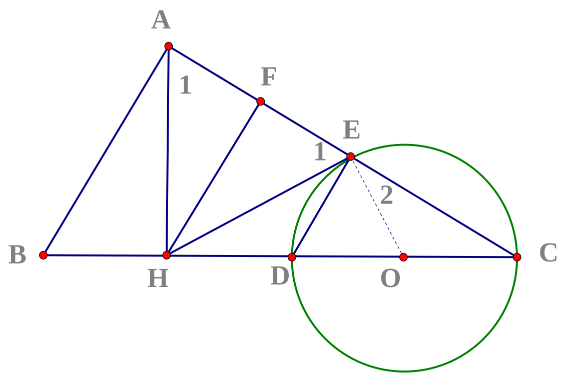
Tương tự ta chứng minh được ME là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 8cm, AC = 15cm$. Vẽ đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Vẽ đường tròn đường kính CD cắt AC ở E.

a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Tính HE.

Lời giải



a) Ta có E thuộc đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{DEC} = 90^0 \Rightarrow DE // AB$

\+ Gọi F là trung điểm của $AE \Rightarrow HF$ là đường trung bình của hình thang $ABDE \Rightarrow HF \perp AE \Rightarrow \Delta AHE$ cân tại $H \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$

+Ta có: ΔOFC cân tại $O \Rightarrow \widehat{E_2} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = \widehat{A_1} + \widehat{C} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HEO} = 90^0 \Rightarrow HE \perp OE$ (đpcm)

b) Xét $\Delta ABC(\widehat{A} = 90^0) \Rightarrow BC = 17cm$

Ta có: ΔABC đồng dạng ΔHBA ($\widehat{ABC}$ chung; $\widehat{BAC} = \widehat{AHB} = 90^0$)

$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{120}{7}(cm)$

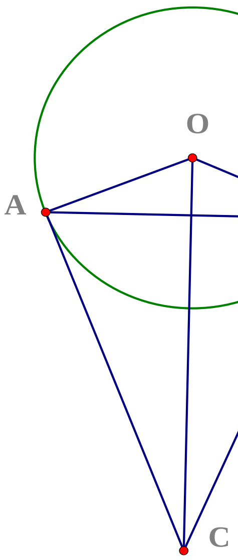
ΔAHE cân tại $H \Rightarrow AH = HE = \frac{120}{7}(cm)$

Bài 15. Cho đường tròn (O) có dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở C.

a) Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn .

b) Cho bán kính của (O) bằng $15cm$ và dây $AB = 24cm$. Tính độ dài đoạn thẳng OC.

Lời giải



a) Xét ΔOAC và ΔOBC, có :

$$\begin{cases} OA = OC = R \\ OC : chung \end{cases} \Rightarrow \Delta OAC = \Delta OBC(cgc) \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OAC} = 90^0 \Rightarrow \text{ đpcm}$$

b) Xét $\widehat{OBC}; \Delta OBI(\hat{I} = 90^0) \Rightarrow OI^2 = OB^2 - BI^2 \Rightarrow OI = 9cm$, áp dụng

Xét $\Delta OBC\left(\hat{B} = 90^0\right)$, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

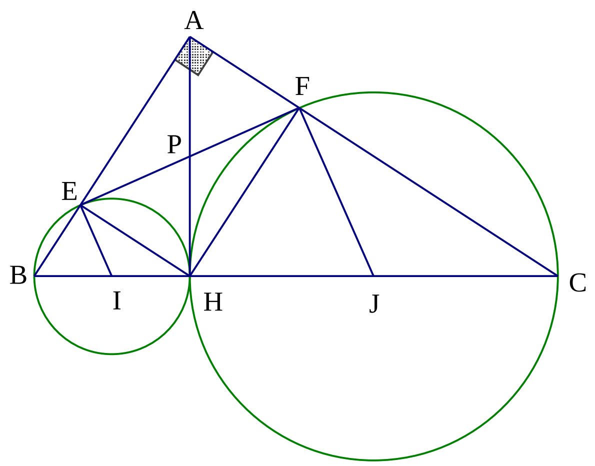
$$OB^2 = OI.OC \Rightarrow OC = \frac{OB^2}{OI} = \frac{225}{9} = 25(cm)$$

Bài 16. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn tâm I đường kính BH cắt AB tại E, đường tròn tâm J đường kính HC cắt AC tại F.

a) Chứng minh rằng AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (J) tại H.

b) Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến của (I) tại E, tiếp tuyến của (J) tại F.

Lời giải



a) Gọi I là trung điểm của BH thì I là tâm của đường tròn đường kính BH

Gọi J là trung điểm của HC thì J là tâm của đường tròn đường kính HC

Ta có: $IH \perp AH \Rightarrow BH$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BH

Cũng vậy BH là tiếp tuyến của đường tròn đường kính HC

Vậy AH là tiếp tuyến chung của đường tròn (I) và (J)

b) Ta có: $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^0 \Rightarrow$ $AFHE$ là hình chữ nhật

Gọi P là giao điểm của AH và EF

Ta có: $PE = PF = PH = PA$

Lại có: $\Delta PEI = \Delta PHI\left(c-c-c\right) \Rightarrow \widehat{IEP} = \widehat{IHP} = 90^0 \Rightarrow EF$ là tiếp tuyến của đường tròn (I)

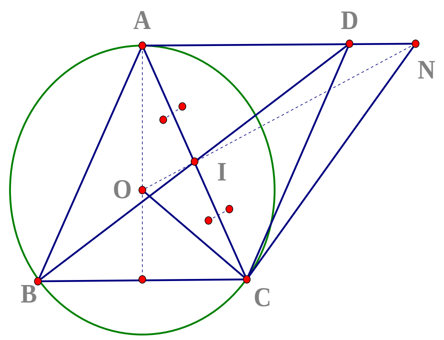
Chứng minh được: $\Delta PEJ = \Delta PHJ\left(c-c-c\right) \Rightarrow \widehat{IFJ} = \widehat{PHJ} = 90^0 \Rightarrow EF$ là tiếp tuyến của đường tròn (J).

Bài 17. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm (O). Vẽ hình bình hành $ABCD$, tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt đường thẳng AD tại N.

a) Chứng minh đường thẳng AD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Chứng minh ba đường thẳng AC, BD, ON đồng quy.

Lời giải



a) Ta có ΔABC cân tại $A \Rightarrow OA \perp BC$ (1)

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AD//BC$ (2)

$\Rightarrow AD//BC(2)$

Từ $(1)(2) \Rightarrow AD \perp OA \Rightarrow$ đpcm

b) Gọi I là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow I$ là trung điểm của $AC \Rightarrow I \in ON$ (NA, NC là tiếp tuyến)

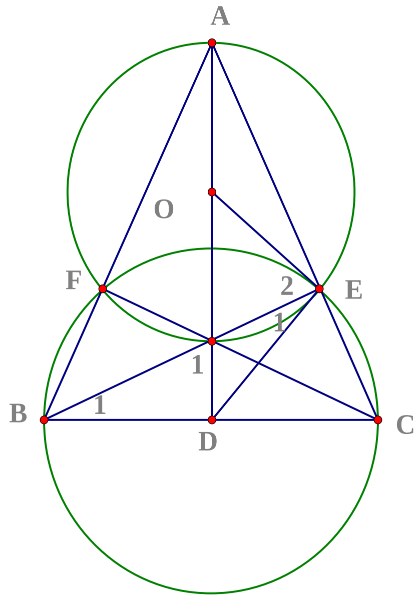
$\Rightarrow AC, BD, ON$ đồng quy (đpcm).

Bài 18. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ đường tròn tâm D đường kính BC cắt AC và AB lần lượt ở E và F. Gọi H là giao điểm của BE và CF.

a) Chứng minh A, E, H, F cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn ở câu a.

Lời giải



a) Ta có D là tâm đường tròn đường kính

$BC \Rightarrow DC = DB = DE = DF \Rightarrow \Delta BEC, \Delta BFC$ vuông.

Gọi O là trung điểm của $AH \Rightarrow OF = OE = \dfrac{AH}{2}$

Vậy 4 điểm A, E, H, F cùng thuộc 1 đường tròn

b) Có H là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow AD$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow A, H, D$ thẳng hàng

Mà $\widehat{B_1} = \widehat{E_1}; \widehat{E_2} = \widehat{H_2} = \widehat{H_1} \Rightarrow \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = \widehat{H_2} + \widehat{H_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OED} = 90^0 \Rightarrow DE$

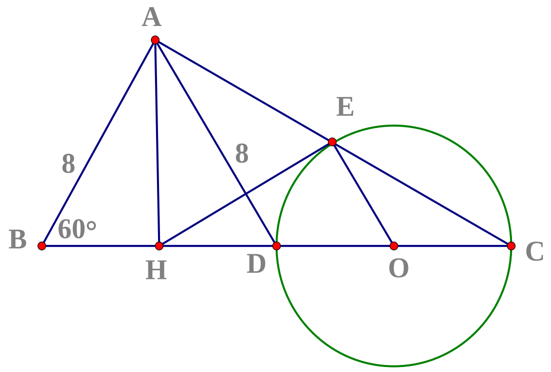
là tiếp tuyến (đpcm)

Bài 19. Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao, $AB = 8cm, BC = 16cm$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Vẽ đường tròn đường kính CD cắt AC ở E.

a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Tính độ dài đoạn thẳng HE.

Lời giải



a) Xét $\Delta ABC\left(\widehat{A}=90^0\right), \cos\widehat{B}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \widehat{B}=60^0$

Xét ΔABD có AH là đường cao đồng thời là đường trung tuyến nên ΔABD cân tại A, $\widehat{B}=60^0 \Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác đều.

+ Ta có $OD=OE \Rightarrow \Delta ODE$ cân tại O

Có: $AB//DE \Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{EDC}=60^0 \Rightarrow \Delta ODE$ đều

$\Rightarrow DE=DH=DO=\dfrac{BC}{4}\Rightarrow \widehat{HEO}=90^0 \Rightarrow HE$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

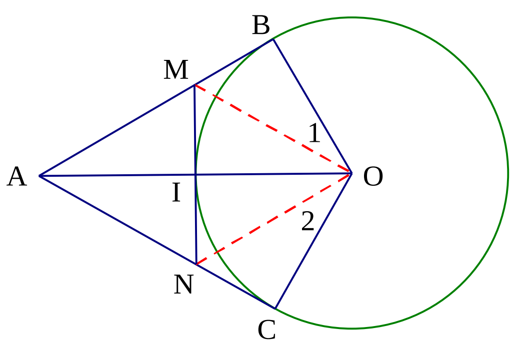
b) Xét $\Delta HEO(\widehat{E}=90^0)\Rightarrow HO^2=HE^2+EO^2 \Rightarrow HE^2=8^2-4^2=12 \Rightarrow HE=4\sqrt{3}(cm)$

Bài 20. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn $(O;R)$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt tia AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia AB tại M.

a) Xác định hình dạng của tứ giác $AMON$.

b) Điểm A phải cách O một khoảng là bao nhiêu để cho MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



a) Xét tứ giác $AMON$, ta có:

$AM//ON\,(\perp OB); AN//OM\,(\perp OC)$

$\Rightarrow AMON$ là hình bình hành

Mặt khác, xét hai tam giác vuông ΔOBM và ΔOCN, ta có:

$OB=OC=R$; $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}$ (phụ với $\widehat{MON}$

Do đó $\Delta OBM = \Delta OCN\left(ch - gn\right) \Rightarrow OM = ON$

Vậy $AMON$ là hình thoi (hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau)

b) Để MN tiếp xúc với $\left(O;R\right)$ thì $d\left(O;MN\right) = R \Leftrightarrow OI = R \Leftrightarrow OA = 2R$

Với $OA = 2R \Rightarrow MN$ là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O\right)$

Bài 21. Cho đường tròn $\left(O\right)$ đường kính AB, vẽ $CD \perp OA$ tại trung điểm I của OA. Các tiếp tuyến với đường tròn tại C và D cắt nhau ở M.

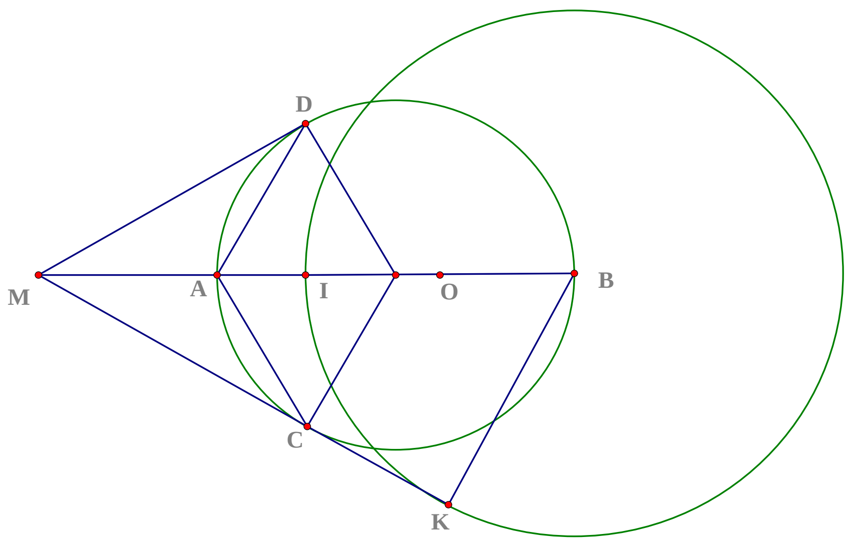
a) Chứng minh rằng A, B, M thẳng hàng.

b) Tứ giác $OCAD$ là hình gì ?

c) Tính $\widehat{CMD}$.

d) Chứng minh đường thẳng MC là tiếp tuyến của đường tròn $\left(B;BI\right)$.

Lời giải



a) AB là trung trực của CD, có $MC = MD$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow m$ thuộc đường trung trực của $CD \Rightarrow M \in AB \Rightarrow M, A, B$ thẳng hàng

b) Tứ giác $OCAD$ có hai đường chéo vuông góc tại trung điểm mỗi đường nên là hình thoi

c) ΔAOC có $OA = OC = AC$ nên là tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{AOC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{CMO} = 30^0 \Rightarrow \widehat{CMD} = 60^0$

d) Hạ BK vuông góc MC, ta có: $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = 30^0 \Rightarrow CA$ là phân giác $\widehat{MCD}$

$AC \perp BC \Rightarrow CB$ là phân giác của $\widehat{KCD} \Rightarrow BI = BK \Rightarrow$ đpcm

(dựa vào tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau)

Ta có: $\widehat{MCD}, \widehat{DCK}$ là hai góc kề bù, CA là phân giác $\widehat{MCD}$

$AC \perp BC \Rightarrow CB$ là phân giác $\widehat{DCK}$.

$MNKC$ là hình thoi $\Leftrightarrow MN = CK; CM = CK \Leftrightarrow \Delta KCM$ đều $\Leftrightarrow \widehat{KBC} = 30^0 \Leftrightarrow AM = R$

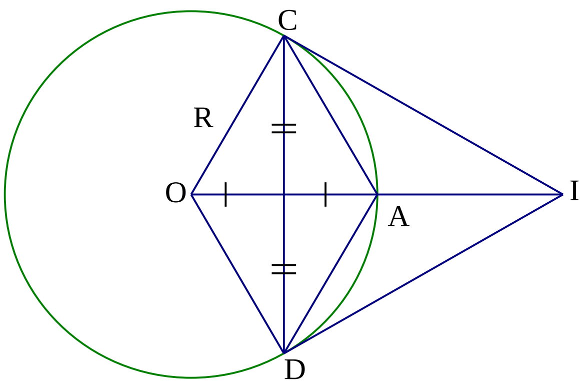
Bài 22. Cho đường tròn $(O;R)$, bán kính OA, dây CD là trung trực của OA. Kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C, tiếp tuyến này cắt đường thẳng OA tại I.

a) Chứng minh ΔOAC là tam giác đều.

b) Chứng minh tứ giác $OCAD$ là hình thoi.

c) Tính CI theo R.

Lời giải



a) Gọi J là giao điểm của OA và CD

Do CD là đường trung trực của OA nên $CA = CO = R \Rightarrow OA = OC = CA = R$ (1)

Vậy ΔOAC là tam giác đều

b) Chứng minh tương tự: $OA = OD = AD = R(2)$

Từ $(1)(2) \Rightarrow OC = OD = AC = AD = R$

$\Rightarrow \lozenge OCAD$ là hình thoi

c) Xét ΔOCI, ta có: $\widehat{OCI} = 90^0; \widehat{COI} = 60^0$

$\Rightarrow CI = OC.\tan\widehat{COI} = R.\tan 60^0 = R\sqrt{3}$

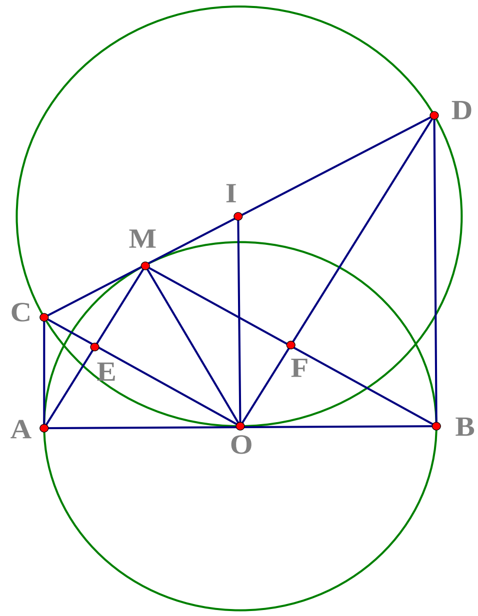
Bài 23. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và M là điểm nằm trên (O). Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của (O) lần lượt ở C và D. Đường thẳng AM cắt OC tại E, đường thẳng BM cắt OD tại F.

a) Chứng minh $\widehat{COD} = 90^0$.

b) Tứ giác $MEOF$ là hình gì? Vì sao ?

c) Chứng minh OB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

Lời giải



a) Dễ thấy $\widehat{AMB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{EMF} = 90^0$

Có CM, CA là các tiếp tuyến $\Rightarrow OC \perp AM \Rightarrow \widehat{OEM} = 90^0$

Tương tự ta có: $\widehat{OFM} = 90^0$

$\Delta CAO \sim \Delta CMO \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{MCO} \Rightarrow OC$ là phân giác của $\widehat{AMO}$

Tương tự OD là phân giác $\widehat{BOM} \Rightarrow OC \perp OD \Rightarrow \widehat{COD} = 90^0$

b) Do ΔAOM cân tại O nên OE là đường phân giác đồng thời là đường cao $\Rightarrow \widehat{OEM} = 90^0$

Tương tự $\widehat{OFM} = 90^0 \Rightarrow \lozenge MEOF$ là hình chữ nhật.

c) Gọi I là trung điểm của CD thì I là tâm đường tròn đường kính CD và $IO = IC = ID$. Có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $IO // AC // BD$. Do đó AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD

Bài 24. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Lấy M thuộc (O) sao cho $MA < MB$. Vẽ dây MN vuông góc với AB tại H. Đường thẳng AN cắt BM tại C. Đường thẳng qua C vuông góc với AB tại K và cắt BN tại D.

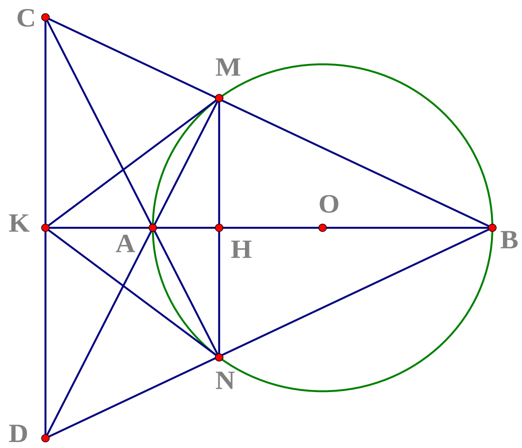
a) Chứng minh A, M, C, K cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh BK là tia phân giác của $\widehat{MBN}$.

c) Chứng minh ΔKMC cân và KM là tiếp tuyến của (O).

d) Tìm vị trí của M trên (O) để tứ giác $MNKC$ trở thành hình thoi.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{CKA} = \widehat{CMA} = 90^0 \Rightarrow C, K, A, M \in (I; AC)$

b) ΔMBN cân tại B có BA là đường cao, trung tuyến và phân giác

c) ΔBCD có $BK \perp CD; CN \perp BN \Rightarrow H$ là trực tâm $\Delta BCD \Rightarrow D, A, M$ thẳng hàng

Ta có ΔDMC vuông tại M có MK là trung tuyến nên ΔKMC cân tại $K \Rightarrow \widehat{KCM} = \widehat{KMC}$

Lại có: $\widehat{KBC} = \widehat{OMB} \Rightarrow \widehat{KMC} + \widehat{OMB} = \widehat{KCB} + \widehat{KBC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{KMO} = 90^0$

Mà OM là bán kính nên KM là tiếp tuyến của đường tròn (O)

d) $MNKC$ là hình thoi $\Leftrightarrow MN = CK; CM = CK \Leftrightarrow \Delta KCM$ đều $\Leftrightarrow K\hat{B}C = 30^0 \Leftrightarrow AM = R$

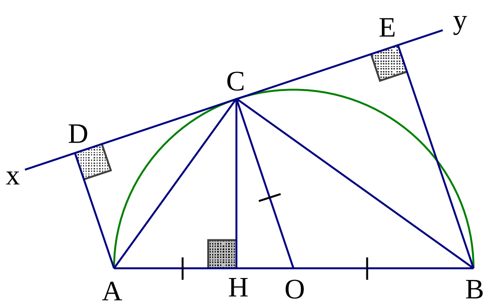
Bài 25. Cho nửa đường tròn tâm $(O;R)$ đường kính AB. Một đường thẳng xy tiếp xúc với đường tròn tại C. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của A và B trên xy.

a) Chứng minh rằng điểm C là trung điểm của DE.

b) Chứng minh rằng: $AD + BE$ không đổi khi C di động trên nửa đường tròn.

c) Chứng minh rằng: $4.AD.BE = DE^2$.

Lời giải



a) Nối OC ta được $OC \perp xy$

Ta có: $AD // BE // OC (\perp xy)$

Mặt khác $OA = OB \Rightarrow CD = CE$

b) Kẻ $CH \perp AB$

Xét hai tam giác vuông ΔDAC và ΔHAC có:

$+ AC : chung$

$+ \ \widehat{DAC} = \widehat{HAC}\left(= \widehat{ACO}\right) \Rightarrow \Delta DAC = \Delta HAC \Rightarrow \begin{cases} AD = AH \\ CD = CH \end{cases}$

Chứng minh được: $BE = BH; CE = CH \Rightarrow AD.BC = AH.BH \ \ (1)$

Điểm C nằm trên nửa đường tròn đường kính AB nên ΔCAB vuông tại C

Vậy $AH.BH = CH^2 \ \ (2)$

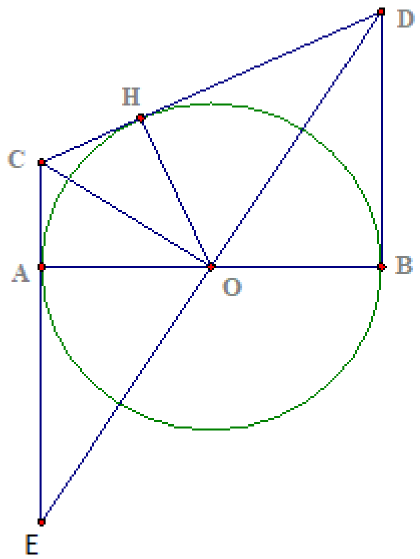
Từ $(1)(2) \Rightarrow AD.BE = CH^2 = CD.CE = \left(\dfrac{DE}{2}\right)^2 = \dfrac{DE^2}{4} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 26. Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ tia Ax, By vuông góc với AB. Trên các tia Ax và By lấy theo thứ tự hai điểm C và D sao cho $\widehat{COD} = 90^0$, kẻ $OH \perp CD$.

a) Chứng minh rằng H thuộc đường tròn tâm O đường kính AB.

b) Xác định vị trí tương đối của CD với đường tròn (O).

Lời giải



a) Kéo dài DO cắt AC ở E, ta có :

$\Delta AOE = \Delta BOD(gcg) \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{D}; OD = OE \Rightarrow \Delta OHD = \Delta OAE(ch - gn) \Rightarrow OH = OA = OB \Rightarrow H \in (O; AB)$

b) Ta có H thuộc đường tròn (O), $CD \perp OH$ tại H $\Rightarrow$ khoảng cách từ O đến CD bằng bán kính của (O). Vậy CD tiếp xúc với (O) tại H.

Bài 27. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, M là 1 điểm thuộc nửa đường tròn, qua M vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn. Gọi D và C theo thứ tự là các hình chiếu của A và B trên tiếp tuyến ấy.

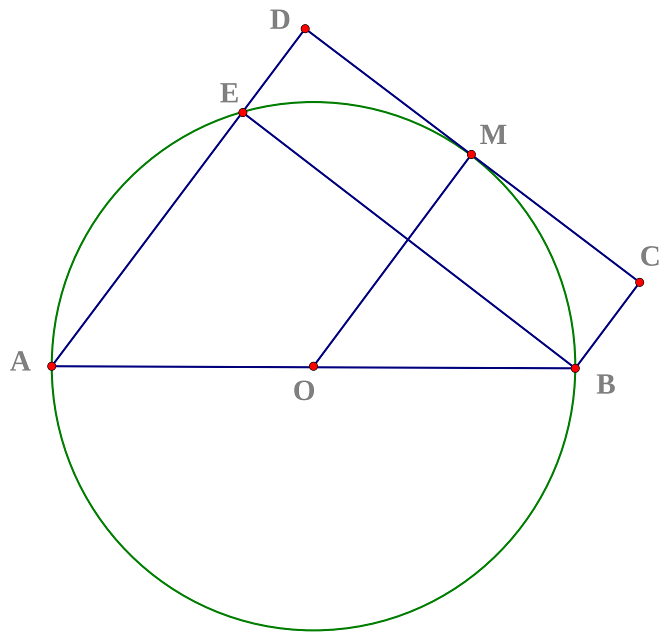
a) Chứng minh rằng M là trung điểm của CD.

b) Chứng minh: $AB = BC + AD$.

c) Giả sử: $\widehat{AOM} > \widehat{BOM}$, gọi E là giao điểm của AD với nửa đường tròn. Xác định dạng của tứ giác $BDCE$.

d) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn sao cho tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo bán kính của nửa đường tròn đã cho.

Lời giải



a) Hình thang $ABCD$ có $AO = OB, OM // AD // BC \Rightarrow M$

là trung điểm của CD

b) Ta có: $AB = 2OM = BC + AD$

c) Tứ giác $BDCE$ là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2}.BE = OM.BE \le OM.AB = 2R^2$$

$\Rightarrow maxS_{ABCD} = 2R^2$ khi $OM \perp AB$

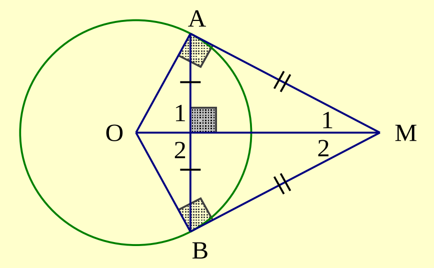
DẠNG 2

TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

TÍNH ĐỘ DÀI, DIỆN TÍCH, GÓC LIÊN QUAN TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC LIÊN QUAN ĐẾN HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

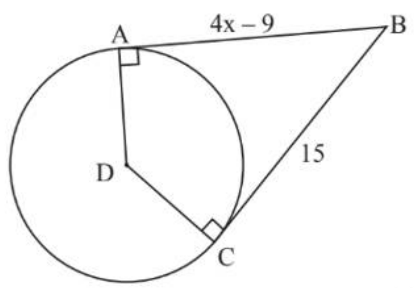
Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Giả thiết	Tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau tại M (A và B là tiếp điểm)	
Kết luận	- $MA = MB$ - $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ - $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ - MO là trung trực của AB	

Chú ý: MO là trung trực của AB thì phải chứng minh chứ không được dùng là giả thiết bài toán nhé. Ta chứng minh như sau:

ΔAMB cân tại (do $MA = MB$) và MO là đường phân giác $\widehat{AMB}$ (do $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$) nên là MO là trung trực của AB.

Bài 1. Tìm giá trị của x trong hình vẽ bên dưới.



Lời giải

Ta có BA, BC là hai tiếp tuyến của đường tròn (D) cắt nhau tại B nên:

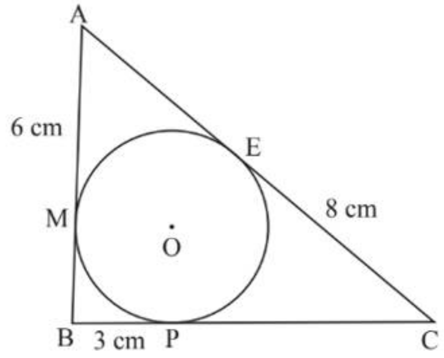
$BA = BC$

hay $4x - 9 = 15$

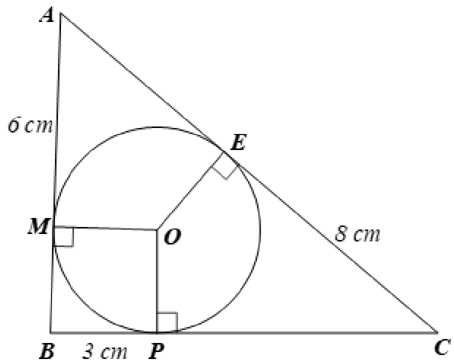
suy ra $4x = 24$ hay $x = 6$.

Vậy $x = 6$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có đường tròn (O) nằm trong và tiếp xúc với ba cạnh của tam giác. Biết $AM = 6cm, BP = 3cm, CE = 8cm$ (Hình vẽ). Tính chu vi tam giác ABC.



Lời giải



Ta có:

AE, AM là hai tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại A nên $AE = AM = 6cm$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

BM, BP là hai tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại B nên $BM = BP = 3cm$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

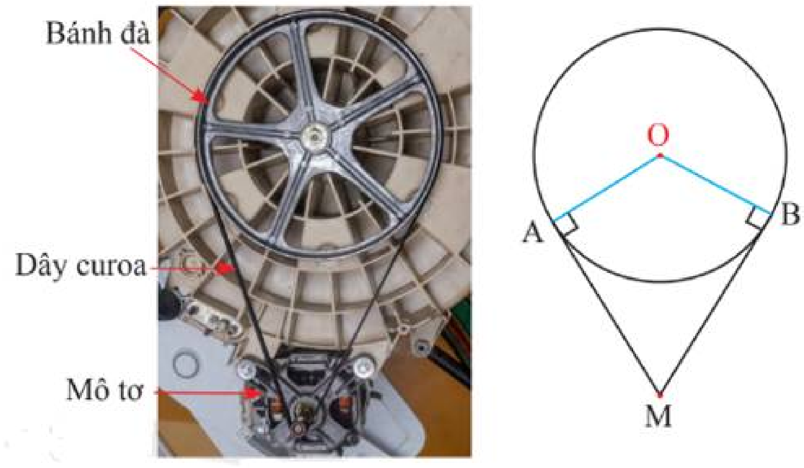
CP, CE là hai tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại C nên $CP = CE = 8cm$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Chu vi tam giác ABC là:

$AB + BC + CA = AM + BM + BP + CP + AE = 6 + 3 + 3 + 8 + 8 + 6 = 34cm$

Vậy chu vi tam giác ABC bằng $34cm$.

Bài 3. Bánh đà của một động cơ được thiết kế có dạng là một đường tròn tâm O, bán kính $15cm$ được kéo bởi một dây curoa. Trục của mô tơ truyền lực được biểu diễn bởi điểm M (Hình vẽ). Cho biết khoảng cách OM là $35cm$.



a) b)

a) Tính độ dài của hai đoạn dây curoa MA và MB (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

b) Tính số đo $\widehat{AMB}$ tạo bởi hai tiếp tuyến MA, MB và số đo $\widehat{AOB}$ (kết quả làm tròn đến phút).

Lời giải

a) Ta có MA, MB lần lượt là hai tiếp tuyến của đường tròn $(O;15cm)$ tại A, B và cắt nhau tại M nên $MA \perp OA, MB \perp OB$ và $MA = MB$.

Xét ΔOAM vuông tại A, theo định lí Pythagore ta có:

$OM^2 = OA^2 + MA^2$

Suy ra $MA^2 = OM^2 - OA^2 = 35^2 - 15^2 = 1000$

Do đó $MA = \sqrt{1000} \approx 31,6(cm)$

Vậy $MA = MB \approx 31,6(cm)$.

b) Xét ΔOAM vuông tại A, ta có: $\sin \widehat{AMO} = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{15}{35} = \dfrac{3}{7}$.

Suy ra $\widehat{AMO} \approx 25^0 23'$

Vì MA, MB là hai tiếp tuyến của đường tròn $(O;15cm)$ cắt nhau tại M nên MA là tia phân giác của góc AMB.

Do đó $\widehat{AMB} = 2\widehat{AMO} \approx 2.25^0 23' \approx 50^0 26'$

Xét tứ giác $OAMB$ có: $\widehat{OAM} + \widehat{AMB} + \widehat{OBM} + \widehat{AOB} = 360^0$ (tổng các góc của một tứ giác).

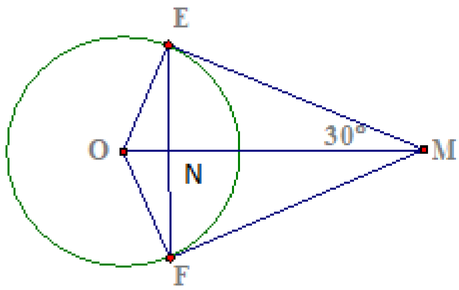
Suy ra $\widehat{AOB} = 360^0 - \left(\widehat{OAM} + \widehat{AMB} + \widehat{OBM}\right) \approx 360^0 - \left(90^0 + 50^0 26' + 90^0\right) \approx 129^0$

Bài 4. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến ME, MF (E, F là các tiếp điểm) sao cho $\widehat{EMO} = 30^0$. Biết chu vi tam giác MEF là $30cm$.

a) Tính độ dài dây EF.

b) Tính diện tích ΔMEF.

Lời giải



a) Vì M là giao của hai tiếp tuyến tại E và F của đường tròn (O) nên OM là phân giác $\widehat{EMF}$ và $ME = MF$

Do đó $\widehat{OME} = \widehat{OMF} = 30^0$

Suy ra $\widehat{EMF} = 60^0$

Mà ΔMEF cân tại M

Nên ΔMEF đều

Ta lại có: $ME + MF + EF = 30 \Rightarrow 3EF = 30 \Rightarrow EF = 10cm$

b) Gọi $N = OM \cap EF$

ΔMEF đều và MN là phân giác $\widehat{EMF}$ nên $MN \perp EF$ hay $\widehat{MEN} = 90^0$

Xét ΔMNE vuông tại N, ta có:

$$MN = \cos 30^0.ME = \frac{\sqrt{3}}{2}.10 = 5\sqrt{3}cm$$

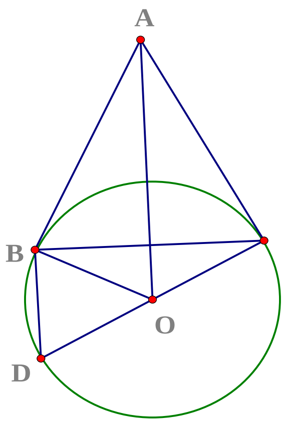
Do đó diện tích ΔMEF là : $S_{\Delta MEF} = \frac{1}{2}.MN.EF = \frac{1}{2}.5\sqrt{3}.10 = 25\sqrt{3}(cm^2)$

Bài 5. Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau ở A.

a) Chứng minh AO là trung trực của đoạn thẳng BC.

b) Vẽ đường kính CD của (O). Chứng minh $BD//AO$.

Lời giải



a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $AB = AC$

$\Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của BC

Lại có: $OB = OC \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của BC

Vậy AO là đường trung trực của đoạn BC

b) Ta có

$AO \perp BC$ (chứng minh trên)

$DB \perp BC$ (giả thiết)

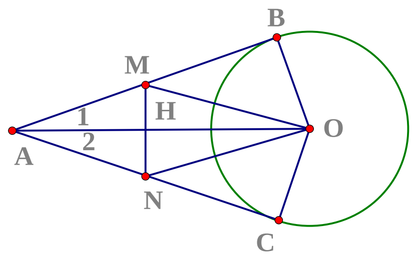
$\Rightarrow BD//AO$ (đpcm).

Bài 6. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt AB tại M.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AMON$ là hình thoi.

b) Điểm A cách O một khoảng là bao nhiêu để MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



a) Ta có :

$AB \perp OB$ (Tính chất tiếp tuyến)

$NO \perp OB$ (giả thiết)

$\Rightarrow ON//AM \quad (1)$

Tương tự

$AC \perp OC$ (Tính chất tiếp tuyến)

$MO \perp OC$ (giả thiết)

$\Rightarrow AN//OM \quad (2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow AMON$ là hình bình hành

Lại có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow AMON$ là hình thoi $\Rightarrow MN \perp OA; HA = HO$

b) Ta có : $AMON$ là hình thoi $\Rightarrow MN \perp OA; HA = HO$

Để MN là tiếp tuyến của đường tròn (O) thì $OH = R$ hay $OA = 2OH = 2R \Rightarrow OA = 2R$

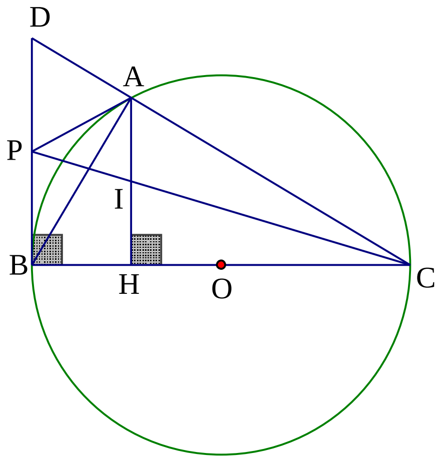
Bài 7. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến PA, PB với A và B là các tiếp điểm. Đường thẳng CA cắt đường thẳng BP tại D. Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ A đến đường kính BC.

a) Tính $\widehat{BAC}$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{PBA} = \widehat{PAB}$.

c) Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm I của AH.

Lời giải



a) Tam giác BAC có $OA = OB = OC = \frac{1}{2}BC = R$ nên $\widehat{BAC} = 90^0$

b) P là giao của hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) nên $PA = PB$, do đó ΔAPB cân tại P

suy ra $\widehat{PBA} = \widehat{PAB}$

c) Chứng minh $OP \perp AB$

mà $CD \perp AB$ (vì $\widehat{BAC} = 90^0$)

nên $OP//CD$

ta lại có O là trung điểm BC

do đó là đường trung bình ΔBCD

hay $PB = PD$ (1)

Ta có $DB//AH$ ($DB \perp BC, AH \perp BC$)

Xét ΔPBC có $IH//PB \Rightarrow \frac{IH}{PB} = \frac{IC}{PC}$ (2)

Xét ΔPDC có $AI//PD \Rightarrow \frac{IA}{PD} = \frac{IC}{PC}$ (3)

Từ $(1)(2)(3) \Rightarrow IH = IA \Rightarrow$ đpcm.

Bài 8. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn cùng phía đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

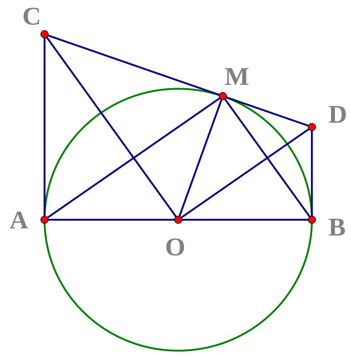
a) Chứng minh rằng $CD = AC + BD$

b) Tính $\widehat{COD}$.

c) Chứng minh $MC.MD$ không đổi khi M di động trên nửa đường tròn.

d) Cho biết $OC = BA = 2R$. Tính AC và BD theo R.

Lời giải



a) C là giao của hai tiếp tuyến tại A và M của đường tròn (O) nên $CA = CM$

D là giao của hai tiếp tuyến tại B và M của đường tròn (O) nên $DB = DM$

Do đó $CD = CM + DM = AC + BD$

b) C là giao của hai tiếp tuyến tại A và M của đường tròn (O) nên OC là phân giác $\widehat{AOM}$ hay $\widehat{AOC} = \widehat{COM}$

D là giao của hai tiếp tuyến tại B và M của đường tròn (O) nên OD là phân giác $\widehat{BOM}$ hay $\widehat{BOD} = \widehat{MOD}$

Ta có:

$\widehat{AOC} + \widehat{COM} + \widehat{BOD} + \widehat{MOD} = 180^0$

$2\left(\widehat{COM} + \widehat{MOD}\right) = 180^0$

$2\widehat{COD} = 180^0$

$\widehat{COD} = 90^0$

c) Chứng minh $\Delta COD \backsim \Delta AMB(g-g) \Rightarrow MC.MD = OM \Rightarrow$ đpcm

d) Xét $\Delta AOC(\widehat{A} = 90^0) \Rightarrow OC^2 = OA^2 + AC^2(pythagore) \Rightarrow AC = R\sqrt{3}(cm)$

Ta lại có: $AC.BD = MC.MD = R^2 \Rightarrow BD = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}(cm)$.

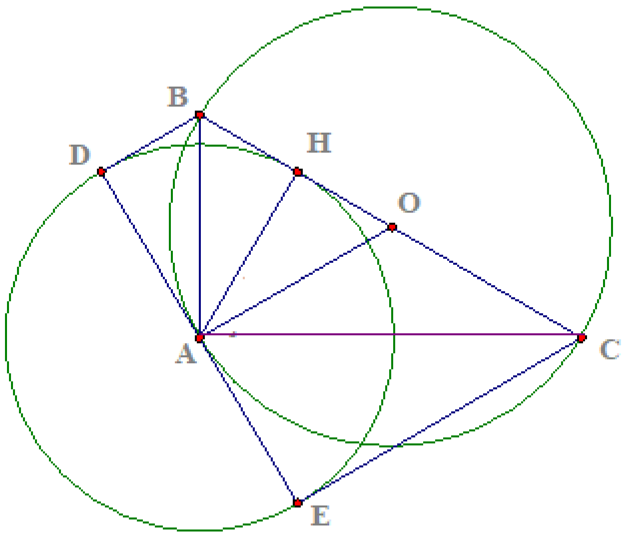
Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn (A, AH), kẻ các tiếp tuyến BD và CE với đường tròn (A) (D, E là các tiếp điểm khác H).

a) Chứng minh rằng $BC = AC + BD$

b) Chứng minh rằng: D, A, E thẳng hàng.

c) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn với đường kính BC.

Lời giải



a) Ta có $AH \perp BC$ và $H \in (A, AH)$ nên BC là tiếp tuyến của đường tròn (A, AH).

B là giao của hai tiếp tuyến tại D và H của đường tròn (A, AH) nên $BD = BH$

C là giao của hai tiếp tuyến tại E và H của đường tròn (A, AH) nên $CH = CE$

Do đó $BC = BH + CH = AC + BD$

b) B là giao của hai tiếp tuyến tại D và H của đường tròn (A, AH) nên AB là phân giác $\widehat{DAH}$ hay $\widehat{DAB} = \widehat{HAB}$

C là giao của hai tiếp tuyến tại E và H của đường tròn (A, AH) nên AC là phân giác $\widehat{EAH}$ hay $\widehat{CAH} = \widehat{CAE}$

Ta lại có: $\widehat{BAC} = 90^0$

Do đó $\widehat{DAE} = \widehat{DAB} + \widehat{HAB} + \widehat{CAH} + \widehat{CAE} = 2\left(\widehat{HAB} + \widehat{CAH}\right) = 2\widehat{BAC} = 2.90^0 = 180^0$

Suy ra ba điểm D, A, E thẳng hàng.

c) Gọi O là trung điểm của BC

Tứ giác $DBEC$ là hình thang $(DB \perp ED, CE \perp ED)$

$\Rightarrow OA$ là đường trung bình của hình thang $DBEC$

$\Rightarrow OA // DB // EC \Rightarrow OA \perp DE$

Hay DE là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O; \dfrac{BC}{2}\right)$

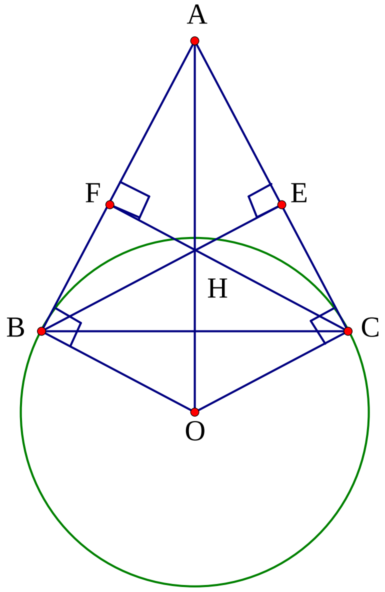
Bài 10. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ $BE \perp AC; CF \perp AB\, (E \in AC, F \in AB), BE \cap CF = H$.

a) Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.

b) Chứng minh ba điểm A, O, H thẳng hàng.

c) Xác định $\widehat{OAC}$ để H nằm trên (O).

Lời giải



a) Ta có $OB//CF$ (OB,CF cùng vuông góc với AB) hay $OB//CH$ (1)

$OC//BE$ (OC,BE cùng vuông góc với AC) hay $OC//BH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BOCH$ là hình bình hành.

Ta lại có $OB = OC = R$

Nên tứ giác $BOCH$ là hình thoi.

b) Tam giác ABC có BE, CF là hai đường cao cắt nhau tại H nên $AH \perp BC$

mà $BOCH$ là hình thoi nên $OH \perp BC$

Do đó ba điểm A, H, O cùng nằm trên đường vuông góc với BC nên thẳng hàng nhau.

c) Để $H \in (O)$ thì $OH = R$

khi đó $OH = OC = HC = R$

nên tam giác OCH đều hay $\widehat{AOC} = 60^0$

Do đó $\widehat{OAC} = 30^0$ (vì ΔAOC vuông tại C)

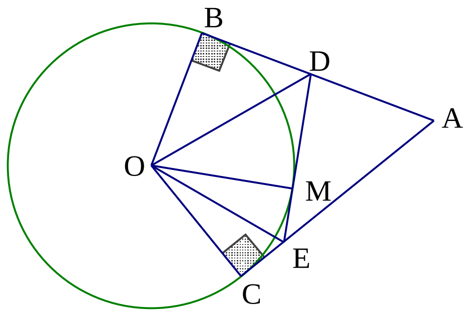
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 11. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O), cắt các tiếp tuyến AB, AC lần lượt tại D và E.

a) Chứng minh chu vi $\Delta ADE = 2AB$.

b) Chứng minh rằng: $\widehat{BOC} = 2\widehat{DOE}$.

Lời giải



a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $DB = DM; ME = CE; AB = AC$

Do đó chu vi ΔADE là:

$C_{\Delta ADE} = AD + DM + ME + AE = AD + DB + CE + AE = AB + AC = 2AB$

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OD, OE lần lượt là các tia phân giác của các góc BOM, MOC

Ta có:

$\widehat{DOM} = \frac{1}{2}\widehat{BOM}$

$\widehat{MOE} = \frac{1}{2}\widehat{MOC}$

$\Rightarrow \widehat{DOE} = \widehat{DOM} + \widehat{MOE} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BOM} + \widehat{MOC}\right) = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 2\widehat{DOE}$

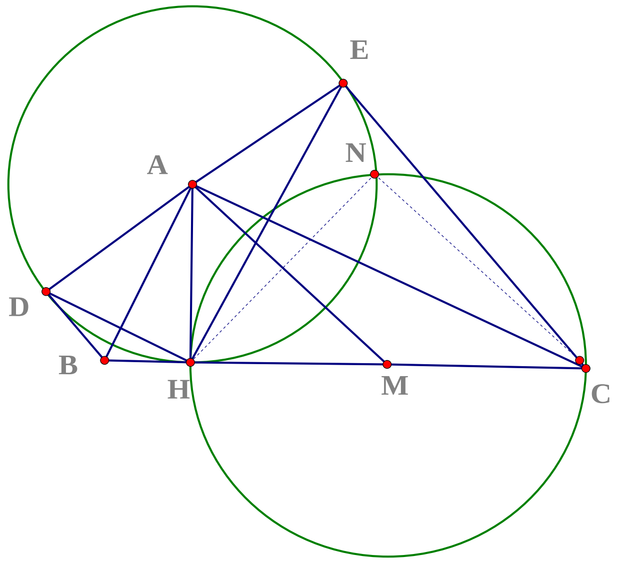
Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn $(A; AH)$. Từ B, C kẻ các tiếp tuyến BD, CE với (A) trong đó D, E là các tiếp điểm.

a) Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng.

b) Chứng minh: $BD.CE = \frac{DE^2}{4}$.

c) Gọi M là trung điểm của CH. Đường tròn tâm M đường kính CH cắt (A) tại N với N khác H. Chứng minh: $CN // AM$.

Lời giải



a) Ta có: AB là phân giác của $\widehat{DAH}$, AC là phân giác của $\widehat{HAE} \Rightarrow \widehat{DAE} = 180^0$

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau và hệ thức lượng về đường cao và hình chiếu cạnh góc vuông lên cạnh huyền tròn tam giác vuông BAC

$$\Rightarrow BD.CE = BH.CH = AH^2 = \frac{DE^2}{4}$$

c) Ta có ΔHNC nội tiếp đường tròn (M) đường kính $HC \Rightarrow HN \perp CN$

Chứng minh AN là tiếp tuyến của (M), do đó $AM \perp HN \Rightarrow AM // NC$

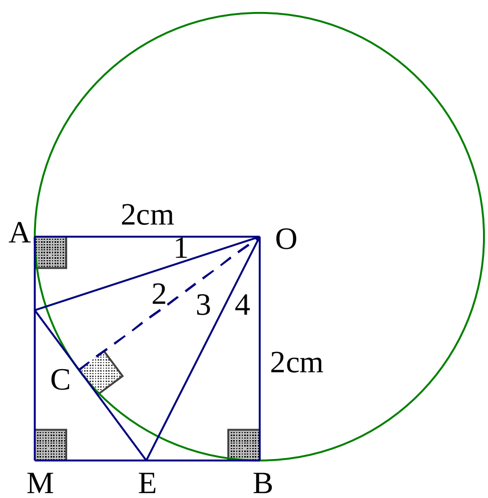
Bài 13. Cho đường tròn $(O; 2cm)$ các tiếp tuyến MA, MB kẻ từ M đến đường tròn vuông góc với nhau tại M (A, B là các tiếp điểm) .

a) Tứ giác $MBOA$ là hình gì? Vì sao?

b) Gọi C là điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ AB. Qua C kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt MA, MB tại D và E. Tính chu vi tam giác MDE.

c) Tính $\widehat{DOE}$.

Lời giải



a) Xét hình chữ nhật $AMBO$ có: $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau $\Rightarrow AMBO$ là hình vuông .

b) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $\begin{cases} DA = DC \\ EB = EC \end{cases}$

Chu vi $\Delta = MD + ME + ED = MD + ME + EB + DA = 2MA = 4cm$

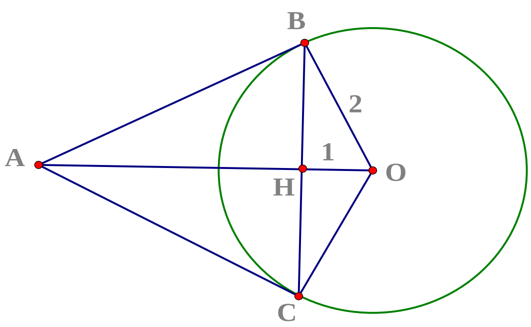
c) $\widehat{DOE} = \widehat{DOC} + \widehat{COE} = 2\widehat{BOC} = 45^0$

Bài 14. Cho đường tròn (O) và 1 điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) trong đó B, C là các tiếp điểm.

a) Chứng minh đường thẳng OA là trung trực của BC.

b) Gọi H là giao điểm của AO và BC. Biết $OB = 2cm, OH = 1cm$, tính chu vi và diện tích tam giác ABC và diện tích tứ giác $ABOC$.

Lời giải



a) Học sinh tự chứng minh

b)Áp dụng định lý pytago ta tính được: $BH = \sqrt{3}(cm)$

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông, ta được:

$AB = AC = 2\sqrt{3}(cm) \Rightarrow P_{ABC} = 6\sqrt{3}cm; S_{ABC} = 3\sqrt{3}(cm^2)$

Ta có: $S_{ABOC} = S_{ABC} + S_{BOC} \Rightarrow S_{ABOC} = 4\sqrt{3}(cm^2)$

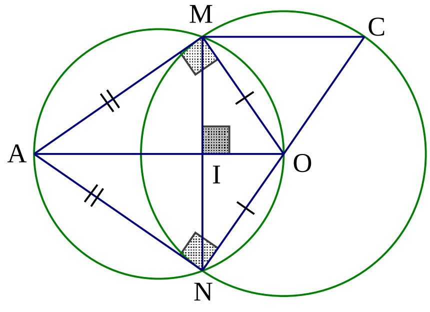
Bài 15. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn đó (M, N là các tiếp điểm) .

a) Chứng minh rằng: $OA \perp MN$.

b) Vẽ đường kính NOC. Chứng minh rằng $MC // AO$.

c) Tính độ dài các cạnh của tam giác AMN biết $OM = 3cm, OA = 5cm$.

Lời giải



a) Vì $AM = AN, OM = ON$ $(1) \Rightarrow OA$ là trung trực của $MN \Rightarrow OA \perp MN; MI = IN = \dfrac{MN}{2}$ (2) (I là giao điểm của OA với MN)

b) Từ $(1)(2) \Rightarrow IO$ là đường trung bình của tam giác $MNC \Rightarrow IO // MC; MC // AO$

c) Vì AM là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AM \perp MO$ hay ΔAMO vuông tại M có cạnh huyền $AO = 5cm$ thu được: $OM^2 = OI.OA \Leftrightarrow 3^2 = OI.5 \Leftrightarrow OI = 1{,}8(cm) \Rightarrow AI = 5 - 1{,}8 = 3{,}2(cm)$

Áp dụng hệ thức về cạnh ta có: $AM^2 = 3{,}2.5 = 4^2 \Leftrightarrow AM = 4(cm)(AM > 0)$

Áp dụng hệ thức về đường cao, ta có: $MI^2 = 3{,}2.1{,}8 = 2{,}4^2 \Leftarrow MI = 2{,}4(cm)(MI > 0)$

Vậy $AM = AN = 4cm, MN = 4{,}8cm$.

Bài 16. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax, lấy P trên Ax ($AP > R$). Từ P kẻ tiếp tuyến PM với (O).

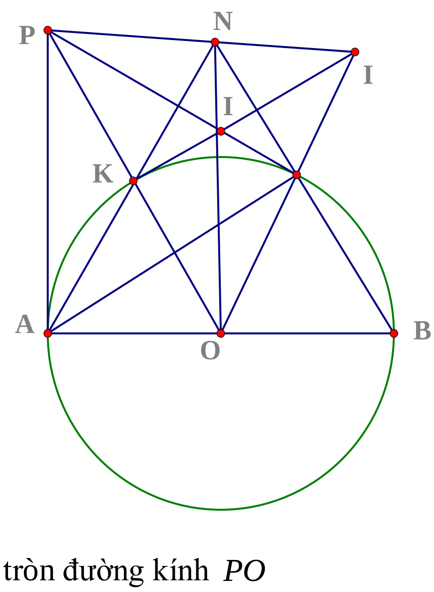
a) Chứng minh rằng bốn điểm A, P, M, O cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh: $BM // OP$.

c) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành.

d) Giả sử AN cắt OP tại K; PM cắt ON tại I; PN cắt OM tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Lời giải



a) A, P, M, O cùng nằm trên đường tròn đường kính PO

b) Ta có: $OP \perp AM; BM \perp AM \Rightarrow BM//OP$

c) $\Delta AOP = \Delta OBN \Rightarrow OP = BN$, ta lại có $BN//OP$ nên $OPNB$ là hình bình hành

d) Ta có: $ON \perp PJ; PM \perp OJ$, mà $PM \cap ON \equiv I \Rightarrow I$ là trực tâm $\Delta POJ \Rightarrow IJ \perp OP$ (1)

Chứng minh được $PAON$ là hình chữ nhật $\Rightarrow K$ là trung điểm OP

Lại có: $\widehat{APO} = \widehat{OPI} = \widehat{IOP} \Rightarrow \Delta IPO$ cân tại $I \Rightarrow IK \perp OP$ (2)

Từ $(1)(2) \Rightarrow I, J, K$ thẳng hàng.

Bài 17. Cho đường tròn $(O;R)$. Từ A trên (O), kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kỳ (M khác A), kẻ cát tuyến MNP, gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MP, kẻ $AC \perp MB, BD \perp AM$. Gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh bốn điểm A, M, B, O cùng thuộc 1 đường tròn.

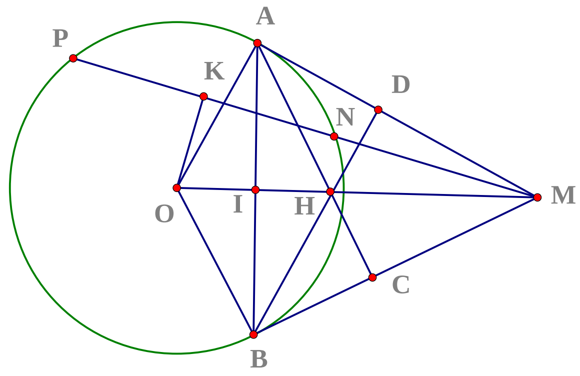
b) Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng thuộc 1 đường tròn.

c) Chứng minh: $OI.OM = R^2$ và $OI.IM = IA^2$.

d) Chứng minh $OAHB$ là hình thoi.

e) Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh bốn điểm A, M, B, O cùng thuộc 1 đường tròn.

Gọi E là trung điểm OM.

Tam giác OAM vuông tại A và AE là đường trung tuyến nên $AE = EO = EM$

Tam giác OBM vuông tại B và BE là đường trung tuyến nên $BE = EO = EM$

Do đó $AE = EO = EM = BE$

Nên bốn điểm A, M, B, O cùng thuộc 1 đường tròn đường kính OM

b) Ta có: $\widehat{OKM} = 90^0 \Rightarrow A, M, B, O, K \in \left(\dfrac{OM}{2}\right)$

c) Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAM (hoặc chứng minh tam giác đồng dạng)

d) Chứng minh $OAHB$ là hình bình hành và chú ý: $A, B \in (O;R) \Rightarrow OAHB$ là hình thoi

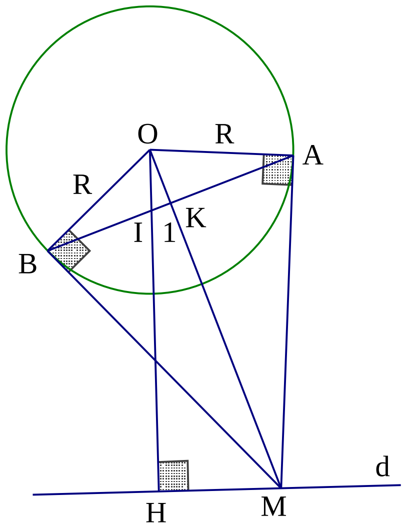
e) Chứng minh: $OH \perp AB, OM \perp AB \Rightarrow O, H, M$ thẳng hàng.

Bài 18. Cho $(O;R)$ và M là một điểm di động trên đường thẳng d cố định nằm ngoài (O). Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là hình chiếu vuông góc của (O) trên d, dây cung AB cắt OH, OM lần lượt tại I, K.

a) Chứng minh $OI.OH = OK.OM = R^2$.

b) Chứng minh AB luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên d.

Lời giải



a) Xét ΔOIK và ΔOMH có:

$$\widehat{O_1}: chung\ ;\ \widehat{H} = \widehat{K} = 90^0 \Rightarrow \Delta OIK \backsim \Delta OMH\,(gg) \Rightarrow \frac{OI}{OM} = \frac{OK}{OH} \Leftrightarrow OI.OH = OM.OK$$

Mà ΔOAM vuông tại A, nên theo hệ thức lượng ta có: $OA^2 = OK.OM \Rightarrow OI.OH = OK.OM = R^2$

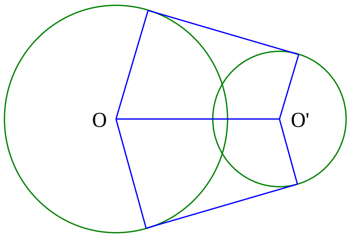
b) Ta có (O) cố định và đường thẳng d cố định $\Rightarrow$ điểm H cố định

Ta lại có $OI = \dfrac{R^2}{OH} \Rightarrow I$ cố định, nên AB qua I cố định.

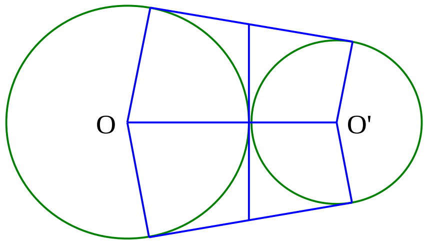
DẠNG 3
BÀI TOÁN LIÊN QUAN VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI VÀ TIẾP TUYẾN CHUNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó. Ta có các trường hợp tiếp tuyến chung của hai đường tròn như sau:

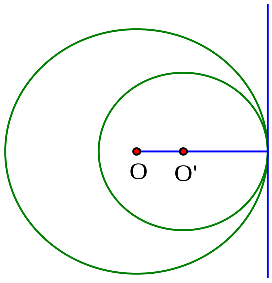
1) Hai đường tròn cắt nhau có hai tiếp tuyến chung ngoài.



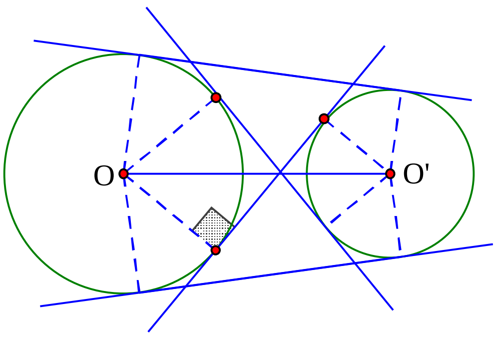
2) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài có hai tiếp tuyến chung ngoài và một tiếp tuyến chung.



3) Hai đường tròn tiếp xúc trong chỉ có một tiếp tuyến chung.



4) Hai đường tròn ngoài nhau có hai tiếp tuyến chung ngoài và hai tiếp tuyến chung trong.



Chú ý:

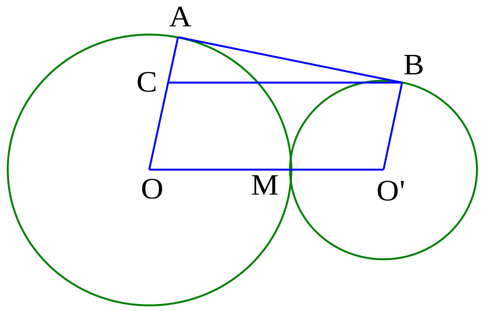
- Hai đường tròn chứa nhau không có tiếp tuyến chung.
- Hai đường tròn đồng tâm không có tiếp tuyến chung.

Bài 1. Cho hai đường tròn $(O;8cm)$ và $(O';5cm)$ tiếp xúc ngoài tại M. Gọi AB là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(A \in (O); B \in (O'))$.

a) Tính độ dài OO'.

b) Tính độ dài AB (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải



a) Vì hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài nên $OO' = 8 + 5 = 13cm$

b) Vẽ $BC // OO' (C \in OA)$ (1)

Ta có: $OA // O'B (\perp AB)$ (2)

Từ $(1)(2) \Rightarrow OCBO'$ là hình bình hành

Do đó $OC = O'B = 5(cm); BC = OO' = 13(cm)$

Có: $AC = OA - OC = 8 - 5 = 3(cm)$

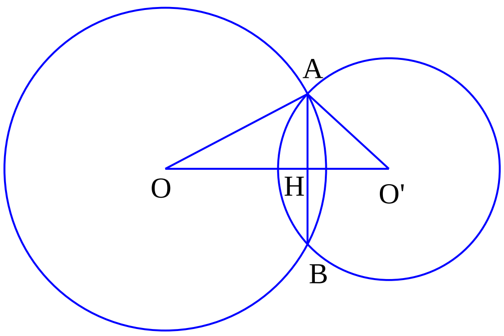
ΔABC vuông tại A nên $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 3^2} \approx 12,65(cm)$

Bài 2. Cho hai đường tròn $(O;12cm)$ và $(O';5cm)$, $OO' = 13cm$.

a) Chứng tỏ rằng hai đưuòng tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi A, B là giao điểm của hai đường tròn (O) và (O'). Chứng minh rằng OA là tiếp tuyến của đường tròn (O'), OA là tiếp tuyến của đường tròn (O). Tính độ dài AB.

Lời giải



a) Ta có: $12 - 5 < 13 < 12 + 5 (R - R' < d < R + R')$ nên hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt

b) $OA^2 + O'A^2 = 12^2 + 5^2 = 169; O'O^2 = 13^2 = 169$

$\Delta OAO'$ có: $OA^2 + O'A^2 = O'O^2$, theo định lý Pytago đảo tam giác $\Delta OAO'$ vuông tại A

Có $OA \perp O'A$ do đó OA là tiếp tuyến của đường tròn (O') và $O'A$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$O'O$ là đường trung trực của đoạn AB

Gọi H là giao điểm của $O'O$ và AB nên $AH.O'O = OA.O'A \Rightarrow AH = \dfrac{OA.O'A}{O'O} = \dfrac{12.5}{13} = \dfrac{60}{13}(cm)$

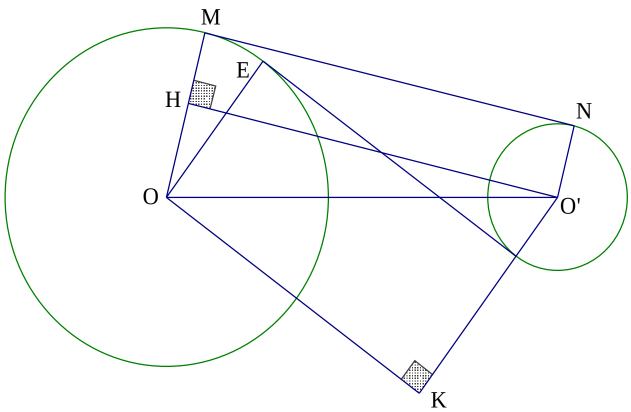
Vậy $AB = 2AH = \dfrac{120}{13}(cm)$.

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ ở ngoài nhau. Gọi MN là tiếp tuyến chung ngoài, EF là tiếp tuyến chung trong (M và E thuộc (O), N và F thuộc $(O;)$). Tính bán kính của đường tròn (O) và (O') trong các trường hợp sau:

a) $OO' = 10cm, MN = 8cm, EF = 6cm$.

b) $OO' = 13cm, MN = 12cm, EF = 5cm$.

Lời giải



a) Kẻ $O'H \perp OM; OK \perp O'F$

Ta có: $OH = R - r; O'K = R + r$,

mà $OH^2 = O'O^2 - MN^2 = 36; O'K^2 = O'O^2 - EF^2 = 64 \Rightarrow OH = 6; O'K = 8 \Rightarrow R = 7cm; r = 1cm$

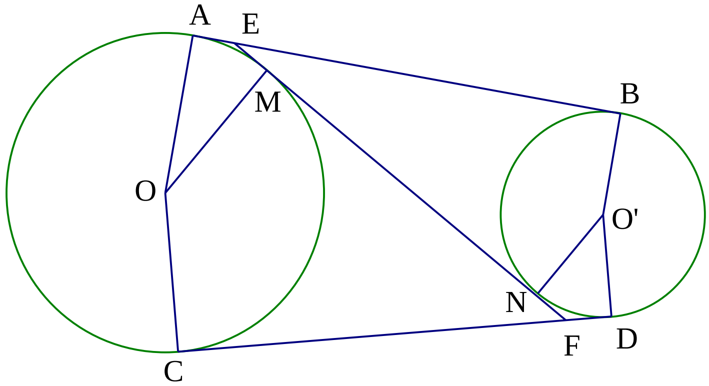
b) Tương tự tính được: $R = \dfrac{17}{2}cm, r = \dfrac{7}{2}cm$

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') nằm ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài AB và CD ($A, C \in (O); B, D \in (O')$). Tiếp tuyến chung trong MN cắt AB, CD theo thứ tự tại E, F, $(M \in (O), N \in (O'))$.

a) Chứng minh $AB = EF$.

b) Chứng minh $EM = FN$.

Lời giải



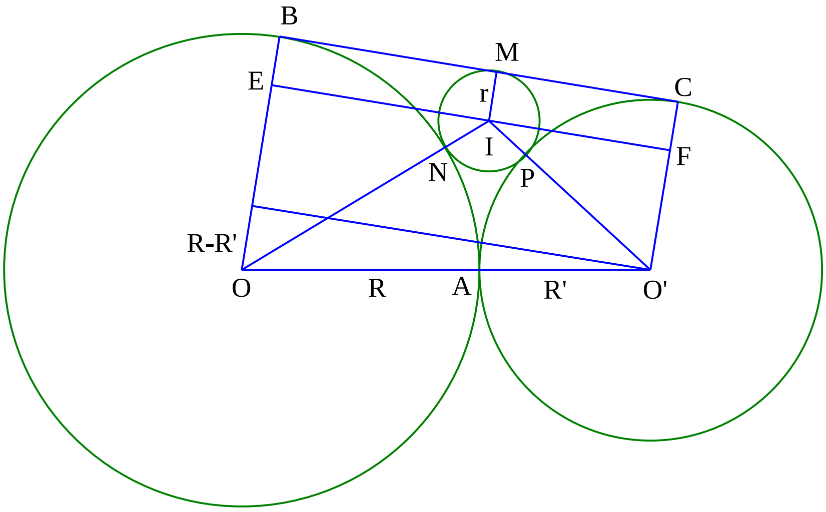
a) Ta có: $AB = AE + BE = EM + EN$ và $CD = FD + FC = NF + NE$

$\Rightarrow AB + CD = 2EF \Rightarrow AB = EF$

b) Ta có: $EM = AB - EB = EF - EN = NF$

Bài 5. Cho hai đường tròn $(O;5cm)$ và $(O';3cm)$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài $BC\left(B \in (O);C \in (O')\right)$. Vẽ đường tròn $(I;r)$ tiếp xúc với BC tại M và tiếp xúc ngoài với hai đường tròn (O) và (O') tại N và P. Tính độ dài r (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



Qua I vẽ $EF // BC$

$\Rightarrow BC = EF = \sqrt{(R+R')^2 - (R-R')^2} = 2\sqrt{RR'}$ (1)

$IE = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$ (2)

$IF = \sqrt{(R'+r)^2 - (R'-r)^2} = 2\sqrt{R'r}$ (3)

Cộng vế theo vế của (1)(2)(3) ta được:

$IE + IF = EF$

$2\sqrt{Rr} + 2\sqrt{R'r} = 2\sqrt{RR'}$

$\sqrt{r}\left(\sqrt{R} + \sqrt{R'}\right) = \sqrt{RR'}$

$\sqrt{r}\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right) = \sqrt{5.3}$

$\sqrt{r} = \dfrac{\sqrt{5.3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

Suy ra $r = \dfrac{5.3}{\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{15}{8 + 2\sqrt{15}} \approx 0,95(cm)$

Vậy $r \approx 0,95(cm)$.

Bài 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ các đường kính AOB và $AO'C$. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn. Gọi M là giao điểm của BD và CE.

a) Tính $\widehat{DAE}$.

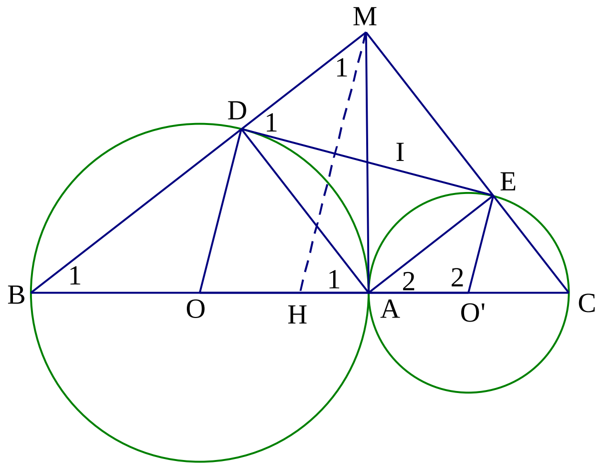
b) Tứ giác $ADME$ là hình gì ? Vì sao ?

c) Chứng minh rằng MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

d) Chứng minh: $MD.MB = ME.MC$.

e) Gọi H là trung điểm của BC, chứng minh rằng $MH \perp DE$.

Lời giải



a) Ta có: $OD // O'E$ ($OD, O'E$ cùng vuông góc DE) nên $\widehat{AOD} + \widehat{AO'E} = 180^0$

Tam giác AOD cân tại O nên $\widehat{A_1} = \dfrac{180^0 - \widehat{AOD}}{2}$

Tam giác $AO'E$ cân tại O' nên $\widehat{A_2} = \dfrac{180^0 - \widehat{AO'E}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \dfrac{180^0 - \widehat{AOD}}{2} + \dfrac{180^0 - \widehat{AO'E}}{2} = 180^0 - \dfrac{\widehat{AOD} + \widehat{AO'E}}{2} = 180^0 - 90^0 = 90^0$

Mà $\widehat{DAE} + \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 180^0$

Do đó $\widehat{DAE}=90^0$

b) Tam giác ADB có DO là đường trung tuyến và $DO=\frac{1}{2}AB$ nên ΔADB vuông tại D hay $\widehat{ADB}=90^0$, suy ra $\widehat{ADM}=90^0$

Tam giác AEC có EO' là đường trung tuyến và $EO'=\frac{1}{2}AC$ nên ΔAEC vuông tại E hay $\widehat{AEC}=90^0$, suy ra $\widehat{AEM}=90^0$

$\widehat{DAE}=90^0$ (câu a)

Do đó tứ giác $ADME$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông là hình chữ nhật)

c) Gọi I là giao điểm của DE và $AM \Rightarrow ID=IA$

$\Delta IAO=\Delta IDO(c-c-c)\Rightarrow \widehat{IAO}=\widehat{IDO}=90^0 \Rightarrow MA\perp OA\equiv A\in(O)$

Chứng minh tương tự: $MA\perp O'A\equiv A\in(O')$

Vậy MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn

d) Ta có: $\Delta MAB(\widehat{A}=90^0), AD\perp MB \Rightarrow MA^2=MD.MB$

$\Delta MAC(\widehat{A}=90^0), AE\perp MC \Rightarrow MA^2=ME.MC \Rightarrow MB.MD=ME.MC$

e) Chứng minh $\widehat{M_1}+\widehat{D_1}=\widehat{B_1}+\widehat{BMA}=90^0 \Rightarrow MH\perp DE$

Bài 7. Cho ba điểm J,I,J' cùng nằm trên 1 đường thẳng theo thứ tự đó. Cho biết $IJ=10cm$, $IJ'=4CM$. Vẽ đường tròn (O) đường kính IJ và đường tròn (O') đường kính IJ'.

a) Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc ngoài ở I.

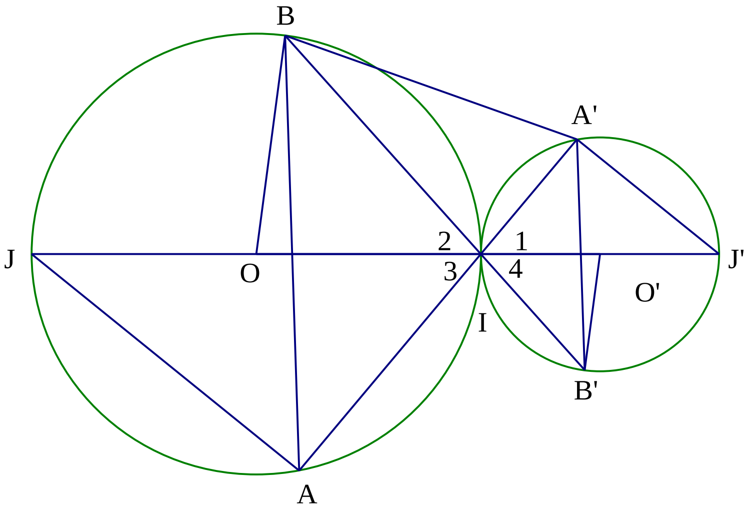
b) Gọi A là 1 điểm trên đường tròn (O), tia AI cắt (O') ở A'. Chứng minh rằng $\Delta AIJ\sim\Delta A'IJ'$.

c) Qua điểm I kẻ 1 cát tuyến cắt (O) ở B (B và A thuộc hai nửa mặt phẳng bờ IJ), cắt đường tròn (O') ở B'. Chứng minh: $\Delta IAB\backsim\Delta IA'B'$.

d) Chứng minh rằng: $\Delta OAB\backsim\Delta OA'B'$.

e) Tứ giác $ABA'B'$ là hình gì vì sao ?

Lời giải



a) Ta có: $OO' = OI + O'I$. Vậy Hai đường tròn tiếp xúc ngoài tại I

b) Xét ΔAIJ và $\Delta A'IJ'$ có: $\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} = 90^0 \\ \widehat{I_1} = \widehat{I_2} \end{cases} \Rightarrow \Delta AII \backsim \Delta A'IJ'$

c) $\Delta AII \backsim \Delta A'IJ'(g-g) \Rightarrow \dfrac{IA}{IA'} = \dfrac{IJ}{JI'} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}\ (1)$

$\Delta OIB \backsim \Delta O'IB'(g-g) \Rightarrow OB // O'B' \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_1'} \Rightarrow \dfrac{IB}{IB'} = \dfrac{OB}{O'B'} = \dfrac{5}{2}\ (2)$

Từ $(1)(2) \Rightarrow \dfrac{IA}{IA'} = \dfrac{IB}{IB'} = \dfrac{5}{2}; \widehat{AIB} = \widehat{A'IB} \Rightarrow \Delta IAB \backsim \Delta IA'B'(c-g-c)$

d) Chứng minh $\Delta IAB \backsim \Delta IA'B'(c-g-c) \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{IA}{IA'} = \dfrac{5}{2}$

mà $\dfrac{OA}{O'A'} = \dfrac{OB}{O'B'} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow \dfrac{OA}{O'A'} = \dfrac{OB}{O'B'} = \dfrac{AB}{A'B'} \Rightarrow \Delta AOB \backsim \Delta A'O'B'$

e) $\Delta AOB \backsim \Delta A'O'B' \Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{O'B'A'}; \widehat{OBI} = \widehat{O'B'I'} \Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{AB'I'} \Rightarrow AB // A'B'$

Tứ giác $ABA'B'$ có hai cạnh đối song song vậy là hình thang.

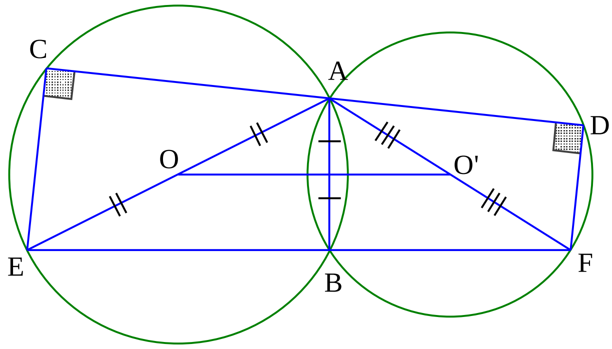
Bài 8. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng đi qua A (không đi qua hai tâm) cắt (O) tại C và cắt (O') tại D. Vẽ các đường kính AOE và $AO'F$.

a) Chứng minh ba điểm E, B, F thẳng hàng.

b) Chứng minh $EC // FD$.

c) Chứng minh $OO' = \dfrac{1}{2}EF$.

Lời giải



a) ΔABE nội tiếp đường tròn (O) có cạnh AE là đường kính nên $\widehat{ABE}=90^0$

Tương tự: $\widehat{ABF}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{EBF}=\widehat{ABE}+\widehat{ABF}=180^0$

Vậy E,B,F thẳng hàng.

b) Tương tự ta có:

$\widehat{ACE}=\widehat{ADF}=90^0 \Rightarrow EC\perp CD; FD\perp CD$

$\Rightarrow EC//FD(\perp CD)$

c) Ta có: $OA=OE; O'A=O'F$

$\Rightarrow OO'$ là đường trung bình của $\Delta AEF \Rightarrow OO'=\dfrac{1}{2}EF$

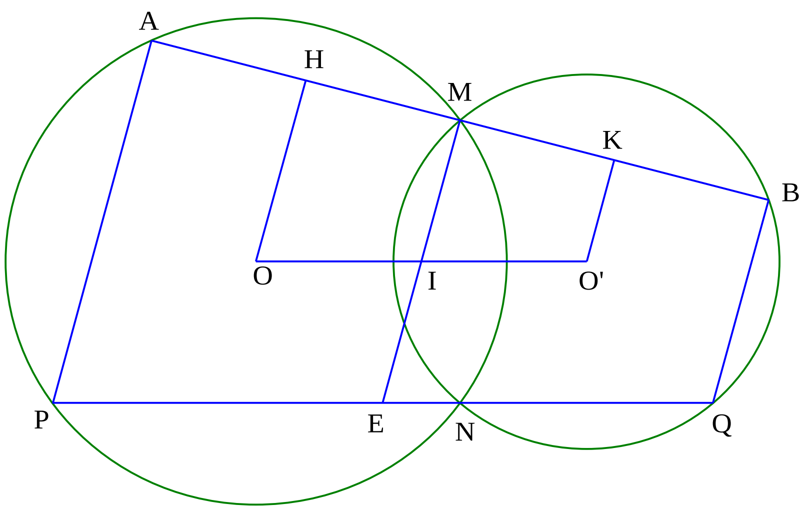
Bài 9. Cho hai đường tròn (O) và (O') giao nhau tại M và N. Gọi I là trung điểm của OO'. Đường thẳng kẻ qua M vuông góc MI cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt ở A và B. Hai đường thẳng vuông góc với AB tại A và B cắt đường tròn (O) ở P, (O') ở Q.

a) Chứng minh rằng M là trung điểm của AB.

b) MI cắt PQ ở E, chứng minh: $EP=EQ$.

c) Chứng minh: $IH=IK$.

Lời giải



a) Kẻ: $OH \perp AM; O'K \perp MB \Rightarrow OH // O'K$

Tứ giác $HKOO'$ là hình thang, $MI \perp AB \Rightarrow \begin{cases} MI // OH \\ IO // IO' \end{cases} \Rightarrow MH = MK$

Ta lại có: $OH \perp AM \Rightarrow HA = HM = MK = KB \Rightarrow$ đpcm

b) Ta có ME là đường trung bình của hình thang $ABQP \Rightarrow EP = EQ$

c) Xét ΔHIK, có IM là đường trung tuyến, đường cao $\Rightarrow \Delta HIK$ cân tại I (đpcm).

Bài 10. Cho góc vuông xOy. Lấy các điểm I và K lần lượt trên các tia Ox, Oy. Đường tròn $(I; OK)$ cắt tia Ox tại M (I nằm giữa O và M), đường tròn $(K; OI)$ cắt tia Oy tại N (K nằm giữa O và N).

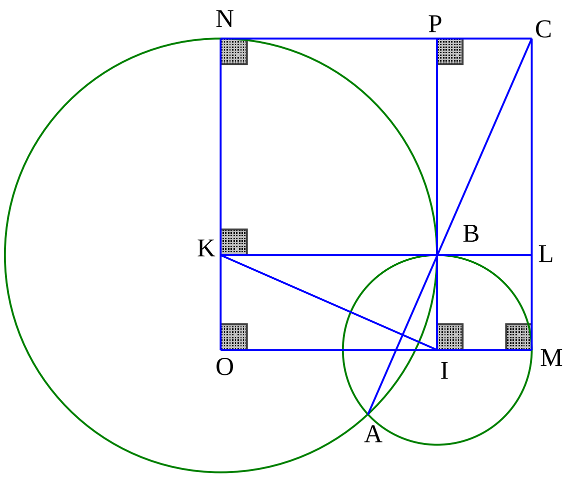
a) Chứng minh (I) và (K) luôn cắt nhau.

b) Tiếp tuyến tại M của (I), tiếp tuyến tại N của (K) cắt nhau tại C. Chứng minh tứ giác $OMCN$ là hình vuông.

c) Gọi A, B là các giao điểm của (I) và (K) trong đó B ở miền trong góc xOy. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

d) Giả sử I và K theo thứ tự di động trên các tia Ox và Oy sao cho $OI + OK = a$ không đổi. Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) $|OI - OK| < IK < OI + OK \Rightarrow$ Ta có (I) và (K) luôn cắt nhau

b) Do $OI = NK; OK = IM \Rightarrow OM = ON$

Mặt khác $OMCN$ là hình chữ nhật $OMCN$ là hình vuông

c) Gọi L là giao điểm của KB và MC; P là giao điểm của IB và $NC \Rightarrow OBKI$ là hình chữ nhật và $BLMI$ là hình vuông $\Rightarrow \Delta BLC = \Delta KIO \Rightarrow \widehat{LBC} = \widehat{OKI} = \widehat{BIK}$

Mà: $\widehat{BIK} + \widehat{IBA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{LBC} + \widehat{IBA} = 90^0$, có: $\widehat{LBC} + \widehat{LBI} + \widehat{IBA} = 180^0$

d) Có $OMCN$ là hình vuông cạnh a cố định $\Rightarrow C$ cố định và AB luôn đi qua C

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

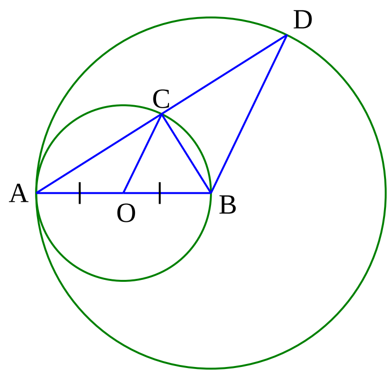
Bài 11. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Vẽ các đường tròn $(O;OA)$ và $(B;BA)$. Kẻ một đoạn thẳng qua A cắt hai đường tròn (O) và (B) théo thứ tự tại C và D.

a) Chứng minh Hai đường tròn (O) và (B) tiếp xúc tại A.

b) Chứng minh $AB = CD$.

c) Chứng minh $OC//BD$.

Lời giải



a) Ta có A, O, B thẳng hàng (1)

$OB = AB - OA\ (2)$

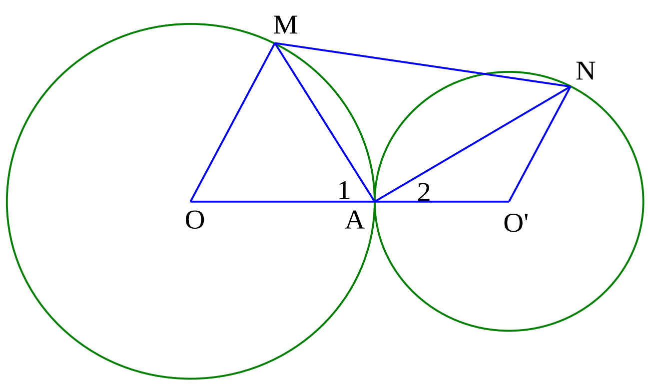
Từ $(1)(2) \Rightarrow (O;OA)$ và $(B;BA)$ tiếp xúc tại A

b) ΔABC nội tiếp đường tròn (O) có cạnh AB là đường kính nên tam giác này vuông tại $C \Rightarrow BC \perp AD \Rightarrow AC = CD$

c) OC là đường trung bình của $\Delta ABD \Rightarrow OC//BD$

Bài 12. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ hai bán kính OM và $O'N$ song song với nhau thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ OO'. Tam giác MAN là tam giác gì?

Lời giải



Ta có ΔOAM cân tại $O \Rightarrow \widehat{AOM} = 180^0 - 2\widehat{A_1}\ (1)$

$\Delta O'AN$ cân tại $O' \Rightarrow \widehat{AO'N} = 180^0 - 2\widehat{A_2}\ (2)$

Cộng $(1)(2)$ theo vế, ta được:

$$\overset{\frown}{AOM}+\overset{\frown}{AO'N}=360^0-2\left(\widehat{A_1}+\widehat{A_2}\right)$$

$$\Rightarrow \widehat{A_1}+\widehat{A_2}=\frac{360^0-\left(\overset{\frown}{AOM}+\overset{\frown}{AO'N}\right)}{2}\ (3)$$

Mà $\overset{\frown}{AOM}+\overset{\frown}{AO'N}=180^0$

Từ $(3)\Rightarrow \widehat{A_1}+\widehat{A_2}=\dfrac{360^0-180^0}{2}=90^0$

Ta có: $\widehat{MAN}=180^0-\left(\widehat{A_1}+\widehat{A_2}\right)=90^0$

Vậy ΔMAN vuông tại A

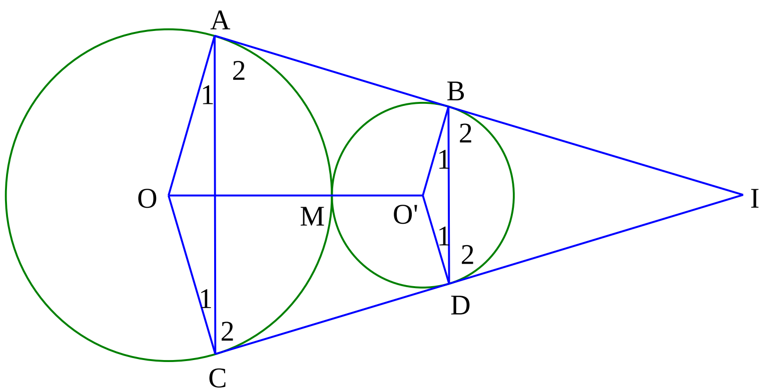
Bài 13. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ tiếp xúc ngoài tại M. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài AB và CD với $A,C\in(O)$ và $B,D\in(O')$.

a) Chứng minh $\Delta IBD\sim\Delta IAC$.

b) Chứng minh $\Delta BO'D\sim\Delta AOC$.

c) Chứng minh $BD//AC$.

Lời giải



a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $IB=ID; IA=IC$

Hai tam giác IBD và IAC cùng cân tại I

Hai tam giác này có góc ở đỉnh chung là góc

$\widehat{AIC}\Rightarrow \Delta IBD\backsim\Delta IAC$

b) Do $\Delta IBD\backsim\Delta IAC\Rightarrow \widehat{B_2}=\widehat{A_2}$

$$\Rightarrow \underbrace{90^0-\widehat{B_2}}_{\widehat{B_1}}=\underbrace{90^0-\widehat{A_2}}_{\widehat{A_1}}\left(\widehat{B}=\widehat{A}=90^0\right)$$

Hai tam giác cân $BO'D$ và AOC có một góc ở đáy bằng nhau ($\widehat{B_1}=\widehat{A_1}$) nên $\Delta BO'D\backsim\Delta AOC$

c) Ta có: $\widehat{B_2}=\widehat{A_2}$, hai góc này ở vị trí đồng vị và bằng nhau nên $BD//AC$

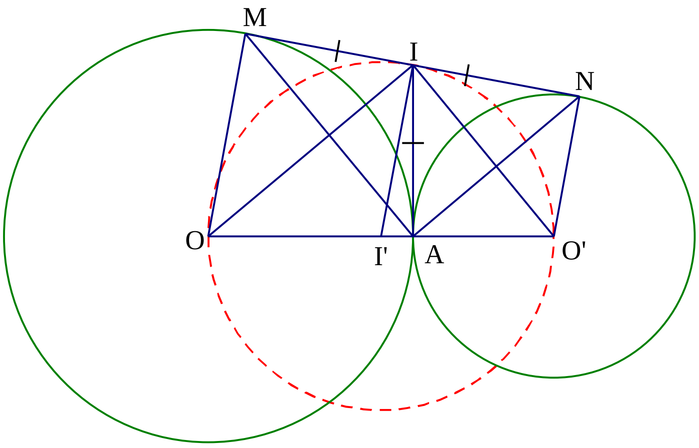
Bài 14. Cho hai đường tròn tâm O_1 và tâm O_2 tiếp xúc ngoài tại A. Tiếp tuyến chung ngoài có tiếp điểm với hai đường tròn lần lượt ở M và N. Tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tại A cắt MN tại I.

a) Chứng minh tam giác MAN và OIO' là các tam giác vuông.

b) Xác định vị trí tường đối của đường thẳng MN với đường tròn đường kính OO'.

c) Tính $S_{OIO'}$ biết bán kính của hai đường tròn tâm O và O' lần lượt bằng $48cm$ và $27cm$.

Lời giải



a) Ta có: $IM = IA$ và $IN = IA$ nên $IM = IA = IN$

Tam giác MAN là tam giác vuông ở đỉnh A

Do đó OI và OI' lần lượt là phân giác của hai góc kề bù $\widehat{MIA}$ và $\widehat{AIN}$ nên $OI \perp IO' = I$

Tam giác IOO' vuông tại đỉnh I

b) Gọi I' là trung điểm của OO' thì $II' = IO' = I'O'$, nên II' là bán kính của đường tròn qua ba điểm O, I, O'

Mặt khác tứ giác $OMNO'$ là hình thang, II' là đường trung bình của hình thang này, do đó $II'//OM; OM \perp MN \Rightarrow II' \perp MN = I$

Vậy đường thẳng MN là tiếp tuyến của đường tròn qua ba điểm O, I, O' tại điểm I

c) Tam giác OIO' vuông tại I ta có đường cao IA, nên ta có:

$IA^2 = OA.O'A = 48.27 \Longrightarrow IA = 36(cm)$

Diện tích tam giác OIO' là: $S_{OIO'} = \dfrac{OO'.IA}{2} = \dfrac{75.36}{2} = 1350(cm^2)$.

Bài 15. Cho đường tròn (O) đường kính AB và C là điểm nằm giữa A và O. Vẽ đường tròn tâm (I) có đường kính CB.

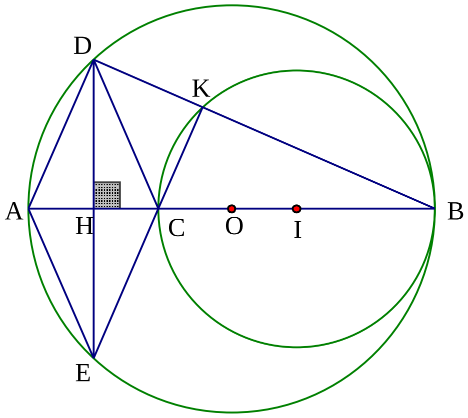
a) Xét vị trí tương đối của (I) và (O).

b) Kẻ dây DE của (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC. Tứ giác $ADCE$ là hình gì?

c) Gọi K là giao điểm của đoạn thẳng DB và (I). Chứng minh ba điểm E, C, K thẳng hàng.

d) Chứng minh HK là tiếp tuyến của (I).

Lời giải



a) Ta có (O) và (I) tiếp xúc trong với nhau

b) Tứ giác $ADCE$ là hình thoi

c) Có: $CK \perp AB, AD \perp DB \Rightarrow CK // AD$, mà $CE // AD \Rightarrow B, K, D$ thẳng hàng

d) Ta có: $\widehat{HKD} = \widehat{HDK}; \widehat{IKB} = \widehat{IBK} \Rightarrow \widehat{HKD} + \widehat{IKB} = \widehat{HDK} + \widehat{IBK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{IKH} = 90^0$ đpcm

Bài 16. Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC với B thuộc (O), C thuộc (O'). Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I.

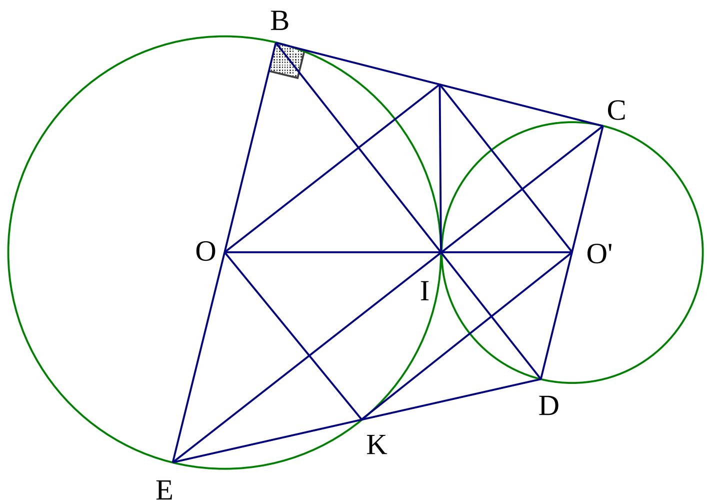
a) Vẽ đường kính BOD và $CO'E$. Chứng minh các bộ ba điểm B, A, E và C, A, D thẳng hàng.

b) Chứng minh $\Delta BAC, \Delta DAE$ có diện tích bằng nhau.

c) Gọi K là trung điểm của DE. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\Delta OKO'$ tiếp xúc với BC.

d) Cho $OA = 4,5cm; O'A = 2cm$. Tính AI, BC, CA.

Lời giải



a) Xét ΔABC, có $BI = IC = AI \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $A \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$

Lại có: $\widehat{BAD} = \widehat{CAE} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

b) Ta có: $\Delta BAD \backsim \Delta EAC (gg) \Rightarrow AD.AE = AB.AC \Rightarrow S_{ABC} = S_{DAE}$

c) Có $\Diamond OIO'K$ là hình chữ nhật (hình bình hành có 1 góc vuông)

Vậy đường tròn ngoại tiếp $\Delta OKO'$ chính là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật, có đường kính là IK mà: $IK \perp BC \equiv I$

d) Ta có: $AI^2 = OA.O'A = 4,5.2 = 9 \Rightarrow AI = 3cm$

Xét $\Delta BCD(\widehat{B} = 90^0) \Rightarrow \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BD^2} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{5}{36} \Rightarrow AB = 2,68cm$

Xét $\Delta ABC(\widehat{A} = 90^0) \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow CA^2 = BC^2 - AB^2 = 36 - 7,2 \Rightarrow AC = 5,4cm$

Bài 17. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC với $B \in (O), C \in (O')$. Đường thẳng vuông góc với OO' kẻ từ A cắt BC ở M.

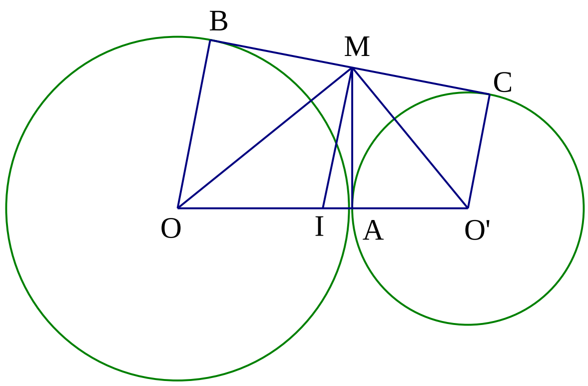
a) Tính MA theo R và r.

b) Tính diện tích tứ giác $BCO'O$ theo R và r.

c) Tính diện tích ΔBAC theo R và r.

d) Gọi I là trung điểm của OO'. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn $(I;IM)$.

Lời giải



a) Chứng minh được: $\widehat{O'MO} = 90^0$

tính được: $MA = \sqrt{Rr}$

b) Chứng minh $S_{BCOO'} = (R+r)\sqrt{Rr}$

c) Chứng minh được: $\Delta BAC \backsim \Delta OMO' \Rightarrow \dfrac{S_{BAC}}{S_{OMO'}} = \left(\dfrac{BC}{OO'}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{S_{OMO'}.BC^2}{(OO')^2} = \dfrac{4Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$

d) Tứ giác $OBCO'$ là hình thang vuông tại B và C có IM là đường trung bình $\Rightarrow IM \perp BC = \{M\}$.

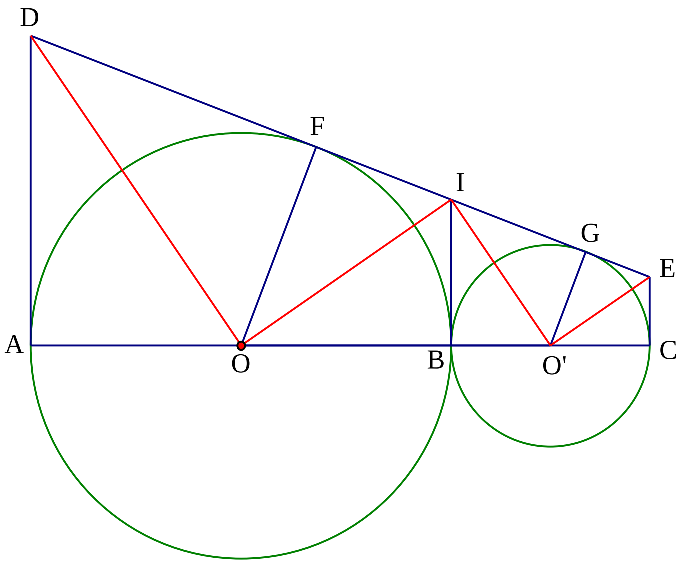
Bài 18. Cho 3 điểm A, B, C theo thứ tự đó trên một đường thẳng và $AB = 4BC$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AC vẽ nửa đường tròn tâm O đường kính AB và nửa đường tròn tâm O' có đường kính BC. Tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn có tiếp điểm với đường tròn (O) ở F với nửa đường tròn (O') ở G, cắt các tiếp tuyến vẽ từ A và C của hai nửa đường tròn đó ở D và E. Tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn ở B cắt DE ở I.

a) Chứng minh các tam giác OIO', OID, $O'IE$ là các tam giác vuông.

b) Đặt $O'C = a$ (a là độ dài cho trước). Tính BI, EG và AD theo a.

c) Tính diện tích tứ giác $ADEC$ theo a.

Lời giải



a) Theo tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù ta có: $\Delta IOO'$ vuông tại I , ΔOID vuông tại $O, \Delta IO'E$ vuông tại O'

b) Ta có: $OB = 2BC = 4a$

$\Delta IOO'(\hat{I} = 90^0) \Rightarrow IB \perp OO' \Rightarrow IB^2 = OB.O'B = 4a^2 \Rightarrow IB = 2a$

$\Delta IO'E(\widehat{O'} = 90^0) \Rightarrow O'G^2 = EG.GI \Rightarrow GE = \dfrac{O'G^2}{GI} = \dfrac{a^2}{2a} = \dfrac{a}{2}\left(IG = IB = IF = 2a\right) \Rightarrow AD = 8a$

c) Ta có: $S_{ACED} = \dfrac{1}{2}(EC + AD).AC = \dfrac{1}{2}(8a + \dfrac{a}{2}).10a = 42,5a^2$

Bài 19. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc (O) và (O') lần lượt ở B và C. Tiếp tuyến chung trong cắt BC ở I. Gọi E, F thứ tự là giao điểm của IO với AB của IO' với AC.

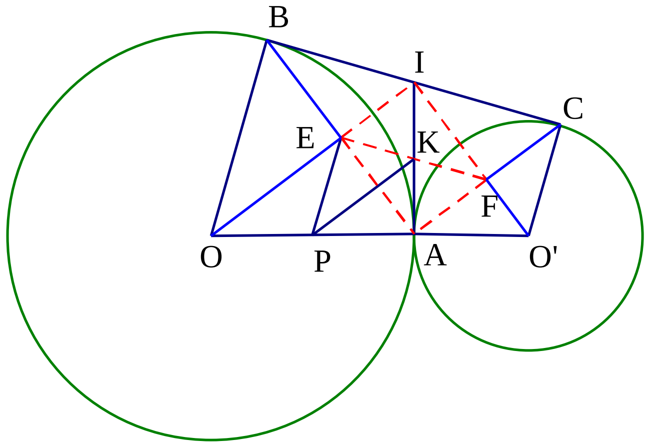
a) Chứng minh bốn điểm A, E, I, F cùng thuộc một đường tròn, xác định tâm K của đường tròn này.

b) Chứng minh: $IE.IO + IF.I'O = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right)$.

c) Gọi P là trung điểm của OA. Chứng minh PE tiếp xúc với (K).

d) Cho OO' cố định và có độ dài $2a$. Tìm điều kiện của R và R' để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải



a) Chứng minh được tứ giác $AEIF$ là hình chữ nhật và K là trung điểm của AI

b) Có: $IE.IO = IB^2 = \dfrac{BC^2}{4}; IF.IO' = IC^2 = \dfrac{BC^2}{4} \Rightarrow 2\left(IE.IO + IF.IO'\right) = AB^2 + AC^2$

c) PK là đường trung bình của ΔAOI và trung trực của EA

Ta có: $\Delta PEK = \Delta PAK \Rightarrow \widehat{PEK} = \widehat{PAK} \Rightarrow \widehat{PEK} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

d) $\Delta ABC \backsim \Delta IOO' \Rightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{IOO'}} = \left(\dfrac{BC}{OO'}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{S_{IOO'}.BC^2}{O'O^2}$

mà $BC = 2IA; O'O = 2a; S_{OIO'} = \dfrac{1}{2}.2a.IA = a.IA \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{IA^2}{a}$

$IA^2 = R.R' \le \left(\dfrac{R+R'}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow IA$ lớn nhất bằng a khi $R = R'$.

Bài 20. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB, C là một điểm bất kỳ nằm giữa A và B. Vẽ đường tròn tâm I, đường kính CA; đường tròn tâm (K), đường kính CB.

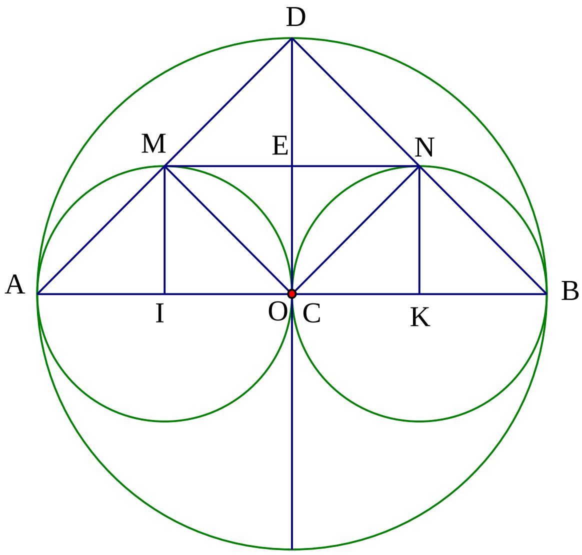
a) Hai đường tròn (I) và (K) có vị trí như thế nào đối với nhau.

b) Đường vuông góc với AB tại C cắt đường tròn (O) ở D và E. DA cắt đường tròn (I) ở M, DB cắt đường tròn (K) ở N.

c) Xác định vị trí của C trên đường kính AB sao cho MN có độ dài lớn nhất.

d) Xác định vị trí của điểm C trên đường kính AB sao cho tứ giác $DMCN$ có diện tích lớn nhất.

Lời giải



a) Đường tròn (I) và đường tròn (K) tiếp xúc ngoài nhau tại C (vì $IK = IC + CK$)

b) Vì AC là đường kính của (I) nên ΔAMC vuông tại M

Tương tự ta có ΔBNC vuông tại N ; ΔDAB vuông tại D

Suy ra tứ giác $DMCN$ là hình chữ nhật

Gọi E là giao điểm của MN và DC. Ta có $\Delta EMC, \Delta IMC$ cân

$\Rightarrow \widehat{EMC} = \widehat{ECM}; \widehat{IMC} = \widehat{ICM}$

Mà $\widehat{ICM} + \widehat{ECM} = \widehat{ACD} = 90^0$, do đó $\widehat{IMN} = 90^0 \Rightarrow MN \perp IM$

Tương tự ta cũng có $MN \perp NK \Rightarrow MN$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

c) Vì $DMCN$ là hình chữ nhật nên $MN = CD \Rightarrow MN$ có độ dài lớn nhất khi CD có độ dài lớn nhất

Ta có $CD \le OD = R$ (không đổi), dấu "=" xảy ra khi $C \equiv O$

Vậy khi $C \equiv O$ thì MN có độ dài lớn nhất là R

d) $S_{DMCN} = DM.CN$, ΔCAD có $\widehat{ACD} = 90^0; CM \perp AD; DC^2 = DM.DA \Rightarrow DM = \dfrac{DC^2}{DA}$

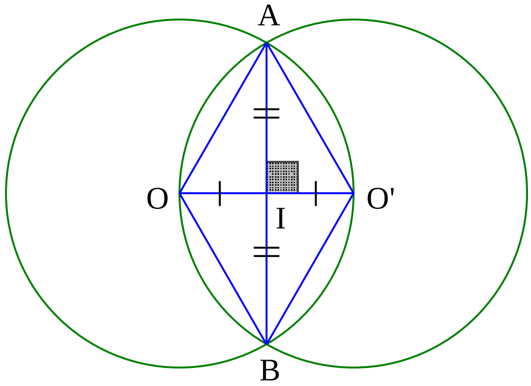
ΔDCB có $DN = \dfrac{DC^2}{DB}$. Do đó $S_{DMCN} = \dfrac{DC^2}{DA}.\dfrac{DC^2}{DB} = \dfrac{DC^4}{DA.DB}$

Lại có $DA.DB = DC.AB\left(= 2S_{ADB}\right) \Rightarrow S_{DMCN} = \dfrac{DC^4}{DC.DB} = \dfrac{DC^3}{2R} \le \dfrac{R^3}{2R} = \dfrac{R^2}{2} (CD \le R)$

Vậy diện tích tứ giác $DMCN$ lớn nhất khi điểm C trùng với điểm O.

Bài 21. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ cắt nhau tại A và B sao cho tâm đường tròn này nằm trên đường tròn kia. Tính theo R diện tích tứ giác $OAO'B$.

Lời giải



Ta có: $OA = OB = O'A = O'B = R$

$\lozenge OAO'B$ là hình thoi $\Rightarrow S_{OAO'B} = \dfrac{OO'.AB}{2}$

$\Delta OAO'$ là tam giác đều có AI là đường cao

$AI = \dfrac{OA\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}; AB = 2AI = R\sqrt{3}$

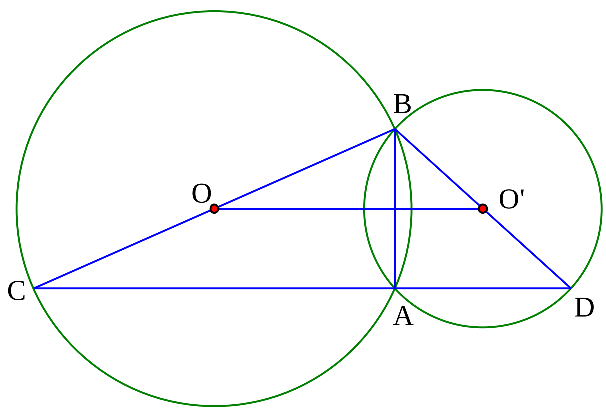
Do đó: $S_{OAO'B} = \dfrac{R.R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$.

Bài 22. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B (O và O' thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Kẻ các đường kính BOC và $BO'D$.

a) Chứng minh rằng ba điểm C, A, D thẳng hàng.

b) Biết $OO' = 5cm, OB = 4cm, O'B = 3cm$. Tính diện tích tam giác BCD.

Lời giải



a) Cách 1: $\Delta BAC(AO = \frac{1}{2}BC) \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

Cách 2: ΔBCD có OO' là đường trung bình $\Rightarrow OO'//CD$ (1)

ΔABC có OI là đường trung bình $\Rightarrow OO'//CA$ (2)

Từ $(1)(2) \Rightarrow C, A, D$ thẳng hàng.

b) Ta có: $\Delta OBO'$ vuông tại $B \Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại $B \Rightarrow S_{BCD} = \frac{1}{2}.BC.BD = \frac{1}{2}.8.6 = 24(cm^2)$

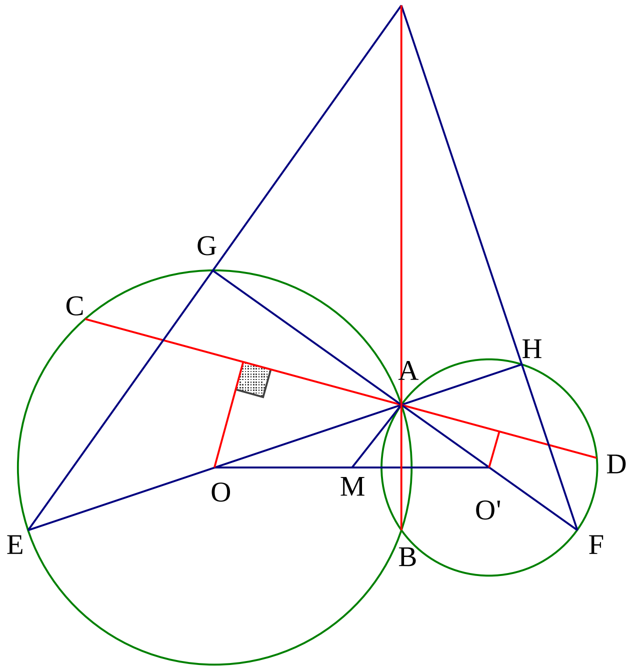
Bài 23. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi M là trung điểm của OO'. Đường thẳng qua A cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt ở C và D.

a) Khi $CD \perp AB$. Chứng minh: $AC = AD$.

b) Khi CD đi qua A và không vuông góc với MA. Vẽ đường kính AE của (O), AE cắt (O') ở H. Vẽ đường kính AF của (O'), AF cắt (O) ở G.

- Chứng minh AB, EG, FH đồng quy.
- Tìm vị trí của CD để đoạn CD có độ dài lớn nhất.

Lời giải



Vẽ $OP \perp AC; O'Q \perp AD \Rightarrow \lozenge OPO'Q$ là hình thang vuông tại P và Q

a) Kẻ $OP, O'Q \perp CD \Rightarrow MA \perp CD$ và M là trung điểm của OO'

b) Xét ΔEAF có AB, FG, EH là ba đường cao nên đồng quy tại 1 điểm .

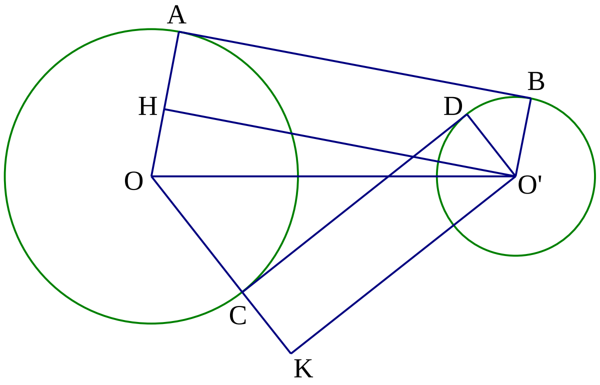
Ta có: $CD = 2PQ$

Hình thang $OPQO'$ vuông tại P và Q nên $OO' > PQ$

Vậy PQ lớn nhất khi $PQ // OO'$ hay tứ giác $OPQO'$ là hình chữ nhật.

Bài 24. Cho hai đường tròn $(O; 6cm)$ và $(O'; 2cm)$ nằm ngoài nhau. Gọi AB là tiếp tuyến chung ngoài, CD là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn ($A, C \in (O); B, D \in (O')$). Biết $AB = 2CD$, tính độ dài đoạn nối tâm OO'.

Lời giải



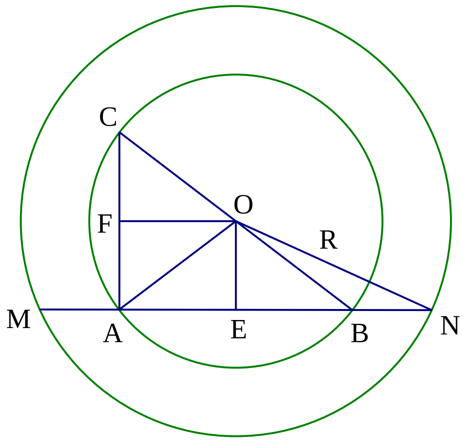
a) Kẻ $O'H \perp OA; O'K \perp OC$

Tính được: $OH = 4cm, OK = 8cm$,

Đặt $CD = x \Rightarrow AB = 2x; O'O^2 = 64 + x^2$ và $O'O^2 = 16 + 4x^2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow OO' = \sqrt{80}cm$.

Bài 25. Cho hai đường tròn đồng tâm O, có bán kính lần lượt là R và r. Dây MN của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại A và B. Gọi BC là đường kính của đường tròn nhỏ. Tính giá trị của biểu thức $\left(AC^2 + AM^2 + AN^2\right)$ theo R và r.

Lời giải



Kẻ $OE \perp AB; OF \perp AC$. Đặt $AC = a, AM = b, AN = c$

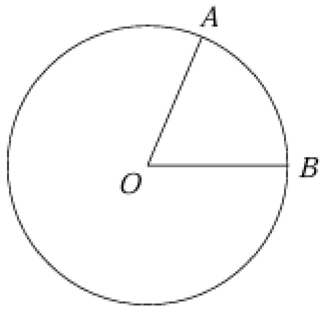
Ta có: $r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2; R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+b}{2}\right)^2$

Chứng minh được: $a^2 + b^2 + c^2 = 2\left(r^2 + R^2\right)$

BÀI 4
GÓC Ở TÂM
GÓC NỘI TIẾP

1. Góc ở tâm

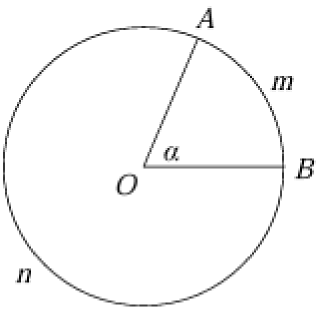
Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.



2. Cung. Số đo của cung

a. Cung

Mỗi phần đường tròn giới hạn bởi hai điểm A, B trên đường tròn gọi là cung AB, kí hiệu là $\overset{\frown}{AB}$.



Chú ý:

- Cung nằm bên trong góc ở tâm AOB được gọi là cung nhỏ, kí hiệu là $\overset{\frown}{AmB}$. Ta còn nói $\overset{\frown}{AmB}$ là cung bị chắn bởi góc AOB hay góc AOB chắn cung nhỏ AmB.
- Cung nằm bên ngoài góc ở tâm AOB gọi là cung lớn, kí hiệu là $\overset{\frown}{AnB}$.

b. Số đo của cung

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó.
- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360^0 và số đo cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn)
- Số đo của nửa đường tròn bằng 180^0.
- Số đo cung AB, kí hiệu là sđ $\overset{\frown}{AB}$

Nhận xét:

- Khi hai mút của cung trùng nhau ta có "cung không" với số đo 0^0 và cung cả đường tròn có số đo bằng 360^0.

• Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180^0, cung lớn có số đo lớn hơn 180^0. Cung nửa đường tròn có số đo bằng 180^0.

• Góc ở tâm chắn một cung mà cung đó là nửa đường tròn thì có số đo bằng 180^0.

• Trong một đường tròn (hay hai đường tròn bằng nhau), hai cung bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau. Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

• Nếu C là điểm nằm trên cung AB thì sđ$\overset\frown{ACB} =$ sđ$\overset\frown{ACB} +$ sđ$\overset\frown{CB}$

3. Góc nội tiếp

a. Định nghĩa:

Góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn gọi là góc nội tiếp.

Cung nằm bên trong góc nội tiếp được gọi là cung bị chắn.

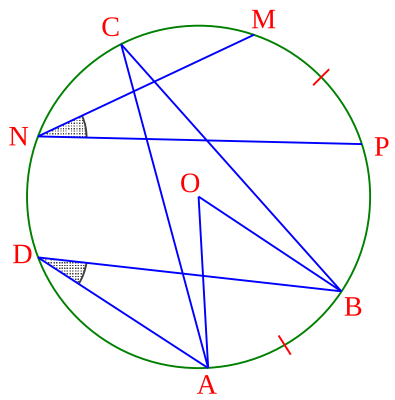
Định lí: Mỗi góc ở tâm có số đo gấp hai lần số đo góc nội tiếp cùng chắn một cung.

Hệ quả: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo bằng 90^0.

Nhận xét:

• Số đo góc nội tiếp bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.

• Trong một đường tròn, các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.



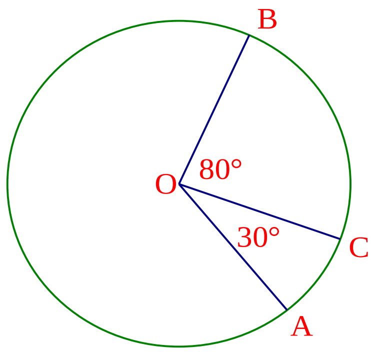
CHỦ ĐỀ 1
GÓC Ở TÂM

DẠNG 1
TÍNH SỐ ĐO GÓC Ở TÂM VÀ SỐ ĐO CUNG BỊ CHẮN

Phương pháp

- Đưa về cách tính số đo một góc của tam giác, tam giác.
- Để tính số đo của cung nhỏ, ta tính số đo của góc ở tâm tương ứng.
- Để tính số đo của cung lớn ta lấy 360^0 trừ đi số đo của cung nhỏ.
- Sử dụng tỉ số lượng giác của một góc nhọn để tính góc.

Bài 1. Tính số đo cung AB nhỏ trong hình vẽ dưới đây, biết rằng $\widehat{AOC}=30^0$ và $\widehat{BOC}=80^0$.



Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$. Vẽ dây $AB=R\sqrt{2}$. Tính số đo của hai cung AB.

Bài 3. Cho đường tròn O, hai tiếp tuyến của đường tròn tại A và B cắt nhau ở M, biết $\widehat{AMB}=65^0$.

a) Tính số đo $\widehat{AMO};\widehat{AOM}$.

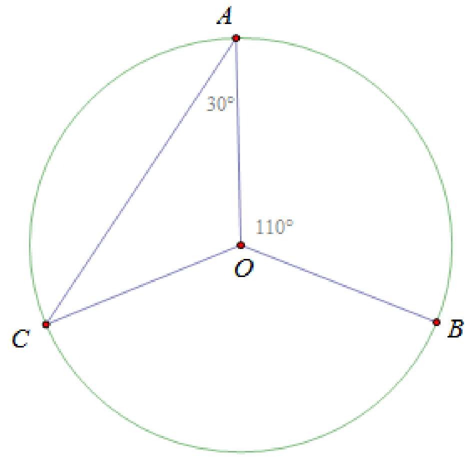
b) Tính số đo góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA,OB.

c) Tính số đo cung nhỏ AB và số đo cung lớn AB.

Bài 4. Cho $(O;R)$ các dây AB,CD,EF có độ dài như sau $AB=R,CD=R\sqrt{2},EF=R\sqrt{3}$. Tính số đo các cung AB,CD,EF.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho hình vẽ sau:

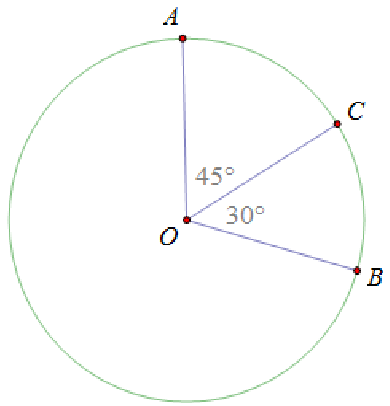


a) Tính số đo cung nhỏ AB.

b) Tính số đo cung nhỏ AC.

c) Tính số đo cung lớn BC.

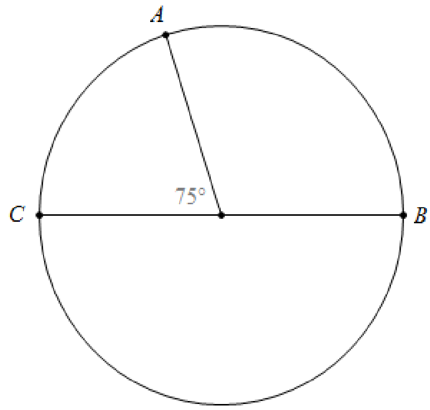
Bài 6. Cho hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ BC.

b) Tính số đo cung lớn AB.

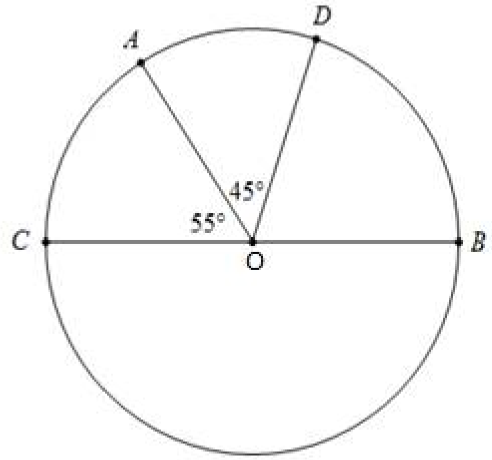
Bài 7. Cho đường tròn tâm O, đường kính BC. A là điểm trên đường tròn sao cho $\widehat{AOC} = 75^0$.



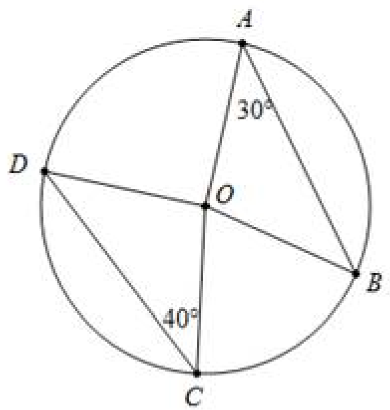
a) Tính số đo cung BC.

b) So sánh hai cung nhỏ AC và AB.

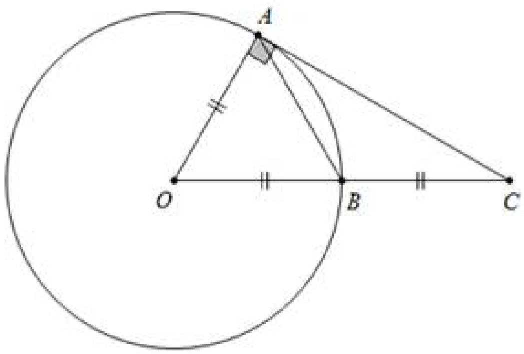
Bài 8. Cho hình vẽ sau, so sánh hai cung nhỏ AB và CD.



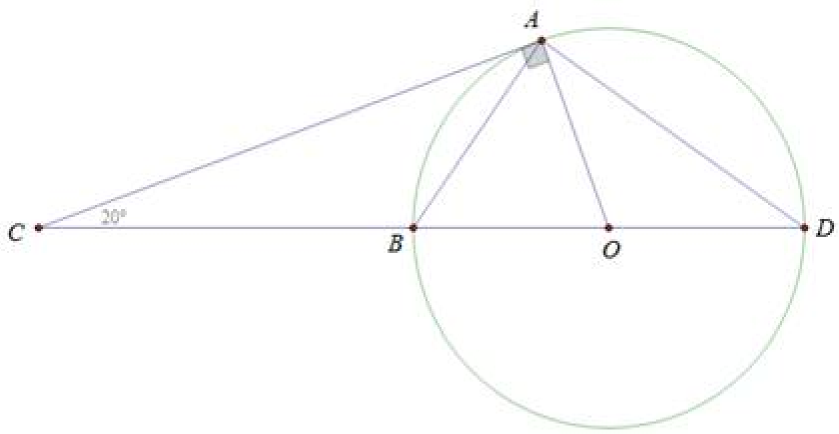
Bài 9. Cho hình vẽ sau, tính số đo cung nhỏ AB và cung lớn CD.



Bài 10. Cho hình vẽ sau, tính số đo cung lớn AB.



Bài 11. Cho hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ AB.

b) Tính góc $\widehat{ADC}$.

c) So sánh hai cung nhỏ AC và AD.

Bài 12. Cho $(O;R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Kẻ OK vuông góc với MN tại K.

a) Tính độ dài OK theo R.

b) Tính số đo các góc $\widehat{MOK};\widehat{MON}$.

c) Tính số đo cung nhỏ và cung lớn $\overset{\frown}{MN}$.

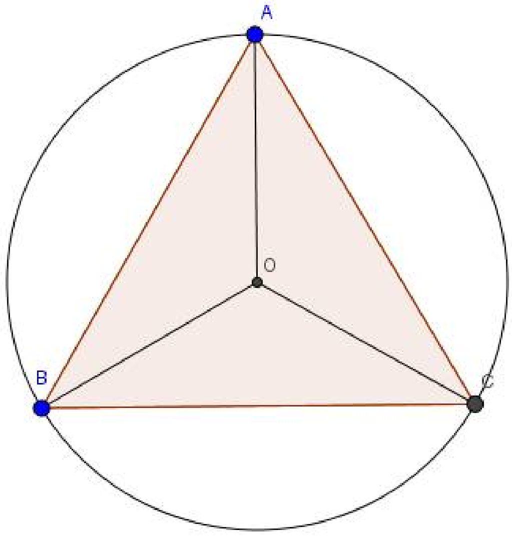
Bài 13. Cho đường tròn $(O;R)$, lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (O) (A và B là các tiếp điểm).

a) Tính $\widehat{AOM}$.

b) Tính $\widehat{AOB}$ và số đo cung nhỏ AB.

c) Biết đoạn thẳng OM cắt (O) tại C. Chứng minh C là điểm chính giữa của cung nhỏ AB.

Bài 14. Cho hình vẽ sau, với ABC là tam giác đều, O là tâm đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C. Tính số đo các cung tạo ra trong 3 điểm A, B, C.



Bài 15. Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ góc ở tâm $\widehat{AOC} = 50^0$ với C nằm trên (O). Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB.

a) Tính số đo cung nhỏ $\overset{\frown}{BE}$.

b) Tính số đo cung $\overset{\frown}{CBE}$. Từ đó suy ra ba điểm C, O, E thẳng hàng.

Bài 16. Cho đường tròn $(O;R)$. Trên đường tròn lấy lần lượt các điểm A, B, C, D sao cho các cung AB, BC, CD có số đo lần lượt là $60^0; 90^0; 120^0$.

a) Tính số đo các góc ở tâm chắn các cung ấy và số đo các cung sau $\overset{\frown}{ABC}$; $\overset{\frown}{BCD}$; $\overset{\frown}{ACD}$.

b) Tính độ dài các dây cung AB, BC, CD theo R.

DẠNG 2
CHỨNG MINH HAI CUNG BẰNG NHAU

Phương pháp

Để chứng minh hai cung (của một đường tròn) bằng nhau ta chứng minh hai cung này có cùng một số đo

Chú ý: Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau

Ta có: $AB//CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

Bài 1. So sánh các cung nhỏ trong hình vẽ dưới đây. Biết rằng $\widehat{MON} = 100^0; \widehat{ONP} = 20^0; \widehat{POQ} = 100^0$ $\widehat{MOQ} = 140^0$.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ dường tròn tâm O, đường kính BC. Đường tròn (O) cắt AB và AC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh các cung nhỏ $\overset{\frown}{BM}$ và $\overset{\frown}{CN}$ có số đo bằng nhau.

b) Tính $\widehat{MON}$, biết $\widehat{BAC} = 40^0$.

Bài 3. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O;R)$ và $\left(O;\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ trên đường tròn nhỏ lấy một điểm M. Tiếp tuyến tại M của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B. Tia OM cắt đường tròn lớn tại C.

a) Chứng minh rằng: $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$.

b) Tính số đo hai cung AB.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Trên các cung CA và CB lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{BN}$. Chứng minh:

a) $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{CN}$.

b) $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$.

Bài 5. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên nửa đường tròn lấy hai điểm C và D. Kẻ CH vuông góc với AB tại H, CH cắt (O) tại điểm thứ hai E. Kẻ AK vuông góc với CD tại K, AK cắt (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh:

a) Hai cung nhỏ $\overset{\frown}{CF}$ và $\overset{\frown}{DB}$ bằng nhau.

b) Hai cung nhỏ $\overset{\frown}{BF}$ và $\overset{\frown}{DE}$ bằng nhau.

Bài 6. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Vẽ các đường kính AOE, AOF và BOC. Đường thẳng AF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng các cung nhỏ AB, CD, CE bằng nhau.

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O') đường kính AO. Các điểm C, D thuộc đường tròn (O) sao cho $B \in \overset{\frown}{CD}$ và $\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{BD}$. Các dây AC và AD cắt đường tròn (O') theo thứ tự tại E và F.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng OE và OF.

b) So sánh số đo các cung $\overset{\frown}{AE}$ và $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn (O').

Bài 8. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AE. Gọi B, C, D là ba điểm trên nửa đường tròn, biết $\overset{\frown}{AC} = 2\overset{\frown}{AB}; \overset{\frown}{AD} = 3\overset{\frown}{AB}$

a) Chứng minh rằng: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$.

b) Chứng minh rằng: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

c) Chứng minh cung AD và BC có chung điểm chính giữa.

Bài 9. Cho đường tròn (O), trên nửa đường tròn đường kính AB lấy hai điểm C và D. Kẻ $CH \perp AB$ nó cắt đường tròn tại E. Kẻ $AK \perp DC$ nó cắt đường tròn tại F.

a) Chứng minh $\overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{DB}$.

b) Chứng minh $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{DE}$.

Bài 10. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Qua trung điểm I của bán kính OB kẻ dây $CD \perp AB$. Kẻ dây CE song song với AB.

a) Chứng minh $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.

b) Chứng minh ba điểm E, O, D thẳng hàng.

c) Chứng minh $ADBE$ là hình chữ nhật .

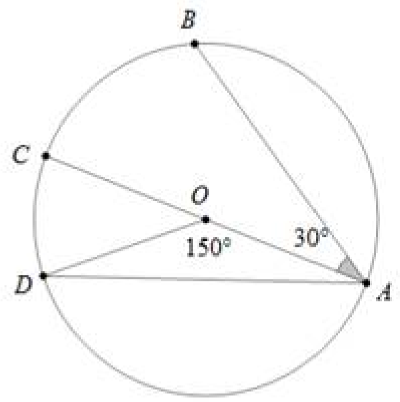
CHỦ ĐỀ 2
GÓC NỘI TIẾP

DẠNG 1
TÍNH SỐ ĐO GÓC, CUNG

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

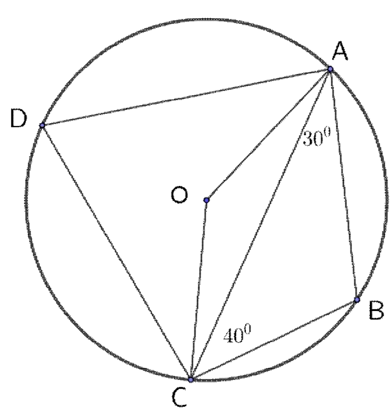
Bài 1. Dựa vào hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ CD.

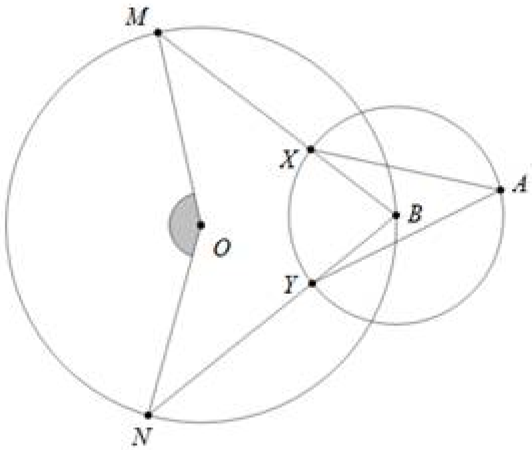
b) Tính số đo cung nhỏ BD.

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), biết $\widehat{BAC}=30^0, \widehat{BCA}=40^0$ (như hình vẽ bên).



Tính số đo các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}, \widehat{AOC}$.

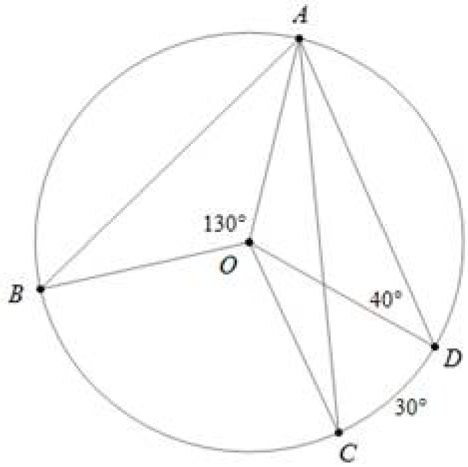
Bài 3. Dựa vào hình vẽ sau, biết cung nhỏ XY của đường tròn tâm B là 80°.



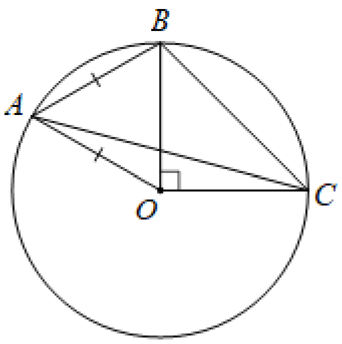
a) Tính $\widehat{XAY}$.

b) Tính $\widehat{MON}$.

Bài 4. Dựa vào hình vẽ sau, hãy tính $\widehat{BAC}$.



Bài 5. Dựa vào hình vẽ sau.



a) Tính $\widehat{BAC}$.

b) Tính $\widehat{ACB}$.

DẠNG 2
CHỨNG MINH CÁC GÓC BẰNG NHAU, CÁC CUNG BẰNG NHAU

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^0$). Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E.

a) Chứng minh $\overset\frown{BD} = \overset\frown{DE}$.

b) Chứng minh $\widehat{CBE} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH và nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AM

a) Tính $\widehat{ACM}$.

b) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{OCA}$.

c) Gọi N là giao điểm của AH với (O). Tứ giác $BCMN$ là hình gì? Vì sao?

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Từ đỉnh A ta kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, AH là đường cao $(H \in BC)$. Chứng minh rằng: $AB.AC = 2R.AH$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho đường tròn (O), dây AC bằng dây BD cắt nhau tại I (D nằm giữa A và C)

a) Chứng minh rằng sđ $\overset\frown{AC} =$ sđ $\overset\frown{BD}$

b) Chứng minh rằng sđ $\overset\frown{AD} =$ sđ $\overset\frown{BC}$

Bài 6. Cho đường tròn (O), dây AB. Trên cung nhỏ AB lấy hai điểm M, N sao cho $AM = BN$ (M nằm trên cung AN).

a) Chứng minh rằng *sđ* $\overset\frown{AN} =$ *sđ* $\overset\frown{BM}$

b) Chứng minh rằng hai dây AN, BM bằng nhau.

Bài 7. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng 60^0.

a) So sánh các góc của ΔABC.

b) Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC, hai dây AN và BM cắt nhau tại I. Chứng minh rằng CI là tia phân giác của $\widehat{ACB}$.

Bài 8. Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC về phía ngoài ta dựng hình vuông với tâm tại điểm O. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Bài 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Vẽ AD là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\widehat{BAD}=\widehat{OAC}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D. Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh $DB=DC=DI$

Bài 11. Cho tam giác ABC $\left(\widehat{A}=90^0\right)$ và $AB<AC$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E. Chứng minh rằng $DB.CB=EB^2$.

Bài 12. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}$ nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$. Chứng minh rằng: $BC=2R\sin\widehat{BAC}$.

Bài 13. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Lấy M là điểm tùy ý trên nửa đường tròn (M khác A và B). Kẻ MH vuông góc với AB ($H\in AB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) vẽ hai nửa đường tròn tâm O_1, đường kính AH và tâm O_2, đường kính BH. Đoạn MA và MB cắt hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại P và Q.

a) Chứng minh rằng $MH=PQ$.

b) Chứng minh rằng $\Delta MPQ\backsim\Delta MBA$.

c) Chứng minh rằng PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2).

DẠNG 3
CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm D thuộc (O). Gọi E là điểm đối xứng với A qua D.

a) ΔABE là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O), Chứng minh rằng: $OD \perp AK$.

Bài 2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và điểm C nằm ngoài nửa đường tròn. CA cắt nửa đường tròn tại M , CB cắt nửa đường tròn tại N. Gọi H là giao điểm của AN và BM .

a) Chứng minh rằng $CH \perp AB$.

b) Gọi I là trung điểm của CH. Chứng minh rằng MI là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D.

a) Tam giác ABE là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O). Chứng minh $OD \perp AK$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AF .

a) Tứ giác $BFCH$ là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh $OM = \frac{1}{2}AH$.

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và điểm C di động trên nửa đường tròn đó. Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đưuòng kính AB tại D, đường tròn này cắt CA, CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N .

a) Chứng minh M, N, I thẳng hàng.

b) Chứng minh $ID \perp MN$.

Bài 6. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao BM, CN cắt nhau tại H và cắt đường tròn lần lượt tại E và F .

a) Chứng minh rằng A là điểm chính giữa cung FE.

b) Chứng minh rằng $EF // MN$.

c) Chứng minh rằng $OA \perp MN$.

d) Chứng minh rằng AH không đổi khi A di động trên cung lớn BC.

e) Chứng minh rằng F đối xứng với H qua AB.

Bài 7. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A ta lấy điểm P bất kỳ (P khác B và P khác C). Các đoạn PA và BC cắt nhau tại Q.

a) Giả sử D là một điểm trên đoạn PA sao cho $PD = PB$. Chứng minh rằng ΔPDB đều.

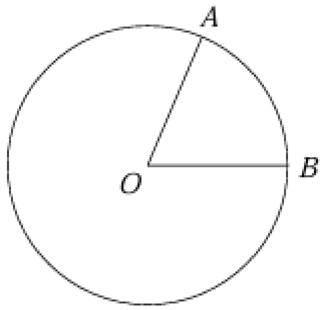
b) Chứng minh rằng $PA = PB + PC$.

c) Chứng minh hệ thức $\dfrac{1}{PQ} = \dfrac{1}{PB} + \dfrac{1}{PC}$.

BÀI 4
GÓC Ở TÂM
GÓC NỘI TIẾP

1. Góc ở tâm

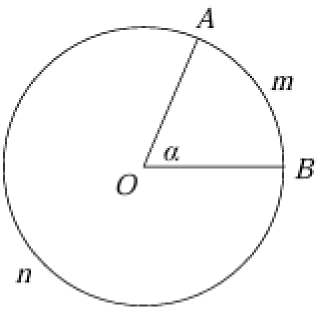
Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.



2. Cung. Số đo của cung

a. Cung

Mỗi phần đường tròn giới hạn bởi hai điểm A, B trên đường tròn gọi là cung AB, kí hiệu là $\overset{\frown}{AB}$.



Chú ý:

- Cung nằm bên trong góc ở tâm AOB được gọi là cung nhỏ, kí hiệu là $\overset{\frown}{AmB}$. Ta còn nói $\overset{\frown}{AmB}$ là cung bị chắn bởi góc AOB hay góc AOB chắn cung nhỏ AmB.
- Cung nằm bên ngoài góc ở tâm AOB gọi là cung lớn, kí hiệu là $\overset{\frown}{AnB}$.

b. Số đo của cung

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó.
- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360^0 và số đo cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn)
- Số đo của nửa đường tròn bằng 180^0.
- Số đo cung AB, kí hiệu là sđ $\overset{\frown}{AB}$

Nhận xét:

- Khi hai mút của cung trùng nhau ta có "cung không" với số đo 0^0 và cung cả đường tròn có số đo bằng 360^0.

• Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180^0, cung lớn có số đo lớn hơn 180^0. Cung nửa đường tròn có số đo bằng 180^0.

• Góc ở tâm chắn một cung mà cung đó là nửa đường tròn thì có số đo bằng 180^0.

• Trong một đường tròn (hay hai đường tròn bằng nhau), hai cung bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau. Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

• Nếu C là điểm nằm trên cung AB thì sđ $\overset{\frown}{ACB} =$ sđ $\overset{\frown}{ACB} +$ sđ $\overset{\frown}{CB}$

3. Góc nội tiếp

a. Định nghĩa:

Góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn gọi là góc nội tiếp.

Cung nằm bên trong góc nội tiếp được gọi là cung bị chắn.

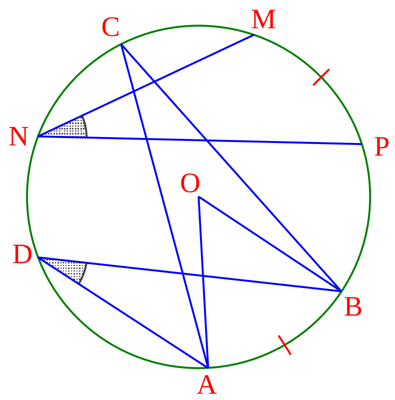
Định lí: Mỗi góc ở tâm có số đo gấp hai lần số đo góc nội tiếp cùng chắn một cung.

Hệ quả: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo bằng 90^0.

Nhận xét:

• Số đo góc nội tiếp bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.

• Trong một đường tròn, các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.



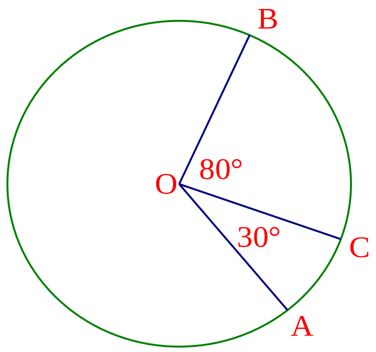
CHỦ ĐỀ 1
GÓC Ở TÂM

DẠNG 1
TÍNH SỐ ĐO GÓC Ở TÂM VÀ SỐ ĐO CUNG BỊ CHẮN

Phương pháp

- Đưa về cách tính số đo một góc của tam giác, tam giác.
- Để tính số đo của cung nhỏ, ta tính số đo của góc ở tâm tương ứng.
- Để tính số đo của cung lớn ta lấy 360^0 trừ đi số đo của cung nhỏ.
- Sử dụng tỉ số lượng giác của một góc nhọn để tính góc.

Bài 1. Tính số đo cung AB nhỏ trong hình vẽ dưới đây, biết rằng $\widehat{AOC}=30^0$ và $\widehat{BOC}=80^0$.



Lời giải

Điểm C nằm trên cung nhỏ AB nên ta có: $sđ\,\overset{\frown}{AB}=sđ\,\overset{\frown}{AC}+sđ\,\overset{\frown}{BC}$ (1)

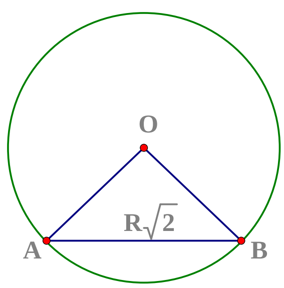
Góc ở tâm $\widehat{AOC}$ chắn cung AC nên $sđ\,\overset{\frown}{AC}=\widehat{AOC}=30^0$

Góc ở tâm $\widehat{BOC}$ chắn cung BC nên $sđ\,\overset{\frown}{BC}=\widehat{BOC}=80^0$

Thay vào (1) ta được: $sđ\,\overset{\frown}{AB}=sđ\,\overset{\frown}{AC}+sđ\,\overset{\frown}{BC}=\widehat{AOC}+\widehat{BOC}=30^0+80^0=110^0$

Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$. Vẽ dây $AB=R\sqrt{2}$. Tính số đo của hai cung AB.

Lời giải



Xét ΔAOB có: $OA^2+OB^2=R^2+R^2=2R^2=AB^2\Rightarrow\Delta AOB$ vuông tại O

Do đó số đo cung nhỏ AB là $sđ\,\overset{\frown}{AB} = \widehat{AOB} = 90^0$

Vậy số đo cung lớn AB là $360^0 - 90^0 = 270^0$

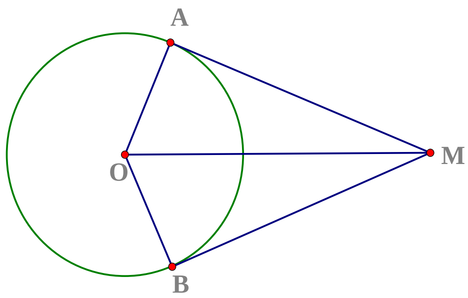
Bài 3. Cho đường tròn O, hai tiếp tuyến của đường tròn tại A và B cắt nhau ở M, biết $\widehat{AMB} = 65^0$.

a) Tính số đo $\widehat{AMO}; \widehat{AOM}$.

b) Tính số đo góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA, OB.

c) Tính số đo cung nhỏ AB và số đo cung lớn AB.

Lời giải



a) Chứng minh được OM là tia phân giác của $\widehat{AMB}$

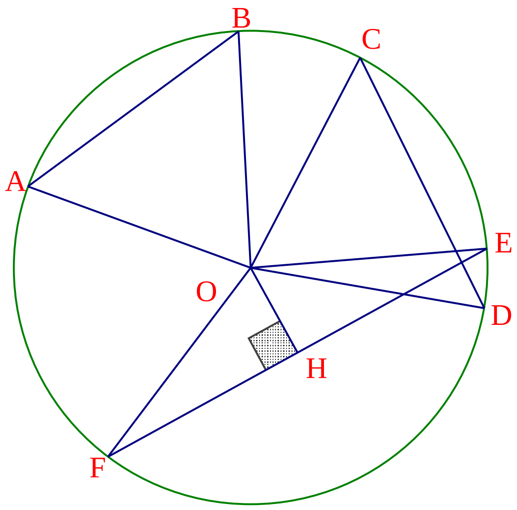
$\Rightarrow \widehat{AMO} = 32,5^0 \Rightarrow \widehat{AOM} = 180^0 - 90^0 - 32,5^0 = 57,5^0$

b) $\widehat{AOB} = 360^0 - 180^0 - 65^0 = 115^0$

c) sđ $\overset{\frown}{AB}_{nho}$ = sđ $\widehat{AOB} = 115^0$; sđ $\overset{\frown}{AB}_{lon} = 360^0 - 115^0 = 245^0$

Bài 4. Cho $(O;R)$ các dây AB, CD, EF có độ dài như sau $AB = R, CD = R\sqrt{2}, EF = R\sqrt{3}$. Tính số đo các cung AB, CD, EF.

Lời giải



Ta có $OA = OB = AB\,(= R) \Rightarrow \Delta OAB$ đều $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^0 \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AB} = 60^0$

Lại có $OC^2 + OD^2 = R^2 + R^2 = 2R^2; CD^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$

ΔOCD có $OC^2 + OD^2 = CD^2$

Theo định lí Pitago đảo ta có ΔOCD vuông tại $O \Rightarrow sd\overset{\frown}{CD} = sd\widehat{COD} = 90^0$

Vẽ $OH \perp EF$ tại H, suy ra $EH = \dfrac{EF}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Xét ΔOHE vuông tại H, ta có $EH = \dfrac{OE\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \Delta OHE$ là nửa tam giác đều $\Rightarrow \widehat{EOH} = 60^0$

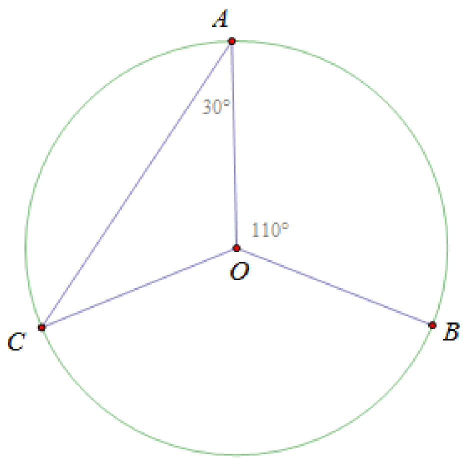
ΔOEF cân tại O (vì $OE = OF$) có OH là đường cao nên cũng là đường phân giác

Do đó $\widehat{EOH} = \dfrac{1}{2}\widehat{EOF} \Rightarrow \widehat{EOF} = 2.60^0 = 120^0$

sđ $\overset{\frown}{EF}$ = sđ $\widehat{EOF}$ = 120^0

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ AB.

b) Tính số đo cung nhỏ AC.

c) Tính số đo cung lớn BC.

Lời giải

a) Ta có $s\text{đ}\overset{\frown}{AB} = \widehat{AOB} = 110^0$ (góc ở tâm chắn cung AB)

b) Xét tam giác AOB có $OA = OB$ (bán kính)

$\Rightarrow \Delta AOB$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{CAO} = 30^0$

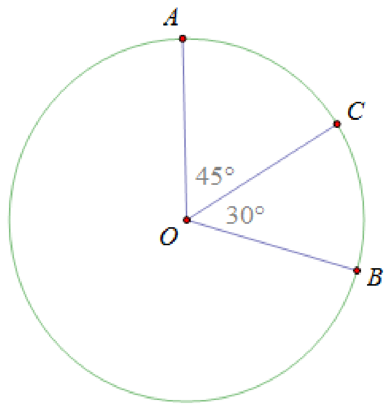
$\widehat{AOC} + \widehat{ACO} + \widehat{CAO} = 180^0$ (tổng 3 góc của tam giác)

$\widehat{AOC} + 30^0 + 30^0 = 180^0 \Rightarrow \widehat{AOC} = 180^0 - \left(30^0 + 30^0\right) = 120^0$

$\Rightarrow s\text{đ}\overset{\frown}{AC} = \widehat{AOC} = 120^0$ (góc ở tâm chắn cung AC)

c) số đo cung lớn BC là: $360^0 - \left(s\text{đ}\overset{\frown}{AB} + s\text{đ}\overset{\frown}{AC}\right) = 360^0 - \left(110^0 + 120^0\right) = 130^0$

Bài 6. Cho hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ BC.

b) Tính số đo cung lớn AB.

Lời giải

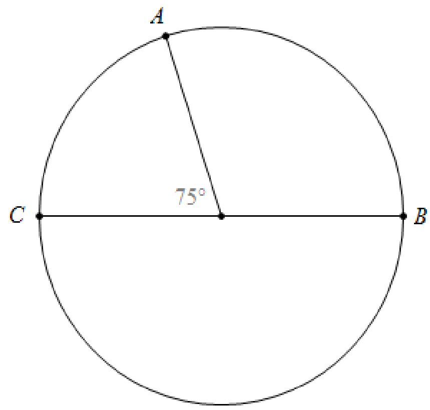
a) Ta có $sđ\,\overset\frown{BC} = \widehat{BOC} = 30^0$ (góc ở tâm chắn cung BC)

b) Ta có $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 45^0 + 30^0 = 75^0$

Do đó $sđ\,\overset\frown{AB} = \widehat{AOB} = 75^0$ (góc ở tâm chắn cung AB)

Suy ra số đo cung lớn AB là: $360^0 - 75^0 = 285^0$

Bài 7. Cho đường tròn tâm O, đường kính BC. A là điểm trên đường tròn sao cho $\widehat{AOC} = 75^0$.



a) Tính số đo cung BC.

b) So sánh hai cung nhỏ AC và AB.

Lời giải

a) Vì BC là đường kính nên $sđ\,\overset\frown{BC} = 90^0$.

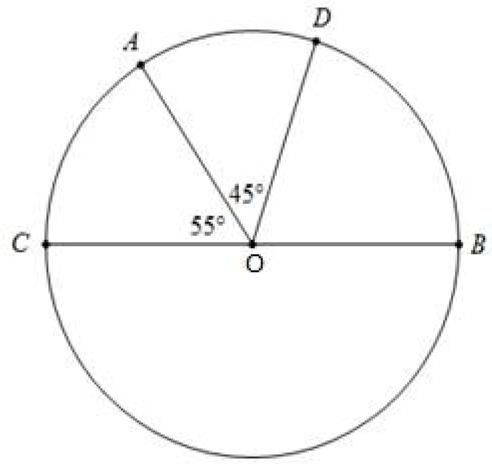
a) Ta có $sđ\,\overset\frown{AC} = \widehat{AOC} = 75^0$ (góc ở tâm chắn cung AC)

Ta lại có $\widehat{AOB} = 180^0 - \widehat{AOC} = 180^0 - 75^0 = 105^0$

Nên $sđ\,\overset\frown{AB} = \widehat{AOB} = 105^0$ (góc ở tâm chắn cung AB)

Suy ra số đo cung nhỏ AC nhỏ hơn số đo cung nhỏ AB.

Bài 8. Cho hình vẽ sau, so sánh hai cung nhỏ AB và CD.



Lời giải

Ta có: $\widehat{COD} = \widehat{COA} + \widehat{AOD} = 55^{\circ} + 45^{\circ} = 100^{\circ}$

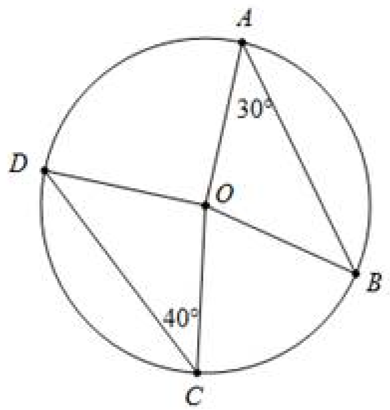
Do đó $sđ\overset{\frown}{CD} = \widehat{COD} = 100^{\circ}$ (góc ở tâm chắn cung CD)

Ta lại có: $\widehat{AOB} = 180^{\circ} - \widehat{AOC} = 180^{\circ} - 55^{\circ} = 125^{\circ}$

Nên $sđ\overset{\frown}{AB} = \widehat{AOB} = 125^{\circ}$ (góc ở tâm chắn cung AB)

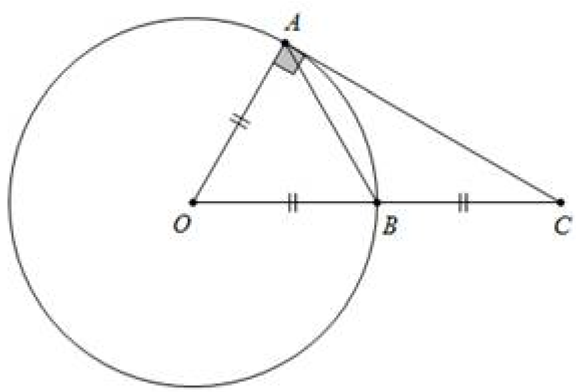
Suy ra số đo cung nhỏ AB lớn hơn số đo cung nhỏ CD.

Bài 9. Cho hình vẽ sau, tính số đo cung nhỏ AB và cung lớn CD.



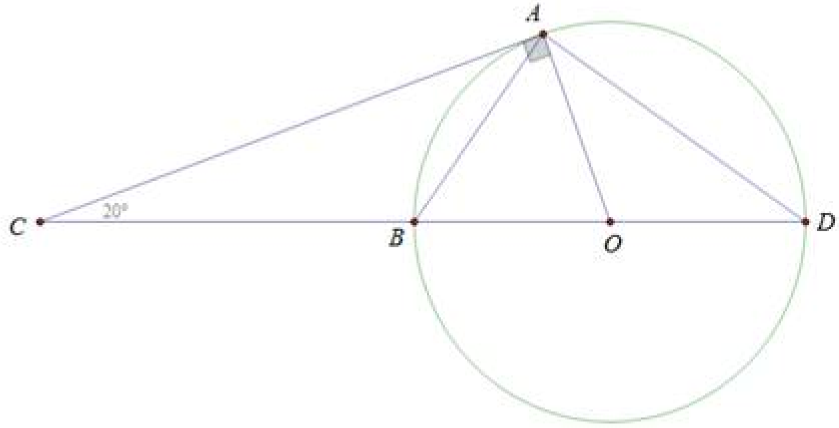
Lời giải

Bài 10. Cho hình vẽ sau, tính số đo cung lớn AB.



Lời giải

Bài 11. Cho hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ AB.

b) Tính góc $\widehat{ADC}$.

c) So sánh hai cung nhỏ AC và AD.

Lời giải

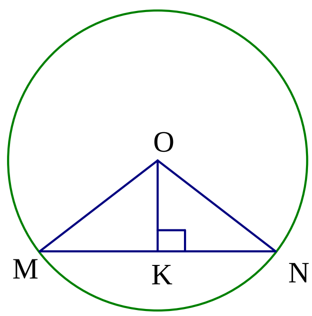
Bài 12. Cho $(O;R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{3}.$ Kẻ OK vuông góc với MN tại K.

a) Tính độ dài OK theo R.

b) Tính số đo các góc $\widehat{MOK};\widehat{MON}$.

c) Tính số đo cung nhỏ và cung lớn $\overset\frown{MN}$.

Lời giải



a) Xét tam giác vuông OMK, tính được $OK = \dfrac{R}{2}$

b) Tính được $\widehat{MOK} = 60^0; \widehat{MON} = 120^0$

c) Số đo cung nhỏ $\overset\frown{MN}$ là: $120^0 \Rightarrow$ số đo cung lớn $\overset\frown{MN}$ là: 240^0

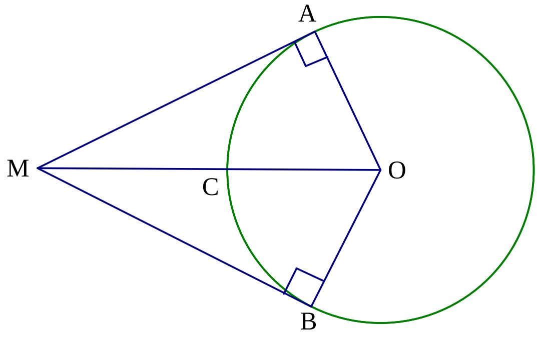
Bài 13. Cho đường tròn $(O;R)$, lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM = 2R.$ Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (O) (A và B là các tiếp điểm).

a) Tính $\widehat{AOM}$.

b) Tính $\widehat{AOB}$ và số đo cung nhỏ AB.

c) Biết đoạn thẳng OM cắt (O) tại C. Chứng minh C là điểm chính giữa của cung nhỏ AB.

Lời giải



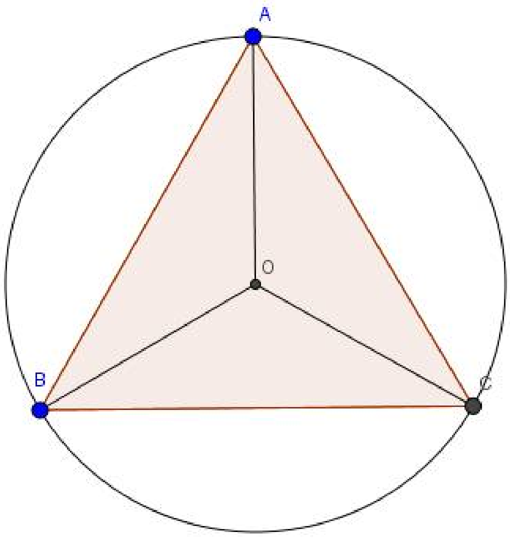
a) Xét tam giác vuông AMO, ta có: $\widehat{AOM} = 60^0$

(Sử dụng tỉ số lượng giác)

b) Tính được: $\widehat{AOB} = 120^0$, sđ $\overset\frown{ACB} = 120^0$

c) Ta có: $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} \Rightarrow \overset\frown{AC} = \overset\frown{BC}$.

Bài 14. Cho hình vẽ sau, với ABC là tam giác đều, O là tâm đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C. Tính số đo các cung tạo ra trong 3 điểm A, B, C.



Lời giải

Vì tam giác ABC đều có tâm O là tâm đường tròn ngoại tiếp nên O cũng là giao ba đường phân giác nên $AO; CO$ lần lượt là các đường phân giác $\widehat{BAC}; \widehat{ACB}$.

Ta có $\widehat{CAO} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{60°}{2} = 30°; \widehat{ACO} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} = \frac{60°}{2} = 30°$.

Xét tam giác AOC có $\widehat{AOC} = 180° - \widehat{CAO} - \widehat{ACO} = 120°$ nên số đo cung nhỏ AC là $120°$.

Do đó số đo cung lớn AC là $360° - 120° = 240°$.

Tương tự, ta tính được:

số đo cung nhỏ AB là $120°$ và số đo cung lớn AB là $360° - 120° = 240°$.

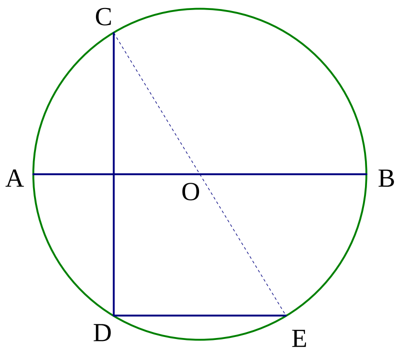
số đo cung nhỏ BC là $120°$ và số đo cung lớn BC là $360° - 120° = 240°$.

Bài 15. Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ góc ở tâm $\widehat{AOC} = 50^0$ với C nằm trên (O). Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB.

a) Tính số đo cung nhỏ $\overset{\frown}{BE}$.

b) Tính số đo cung $\overset{\frown}{CBE}$. Từ đó suy ra ba điểm C, O, E thẳng hàng.

Lời giải



a) Tính được sđ $\overset{\frown}{BE} = 50^0$

b) Chứng minh được: sđ $\overset{\frown}{CBE} = 180^0 \Rightarrow C, O, E$ thẳng hàng (đpcm)

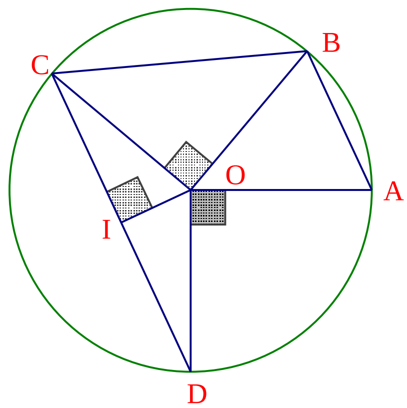
***) Cách khác:** Sử dụng $\widehat{CDE} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

Bài 16. Cho đường tròn $(O;R)$. Trên đường tròn lấy lần lượt các điểm A, B, C, D sao cho các cung AB, BC, CD có số đo lần lượt là $60^0; 90^0; 120^0$.

a) Tính số đo các góc ở tâm chắn các cung ấy và số đo các cung sau $\overset{\frown}{ABC}$; $\overset{\frown}{BCD}$; $\overset{\frown}{ACD}$.

b) Tính độ dài các dây cung AB, BC, CD theo R.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{AOB} = 60^0; \widehat{BOC} = 90^0; \widehat{COD} = 120^0$

$sd\,\overset{\frown}{ABC} = sd\,\overset{\frown}{AB} + sd\,\overset{\frown}{BC} = 60^0 + 90^0 = 150^0$

$sd\,\overset{\frown}{BCD} = sd\,\overset{\frown}{BC} + sd\,\overset{\frown}{CD} = 90^0 + 120^0 = 210^0$

$sd\,\overset{\frown}{ACD} = sd\,\overset{\frown}{AB} + sd\,\overset{\frown}{BC} + sd\,\overset{\frown}{CD} = 60^0 + 90^0 + 120^0 = 270^0$

b) Ta có ΔAOB cân lại có $\widehat{AOB} = 60^0 \Rightarrow \Delta AOB$ đều $\Rightarrow AB = OA = R$

Theo định lí Pitago ta có: $BC^2 = BD^2 + OC^2 = 2R^2 \Rightarrow BC = R\sqrt{2}$

$\overset{\frown}{AOD} = 360^0 - 270^0 = 90^0 \Rightarrow AD = BC = R\sqrt{2}$

Vậy $OI \perp CD$

Tam giác vuông COI có $\widehat{COI} = 60^0$ nên là nửa tam giác đều

$\Rightarrow OI = \frac{1}{2}OC = \frac{R}{2} \Rightarrow CI = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Do đó $CD = 2CI = R\sqrt{3}$.

DẠNG 2
CHỨNG MINH HAI CUNG BẰNG NHAU

Phương pháp

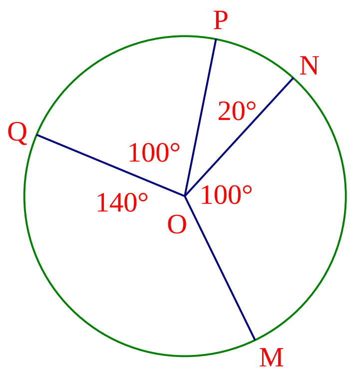
Để chứng minh hai cung (của một đường tròn) bằng nhau ta chứng minh hai cung này có cùng một số đo

Chú ý: Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau

Ta có: $AB//CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

Bài 1. So sánh các cung nhỏ trong hình vẽ dưới đây. Biết rằng $\widehat{MON} = 100^0; \widehat{ONP} = 20^0; \widehat{POQ} = 100^0$ $\widehat{MOQ} = 140^0$.

Lời giải



Ta có sđ $\overset{\frown}{MQ} = \widehat{MOQ} = 140^0$ (góc ở tâm $\widehat{MOQ}$ chắn cung $\overset{\frown}{MQ}$)

sđ $\overset{\frown}{MN} = \widehat{MON} = 100^0$ (góc ở tâm $\widehat{MON}$ chắn cung $\overset{\frown}{MN}$)

sđ $\overset{\frown}{NP} = \widehat{NOP} = 20^0$ (góc ở tâm $\widehat{NOP}$ chắn cung $\overset{\frown}{NP}$)

sđ $\overset{\frown}{PQ} = \widehat{POQ} = 100^0$ (góc ở tâm $\widehat{POQ}$ chắn cung $\overset{\frown}{PQ}$)

Lại có: $\widehat{MON} = \widehat{POQ} = 100^0 \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{MN} = sd\,\overset{\frown}{PQ} \Rightarrow \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{PQ}$

+ $100^0 < 140^0 \Rightarrow \widehat{MON} < \widehat{MOQ} \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{MN} < sd\,\overset{\frown}{MQ} \Rightarrow \overset{\frown}{MN} < \overset{\frown}{MQ}$

+ $20^0 < 100^0 \Rightarrow \widehat{NOP} < \widehat{MPN} \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{NP} < sd\,\overset{\frown}{MN} \Rightarrow \overset{\frown}{NP} < \overset{\frown}{MN}$

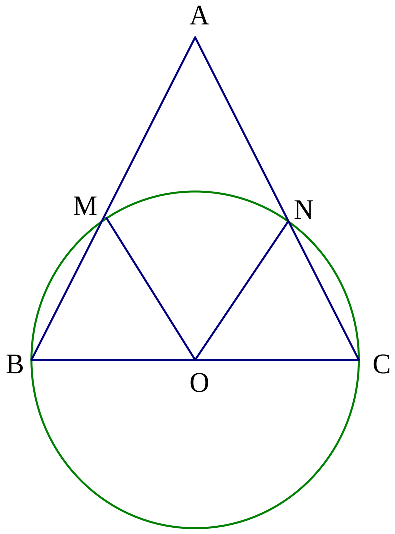
Vậy $\overset{\frown}{NP} < \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{PQ} < \overset{\frown}{MQ}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ dường tròn tâm O, đường kính BC. Đường tròn (O) cắt AB và AC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh các cung nhỏ $\overset{\frown}{BM}$ và $\overset{\frown}{CN}$ có số đo bằng nhau.

b) Tính $\widehat{MON}$, biết $\widehat{BAC} = 40^0$.

Lời giải



a) Chứng minh được: $\Delta BOM = \Delta CON\,(cgc) \Rightarrow \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CN}$

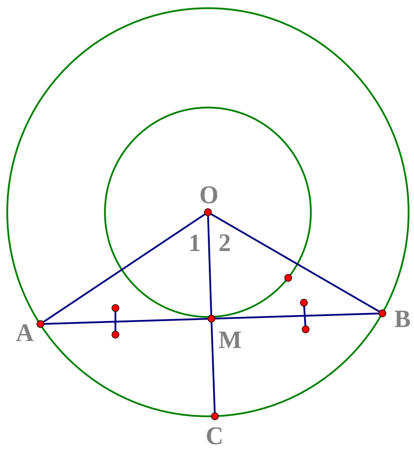
b) Tính được: $\widehat{MON} = 100^0$

Bài 3. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O;R)$ và $\left(O;\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ trên đường tròn nhỏ lấy một điểm M. Tiếp tuyến tại M của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B. Tia OM cắt đường tròn lớn tại C.

a) Chứng minh rằng: $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$.

b) Tính số đo hai cung AB.

Lời giải



a) Ta có: $AM \perp OB$ (tính chất hai tiếp tuyến)

ΔAOB cân tại O $\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$ (hai góc ở tâm bằng nhau thì hai cung bị chắn bằng nhau)

b) Ta có: $MA = MB$ (đường kính vuông góc với dây)

$$MA^2 = OA^2 - OM^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow MA = \frac{R}{2} \Rightarrow AB = R$$

ΔAOB có ba cạnh bằng nhau $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^0 \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AB} = 60^0 \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AB}_{lon} = 300^0$.

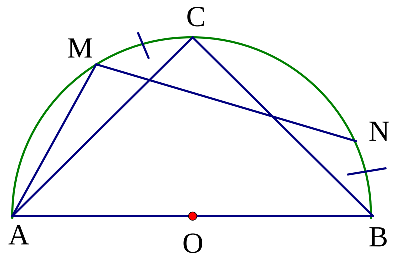
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Trên các cung CA và CB lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{BN}$. Chứng minh:

a) $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{CN}$.

b) $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$.

Lời giải



a) Ta có C là điểm chính giữa nửa đường tròn $\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$

mà $\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{BN} \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{CN}$

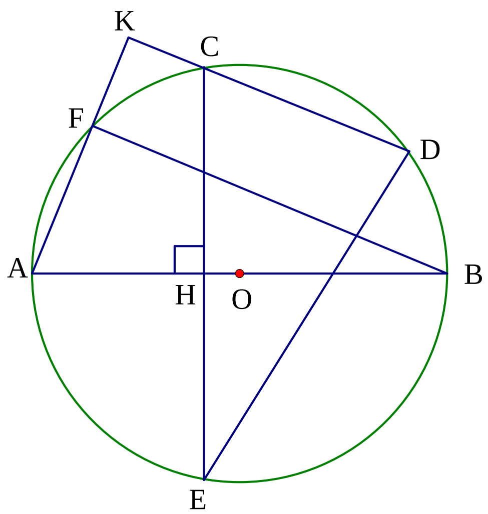
b) Chứng minh được $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$

Bài 5. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên nửa đường tròn lấy hai điểm C và D. Kẻ CH vuông góc với AB tại H, CH cắt (O) tại điểm thứ hai E. Kẻ AK vuông góc với CD tại K, AK cắt (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh:

a) Hai cung nhỏ $\overset{\frown}{CF}$ và $\overset{\frown}{DB}$ bằng nhau.

b) Hai cung nhỏ $\overset{\frown}{BF}$ và $\overset{\frown}{DE}$ bằng nhau.

Lời giải

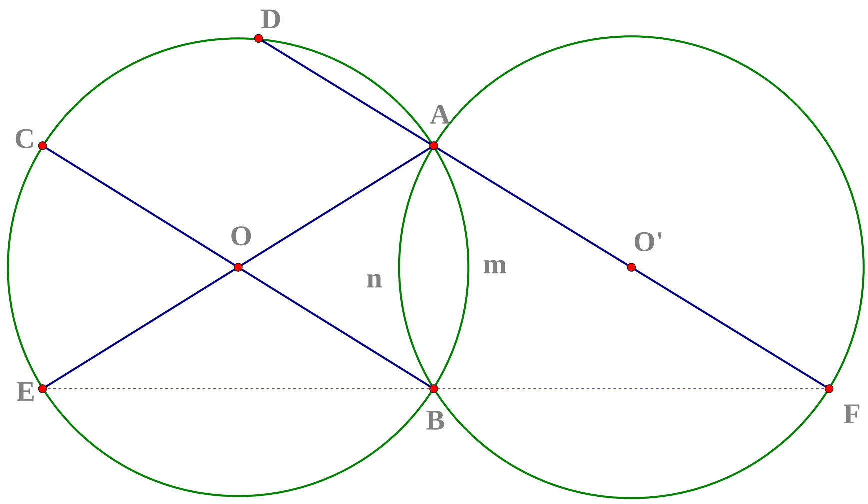


a) Ta có: $\left.\begin{matrix} DK \perp AK \\ BF \perp AK \end{matrix}\right\} \Rightarrow DK // BF \Rightarrow \overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{DB} \Rightarrow$ đpcm

b) Từ giả thiết ta có AB là đường trung trực của CE $\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BE} \Rightarrow \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{DE}$

Bài 6. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Vẽ các đường kính AOE, AOF và BOC. Đường thẳng AF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng các cung nhỏ AB, CD, CE bằng nhau.

Lời giải



+ Dây AB là dây chung của hai đường tròn nên AB căng hai cung nhỏ bằng nhau $\Rightarrow \overset{\frown}{AmB} = \overset{\frown}{AnB} (1)$

Lại có: $\widehat{AOB} = \widehat{COE} \Rightarrow \overset{\frown}{AmB} = \overset{\frown}{CE} (2)$

+ Chứng minh được:

$\widehat{ABE} = \widehat{ABF} = 90^0 \Rightarrow E, B, F$ thẳng hàng

+ $\Delta EAB = \Delta FAB \Rightarrow EB = FB \Rightarrow BO$ là đường trung bình của $\Delta FEA \Rightarrow BC // AD \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AmB} (3)$

(Hai cung bị chắn giữa hai dây song song).

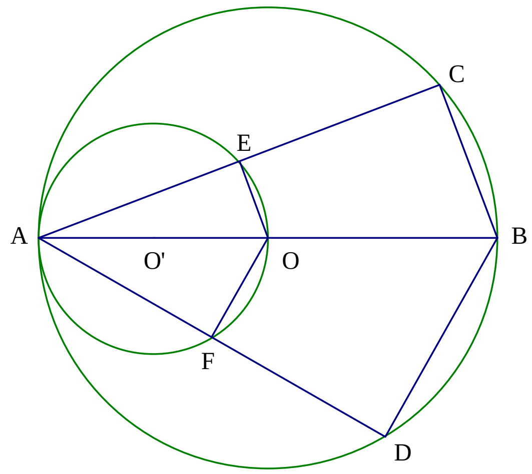
Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow \overset{\frown}{AmB} = \overset{\frown}{AnB} = \overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{CD}$.

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O') đường kính AO. Các điểm C, D thuộc đường tròn (O) sao cho $B \in \overset{\frown}{CD}$ và $\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{BD}$. Các dây AC và AD cắt đường tròn (O') theo thứ tự tại E và F.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng OE và OF.

b) So sánh số đo các cung $\overset{\frown}{AE}$ và $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn (O').

Lời giải



a) Ta có: $OE \perp AC; BC \perp AC \Rightarrow OE//BC$

Xét ΔABC có $OE//BC, AO = OB$

$\Rightarrow E$ là trung điểm của $AC \Rightarrow OE = \dfrac{1}{2}BC$

Tương tự: $OF = \dfrac{1}{2}BD$

Mà $BC < BD \Rightarrow OE < OF$

b) Xét tam giác vuông OEA, AFO ta có: $AE^2 = AO^2 - OE^2$ và $AF^2 = AO^2 - OF^2$

$\Rightarrow AE^2 > AF^2 \Rightarrow AE > AF \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AE} >$ sđ $\overset{\frown}{AF}$.

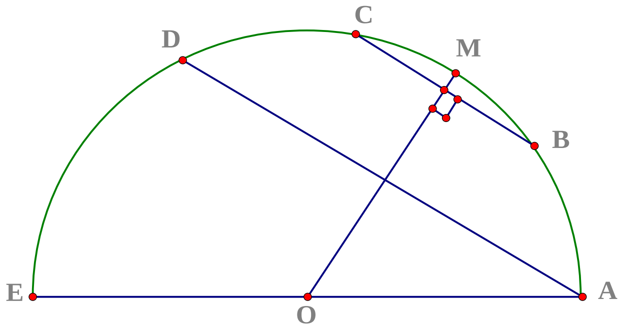
Bài 8. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AE. Gọi B, C, D là ba điểm trên nửa đường tròn, biết $\overset{\frown}{AC} = 2\overset{\frown}{AB}; \overset{\frown}{AD} = 3\overset{\frown}{AB}$

a) Chứng minh rằng: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$.

b) Chứng minh rằng: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

c) Chứng minh cung AD và BC có chung điểm chính giữa.

Lời giải



a) $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB}; \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{AC} = 3\overset{\frown}{AB} - 2\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$

b) $\left.\begin{array}{l}\overparen{AB}=\overparen{BC}=\overparen{CD}\\ \overparen{AC}=\overparen{AB}+\overparen{BC}\\ \overparen{BD}=\overparen{BC}+\overparen{CD}\end{array}\right\}\Rightarrow \overparen{AC}=\overparen{BD}$

c) Gọi M là điểm chính giữa cả cung BC $\Rightarrow \overparen{MB}=\overparen{MC}$

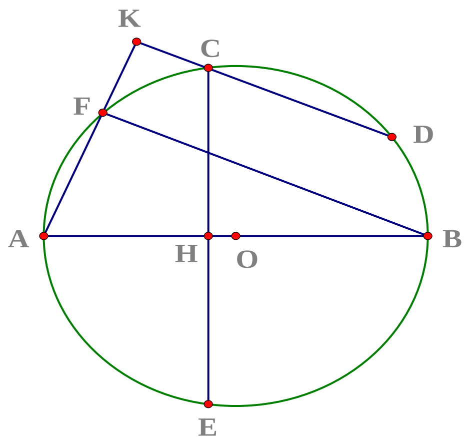
Có: $\left.\begin{array}{l}\overparen{MA}=\overparen{MB}+\overparen{AB}\\ \overparen{MD}=\overparen{MC}+\overparen{CD}\end{array}\right\}\to \overparen{MA}=\overparen{MD}\Rightarrow dpcm$

Bài 9. Cho đường tròn (O), trên nửa đường tròn đường kính AB lấy hai điểm C và D. Kẻ $CH\perp AB$ nó cắt đường tròn tại E. Kẻ $AK\perp DC$ nó cắt đường tròn tại F.

a) Chứng minh $\overparen{CF}=\overparen{DB}$.

b) Chứng minh $\overparen{BF}=\overparen{DE}$.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{AFB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow\begin{cases}BF\perp AK\equiv F\\ CD\perp AK\equiv K\end{cases}\Rightarrow BF//CD$

Xét đường tròn (O) có BF // CD $\Rightarrow \overparen{CF}=\overparen{DB}$ (chắn bởi hai dây song song)

b) Ta có: $AB\perp CE\Rightarrow B$ là điểm chính giữa $\overparen{CBE}$

$\Rightarrow \overparen{BC}=\overparen{BE}\Rightarrow$ sđ $\overparen{BC}$ = sđ $\overparen{BE}$

mà $\overparen{CF}=\overparen{BD}\Rightarrow$ sđ $\overparen{CF}$ = sđ $\overparen{BD}$ $\Rightarrow$ sđ $\overparen{BC}$ + sđ $\overparen{CF}$ = sđ $\overparen{BE}$ + sđ $\overparen{DB}$

$\Rightarrow$ sđ $\overparen{BF}$ = sđ $\overparen{DE}$ $\Rightarrow \overparen{BF}=\overparen{DE}\Rightarrow BF=DE$.

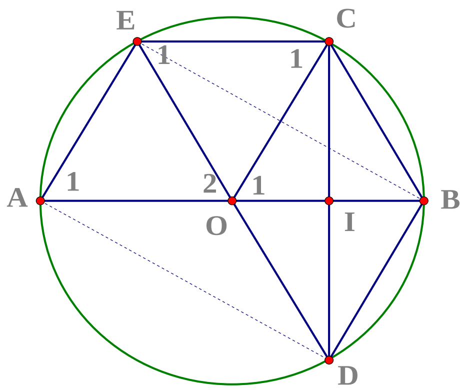
Bài 10. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Qua trung điểm I của bán kính OB kẻ dây $CD\perp AB$. Kẻ dây CE song song với AB.

a) Chứng minh $\overparen{AE}=\overparen{BC}=\overparen{BD}$.

b) Chứng minh ba điểm E,O,D thẳng hàng.

c) Chứng minh $ADBE$ là hình chữ nhật .

Lời giải



a) AB là trung trực của CD $\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}(1)$

$$\left.\begin{matrix} \hat{O}_2 = \hat{E}_1 (slt) \\ \hat{O}_1 = \hat{C}_1 (slt) \\ \hat{E}_1 = \hat{C}_1 (tamgiaccan) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{O}_1 \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BC}(2)$$

Từ (1) và (2)$\Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$

b) ΔCOD cân tại O, OI là đường cao nên là đường phân giác COD

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \widehat{COB} = \widehat{DOB} \\ \widehat{BOC} = \widehat{AOE} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \widehat{BOD} = \widehat{AOE} \\ \widehat{BOD} + \widehat{DOA} = 180^0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{DOA} + \widehat{AOE} = 180^0 \Rightarrow E, O, D \text{ thẳng hàng (đpcm)}$$

c) Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau nên là hình chữ nhật.

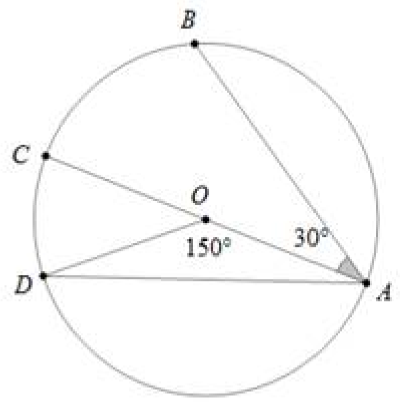
CHỦ ĐỀ 2
GÓC NỘI TIẾP

DẠNG 1
TÍNH SỐ ĐO GÓC, CUNG

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Bài 1. Dựa vào hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ CD.

b) Tính số đo cung nhỏ BD.

Lời giải

a)Ta có: $\widehat{COD} = 180^0 - \widehat{AOC}$ (hai góc bù nhau)

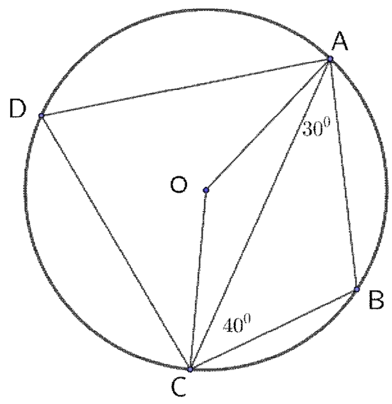
$\widehat{COD} = 180^0 - \widehat{AOC} = 180^0 - 150^0 = 30^0$

số đo cung nhỏ CD là: $sđ\overset\frown{CD} = \widehat{COD} = 30^0$ (góc ở tâm)

b) số đo cung nhỏ BC là $sđ\overset\frown{BC} = 2\widehat{CAB} = 2.30^0 = 60^0$ (góc nội tiếp)

số đo cung nhỏ BD là: $sđ\overset\frown{BD} = sđ\overset\frown{BC} + sđ\overset\frown{CD} = 60^0 + 30^0 = 90^0$

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), biết $\widehat{BAC} = 30^0, \widehat{BCA} = 40^0$ (như hình vẽ bên).



Tính số đo các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}, \widehat{AOC}$.

Lời giải

Xét tam giác ABC có : $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} + \widehat{ABC} = 180^0$ (tổng 3 góc trong tam giác)

Hay $30^0 + 40^0 + \widehat{ABC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 110^0$

$\widehat{ADC} = \frac{1}{2}\left(sđ\,\widehat{AB} + sđ\,\widehat{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(2\widehat{ACB} + 2\widehat{CAB}\right) = \widehat{ACB} + \widehat{CAB} = 40^0 + 30^0 = 70^0$ (góc nội tiếp)

Hay $110^0 + \widehat{ADC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{ADC} = 70^0$

Ta có : $\widehat{AOC} = 2\widehat{ADC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \widehat{AOC} = 2.70^0 = 140^0$.

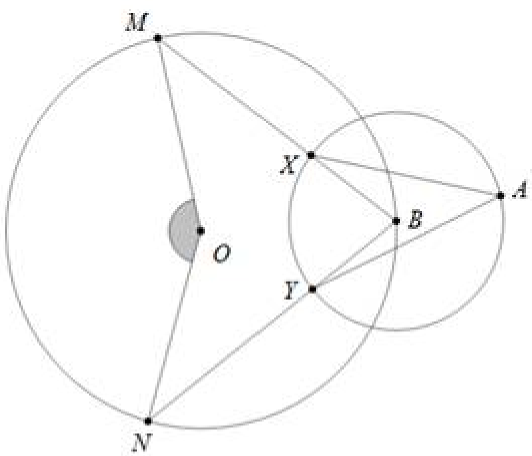
Vậy $\widehat{ABC} = 110^0, \widehat{ADC} = 70^0, \widehat{AOC} = 140^0$

Chú ý : Có thể dùng tính chất Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên để tính $\widehat{ADC}$

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^0$ (tổng 2 góc đối diện của tứ giác nội tiếp)

Hay $110^0 + \widehat{ADC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{ADC} = 70^0$

Bài 3. Dựa vào hình vẽ sau, biết cung nhỏ XY của đường tròn tâm B là 80^o.



a) Tính $\widehat{XAY}$.

b) Tính $\widehat{MON}$.

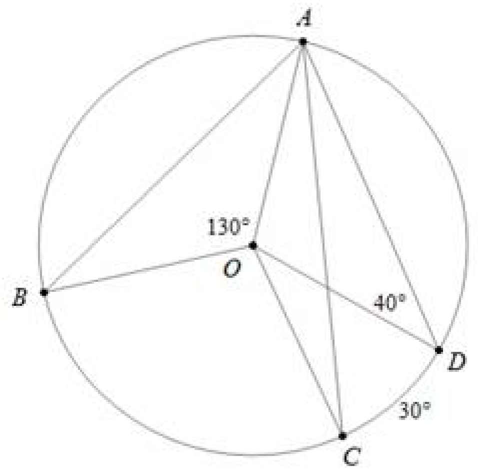
Lời giải

a) Ta có $\widehat{XAY}=\frac{1}{2}sđ\,\overparen{XY}=\frac{80^o}{2}=40^o$ (góc nội tiếp của đường tròn tâm B)

b) Ta có $\widehat{XBY}=sđ\,\overparen{XY}=80^o$ (góc ở tâm của đường tròn tâm B)

$\widehat{MON}=2\widehat{XBY}=2.80^o=160^o$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung $\overparen{MN}$ của đường tròn tâm O)

Bài 4. Dựa vào hình vẽ sau, hãy tính $\widehat{BAC}$.



Lời giải

Tam giác AOD cân tại O, có $\widehat{OCA}=\widehat{OAC}=40^o$ nên

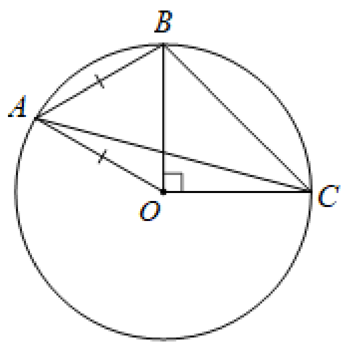
$\widehat{AOD}=180^o-\left(\widehat{OCA}+\widehat{OAC}\right)=180^o-\left(40^o+40^o\right)=80^o$

Ta lại có: $\widehat{COD}=sđ\,\overparen{CD}=30^o$ (góc ở tâm)

Do đó: $\widehat{COB}=360^o-\left(\widehat{AOB}+\widehat{AOD}+\widehat{COD}\right)=360^o-\left(130^o+80^o+30^o\right)=120^o$

Suy ra $\widehat{BAC}=\frac{1}{2}\widehat{COB}=\frac{1}{2}.120^o=60^o$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung $\overparen{BC}$)

Bài 5. Dựa vào hình vẽ sau.



a) Tính $\widehat{BAC}$.

b) Tính $\widehat{ACB}$.

Lời giải

a) Ta có $\widehat{BOC}$ = sđ $\overparen{BC}$ $\Rightarrow$ sđ $\overparen{BC}$ $=90^0$ (góc ở tâm)

Ta có $\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BC} = \dfrac{1}{2}.90^0 = 45^0$ (góc nội tiếp).

b) ΔOAB có $OA = OB$ (bán kính), mà $OA = AB$

$\Rightarrow \Delta OAB$ đều $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^0 \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AB} = 60^0$ (góc ở tâm)

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{1}{2}.60^0 = 30^0$ (góc nội tiếp).

DẠNG 2
CHỨNG MINH CÁC GÓC BẰNG NHAU, CÁC CUNG BẰNG NHAU

Trong một đường tròn:

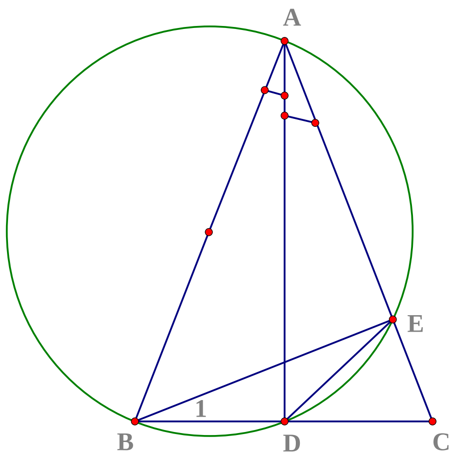
- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^0$). Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E.

a) Chứng minh $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DE}$.

b) Chứng minh $\widehat{CBE} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AD \perp BC$

Mà ΔABC cân tại A

nên AD là phân giác của $\widehat{A}$ $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$

Ta lại có:

$sđ\,\overset{\frown}{BD} = 2\widehat{BAD}$ (góc nội tiếp).

$sđ\,\overset{\frown}{DE} = 2\widehat{EAD} = 2\widehat{CAD}$ (góc nội tiếp).

Suy ra $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DE}$

b) Ta có $\widehat{CBE} = \widehat{EAD}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Mà $\widehat{EAD} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$

Nên $\widehat{CBE}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$

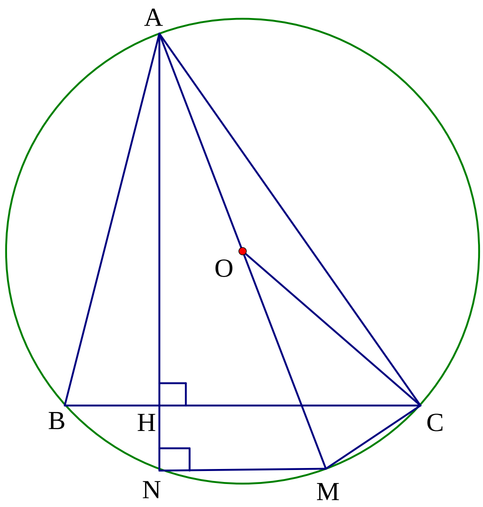
Bài 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH và nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AM

a) Tính $\widehat{ACM}$.

b) Chứng minh $\widehat{BAH}=\widehat{OCA}$.

c) Gọi N là giao điểm của AH với (O). Tứ giác $BCMN$ là hình gì? Vì sao?

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ACM}=90^0$ (góc nội tiếp)

b) Ta có $\Delta ABH \backsim \Delta AMC\,(gg)$

$\Rightarrow \widehat{BAH}=\widehat{OAC};\widehat{OCA}=\widehat{OAC}\Rightarrow \widehat{BAH}=\widehat{OCA}$

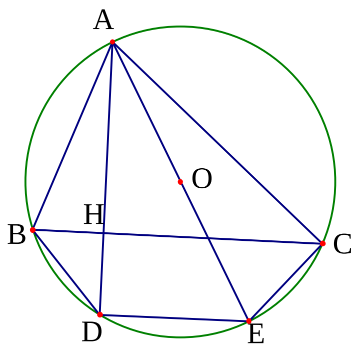
c) $\widehat{ANM}=90^0 \Rightarrow MNBC$ là hình thang

$\Rightarrow BC//MN \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BN}$ = sđ $\overset{\frown}{CM}$

$\Rightarrow \widehat{CBN}=\widehat{BCM}\Rightarrow BCMN$ hình thang cân.

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Từ đỉnh A ta kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Chứng minh rằng $\widehat{BAH}=\widehat{OAC}$.

Lời giải



Kẻ đường kính AE của đường tròn (O).

Ta thấy $\widehat{ACE}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Từ đó $\widehat{OAC}+\widehat{AEC}=90^0$ (1).

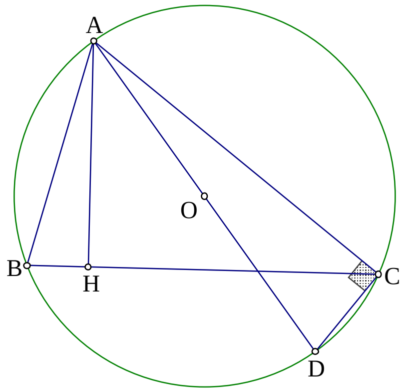
Theo giả thiết bài ra, ta có: $\widehat{BAH}+\widehat{ABC}=90^0$ (2).

Mặt khác $\widehat{AEC}=\widehat{ABC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$) (3).

Từ (1),(2) và (3) suy ra $\widehat{BAH}=\widehat{OAC}$ (đpcm).

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, AH là đường cao $(H\in BC)$. Chứng minh rằng: $AB.AC=2R.AH$.

Lời giải



Vẽ đường kính AD của đường tròn (O), suy ra $\widehat{ACD}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét ΔHBA và ΔCDA có:

$\widehat{AHB}=\widehat{ACD}\left(=90^0\right);\widehat{HBA}=\widehat{CDA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$),

Do đó $\Delta HBA\sim\Delta CDA\Rightarrow\dfrac{AH}{AC}=\dfrac{AB}{AD}\Rightarrow AB.AC=AD.AH$.

Mà $AD=2R$.

Do đó $AB.AC=2R.AH$.

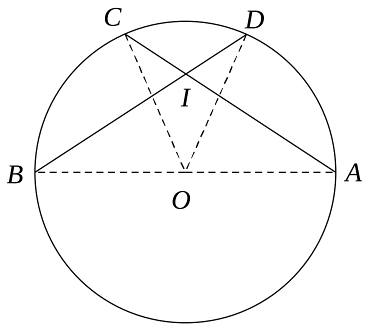
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho đường tròn (O), dây AC bằng dây BD cắt nhau tại I (D nằm giữa A và C)

a) Chứng minh rằng sđ $\overset{\frown}{AC}=$ sđ $\overset{\frown}{BD}$

b) Chứng minh rằng sđ $\overset{\frown}{AD}=$ sđ $\overset{\frown}{BC}$

Lời giải



a) sđ $\overset{\frown}{AC} = \widehat{AOC}$, sđ $\overset{\frown}{BD} = \widehat{BOD}$

Chứng minh $\Delta AOC = \Delta DOB\ (c-c-c) \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{DOB}$

Vậy sđ $\overset{\frown}{AC} =$ sđ $\overset{\frown}{BD}$.

b) *sđ* $\overset{\frown}{AD} =$ *sđ* $\overset{\frown}{AC} -$ *sđ* $\overset{\frown}{CD}$

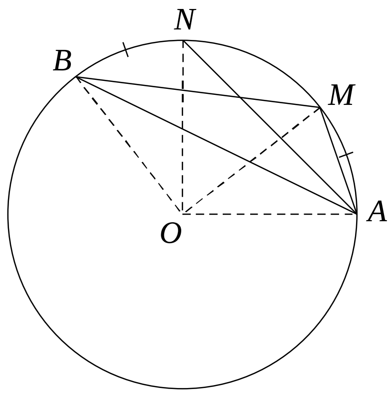
và *sđ* $\overset{\frown}{BC} =$ *sđ* $\overset{\frown}{BD} -$ *sđ* $\overset{\frown}{CD}$. mà *sđ* $\overset{\frown}{AC} =$ *sđ* $\overset{\frown}{BD}$ nên *sđ* $\overset{\frown}{AD} =$ *sđ* $\overset{\frown}{BC}$.

Bài 6. Cho đường tròn (O), dây AB. Trên cung nhỏ AB lấy hai điểm M, N sao cho $AM = BN$ (M nằm trên cung AN).

a) Chứng minh rằng sđ $\overset{\frown}{AN} =$ sđ $\overset{\frown}{BM}$

b) Chứng minh rằng hai dây AN, BM bằng nhau.

Lời giải



a) Sđ $\overset{\frown}{AN} =$ sđ $\overset{\frown}{AM} +$ sđ $\overset{\frown}{MN}$

Sđ $\overset{\frown}{BM} =$ sđ $\overset{\frown}{BN} +$ sđ $\overset{\frown}{MN}$

Mà sđ $\overset{\frown}{AM} =$ sđ $\overset{\frown}{BN} \Rightarrow$ *sđ* $\overset{\frown}{AN} =$ *sđ* $\overset{\frown}{BM}$

b) Vì *sđ* $\overset{\frown}{AN} =$ *sđ* $\overset{\frown}{BM} \Rightarrow \widehat{AON} = \widehat{BOM}$.

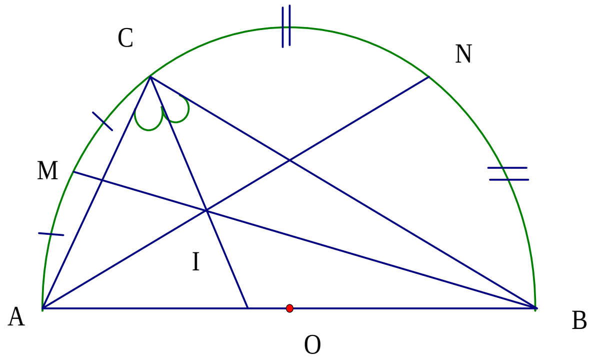
Chứng minh $\Delta AON = \Delta MOB\ (c-g-c) \Rightarrow AN = MB$.

Bài 7. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng 60^0.

a) So sánh các góc của ΔABC.

b) Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC, hai dây AN và BM cắt nhau tại I. Chứng minh rằng CI là tia phân giác của $\widehat{ACB}$.

Lời giải

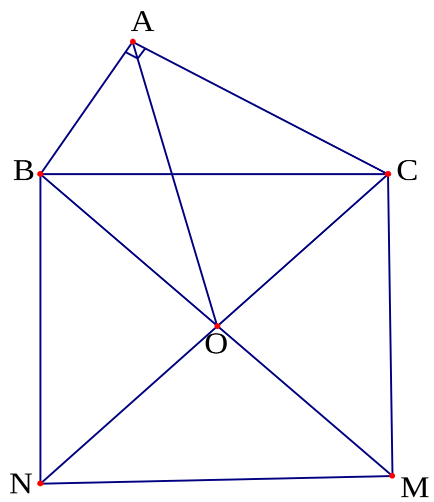


a) Ta có: $\overset\frown{AC} = 60^0 \Rightarrow \overset\frown{BC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{B} < \widehat{A} < \widehat{C}$

b) AN là phân giác của góc A, BM là phân giác của góc B nên CI là phân giác của góc C (đpcm)

Bài 8. Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC về phía ngoài ta dựng hình vuông với tâm tại điểm O. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải



Vì O là tâm của hình vuông nên $\widehat{BOC} = 90^0$.

Lại có $\widehat{BAC} = 90^0$ suy ra bốn điểm A, B, O, C cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

Đối với đường tròn này ta thấy $\widehat{BAO} = \widehat{BCO}$ (cùng chắn $\overset\frown{BO}$).

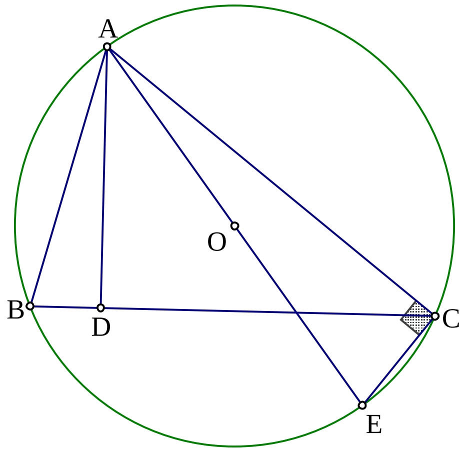
Mà $\widehat{BCO} = 45^0 \Rightarrow \widehat{BAO} = 45^0$.

Do $\widehat{BAC} = 90^0$, nên $\widehat{CAO} = \widehat{BAC} - \widehat{BAO} = 45^0$.

Vậy $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$, nghĩa là AO là tia phân giác của góc vuông $\widehat{BAC}$ (đpcm).

Bài 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Vẽ AD là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$.

Lời giải



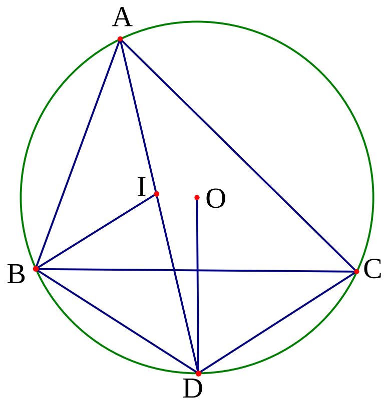
Dựng đường kính AE của đường tròn $(O;R)$.

Ta có $\widehat{AEC}=\widehat{ABD}$ (cùng chắn cung AC)

suy ra $\Delta DBA \sim \Delta CEA$, từ đó suy ra $\widehat{BAD}=\widehat{OAC}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D. Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh $DB=DC=DI$

Lời giải



Ta luôn có $DB=DC$ do AD là phân giác trong góc A. Ta sẽ chứng minh tam giác DIB cân tại D.

Thật vậy ta có: $\widehat{IBD}=\widehat{IBC}+\widehat{CBD}$.

Mặt khác $\widehat{CBD}=\widehat{CAD}$ (Góc nội tiếp chắn cung CD)

mà $\widehat{BAD}=\widehat{CAD}$, $\widehat{IBC}=\widehat{IBA}$ (Tính chất phân giác)

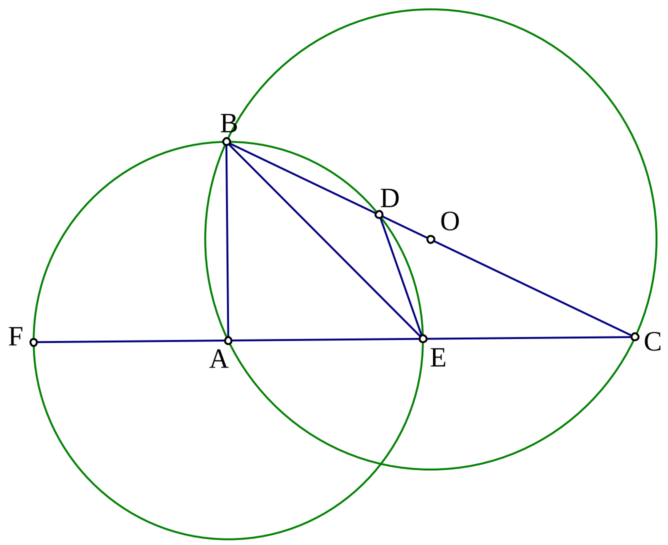
suy ra $\widehat{IBD}=\widehat{ABI}+\widehat{BAI}$.

Nhưng $\widehat{BID}=\widehat{ABI}+\widehat{BAI}$ (Tính chất góc ngoài).

Như vậy tam giác BDI cân tại $D \Rightarrow DB=DI=DC$

Bài 11. Cho tam giác ABC $\left(\widehat{A}=90^0\right)$ và $AB<AC$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E. Chứng minh rằng $DB.CB=EB^2$.

Lời giải



Giả sử CA cắt (O) tại F thì EF là đường kính của $(A;AB)$,

ta có $\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{BE}$ (vì $BA\perp EF$) $\Rightarrow \widehat{BED}=\widehat{BFD},$

$\widehat{BCF}\equiv\widehat{BCE}=\frac{1}{2}sđ\left(\overset{\frown}{BF}-\overset{\frown}{DE}\right)=\frac{1}{2}sđ\left(\overset{\frown}{BE}-\overset{\frown}{DE}\right)=\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BD}=\widehat{BFD}$

Từ đó suy ra $\widehat{BED}=\widehat{ECB}$.

Xét tam giác $\Delta BCE,\Delta BED$ có

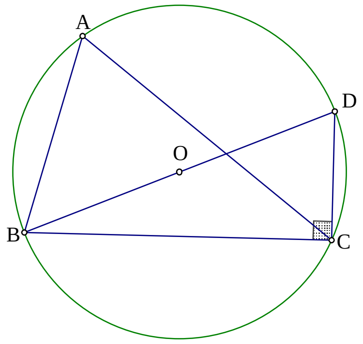
$\widehat{B}$ chung,

$\widehat{BED}=\widehat{ECB}$

$\Rightarrow \Delta BCE\sim\Delta BED \Leftrightarrow \frac{BC}{BE}=\frac{BE}{BD}\Rightarrow DB.CB=EB^2$.

Bài 12. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}$ nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$. Chứng minh rằng: $BC=2R\sin\widehat{BAC}$.

Lời giải



Vẽ đường kính BD của đường tròn $(O;R)$ $\Rightarrow \widehat{BCD}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

ΔBCD có $\widehat{C}=90^0$ nên $BC=BD\sin\widehat{BDC}$.

Ta lại có $BD=2R;\widehat{BDC}=\widehat{BAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$) nên $BC=2R\sin\widehat{BAC}$.

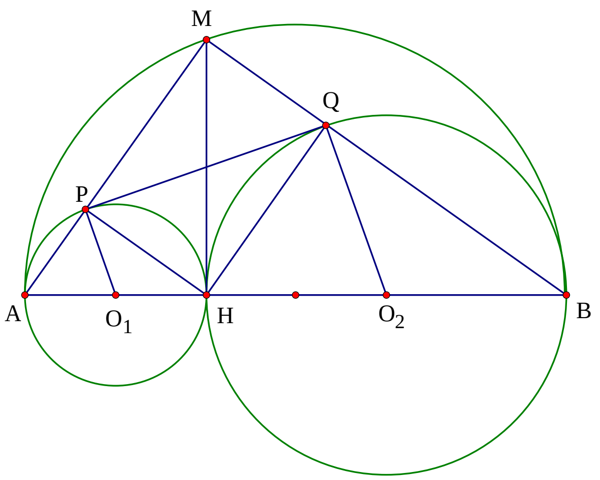
Bài 13. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Lấy M là điểm tùy ý trên nửa đường tròn (M khác A và B). Kẻ MH vuông góc với AB ($H \in AB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) vẽ hai nửa đường tròn tâm O_1, đường kính AH và tâm O_2, đường kính BH. Đoạn MA và MB cắt hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại P và Q.

a) Chứng minh rằng $MH = PQ$.

b) Chứng minh rằng $\Delta MPQ \backsim \Delta MBA$.

c) Chứng minh rằng PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2).

Lời giải



a) Ta có: $MPHQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MH = PQ$

b) Xét các tam giác vuông AHM và BHM ta có: $MP.MA = MQ.MB \Rightarrow \Delta MPQ \sim \Delta MBA(cgc)$

c) $\widehat{PMH} = \widehat{MBH} \Rightarrow \widehat{PQH} = \widehat{O_2QB} \Rightarrow PQ$ là tiếp tuyến của O_2

Chứng minh tương tự ta có PQ là tiếp tuyến của O_1.

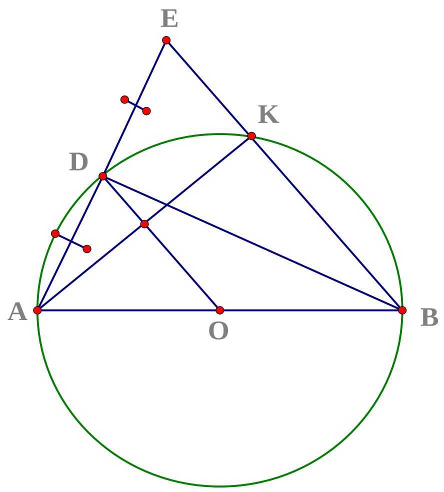
DẠNG 3
CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm D thuộc (O). Gọi E là điểm đối xứng với A qua D.

a) ΔABE là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O), Chứng minh rằng: $OD \perp AK$.

Lời giải



a) $\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \begin{cases} BD \perp AE \\ AD = DE \end{cases} \Rightarrow \Delta ABE$ cân tại B

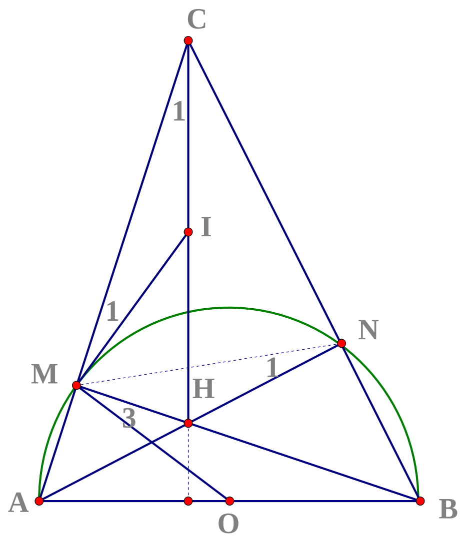
b) $\begin{cases} OD // EB \\ AK \perp EB \end{cases} \Rightarrow OD \perp AK$

Bài 2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và điểm C nằm ngoài nửa đường tròn. CA cắt nửa đường tròn tại M, CB cắt nửa đường tròn tại N. Gọi H là giao điểm của AN và BM.

a) Chứng minh rằng $CH \perp AB$.

b) Gọi I là trung điểm của CH. Chứng minh rằng MI là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .

Lời giải



a) Ta có H là trực tâm của tam giác $\Rightarrow CH \perp AB$

b) Cần chứng minh $MI \perp MO$

Ta có: $C, M, H, N \in \left(I; \dfrac{CH}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{C_1} = \widehat{N_1}\left(= \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{MH}\right)\\ \widehat{N_1} = \widehat{B_1}\left(= \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AM}\right)\\ \widehat{B_1} = \widehat{B_3} (\Delta.can)\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}\widehat{M_1} = \widehat{M_3}\\ \widehat{M_1} + \widehat{IMB} = 90^0\end{array}\right\} \to \widehat{M_3} + \widehat{IMB} = 90^0 \to \widehat{OMI} = 90^0$$

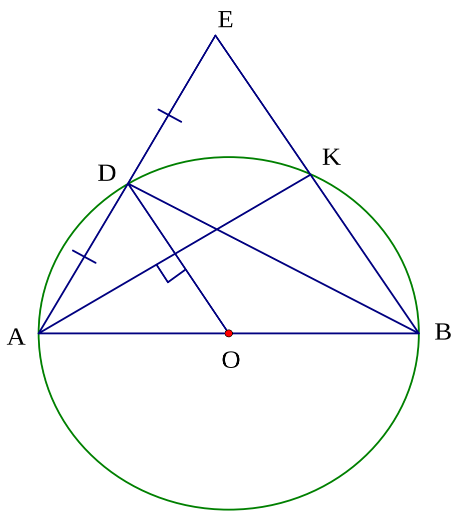
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D.

a) Tam giác ABE là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O). Chứng minh $OD \perp AK$.

Lời giải



a) Xét ΔABE có BD đồng thời là đường cao, đường trung tuyến nên ΔABE cân tại B.

b) Xét ΔABE có OD là đường trung tuyến $\Rightarrow OD//BE$

mà: $AK \perp BE$ ($\widehat{AKB} = 90^0$) $\Rightarrow AK \perp OD$

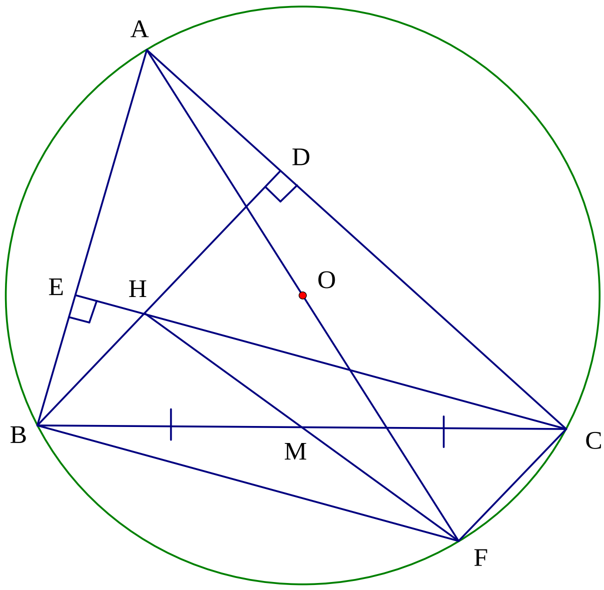
Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AF.

a) Tứ giác $BFCH$ là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh $OM = \frac{1}{2}AH$.

Lời giải



a) Tứ giác $BFCH$ có các cạnh đối song song nên là hình bình hành.

b) Tứ giác $BFCH$ là hình bình hành mà M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của HF $\Rightarrow H, M, F$ thẳng hàng.

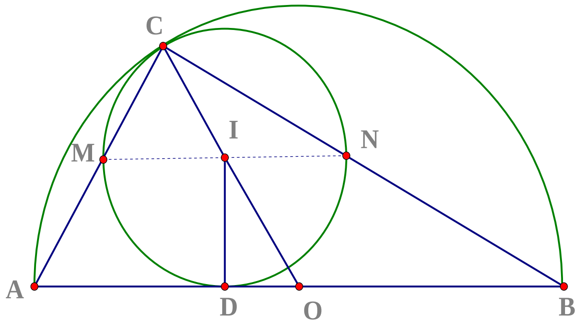
c) Xét ΔAHF có OM là đường trung bình của $\Delta AHF \Rightarrow OM = \frac{1}{2}AH$.

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và điểm C di động trên nửa đường tròn đó. Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đươòng kính AB tại D, đường tròn này cắt CA, CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N.

a) Chứng minh M, N, I thẳng hàng.

b) Chứng minh $ID \perp MN$.

Lời giải



a) $\widehat{ACB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MCN} = 90^0$

Xét (I), có: $\widehat{ACB} = 90^0 \Rightarrow N, M, I$ thẳng hàng

b) Đường tròn (O) và (I) tiếp xúc với nhau tại C nên O, I, C thẳng hàng

$$\left.\begin{matrix} \Delta ICN \rightarrow \widehat{INC} = \widehat{ICN} \\ \Delta OCB \rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \widehat{INC} = \widehat{OBC} \\ dong.vi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} MN // AB \\ ID \perp AB (t.c.tiep.tuyen) \end{matrix}\right\} \Rightarrow ID \perp MN$$

Bài 6. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao BM, CN cắt nhau tại H và cắt đường tròn lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh rằng A là điểm chính giữa cung FE.

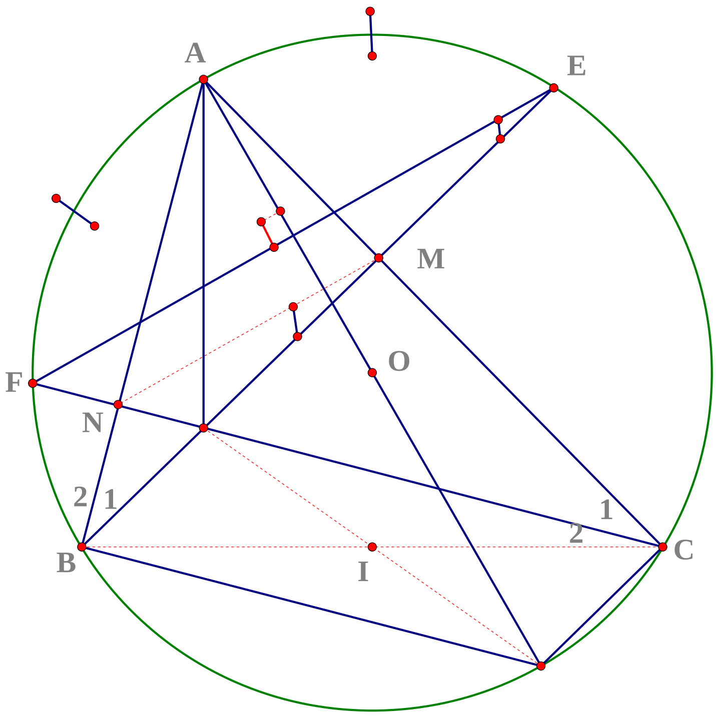
b) Chứng minh rằng $EF // MN$.

c) Chứng minh rằng $OA \perp MN$.

d) Chứng minh rằng AH không đổi khi A di động trên cung lớn BC.

e) Chứng minh rằng F đối xứng với H qua AB.

Lời giải



a) $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (phụ góc $\widehat{BAC}$) $\Rightarrow \overset{\frown}{EA} = \overset{\frown}{FA}$ (chắn bởi hai góc nội tiếp bằng nhau) $\Rightarrow A$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{FE} \Rightarrow OA \perp FE(1)$

b) $\left.\begin{matrix} \widehat{E} = \widehat{C_2} \\ \widehat{NMB} = \widehat{C_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \widehat{E} = \widehat{NMB} \\ d.vi \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN // FE(2)$

$\Rightarrow OA \perp MN$

d) Kẻ đường kính AD và gọi I là trung điểm của BC $\Rightarrow IO \perp BC \equiv I$

Ta có:

$\widehat{ACD} = 90 \Rightarrow \left.\begin{matrix} CD \perp AC \\ BH \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} BH // CD \\ t.tu : CH // BD \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow \lozenge BHCD$ là hình bình hành.

Mà I là trung điểm của BC nên I là trung điểm của HD

+ Xét $\Delta AHD, OI = \frac{1}{2}AH \Leftrightarrow AH = 2OI$ (không đổi)

e) Ta có: $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{FA} \Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{ABE}$ (chắn hai cung bằng nhau)

Xét ΔBHF có BN là đường cao, đường phân giác nên cân tại B $\Rightarrow BN$ là đường trung tuyến $\Rightarrow N$ là trung điểm của FH hay F đối xứng với H qua AB.

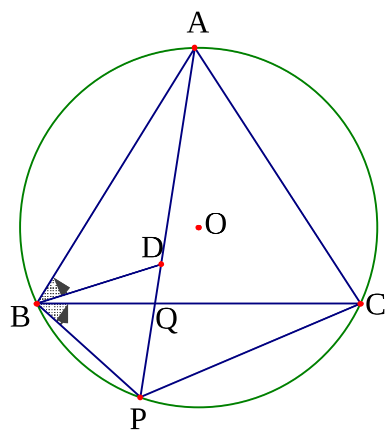
Bài 7. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A ta lấy điểm P bất kỳ (P khác B và P khác C). Các đoạn PA và BC cắt nhau tại Q.

a) Giả sử D là một điểm trên đoạn PA sao cho $PD = PB$. Chứng minh rằng ΔPDB đều.

b) Chứng minh rằng $PA = PB + PC$.

c) Chứng minh hệ thức $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

Lời giải



a) Trước tiên ta nhận thấy rằng tam giác PBD cân tại P.

Mặt khác, $\widehat{BPD} = \widehat{BPA} = \widehat{BCA} = 60^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O)).

Vậy nên tam giác PDB đều.

b) Ta đã có $PB = PD$, vậy để chứng minh $PA = PB + PC$ ta sẽ chứng minh $DA = PC$.

Thật vậy, xét hai tam giác BPC và BDA có: $BA = BC$ (giả thiết), $BD = BP$ (do tam giác BPD đều).

Lại vì $\widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 60^0$, $\widehat{PBC} + \widehat{DBC} = 60^0$ nên $\widehat{ABD} = \widehat{PBC}$.

Từ đó $\Delta BPC = \Delta BDA$ (c.g.c), dẫn đến $DA = PC$ (đpcm).

c) Xét hai tam giác PBQ và PAC ta thấy $\widehat{BPQ} = 60^0$, $\widehat{APC} = \widehat{ABC} = 60^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$) suy ra $\widehat{BPQ} = \widehat{APC}, \widehat{PBQ} = \widehat{PBC} = \widehat{PAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PC}$).

Từ đó $\Delta PBQ \sim \Delta PAC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{PQ}{PB} = \dfrac{PC}{PA}$, hay $PQ.PA = PB.PC$.

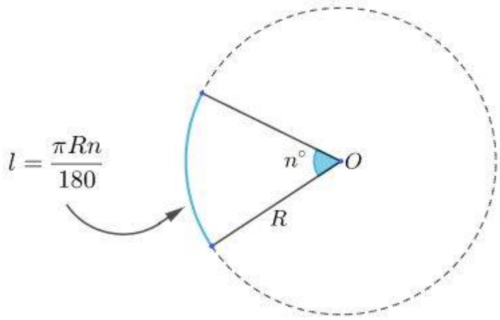
Theo kết quả câu b, ta có $PA = PB + PC$ nên $PQ\left(PB + PC\right) = PB.PC$.

Hệ thức này tương đương với $\dfrac{1}{PQ} = \dfrac{1}{PB} + \dfrac{1}{PC}$ (đpcm).

BÀI 5
ĐỘ DÀI CUNG TRÒN
DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT
DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHĂN

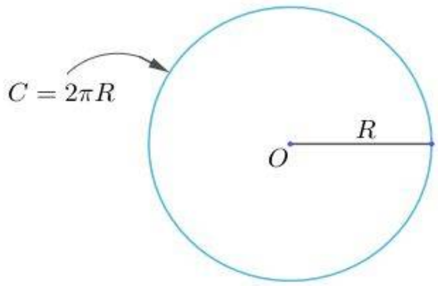
1. Độ dài cung tròn

Trong một đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n^0 được tính theo công thức: $l = \frac{\pi R.n}{180}$.



Chú ý:

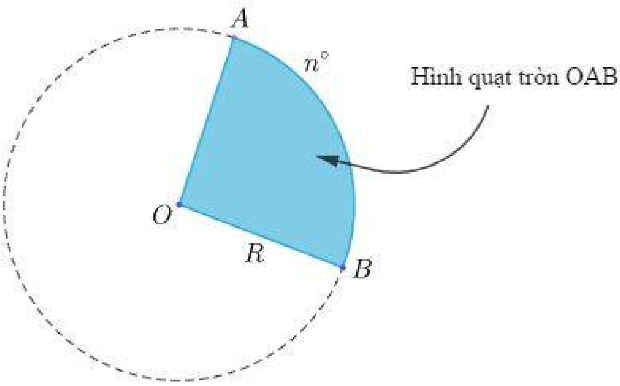
- Chu vi đường tròn đường kính d là $C = \pi d$
- Chu vi đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$



2. Diện tích hình quạt tròn

Hình quạt tròn (hay còn gọi tắt là hình quạt) là một phần hình tròn giới hạn bởi cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó.

Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^0 là: $S = \frac{\pi R^2 n}{360}$

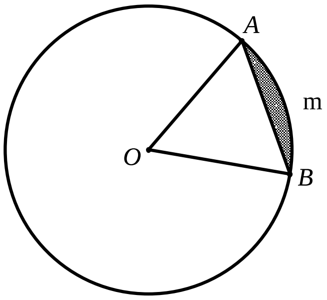


Chú ý:

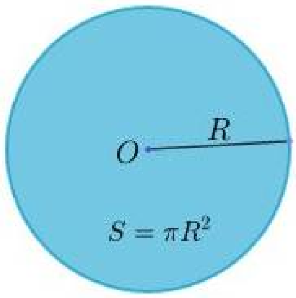
- Gọi l là độ dài cung tròn có số đo n^0 thì diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung có số đo n^0 là:

$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R n}{180} = \frac{l.R}{2}$

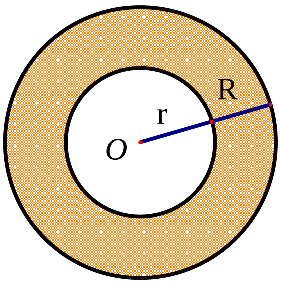
- Hình viên phân là hình giới hạn bởi một cung tròn và dây cung của đường tròn.



- Diện tích của một hình tròn bán kính R là: $S = \pi R^2$



3. Diện tích hình vành khuyên



Hình giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm được gọi là hình vành khuyên.

Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O;R)$ và $(O;r)$ (với $R > r$) có diện tích là:

$$S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

DẠNG 1

TÍNH ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHUYÊN

- Chu vi đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$
- Trong một đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n^0 là: $l = \dfrac{\pi R.n}{180}$.
- Diện tích của một hình tròn bán kính R là: $S = \pi R^2$
- Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^0 là: $S = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$
- Diện tích hình quạt tròn bán kính R, l là độ dài cung tròn có số đo n^0 là: $S = \dfrac{l.R}{2}$
- Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O;R)$ và $(O;r)$ có diện tích là: $S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$

Bài 1. Tính chu vi của đường tròn $(O;R)$ có:

a) bán kính $R = 8cm$.

b) đường kính $24cm$.

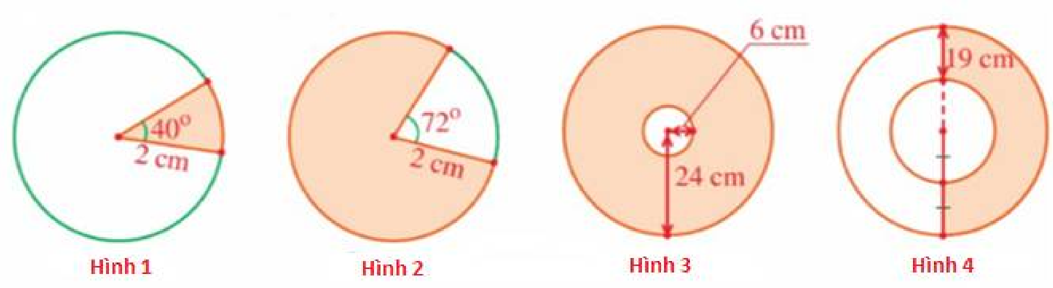
Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$.

a) Tính độ dài cung $70°$ của đường tròn (O) có bán kính $R = 6cm$.

b) Tính độ dài cung $120°$ của đường tròn (O) có đường kính $20cm$.

Bài 3. Tính diện tích của hình vành khuyên đó giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là $2,5cm;\ 2cm$.

Bài 4. Quan sát các hình 1, 2, 3, 4.



a) Tính diện tích phần được tô màu mỗi hình đó.

b) Tính độ dài cung tròn được tô màu xanh ở mỗi hình 1, 2

Bài 5. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 3\sqrt{3}cm$. Điểm $C \in (O)$ sao cho $\widehat{ABC} = 60°$.

a) Tính diện tích hình quạt OBC.

b) Tính diện tích hình viên phân BC (hình viên phân là phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và dây căng cung ấy).

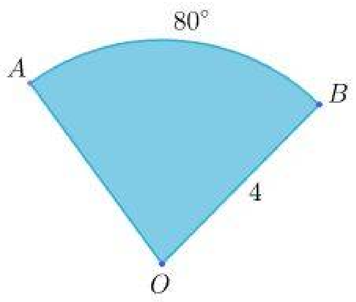
Bài 6. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Độ dài các cung AB, BC, CA đều bằng 6π.

a) Tính R.

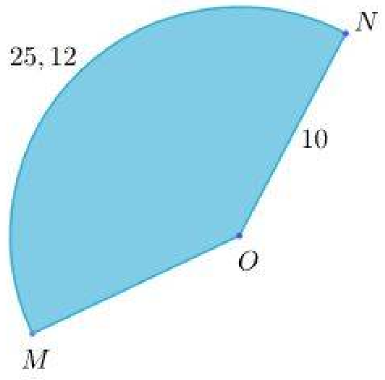
b) Tính Diện tích của tam giác đều ABC.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Tính diện tích hình quạt trong các hình vẽ sau:

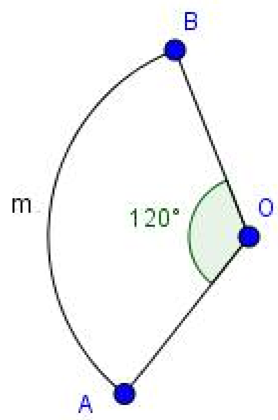


Hình 1

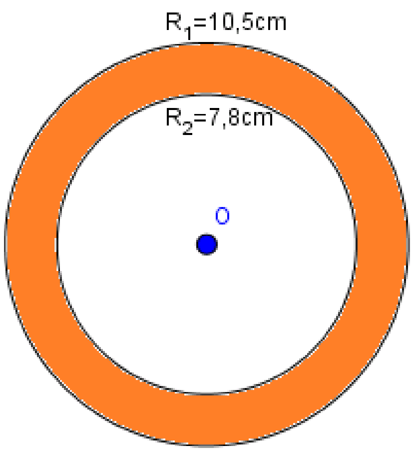


Hình 2

Bài 8. Dựa vào hình vẽ sau, so sánh độ dài cung $\overset{\frown}{AmB}$ và đường gấp khúc AOB.



Bài 9. Dựa vào hình vẽ sau, tính diện hình vành khuyên tạo thành từ hai đường tròn đồng tâm có bán kính R_1, R_2.



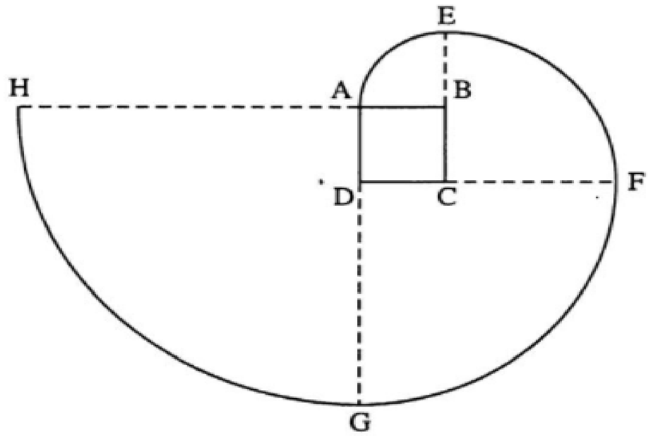
Bài 10. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 4\sqrt{3}cm$. Điểm $C \in (O)$ sao cho $\widehat{ABC} = 30°$. Tính diện tích hình viên phân AC (hình viên phân là phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và dây căng cung ấy).

Bài 11. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M sao cho $OM = 2M$. Từ M vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm).

a) Tính độ dài cung nhỏ AB.

b) Tính diện tích giới hạn bởi hai tiếp tuyến AM, MB và cung nhỏ AB.

Bài 12. Cho hình vẽ:



Biết $ABCD$ là hình vuông cạnh $1cm$. Cung AE tạo từ đường tròn bán kính AB; cung EF tạo từ đường tròn bán kính CE; cung FG tạo từ đường tròn bán kính DF; cung GH tạo từ đường tròn bán kính AG. Tính độ dài đường cong $AEFGH$.

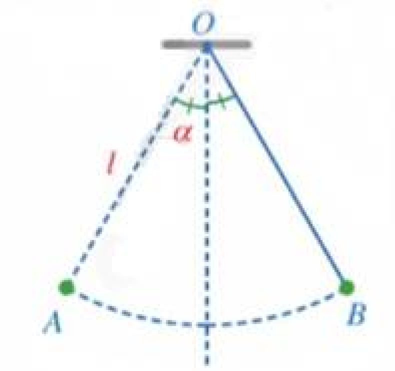
DẠNG 2
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

Bài 1. Hình quạt tô màu đỏ ở hình vẽ bên dưới có bán kính bằng $25(cm)$ và góc ở tâm bằng 150^0.

a) Tính diện tích của hình quạt đó.

b) Tính chiều dài cung tương ứng với hình quạt tròn đó.

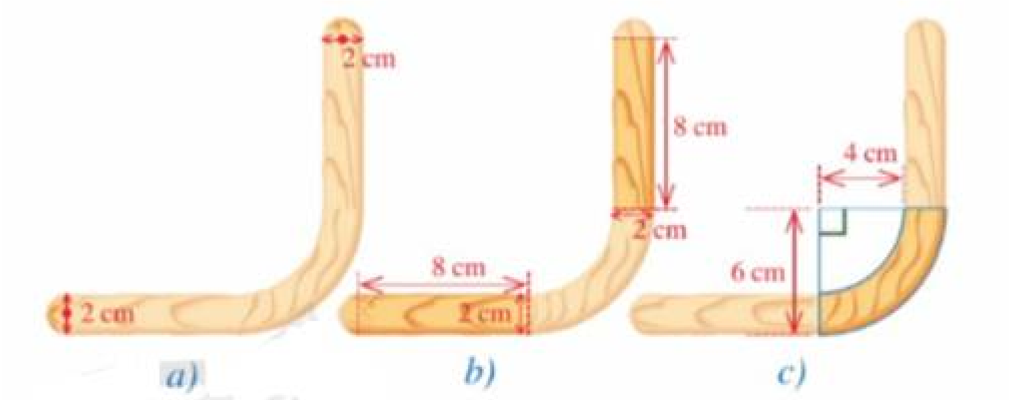
Bài 2. Một con lắc di chuyển từ vị trí A đến vị trí B *(Hình vẽ)*. Tính độ dài quãng đường AB mà con lắc đó đã di chuyển, biết rằng sợi dây OA có độ dài bằng $l = 4(cm)$ và tia OA tạo với phương thẳng đứng góc $\alpha = 12^0$.



Bài 3. Bánh xe (khi bơm căng) của một chiếc xe đạp có đường kính $700mm$. Biết rằng khi giò đĩa quay một vòng thì bánh xe đạp quay được khoảng $3,5$ vòng (hình vẽ). Hỏi chiếc xe đạp di chuyển được quãng đường dài bao nhiêu mét sau khi người đi xe đạp 15 vòng liên tục? lấy $\pi = 3,14$ và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét.

Bài 4. Hình vẽ bên dưới mô tả mặt cắt của chiếc đèn led có dạng hình vành khuyên màu trắng với bán kính các đường tròn lần lượt là $14cm,\ 16cm,\ 18cm,\ 20cm$. Tính diện tích hai hình vành khuyên đó.

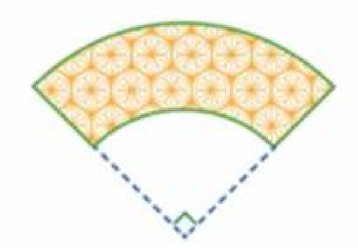
Bài 5. Hình vẽ bên dưới mô tả mặt cắt của một khung gỗ có dạng ghép của năm hình: hai nửa hình tròn đường kính 2 cm; hai hình chữ nhật kích thước 2 cm × 8 cm (*Hình b*); một phần tư hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm có bán kính lần lượt là 4 cm và 6 cm. Tính diện tích của mặt cắt của khung gỗ đó.



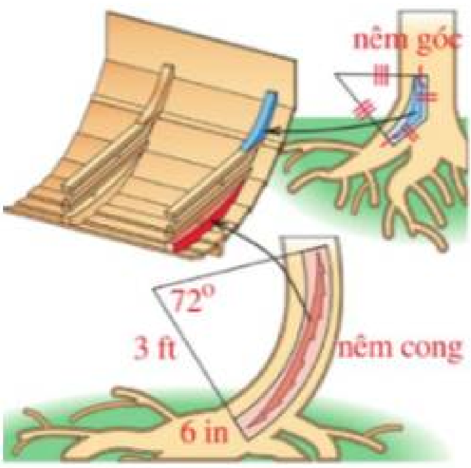
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Mặt đĩa CD ở hình vẽ bên dưới có dạng hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính lần lượt là $1,4cm$ và $6cm$. Hình vành khuyên đó có diện tích bằng bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

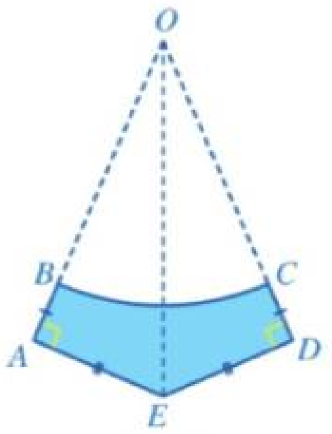
Bài 7. Hình vẽ bên dưới mô tả mảnh vải có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là $40cm$ và $60cm$. Diện tích của mảnh vải đó bằng bao nhiêu centimét vuông ? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimét vuông)



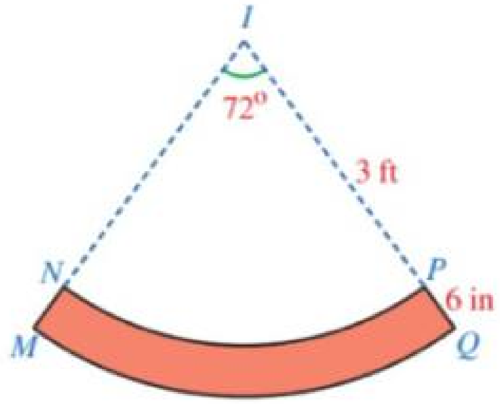
Bài 8. Khi đóng đáy thuyền cho những con thuyền vượt biển, người Vikings sử dụng hai loại nêm: nêm góc và nêm cong (lần lượt tô màu xanh, màu đỏ trong *Hình 1*). Mặt cắt ABCD của nêm góc có dạng hai tam giác vuông OAE, ODE bằng nhau với cạnh huyền chung và bỏ đi hình quạt tròn OBC (*Hình 2*), được làm từ những thân cây mọc thẳng. Mặt cắt MNPQ của nêm cong có dạng một phần của hình vành khuyên (*Hình 3*), được làm từ những thân cây cong. Kích thước của nêm cong được cho như ở *Hình 3*.



Hình 1



Hình 2

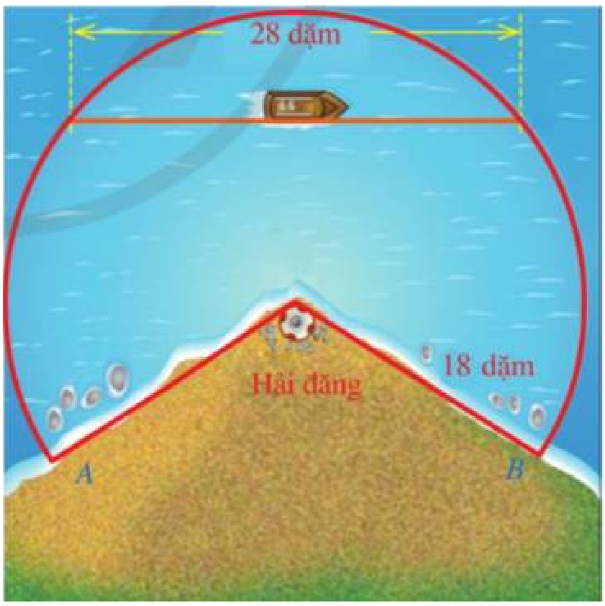


Hình 3

a) Diện tích của nêm cong là bao nhiêu centimét vuông (lấy 1 ft = 30,48 cm, 1 in = 2,54 cm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

b) Cần phải biết những kích thước nào của nêm góc để tính được diện tích của nêm đó?

Bài 9. Hình vẽ bên dưới biểu diễn vùng biển được chiếu sáng bởi một hải đăng có dạng một hình quạt tròn với bán kính 18 dặm, cung AmB có số đo 245°.



a) Hãy tính diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng theo đơn vị kilômét vuông (lấy 1 dặm = 1 609 m và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

b) Giả sử một con thuyền di chuyển dọc theo dây cung có độ dài 28 dặm của đường tròn với tâm là tâm của hình quạt tròn, bán kính là 18 dặm. Tính khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến hải đăng (theo đơn vị dặm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

BÀI 5

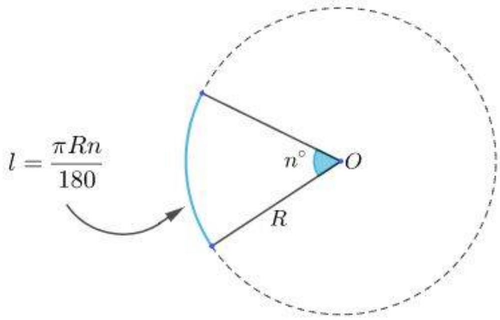
ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT

DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHĂN

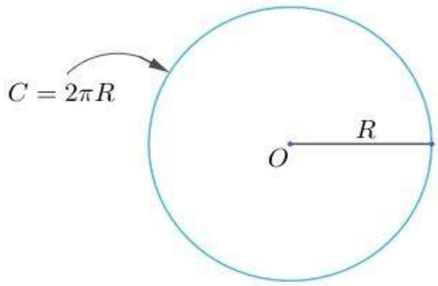
1. Độ dài cung tròn

Trong một đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n^0 được tính theo công thức: $l = \dfrac{\pi R.n}{180}$.



Chú ý:

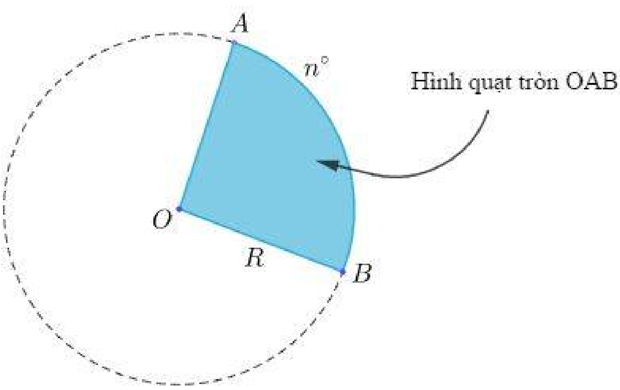
- Chu vi đường tròn đường kính d là $C = \pi d$
- Chu vi đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$



2. Diện tích hình quạt tròn

Hình quạt tròn (hay còn gọi tắt là hình quạt) là một phần hình tròn giới hạn bởi cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó.

Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^0 là: $S = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$

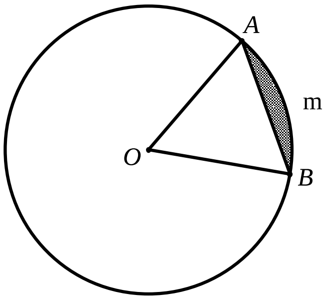


Chú ý:

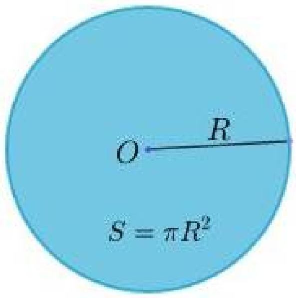
- Gọi l là độ dài cung tròn có số đo n^0 thì diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung có số đo n^0 là:

$S=\dfrac{\pi R^2 n}{360}=\dfrac{\pi R n}{180}=\dfrac{l.R}{2}$

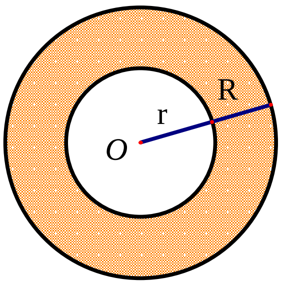
- Hình viên phân là hình giới hạn bởi một cung tròn và dây cung của đường tròn.



- Diện tích của một hình tròn bán kính R là: $S=\pi R^2$



3. Diện tích hình vành khuyên



Hình giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm được gọi là hình vành khuyên.

Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O;R)$ và $(O;r)$ (với $R>r$) có diện tích là:

$$S=\pi\left(R^2-r^2\right)$$

DẠNG 1
TÍNH ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN
TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN
TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHUYÊN

- Chu vi đường tròn bán kính R là $C=2\pi R$
- Trong một đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n^0 là: $l=\dfrac{\pi R.n}{180}$.
- Diện tích của một hình tròn bán kính R là: $S=\pi R^2$
- Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^0 là: $S=\dfrac{\pi R^2 n}{360}$
- Diện tích hình quạt tròn bán kính R, l là độ dài cung tròn có số đo n^0 là: $S=\dfrac{l.R}{2}$
- Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O;R)$ và $(O;r)$ có diện tích là: $S=\pi\left(R^2-r^2\right)$

Bài 1. Tính chu vi của đường tròn $(O;R)$ có:

a) bán kính $R=8cm$.

b) đường kính $24cm$.

Lời giải

a) Chu vi của đường tròn là: $C=2\pi R=2\pi.8=16\pi\,(cm)$

b) Đường tròn $(O;R)$ có đường kính $24cm$ nên có bán kính $R=\dfrac{24}{2}=12cm$.

Do đó, chu vi của đường tròn là: $C=2\pi R=2\pi.12=24\pi\,(cm)$

Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$.

a) Tính độ dài cung 70° của đường tròn (O) có bán kính $R=6cm$.

b) Tính độ dài cung 120° của đường tròn (O) có đường kính $20cm$.

Lời giải

a) độ dài l của cung 70° là: $l=\dfrac{\pi.6.70}{180}=\dfrac{7\pi}{3}(cm)$.

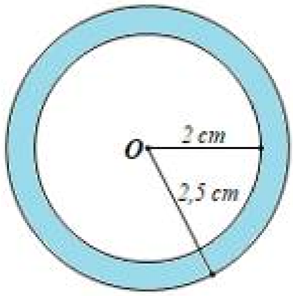
b) Đường tròn $(O;R)$ có đường kính $20cm$ nên có bán kính $R=\dfrac{20}{2}=10cm$.

Do đó, độ dài l của cung 120° là: $l=\dfrac{\pi.10.120}{180}=\dfrac{2\pi}{3}(cm)$.

Bài 3. Tính diện tích của hình vành khuyên đó giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là $2,5cm;\ 2cm$.

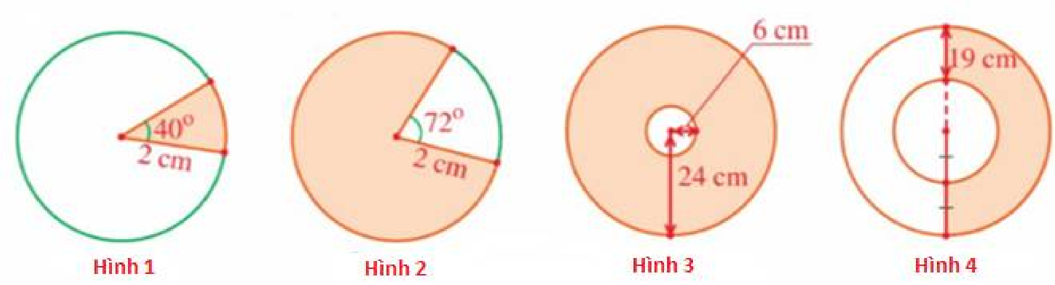
Lời giải

Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm O và có bán kính lần lượt là $2,5cm$; $2cm$ được tô màu xanh như hình vẽ dưới đây:



Diện tích của hình vành khuyên tô màu xanh là: $S=\pi\left(R^2-r^2\right)=\pi\left(2,5^2-2^2\right)=\dfrac{9\pi}{4}\left(cm^2\right)$

Bài 4. Quan sát các hình 1, 2, 3, 4.



a) Tính diện tích phần được tô màu mỗi hình đó.

b) Tính độ dài cung tròn được tô màu xanh ở mỗi hình 1, 2

Lời giải

a)

• Hình 1: Diện tích hình quạt tròn có bán kính 2 cm, số đo cung 40° là: $S=\dfrac{\pi.2^2.40}{360}=\dfrac{4\pi}{9}\left(cm^2\right)$

Vậy diện tích phần được tô màu là: $S=\dfrac{4\pi}{9}\left(cm^2\right)$

• Hình 2: Diện tích hình tròn có bán kính 2 cm là $S_1=\pi.2^2=4\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích hình quạt tròn có bán kính 2 cm, số đo cung 72° là: $S_2=\dfrac{\pi.2^2.72}{360}=\dfrac{4\pi}{5}\left(cm^2\right)$

Vậy diện tích phần được tô màu là: $S=S_1-S_2=4\pi-\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{16\pi}{5}\left(cm^2\right)$

• Hình 3: Diện tích phần được tô màu chính là diện tích hình vành khuyên được giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm bán kính 24 cm và 6 cm, và bằng: $S=\pi\left(24^2-6^2\right)=540\pi\left(cm^2\right)$

• Hình 4: Đường tròn nhỏ bên trong có bán kính là 19 cm. Đường tròn to bên ngoài có bán kính là 2.19 = 38 cm.

Diện tích phần được tô màu chính là nửa diện tích hình vành khuyên được giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm có bán kính 38 cm và 19 cm, và bằng: $S = \frac{1}{2}\pi\left(38^2 - 19^2\right) = \frac{1083\pi}{2}\left(cm^2\right)$

b) Tính độ dài cung tròn theo công thức $l = \frac{\pi R.n}{180}$.

• Hình 1: Số đo cung tròn được tô màu xanh là: 360° – 40° = 320°.

Độ dài cung tròn được tô màu xanh là: $l = \frac{\pi.2.320}{180} = \frac{32\pi}{9}(cm)$

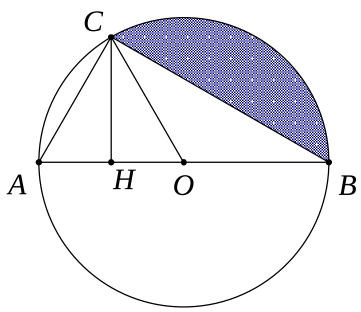
• Hình 2: Độ dài cung tròn được tô màu xanh là: $l = \frac{\pi.2.72}{180} = \frac{4\pi}{5}(cm)$

Bài 5. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 3\sqrt{3}cm$. Điểm $C \in (O)$ sao cho $\widehat{ABC} = 60°$.

a) Tính diện tích hình quạt OBC.

b) Tính diện tích hình viên phân BC (hình viên phân là phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và dây căng cung ấy).

Lời giải



a) Xét đường tròn (O) có: $\widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $\widehat{CAB} = 90^\circ - \widehat{CBA} = 30^\circ$ (tam giác ABC vuông tại C)

$\widehat{ACB}$ và $\widehat{BOC}$ là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\Rightarrow \widehat{BOC} = 2.\widehat{ACB} = 2.30^0 = 60^0$

Diện tích hình quạt OBC là: $S_{quat\ AOC} = \frac{\pi R^2.60}{360} = \frac{\pi R^2}{6}$

b) Xét ΔBOC có $\widehat{BOC} = 60°$ và $OA = OC = R$ nên tam giác AOC đều cạnh bằng R.

Gọi CH là đường cao của tam giác AOC, ta có:

$$CH = CO.\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.R \Rightarrow S_{AOC} = \frac{1}{2}CH.OA = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.R.R = \frac{\sqrt{3}}{4}.R^2.$$

Diện tích hình viên phân BC là:

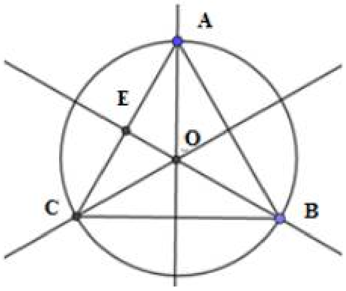
$$S_{quat\ BOC} - S_{\Delta BOC} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.R^2 = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).R^2 = \left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right).\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{18\pi - 27\sqrt{3}}{16}(cm^2)$$

Bài 6. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Độ dài các cung AB, BC, CA đều bằng 6π.

a) Tính R.

b) Tính Diện tích của tam giác đều ABC .

Lời giải



a) Độ dài của các cung AB, BC, CA đều bằng 6π nên ta có chu vi đường tròn $(O;R)$ là

$C = 6\pi + 6\pi + 6\pi = 18\pi$

mà $C = 2\pi R$

hay $18\pi = 2\pi R$

suy ra $R = 9$

b)Ta có $OA = OB = OC = R = 9$

Ta cũng có $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^0$

suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^0$ suy ra $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta AOC} = S_{\Delta BOC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$

Xét tam giác AOC có: $\begin{cases} \widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 30^\circ \\ \widehat{COA} = 120^\circ \end{cases}$

Kẻ đường cao OE , ta có đồng thời là đường trung tuyến, phân giác của góc $\widehat{COA}$

Ta có $\widehat{AOE} = \widehat{COE} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$

Xét tam giác COE có: $\begin{cases} \widehat{ECO} = 30^\circ \\ \widehat{CEO} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow OE = \frac{1}{2} CO = \frac{R}{2}$

Áp dụng định lý Pytago ta có: $CE = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} R$

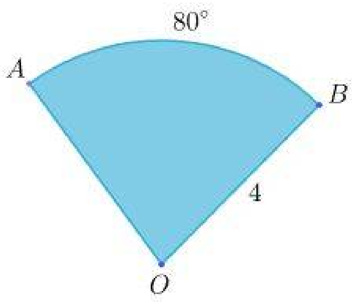
Vậy $S_{COE} = \frac{1}{2} OE.CE = \frac{1}{2}.\frac{R}{2}.\frac{\sqrt{3}R}{2} = \frac{\sqrt{3}R^2}{8}$

Suy ra $S_{COA} = 2S_{COE} = \frac{\sqrt{3}R^2}{4}$

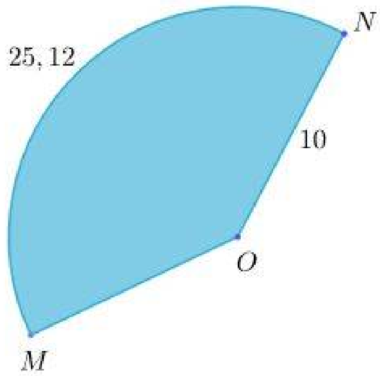
Do đó: $S_{ABC} = 3S_{COA} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}.9^2}{4} = \frac{243\sqrt{3}}{4}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Tính diện tích hình quạt trong các hình vẽ sau:



Hình 1



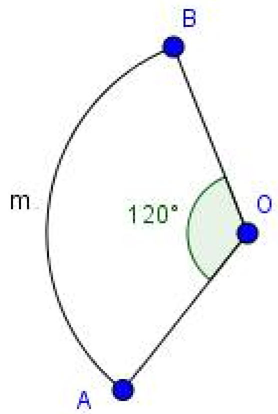
Hình 2

Lời giải

• Hình 1: Diện tích hình quạt OAB là: $S_{quat\ OAB}=\dfrac{\pi.4^2.80}{360}=\dfrac{32\pi}{9}$ (đvdt)

• Hình 2: Diện tích hình quạt OAB là: $S_{quat\ OMN}=\dfrac{l.R}{2}=\dfrac{25,12.10}{2}=125,6$ (đvdt)

Bài 8. Dựa vào hình vẽ sau, so sánh độ dài cung $\overset{\frown}{AmB}$ và đường gấp khúc AOB.



Lời giải

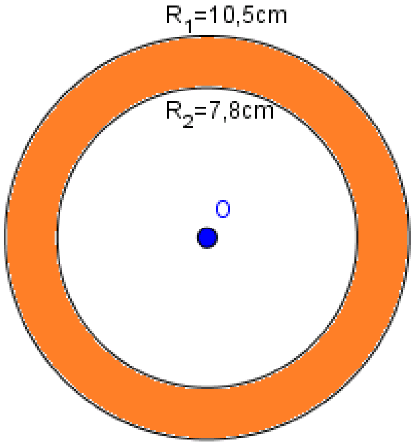
Gọi R là bán kính đường tròn (O), ta có $OA=OB=R$

Do đó, độ dài đường gấp khúc AOB là $OA+OB=2R$

Độ dài cung $\overset{\frown}{AmB}$ là : $l=\dfrac{\pi R.120}{180}=\dfrac{2\pi.R}{3}$

Do $\dfrac{2\pi.R}{3}>2R$ nên độ dài cung $\overset{\frown}{AmB}$ lớn hơn độ dài đường gấp khúc AOB.

Bài 9. Dựa vào hình vẽ sau, tính diện hình vành khuyên tạo thành từ hai đường tròn đồng tâm có bán kính R_1, R_2.

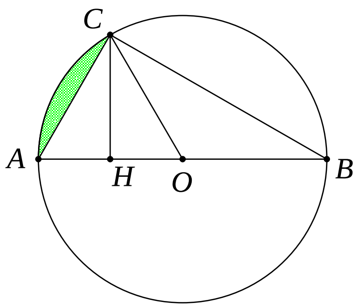


Lời giải

Diện tích của hình vành khuyên là: $S=\pi\left(R^2-r^2\right)=\pi\left(10,5^2-7,8^2\right)=\dfrac{4941\pi}{100}\left(cm^2\right)$

Bài 10. Cho đường tròn (O) đường kính $AB=4\sqrt{3}cm$. Điểm $C\in(O)$ sao cho $\widehat{ABC}=30°$. Tính diện tích hình viên phân AC (hình viên phân là phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và dây căng cung ấy).

Lời giải



Xét đường tròn (O) có: $\widehat{ABC}$ và $\widehat{AOC}$ là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung

$\Rightarrow \widehat{AOC}=2.\widehat{ABC}=2.30^0=60^0 \Rightarrow S_{qAOC}=\dfrac{\pi R^2.60}{360}=\dfrac{\pi R^2}{6}$

Xét ΔAOC có $\widehat{AOC}=60°$ và $OA=OC=R$ nên tam giác AOC đều cạnh bằng R.

Gọi CH là đường cao của tam giác AOC, ta có:

$CH=CO.\sin 60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.R \Rightarrow S_{AOC}=\dfrac{1}{2}CH.OA=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.R.R=\dfrac{\sqrt{3}}{4}.R^2.$

Diện tích hình viên phân AC là: $S_{qAOC}-S_{AOC}=\dfrac{\pi R^2}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}.R^2=\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right).R^2$

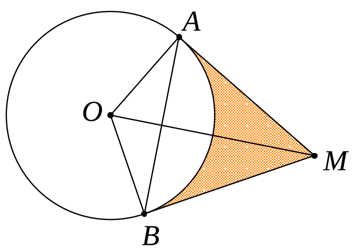
$=\left(\dfrac{2\pi-3\sqrt{3}}{12}\right).\left(2\sqrt{3}\right)^2=2\pi-3\sqrt{3}\,(\text{cm}^2).$

Bài 11. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M sao cho $OM = 2M$. Từ M vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm).

a) Tính độ dài cung nhỏ AB.

b) Tính diện tích giới hạn bởi hai tiếp tuyến AM, MB và cung nhỏ AB.

Lời giải



a) Vì AM là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên AM vuông góc với OA.

Xét tam giác ΔOAM vuông tại A ta có:

$\cos\widehat{AOM} = \dfrac{AO}{MO} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$ (tỉ số lượng giác trong tam giác vuông)

$\Rightarrow \widehat{AOM} = 60^0$.

Mà OM là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{AOB} = 120^0$

Độ dài cung $\overset\frown{AB}$ là: $l = \dfrac{120.\pi R}{180} = \dfrac{2\pi R}{3}(cm)$

b) Xét tam giác ΔOAM vuông tại A ta có:

$AM^2 + AO^2 = OM^2$ (định lý Pythagore)

$AM^2 + R^2 = (2R)^2$

$AM = R\sqrt{3}$

Diện tích tam giác ΔOAM là: $S = \dfrac{1}{2}AM.OA = \dfrac{1}{2}R.\sqrt{3}R = \dfrac{R^2.\sqrt{3}}{2}$ (đơn vị diện tích)

Xét ΔOAM và ΔOBM có:

OM chung

$OA = OB = R$

$MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Do đó $\Delta OAM = \Delta OBM\,(c-c-c)$

$\Rightarrow S_{\Delta AOM} = S_{\Delta BOM} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$

$S_{AMBO} = S_{\Delta AOM} + S_{\Delta BOM} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2} = R^2\sqrt{3}$

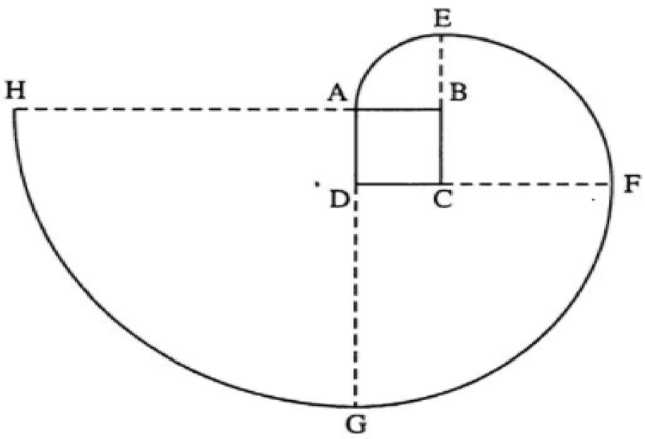
Diện tích quạt tròn $\overset\frown{AB}$ là:

$S_{quat} = \dfrac{\pi R^2.120^0}{360^0} = \dfrac{\pi R^2}{3}$ (đơn vị diện tích)

Diện tích phần giới hạn bởi tiếp tuyến AM, MB và cung nhỏ AB là:

$S = S_{AMBO} - S_{quat} = R^2\sqrt{3} - \dfrac{\pi R^2}{3} = \left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}\right)R^2$ (đơn vị diện tích)

Bài 12. Cho hình vẽ:



Biết $ABCD$ là hình vuông cạnh $1cm$. Cung AE tạo từ đường tròn bán kính AB; cung EF tạo từ đường tròn bán kính CE; cung FG tạo từ đường tròn bán kính DF; cung GH tạo từ đường tròn bán kính AG. Tính độ dài đường cong $AEFGH$.

Lời giải

Đường cong AE là cung của đường tròn bán kính $AB = 1cm$.

Độ dài đường cong AE là: $l_1 = \dfrac{1.90.\pi}{180} = \dfrac{\pi}{2}(cm)$

Đường cong EF là cung của đường tròn bán kính $CE = CB + BE = 1 + 1 = 2cm$

Độ dài đường cong EF là: $l_2 = \dfrac{2.90.\pi}{180} = \pi\,(cm)$

Đường cong FG là cung của đường tròn bán kính $DF = DC + CF = 1 + 2 = 3cm$.

Độ dài đường cong FG là: $l_3 = \dfrac{3.90.\pi}{180} = \dfrac{3\pi}{2}(cm)$

Đường cong GH là cung của đường tròn bán kính $AG = AD + DG = 1 + 3 = 4cm$

Độ dài đường cong GH là: $l_4 = \dfrac{4.90.\pi}{180} = 2\pi\,(cm)$

Độ dài đường cong $AEFGH$ là: $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 5\pi\,(cm)$

DẠNG 2
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

Bài 1. Hình quạt tô màu đỏ ở hình vẽ bên dưới có bán kính bằng $25(cm)$ và góc ở tâm bằng 150^0.

a) Tính diện tích của hình quạt đó.

b) Tính chiều dài cung tương ứng với hình quạt tròn đó.

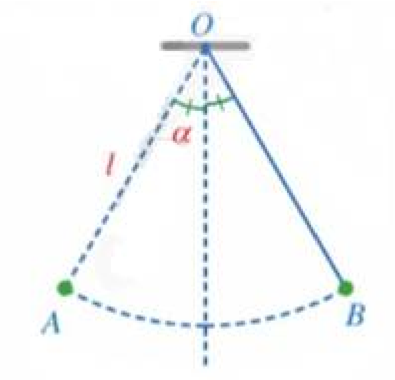
Lời giải

a) Diện tích hình quạt đó là: $S = \dfrac{\pi.25^2.150}{360} = \dfrac{3125\pi}{12}\left(cm^2\right)$

b) Ta có chiều dài cung tương ứng với hình quạt tròn là $S = \dfrac{lR}{2} \Rightarrow l = \dfrac{2S}{R} = \dfrac{2.\dfrac{3125\pi}{12}}{25} = \dfrac{125\pi}{6}(cm)$

Vậy độ dài cung tương ứng với hình quạt tròn đó là: $\dfrac{125\pi}{6}(cm)$.

Bài 2. Một con lắc di chuyển từ vị trí A đến vị trí B *(Hình vẽ)*. Tính độ dài quãng đường AB mà con lắc đó đã di chuyển, biết rằng sợi dây OA có độ dài bằng $l = 4(cm)$ và tia OA tạo với phương thẳng đứng góc $\alpha = 12^0$.



Lời giải

Ta có $\widehat{AOB} = 2.\alpha = 2.12^0 = 24^0$ là số đo của cung AB.

Độ dài quãng đường AB mà con lắc đó đã di chuyển là: $l = \dfrac{\pi R.n}{180} = \dfrac{\pi.4.24}{180} = \dfrac{8\pi}{15}(cm)$

Bài 3. Bánh xe (khi bơm căng) của một chiếc xe đạp có đường kính $700mm$. Biết rằng khi giò đĩa quay một vòng thì bánh xe đạp quay được khoảng $3,5$ vòng (hình vẽ). Hỏi chiếc xe đạp di chuyển được quãng đường dài bao nhiêu mét sau khi người đi xe đạp 15 vòng liên tục? lấy $\pi = 3{,}14$ và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét.

Lời giải

Chu vi của bánh xe là: $C = 700\pi\,(mm)$.

Khi người đi xe đạp 15 vòng thì xe đạp di chuyển được quãng đường bằng:

$S = 700\pi.3{,}5.15 = 115395\,(mm) \approx 115\,(m)$

Vậy chiếc xe đạp di chuyển được quãng đường dài $115\,(m)$ sau khi người đi xe đạp 15 vòng liên tục.

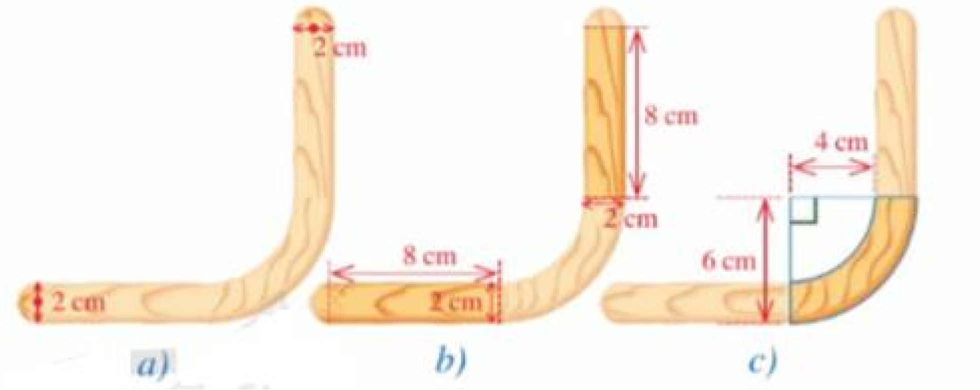
Bài 4. Hình vẽ bên dưới mô tả mặt cắt của chiếc đèn led có dạng hình vành khuyên màu trắng với bán kính các đường tròn lần lượt là $14cm,\ 16cm,\ 18cm,\ 20cm$. Tính diện tích hai hình vành khuyên đó.

Lời giải

Diện tích hình vành khuyên bên trong là: $S_1 = \pi\left(16^2 - 14^2\right) = 60\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích hình vành khuyên bên ngoài là: $S_2 = \pi\left(20^2 - 18^2\right) = 76\pi\left(cm^2\right)$

Bài 5. Hình vẽ bên dưới mô tả mặt cắt của một khung gỗ có dạng ghép của năm hình: hai nửa hình tròn đường kính 2 cm; hai hình chữ nhật kích thước 2 cm × 8 cm (*Hình b*); một phần tư hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm có bán kính lần lượt là 4 cm và 6 cm. Tính diện tích của mặt cắt của khung gỗ đó.



Lời giải

Tổng diện tích hai nửa hình tròn đường kính 2 cm (bán kính 1 cm) chính là diện tích của một hình tròn bán kính 1 cm, và bằng: $S_1 = \pi.1^2 = \pi\left(cm^2\right)$

Tổng diện tích hai hình chữ nhật kích thước 2 cm × 8 cm là: $S_2 = 2.2.8 = 32\left(cm^2\right)$

Diện tích một phần tư hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm có bán kính lần lượt là 4 cm và 6 cm là: $S_3 = \dfrac{1}{4}\pi\left(6^2 - 4^2\right) = 5\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích của mặt cắt của khung gỗ đó là: $S = S_1 + S_2 + S_3 = \pi + 32 + 54 = 32 + 6\pi\left(cm^2\right)$

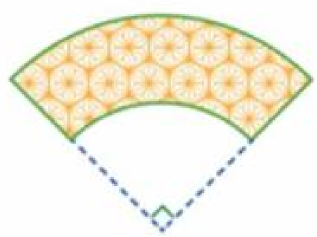
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Mặt đĩa CD ở hình vẽ bên dưới có dạng hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính lần lượt là $1,4cm$ và $6cm$. Hình vành khuyên đó có diện tích bằng bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Diện tích mặt đĩa CD có dạng hình vành khuyên là: $S = \pi\left(6^2 - 1,4^2\right) \approx 107\left(cm^2\right)$

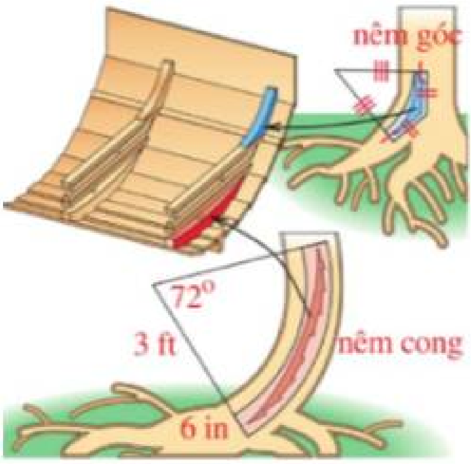
Bài 7. Hình vẽ bên dưới mô tả mảnh vải có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là $40cm$ và $60cm$. Diện tích của mảnh vải đó bằng bao nhiêu centimét vuông ? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimét vuông)



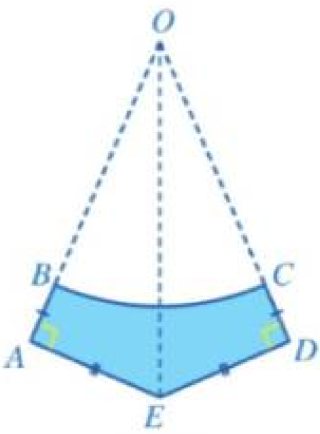
Lời giải

Diện tích mảnh vải có dạng một phần tư hình vành khuyên là: $S = \frac{1}{4}\pi\left(60^2 - 40^2\right) = 2000\pi \approx 6283\left(cm^2\right)$

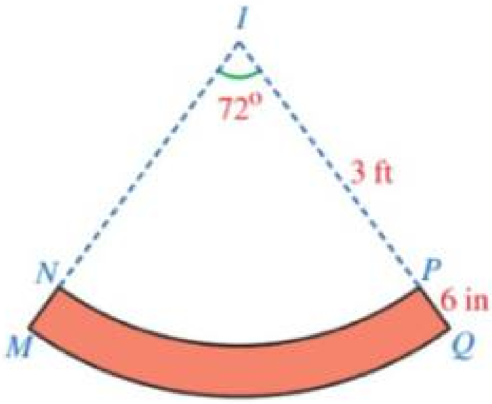
Bài 8. Khi đóng đáy thuyền cho những con thuyền vượt biển, người Vikings sử dụng hai loại nêm: nêm góc và nêm cong (lần lượt tô màu xanh, màu đỏ trong *Hình 1*). Mặt cắt ABCD của nêm góc có dạng hai tam giác vuông OAE, ODE bằng nhau với cạnh huyền chung và bỏ đi hình quạt tròn OBC (*Hình 2*), được làm từ những thân cây mọc thẳng. Mặt cắt MNPQ của nêm cong có dạng một phần của hình vành khuyên (*Hình 3*), được làm từ những thân cây cong. Kích thước của nêm cong được cho như ở *Hình 3*.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

a) Diện tích của nêm cong là bao nhiêu centimét vuông (lấy 1 ft = 30,48 cm, 1 in = 2,54 cm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

b) Cần phải biết những kích thước nào của nêm góc để tính được diện tích của nêm đó?

Lời giải

Đổi 3ft = 91,44 cm; 6 in = 15,24 cm.

a) Bán kính IQ là 91,44 + 15,24 = 106,68 (cm).

Diện tích của nêm cong MNPQ là: S = $\pi(106{,}68^2 - 15{,}24^2) = 11148{,}3648\pi$ (cm^2) ≈ 35 024 (cm^2).

b) Diện tích nêm góc ABCD là:

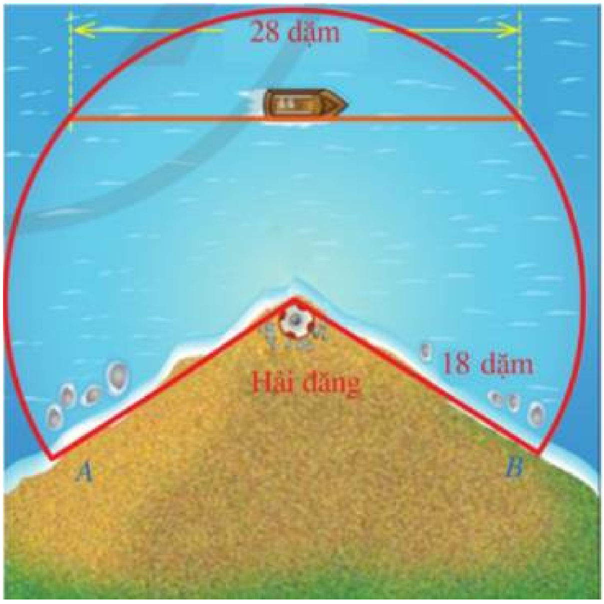
$$S = 2S_{\Delta AOE} - S_{hinhquatOBC} = 2.\frac{1}{2}OA.AE - \frac{\pi.OB^2.sđ\,\overset{\frown}{BC}}{360} = OA.AE - \frac{\pi.OB^2.\widehat{BOC}}{360} = OA.AE - \frac{\pi.OB^2.2\widehat{AOE}}{360}$$

Xét ΔOAE vuông tại A, ta có: $AE = OA.\tan\widehat{AOE}$

Do đó $S = OA.OA.\tan\widehat{AOE} - \frac{\pi.OB^2.2\widehat{AOE}}{360} = OA^2.\tan\widehat{AOE} - \frac{\pi.OB^2.2\widehat{AOE}}{360}$

Vậy để tính được diện tích của nêm góc ABCD, ta cần biết những kích thước: OB, OA và số đo $\widehat{AOE}$.

Bài 9. Hình vẽ bên dưới biểu diễn vùng biển được chiếu sáng bởi một hải đăng có dạng một hình quạt tròn với bán kính 18 dặm, cung AmB có số đo 245°.



a) Hãy tính diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng theo đơn vị kilômét vuông (lấy 1 dặm = 1 609 m và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

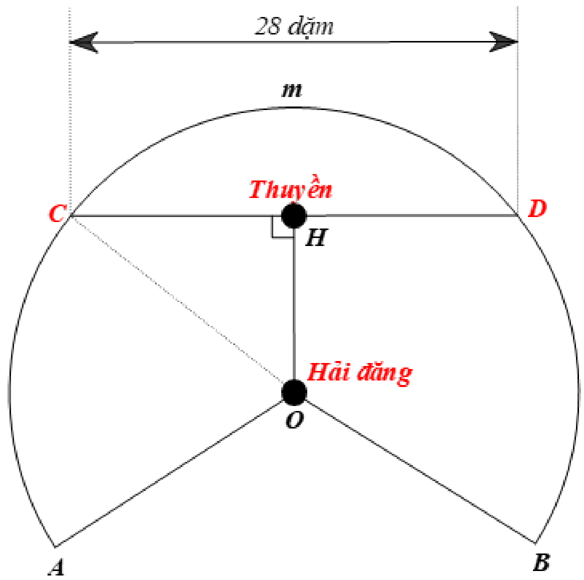
b) Giả sử một con thuyền di chuyển dọc theo dây cung có độ dài 28 dặm của đường tròn với tâm là tâm của hình quạt tròn, bán kính là 18 dặm. Tính khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến hải đăng (theo đơn vị dặm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đổi 1 dặm = 1 609 m = 1,609 km.

a) Diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng là: $S=\dfrac{\pi.(18.1,609)^2.245}{360}\approx 1793\left(km^2\right)$

b) Khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến ngọn hải đăng chính là đoạn thẳng vuông góc OH từ ngọn hải đăng (điểm O) đến dây cung CD được mô tả bởi hình vẽ sau:



Xét đường tròn (O) có OH $\perp$ CD tại H nên H là trung điểm của CD.

Khi đó $CH = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}.28 = 14\left(km^2\right)$ (dặm).

Xét ΔOHC vuông tại H, theo định lí Pythagore, ta có: $OC^2 = OH^2 + CH^2$

Suy ra $OH^2 = OC^2 - CH^2 = 18^2 - 14^2 = 128$.

Do đó $OH = \sqrt{128} \approx 11$ (dặm).

Vậy khoảng cách nhỏ nhất từ thuyền đến ngọn hải đăng khoảng 11 dặm.

CHƯƠNG 5
ĐƯỜNG TRÒN
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tâm của đường trong ngoại tiếp tam giác vuông là:

A. Trung điểm cạnh huyền. **B.** Trung điểm cạnh góc vuông lớn hơn.
C. Giao ba đường cao. **D.** Giao ba đường trung tuyến.

Câu 2. Chọn câu đúng. Bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông

A. Bằng cạnh nhỏ nhất của tam giác vuông. **B.** Bằng nửa cạnh góc vuông lớn hơn.
C. Bằng nửa cạnh huyền. **D.** Bằng $4cm$.

Câu 3. Số tâm đối xứng của đường tròn là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Nên đường tròn có một tâm đối xứng duy nhất là tâm của đường tròn.

Câu 4. Tâm đối xứng của đường tròn là:

A. Điểm bất kì bên trong đường tròn. **B.** Điểm bất kì bên ngoài đường tròn.
C. Điểm bất kì trên đường tròn. **D.** Tâm của đường tròn.

Câu 5. Khẳng định nào sau đây là đúng khi nói về trục đối xứng của đường tròn

A. Đường tròn không có trục đối xứng.
B. Đường tròn có duy nhất một trục đối xứng là đường kính.
C. Đường tròn có hai trục đối xứng là hai đường kính vuông góc với nhau.
D. Đường tròn có vô số trục đối xứng là đường kính.

Câu 6. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là:

A. Giao của ba đường phân giác. **B.** Giao của ba đường trung trực.
C. Giao của ba đường cao. **D.** Giao của ba đường trung tuyến.

Câu 7. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M bất kỳ, biết rằng $OM = R$. Chọn khẳng định đúng?

A. Điểm M nằm ngoài đường tròn. **B.** Điểm M nằm trên đường tròn.
C. Điểm M nằm trong đường tròn. **D.** Điểm M không thuộc đường tròn.

Câu 8. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M bất kỳ, biết rằng $OM > R$. Chọn khẳng định đúng?

A. Điểm M nằm ngoài đường tròn. **B.** Điểm M nằm trên đường tròn.
C. Điểm M nằm trong đường tròn. **D.** Điểm M không thuộc đường tròn.

Câu 9. Cho đường tròn (O) đường kính AB và dây CD không đi qua tâm. Khẳng định nào sau đây là **đúng?**

A. $AB > CD$. **B.** $AB = CD$. **C.** $AB < CD$. **D.** $AB \le CD$.

Câu 10. Xét dây AB tuỳ ý không đi qua tâm của đường tròn $(O;R)$. Nhận định nào sau đây đúng?

A. $AB < R$. **B.** $AB = R$. **C.** $AB \le 2R$. **D.** $AB < 2R$.

Câu 11. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. Đoạn thẳng nối hai điểm tuỳ ý của một đường tròn gọi là một dây cung của đường tròn.

B. Mỗi dây đi qua tâm là một đường kính của đường tròn.

C. Khi dây AB không là đường kính của đường tròn tâm $(O;R)$ thì $AB \le 2R$.

D. Khi dây AB là đường kính của đường tròn tâm O bán kính R, ta có $AB = AO + OB = 2R$.

Câu 12. Đường thẳng và đường tròn có nhiều nhất bao nhiêu điểm chung.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 13. Nếu đường thẳng và đường tròn có duy nhất một điểm chung thì:

A. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn. **B.** Đường thẳng cắt đường tròn.

C. Đường thẳng không cắt đường tròn. **D.** Tất cả đều đúng.

Câu 14. Nếu đường thẳng và đường tròn có hai điểm chung thì

A. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn. **B.** Đường thẳng cắt đường tròn.

C. Đường thẳng không cắt đường tròn. **D.** Đáp án khác.

Câu 15. Nếu đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A thì:

A. $d // OA$. **B.** $d \equiv OA$. **C.** $d \perp OA$ tại A. **D.** $d \perp OA$ tại O.

Câu 16. Cho đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng a. Kẻ $OH \perp a$, biết $OH > R$ khi đó đường thẳng a và đường tròn (O) như thế nào với nhau?

A. Cắt nhau. **B.** Không cắt nhau. **C.** Tiếp xúc. **D.** Đáp án khác.

Câu 17. Cho đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng a. Kẻ $OH \perp a$ tại H, biết $OH < R$, khi đó đường thẳng a và đường tròn (O) như thế nào với nhau?

A. Cắt nhau. **B.** Không cắt nhau. **C.** Tiếp xúc. **D.** Đáp án khác.

Câu 18. Cho hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm. Chọn khẳng định sai?

A. Khoảng cách từ điểm đó đến hai tiếp điểm là bằng nhau.

B. Tia nối điểm đó tới tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính.

C. Tia nối từ tâm tới điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính.

D. Tia nối từ điểm đó tới tâm là tia phân giác của góc tạo bởi tiếp tuyến.

Câu 19. "Cho hai tiếp tuyến của một đường trong cắt nhau tại một điểm. Tia nối từ điểm đó tới tâm là tia phân giác của góc tạo bởi … . Tia nối từ tâm tới điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi …". Hai cụm từ thích hợp vào chỗ trống lần lượt là:

A. Hai tiếp tuyến, hai bán kính đi qua tiếp điểm.

B. Hai bán kính đi qua tiếp điểm, hai tiếp tuyến.

C. Hai tiếp tuyến, hai dây cung.

D. Hai dây cung, hai bán kính.

Câu 20. Mỗi một tam giác có bao nhiêu đường tròn bàng tiếp?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 21. Tâm đường tròn bàng tiếp tam giác là:

A. Giao ba đường trung tuyến.

B. Giao ba đường phân giác trong của tam giác.

C. Giao của 1 đường phân giác góc trong và hai đường phân giác góc ngoài của tam giác.

D. Giao ba đường trung trực.

Câu 22. Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì số điểm chung của hai đường tròn là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 23. Nếu hai đường tròn không cắt nhau thì số điểm chung của hai đường tròn là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 24. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ với $R>r$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt và $OO'=d$. Chọn khẳng định đúng?

A. $d=R-r$. **B.** $d>R+r$. **C.** $R-r<d<R+r$. **D.** $d<R-r$.

Câu 25. Chọn khẳng định đúng. Góc ở tâm là góc

A. Có đỉnh nằm trên đường tròn.

B. Có đỉnh trùng với tâm đường tròn.

C. Có hai cạnh là hai đường kính của đường tròn.

D. Có đỉnh nằm trên bán kính của đường tròn.

Câu 26. Chọn khẳng định đúng. Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là:

A. Góc ở tâm. **B.** Góc tạo bởi hai bán kính.

C. Góc bên ngoài đường tròn. **D.** Góc bên trong đường tròn.

Câu 27. Chọn khẳng định đúng. Trong một đường tròn, số đo cung nhỏ bằng:

A. Số đo cung lớn. **B.** Số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

C. Số đo của góc ở tâm chắn cung lớn. **D.** Số đo của cung nửa đường tròn.

Câu 28. Chọn khẳng định đúng. Trong một đường tròn, số đo cung lớn bằng

A. Số đo cung nhỏ.

B. Hiệu giữa $360°$ và số đo của cung nhỏ (có chung 2 mút với cung lớn).

C. Tổng giữa $360°$ và số đo của cung nhỏ (có chung 2 mút với cung lớn).

D. Số đo của cung nửa đường tròn.

Câu 29. Trong hai cung của một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau, cung nào nhỏ hơn

A. Có số đo lớn hơn. **B.** Có số đó nhỏ hơn $90°$.

C. Có số đo lớn hơn $90°$. **D.** Có số đo nhỏ hơn.

Câu 30. Chọn câu đúng. Trong hai cung của một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

A. Hai cung bằng nhau nếu chúng đều là cung nhỏ.

B. Hai cung bằng nhau nếu chúng số đo nhỏ hơn $90°$.

C. Hai cung bằng nhau nếu chúng đều là cung lớn.

D. Hai cung bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

Câu 31. Góc nội tiếp nhỏ hơn hoặc bằng $90°$ có số đo

A. Bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.

B. Bằng số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

C. Bằng số đo cung bị chắn.

D. Bằng nửa số đo cung lớn.

Câu 32. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn bằng bao nhiêu độ?

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $120°$.

Câu 33. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

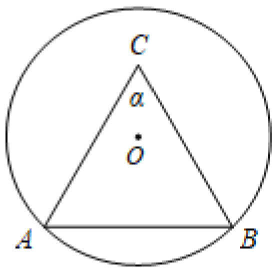
A. Trong một đường tròn, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

B. Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau.

C. Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp cùng chắn cung một cung thì bằng nhau.

D. Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau thì cùng chắn một cung.

Câu 34. Cho đường tròn (O) và góc $\alpha = \widehat{ACB}$ như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây đúng?

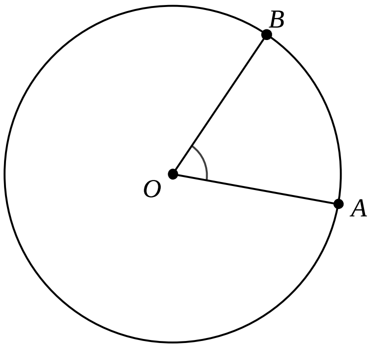
A. $\alpha = \frac{1}{2} sđ \overset{\frown}{AB}$.

B. α là góc nội tiếp của đường tròn (O).

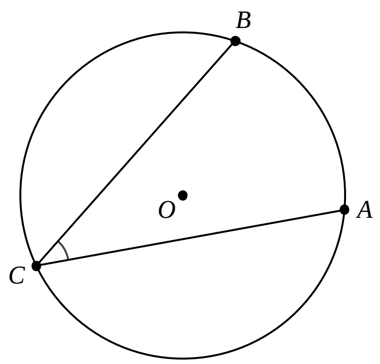
C. α không phải là góc nội tiếp của đường tròn (O).

D. Tất cả đều sai.

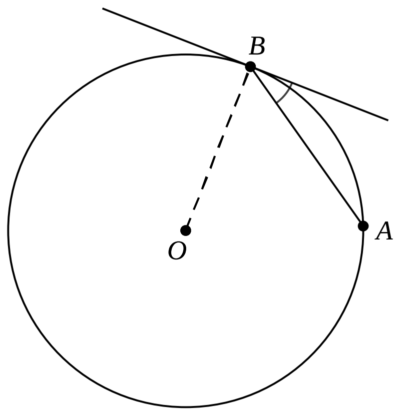
Câu 35. Hình nào dưới đây biểu diễn góc nội tiếp của đường tròn (O)?



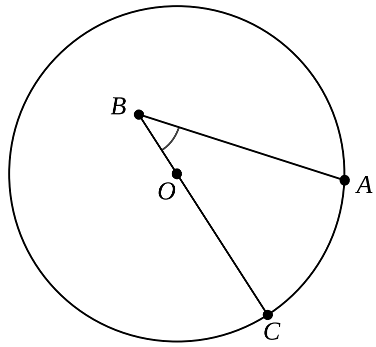
Hình 1



Hình 2



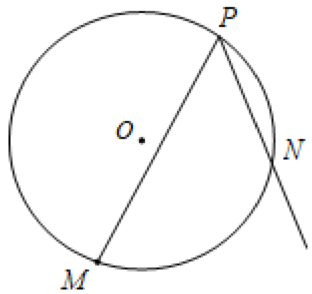
Hình 3



Hình 4

A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

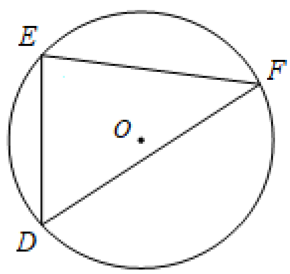
Câu 36. Cho đường tròn (O) và ba điểm M, N, P nằm trên đường tròn (O) như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây đúng?

A. $\widehat{MPN} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{MN}$. **B.** $\widehat{MPN} = sđ\,\overset{\frown}{MN}$. **C.** $\widehat{MPN} = 2sđ\,\overset{\frown}{MN}$. **D.** Tất cả đều sai.

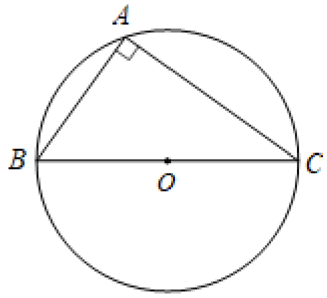
Câu 37. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác DEF như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây sai?

A. $\widehat{DEF} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{DF}$. **B.** $\widehat{EDF} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{EF}$. **C.** $\widehat{DFE} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{DE}$. **D.** $\widehat{DEF} = \widehat{EDF}$.

Câu 38. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây sai?

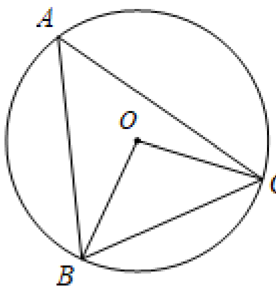
A. $\widehat{ABC} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{AC}$.

B. $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{AB}$.

C. $\widehat{BAC}$ không phải là góc nội tiếp của đường tròn (O).

D. $sđ\,\overset{\frown}{BC} = 180^\circ$.

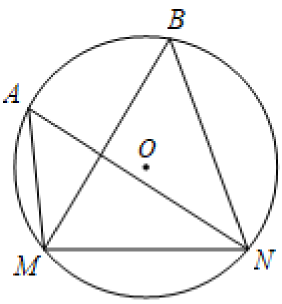
Câu 39. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây sai?

A. $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{BC}$. **B.** $\widehat{BAC} = \widehat{BOC}$. **C.** $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$. **D.** $\widehat{BOC} = sđ\,\overset{\frown}{BC}$.

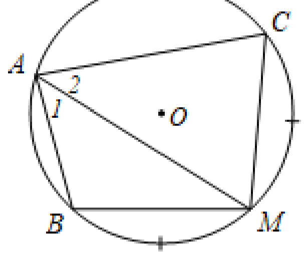
Câu 40. Cho đường tròn (O) như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây đúng?

A. $\widehat{MAN} = sđ\,\overset{\frown}{MN}$. **B.** $\widehat{MAN} = \widehat{MBN}$. **C.** $\widehat{MBN} = sđ\,\overset{\frown}{MN}$. **D.** Tất cả đều sai..

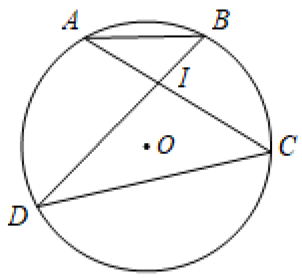
Câu 41. Cho đường tròn (O) và $sđ\,\overset{\frown}{BM} = sđ\,\overset{\frown}{CM}$ như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây đúng?

A. $\widehat{A_1} = 2sđ\,\overset{\frown}{BM}$. **B.** $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. **C.** $\widehat{A_2} = 2sđ\,\overset{\frown}{CM}$. **D.** Tất cả đều sai..

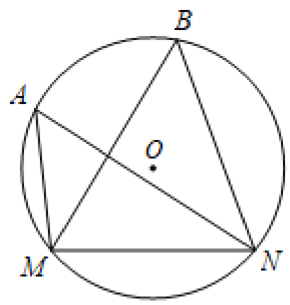
Câu 42. Cho đường tròn (O) như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây sai?

A. $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. **B.** $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$. **C.** $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{BC}$. **D.** Tất cả đều sai.

Câu 43. Cho đường tròn (O) như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây sai?

A. $\widehat{MAN} = \frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{MN}$. **B.** $\widehat{MNN} = \frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{MN}$. **C.** $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$. **D.** Tất cả đều sai.

Câu 44. Trên đường tròn $(O;5\text{cm})$ lấy hai điểm A và B. Khi đó

A. $AB < 5\text{cm}$. **B.** $AB = 5\text{cm}$. **C.** $AB \le 10\text{cm}$. **D.** $AB < 10\text{cm}$.

Câu 45. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đi qua cả bốn đỉnh của hình vuông $ABCD$ cạnh a.

A. Tâm là giao điểm A và bán kính $R = a\sqrt{2}$.

B. Tâm là giao điểm hai đường chéo và bán kính $R = a\sqrt{2}$.

C. Tâm là giao điểm hai đường chéo và bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. Tâm là điểm B và bán kính là $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 46. Tính bán kính R của đường tròn đi qua cả bốn đỉnh của hình vuông $ABCD$ cạnh $3cm$.

A. $R = 3\sqrt{2}\,cm$. **B.** $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}cm$. **C.** $R = 3cm$. **D.** $R = \frac{3\sqrt{3}}{2}cm$.

Câu 47. Cho tam giác ABC có các đường cao BD, CE. Biết rằng bốn điểm B, E, D, C cùng nằm trên một đường tròn. Chỉ rõ tâm và bán kính của đường tròn đó.

A. Tâm là trọng tâm tam giác ABC và bán kính $R = \frac{2}{3}AI$ với I là trung điểm của BC.

B. Tâm là trung điểm AB và bán kính là $R=\frac{AB}{2}$.

C. Tâm là giao điểm của BD và EC, bán kính là $R=\frac{BD}{2}$.

D. Tâm là trung điểm BC và bán kính là $R=\frac{BC}{2}$.

Câu 48. Cho tam giác ABC có các đường cao BD,CE. Chọn khẳng định đúng.

A. Bốn điểm B,E,D,C cùng nằm trên một đường tròn.

B. Năm điểm A,B,E,D,C cùng nằm trên một đường tròn.

C. Cả A, B đều sai.

D. Cả A, B đều đúng.

Câu 49. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, xác định vị trí tương đối của điểm $A(-1;-1)$ và đường tròn tâm là gốc toạ độ O, bán kính $R=2$.

A. Điểm A nằm ngoài đường tròn. **B.** Điểm A nằm trên đường tròn.

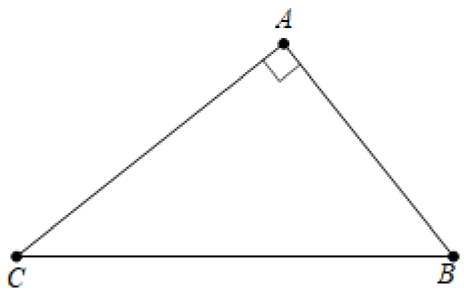
C. Điểm A nằm trong đường tròn. **D.** Không kết luận được.

Câu 50. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, xác định vị trí tương đối của điểm $A(-3;-4)$ và đường tròn tâm là gốc toạ độ O, bán kính $R=3$.

A. Điểm A nằm ngoài đường tròn. **B.** Điểm A nằm trên đường tròn.

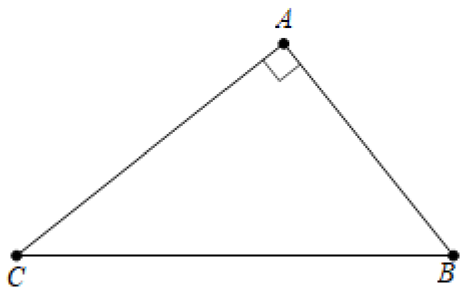
C. Điểm A nằm trong đường tròn. **D.** Không kết luận được.

Câu 51. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC=20\,cm$. Hỏi bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu ?



A. $20cm$. **B.** $10cm$. **C.** $40cm$. **D.** $30cm$.

Câu 52. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB=5cm; AC=12cm$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

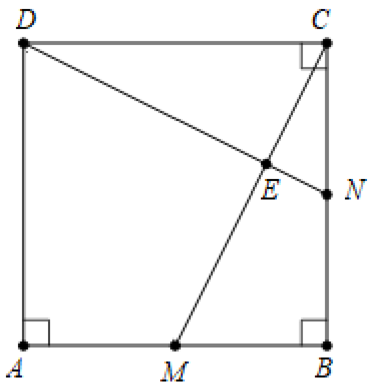


A. $R = 26cm$. **B.** $R = 13cm$. **C.** $R = \frac{13}{2}cm$. **D.** $R = 6cm$.

Câu 53. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12cm, BC = 5cm$. Tính bán kính R của đường tròn đi qua bốn đỉnh A, B, C, D.

A. $R = 7,5cm$. **B.** $R = 13cm$. **C.** $R = 6cm$. **D.** $R = 6,5cm$.

Câu 54. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Gọi E là giao điểm của CM và DN.



Tâm của đường tròn đi qua bốn điểm A, D, E, M là:

A. Trung điểm của DM. **B.** Trung điểm của DB.

C. Trung điểm của DE. **D.** Trung điểm của DA.

Câu 55. Cho hai đường tròn $(O;\ 5\,cm)$ và $(O';2\,cm)$ và đoạn thẳng $OO' = 3\,cm$. Nhận xét nào sau đây đúng?

A. Đường tròn (O) và đường tròn (O') cắt nhau tại hai điểm.

B. Đường tròn (O) và đường tròn (O') không cắt nhau.

C. Đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc ngoài với nhau.

D. Đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc trong với nhau.

Câu 56. Cho hai đường tròn $(O;\ 3\,cm)$ và $(O';\ 2\,cm)$ và đoạn thẳng $OO' = 5\,cm$. Nhận xét nào sau đây đúng?

A. Đường tròn (O) và đường tròn (O') cắt nhau tại hai điểm.

B. Đường tròn (O) và đường tròn (O') không cắt nhau.

C. Đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc ngoài với nhau.

D. Đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc trong với nhau.

Câu 57. Cho đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng a. d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a. Điền vào các vị trí (1); (2) trong bảng sau

R	d	**Vị trí tương đối của đường thẳng a và đường tròn $(O;R)$**
$5cm$	$4cm$	$\ldots(1)\ldots$
$8cm$	$\ldots(2)\ldots$	Tiếp xúc nhau

A. (1): cắt nhau; (2): $8cm$.
B. (1): $9cm$; (2): Tiếp xúc nhau.
C. (1): không cắt nhau; (2): $8cm$.
D. (1): cắt nhau; (2): $6cm$.

Câu 58. Cho đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng a. d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a. Điền vào các vị trí (1); (2) trong bảng sau

R	d	**Vị trí tương đối của đường thẳng a và đường tròn $(O;R)$**
$3cm$	$5cm$	$\ldots(1)\ldots$
$\ldots(2)\ldots$	$9cm$	Tiếp xúc nhau

A. (1): cắt nhau; (2): $9cm$.
B. (1): tiếp xúc nhau; (2): $8cm$.
C. (1): không cắt nhau; (2): $9cm$.
D. (1): không cắt nhau; (2): $10cm$.

Câu 59. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(4;5)$. Hãy xác định tương đối của đường tròn $(A;5)$ và các trục toạ độ.

A. Trục hoành cắt đường tròn và trục tung tiếp xúc với đường tròn.
B. Trục tung cắt đường tròn và trục hoành tiếp xúc với đường tròn.
C. Cả hai trục toạ độ đều cắt đường tròn.
D. Cả hai trục toạ độ đều tiếp xúc với đường tròn.

Câu 60. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(-2;3)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn $(A;2)$ và các trục toạ độ.

A. Trục tung cắt đường tròn và trục hoành tiếp xúc với đường tròn.
B. Trục hoành không cắt đường tròn và trục tung tiếp xúc với đường tròn.
C. Cả hai trục toạ độ đều cắt đường tròn.
D. Cả hai trục toạ độ đều tiếp xúc với đường tròn.

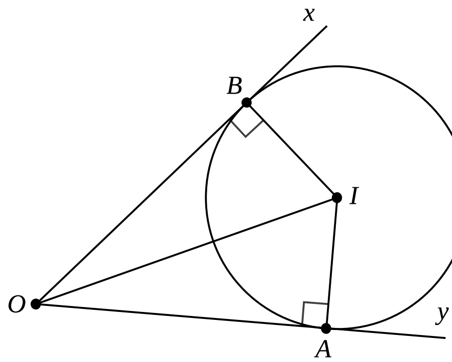
Câu 61. Cho $a;b$ là hai đường thẳng song song và cách nhau một khoảng $3cm$. Lấy điểm I trên a và vẽ đường tròn $(I;3,5cm)$. Khi đó đường tròn với đường thẳng b.

A. Cắt nhau. **B.** Không cắt nhau. **C.** Tiếp xúc. **D.** Đáp án khác.

Câu 62. Cho $a;b$ là hai đường thẳng song song và cách nhau một khoảng $2,5cm$. Lấy điểm I trên a và vẽ đường tròn $(I;2,5cm)$. Khi đó đường tròn với đường thẳng b.

A. Cắt nhau. **B.** Không cắt nhau. **C.** Tiếp xúc. **D.** Đáp án khác.

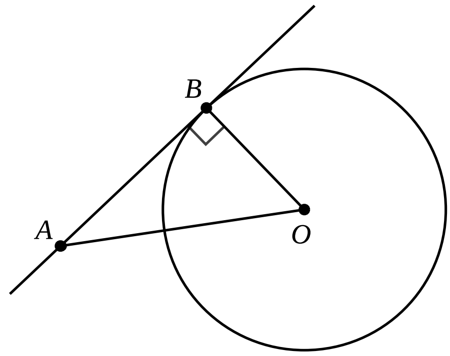
Câu 63. Cho góc $\widehat{xOy}$ $\left(0^\circ < \widehat{xOy} < 180^\circ\right)$. Đường tròn (I) là đường tròn tiếp xúc với cả hai đường thẳng $Ox;Oy$. Khi đó điểm I chạy trên đường nào?



A. Đường thẳng vuông góc với Ox tại O. **B.** Tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

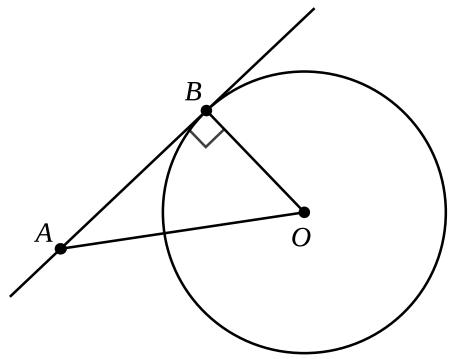
C. Tia Oz nằm giữa Ox và Oy. **D.** Tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ trừ điểm O.

Câu 64. Cho đường tròn tâm O bán kính $3cm$ và một điểm A cách O là $5cm$. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (B là tiếp điểm). Tính độ dài AB.



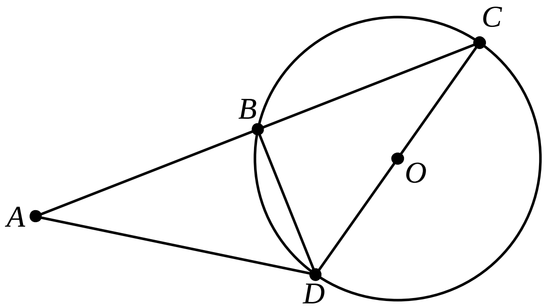
A. $AB = 4cm$. **B.** $AB = 5cm$. **C.** $AB = 8cm$. **D.** $AB = 10cm$.

Câu 65. Cho đường tròn tâm O bán kính $6cm$ và một điểm A cách O là $10cm$. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (B là tiếp điểm). Tính độ dài AB.



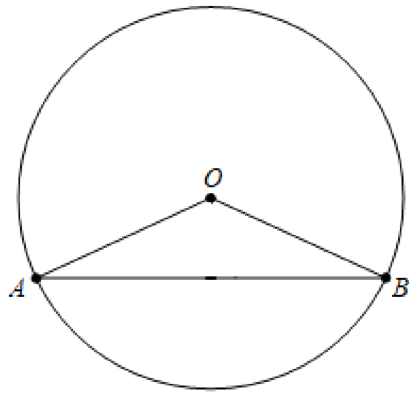
A. $AB = 5cm$. **B.** $AB = 4cm$. **C.** $AB = 6cm$. **D.** $AB = 8cm$.

Câu 66. Cho đường tròn $(O;R)$. Cát tuyến qua A ở ngoài (O) cắt (O) tại B và C. Cho biết $AB = BC$ và kẻ đường kính COD. Tính độ dài đoạn thẳng AD.



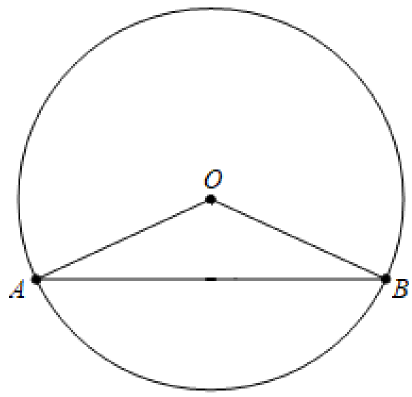
A. $AD = R$. **B.** $AD = 3R$. **C.** $AD = \dfrac{R}{2}$. **D.** $AD = 2R$.

Câu 67. Cho đường tròn (O) có bán kính $R = 5cm$. Khoảng cách từ tâm O đến dây AB là $3cm$. Tính độ dài dây AB.



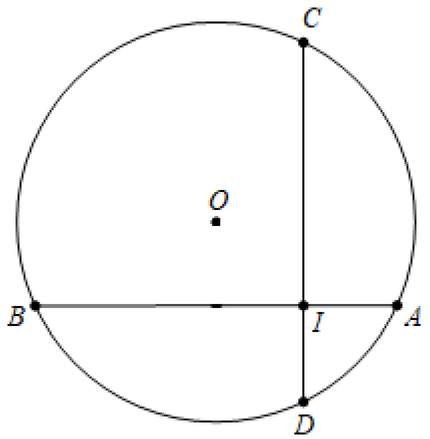
A. $AB = 6cm$. **B.** $AB = 8cm$. **C.** $AB = 10cm$. **D.** $AB = 12cm$.

Câu 68. Cho đường tròn (O) có bán kính $R = 6,5cm$. Khoảng cách từ tâm O đến dây AB là $2,5cm$. Tính độ dài dây AB.



A. $AB = 12cm$. **B.** $AB = 10cm$. **C.** $AB = 8cm$. **D.** $AB = 6cm$.

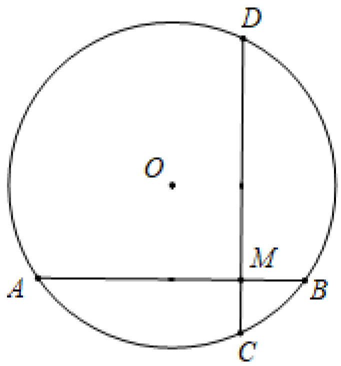
Câu 69. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Biết $IA = 2cm; IB = 4cm$.



Tổng khoảng cách từ tâm O dây AB, CD là:

A. $4cm$. **B.** $3cm$. **C.** $2cm$. **D.** $1cm$.

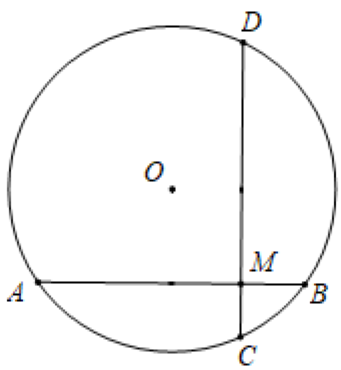
Câu 70. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai dây AB, CD vuông góc với nhau ở M. Biết $AB = 16cm$; $CD = 12cm; MC = 2cm$.



Khoảng cách từ tâm O đến dây AB là:

A. $5cm$. **B.** $4cm$. **C.** $3cm$. **D.** $2cm$.

Câu 71. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai dây AB, CD vuông góc với nhau ở M. Biết $AB = 14cm$; $CD = 12cm; MC = 2cm$.



Bán kính R và khoảng cách từ tâm O đến dây CD lần lượt là

A. $\sqrt{29}\,cm; \sqrt{65}\,cm$. **B.** $\sqrt{65}\,cm; \sqrt{29}\,cm$. **C.** $9cm; \sqrt{29}\,cm$. **D.** $\sqrt{29}\,cm; 9cm$.

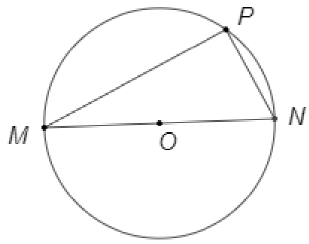
Câu 72. Cho đường tròn (O) có hai dây AB, CD không đi qua tâm. Biết rằng khoảng cách từ tâm đến hai dây là bằng nhau. Kết luận nào sau đây là **đúng?**

A. $AB > CD$. **B.** $AB = CD$. **C.** $AB < CD$. **D.** $AB // CD$.

Câu 73. Cho đường tròn (O) có hai dây AB, CD không đi qua tâm. Biết rằng khoảng cách từ tâm đến dây AB lớn hơn khoảng cách từ tâm O đến dây CD. Kết luận nào sau đây là **đúng?**

A. $AB > CD$. **B.** $AB = CD$. **C.** $AB < CD$. **D.** $AB // CD$.

Câu 74. Cho đường tròn đường kính MN. Với P là một điểm bất kì (khác M và N) nằm trên đường tròn.

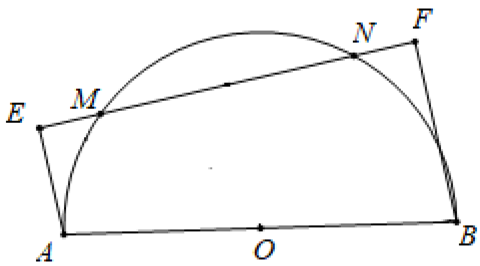


Kết luận nào sau đây đúng?

A. $MP + NP < MN$. **B.** $MP - NP \geq MN$.

C. $MN < MP + NP \leq 2MN$. **D.** $MN < MP + NP < 2MN$.

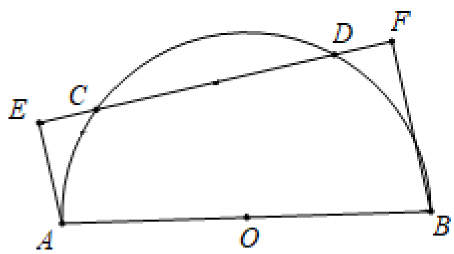
Câu 75. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và một dây MN. Kẻ AE và BF vuông góc với MN lần lượt tại E và F.



Kết luận nào sau đây đúng?

A. $OE = \frac{3}{2}OF$. **B.** $OE = OF$. **C.** $OE > OF$. **D.** $OE < OF$.

Câu 76. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và một dây CD. Kẻ AE và BF vuông góc với CD lần lượt tại E và F. So sánh độ dài CE và DF.

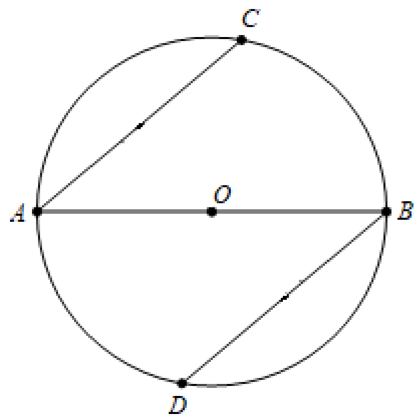


A. $CE > DF$. **B.** $CE = \frac{3}{2}DF$. **C.** $CE = DF$. **D.** $CE < DF$.

Câu 77. Cho đường tròn (O), đường kính AB. Kẻ hai dây AC và BD song song. So sánh độ dài AC và BD.

A. $AC = BD$. **B.** $AC < BD$. **C.** $AC > BD$. **D.** $AC = 2BD$.

Câu 78. Cho đường tròn (O), đường kính AB. Lấy điểm C là trung điểm đoạn OB. Kẻ dây MN qua C và dây $AD//MN$. So sánh độ dài AD và MN.



A. $AD = 2MN$. **B.** $AD = MN$. **C.** $AD < MN$. **D.** $AD > MN$.

Câu 79. Cho đường tròn $(O;8cm)$. Dây AB và CD song song, có độ dài lần lượt là $14cm$ và $10cm$. Tính khoảng cách giữa hai dây

A. $2\sqrt{15}\,(cm)$. **B.** $\sqrt{39}+\sqrt{15}\,(cm)$. **C.** $\dfrac{\sqrt{39}+\sqrt{15}}{2}(cm)$. **D.** $2\sqrt{39}\,(cm)$.

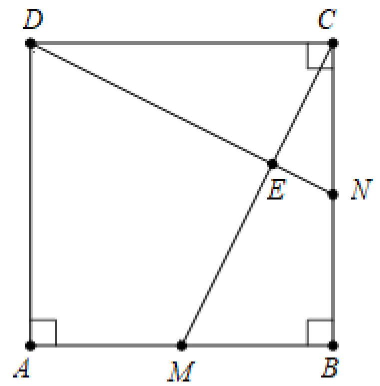
Câu 80. Cho tam giác ABC nhọn và có các đường cao BD, CE. So sánh BC và DE.

A. $BC = DE$. **B.** $BC = \dfrac{2}{3}DE$. **C.** $BC > DE$. **D.** $BC < DE$.

Câu 81. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 14cm$, dây CD có độ dài $12cm$ vuông góc với AB tại H nằm giữa O và B. Độ dài HA là:

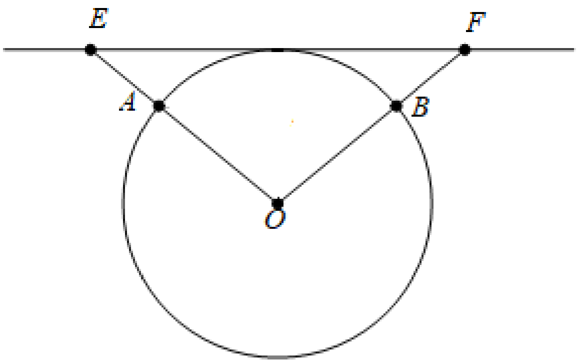
A. $\sqrt{13}cm$. **B.** $14+\sqrt{13}\,cm$. **C.** $7+\sqrt{13}\,cm$. **D.** $7+2\sqrt{13}\,cm$.

Câu 82. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Gọi E là giao điểm của CM và DN. So sánh AE và DM.



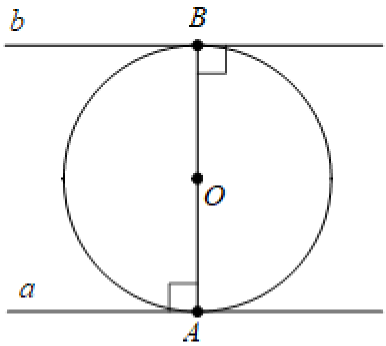
A. $AM = \dfrac{3}{2}AE$. **B.** $DM < AE$. **C.** $DM = AE$. **D.** $DM > AE$.

Câu 83. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $AB = 1,2R$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, cắt các tia OA, OB lần lượt tại E và F. Tính diện tích tam giác OEF theo R.



A. $S_{OEF} = 0,75R^2$. **B.** $S_{OEF} = 1,5R^2$. **C.** $S_{OEF} = 0,8R^2$. **D.** $S_{OEF} = 1,75R^2$.

Câu 84. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau, cách nhau một khoảng là $6cm$. Một đường tròn (O) tiếp xúc với a và b.



Hỏi tâm O di động trên đường nào?

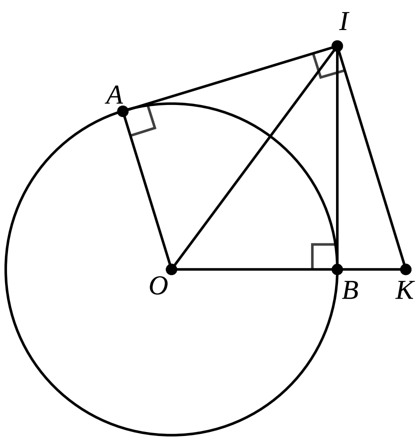
A. Tâm O di động trên đường thẳng song song và cách đều a,b một khoảng $4cm$.

B. Tâm O di động trên đường thẳng song song và cách đều a,b một khoảng $6cm$.

C. Tâm O di động trên đường thẳng đi qua O vuông góc với a,b.

D. Tâm O di động trên đường thẳng song song và cách đều a,b một khoảng $3cm$.

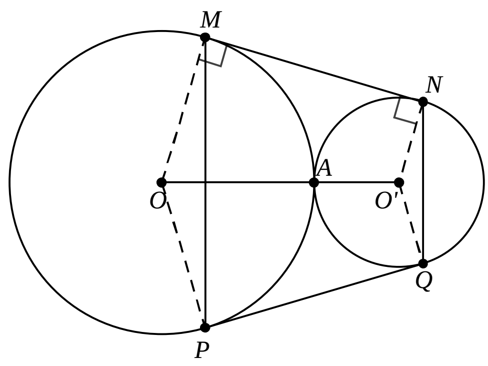
Câu 85. Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại I. Đường thẳng qua I và vuông góc với IA cắt OB tại K.



Chọn khẳng định **đúng.**

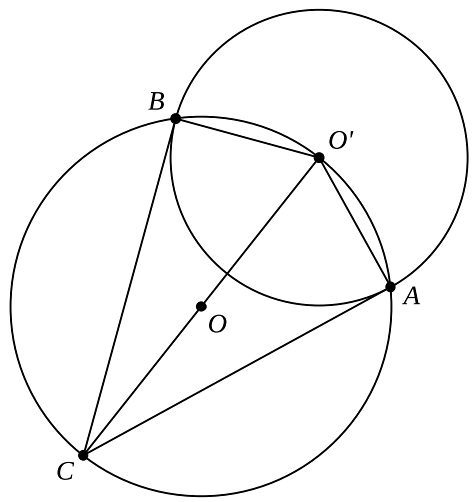
A. $OI = OK = KI$. **B.** $KI = KO$. **C.** $OI = OK$. **D.** $OI = IK$.

Câu 86. Cho hai đường tròn $(O);(O')$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với $M \in (O); N \in (O')$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua OO' và Q là điểm đối xứng với N qua OO'. Khi đó, tứ giác $MNQP$ là hình gì?



A. Hình thang. **B.** Hình thang cân. **C.** Hình thang vuông. **D.** Hình bình hành.

Câu 87. Cho hai đường tròn $(O);(O')$ cắt nhau tại A, B trong đó $O' \in (O)$. Kẻ đường kính $O'C$ của đường tròn (O).

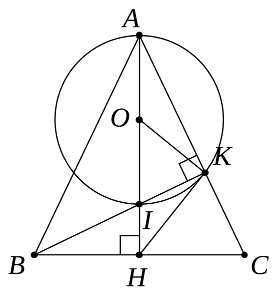


Chọn khẳng định sai?

A. $AC = CB$. **B.** $\widehat{CBO'} = 90°$.

C. CA, CB là hai cát tuyến của (O'). **D.** CA, CB là hai tiếp tuyến của (O').

Câu 88. Cho tam giác ABC cân tại A. Các đường cao AH và BK cắt nhau ở I, vẽ đường tròn tâm O đường kính AI.

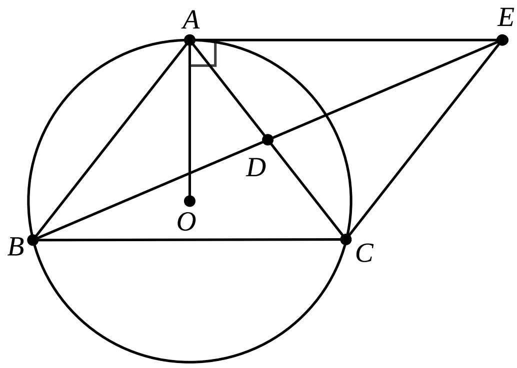


Chọn khẳng định **đúng.**

A. BK là tiếp tuyến của (O). **B.** BC là tiếp tuyến của (O).

C. AC là tiếp tuyến của (O). **D.** HK là tiếp tuyến của (O).

Câu 89. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là trung điểm cạnh AC, tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BD tại E.



Chọn khẳng định **đúng.**

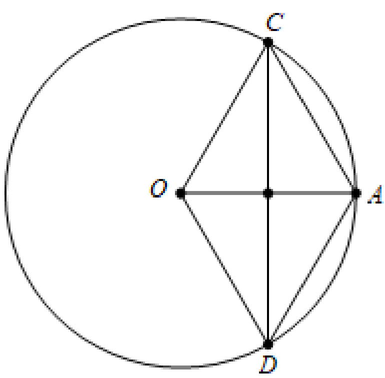
A. $AE//OB$ và tứ giác $ABCE$ là hình bình hành.

B. $AE//BC$ và tứ giác $ABCE$ là hình bình hành.

C. $AE//BC$ và tứ giác $ABCE$ là hình thoi.

D. $AE//OB$ và tứ giác $ABCE$ là hình thoi.

Câu 90. Cho đường tròn (O), bán kính OA. Dây CD là đường trung trực của OA.



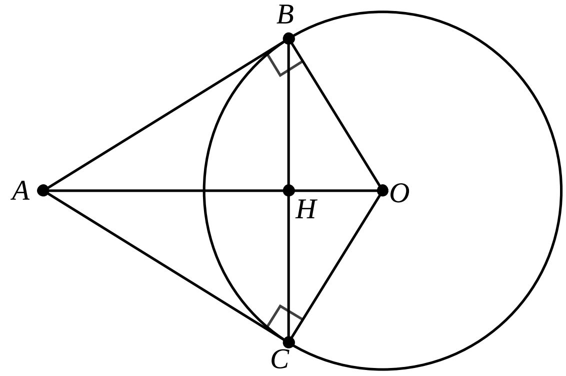
a) Tứ giác $OCAD$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình thoi. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình thang cân.

b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại C, tiếp tuyến này cắt đường thẳng OA tại I. Biết $OA = R$. Tính CI theo R.

A. $2R$. **B.** $CI = R$. **C.** $CI = R\sqrt{2}$. **D.** $CI = R\sqrt{3}$.

Câu 91. Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại A. Gọi H là giao của BC với AO.



a) Chọn khẳng định **sai**?

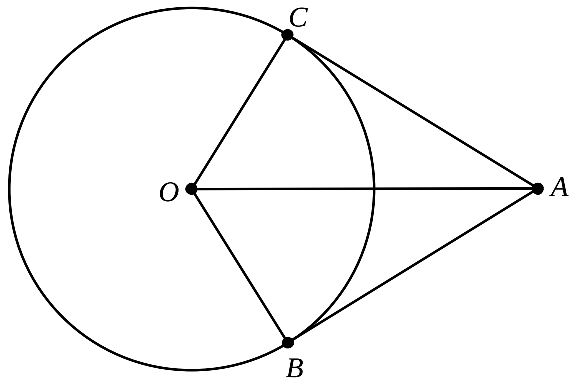
A. $OA \perp BC$.   **B.** OA là đường trung trực của BC.

C. $AB = AC$.   **D.** $OA \perp BC$ tại trung điểm của AO.

b) Vẽ đường kính CD của (O). Khi đó:

A. $BD//OA$.   **B.** $BD//AC$.   **C.** $BD \perp OA$.   **D.** BD cắt OA.

Câu 92. Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại A. Biết $OB = 3cm; OA = 5cm$.



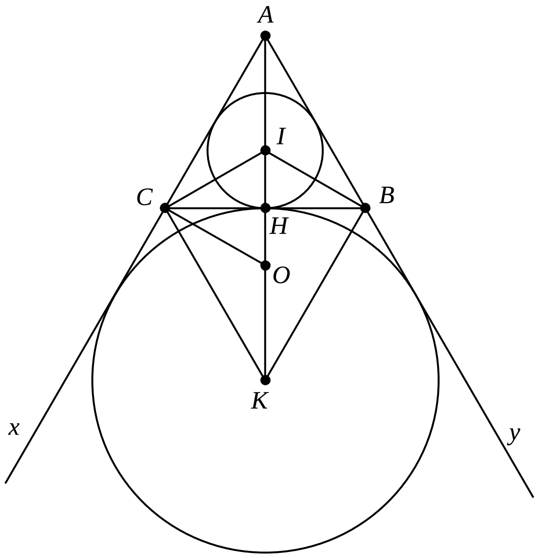
a) Chọn khẳng định sai?

A. $AC = AB = 4cm$.   **B.** $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$.   **C.** $\sin \widehat{OBA} = \frac{4}{5}$.   **D.** $\sin \widehat{OCA} = \frac{3}{5}$.

b) Vẽ đường kính CD của (O). Tính BD.

A. $BD = 2cm$.   **B.** $BD = 3,6cm$.   **C.** $BD = 1,8cm$.   **D.** $BD = 4cm$.

Câu 93. Cho tam giác ABC cân tại A, I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A. Gọi O là trung điểm của IK và H là giao điểm của BC với AI.



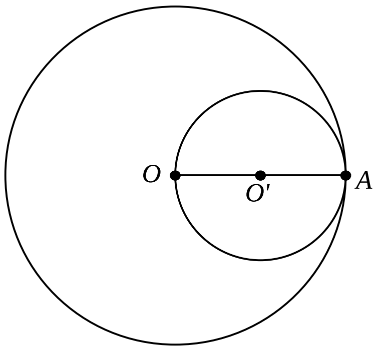
a) Tâm của đường tròn đi qua bốn điểm B, I, C, K là:

A. Điểm O. **B.** Điểm H. **C.** Trung điểm AK. **D.** Trung điểm BK.

b) Tính bán kính đường tròn đi qua bốn điểm B, I, C, K biết $AB = AC = 20cm$; $BC = 24cm$

A. $14\,cm$. **B.** $12\,cm$. **C.** $15\,cm$. **D.** $16\,cm$.

Câu 94. Cho đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn (O') đường kính OA.



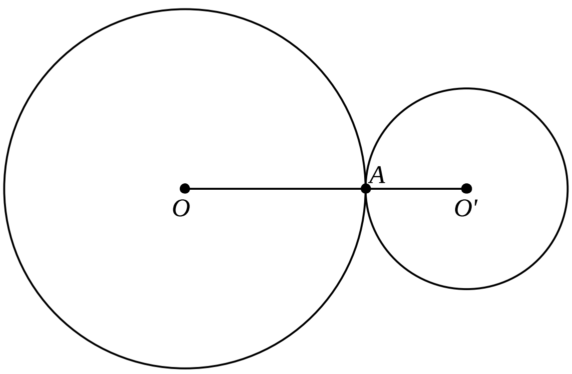
a) Vị trí tương đối của hai đường tròn là:

A. Nằm ngoài nhau. **B.** Cắt nhau. **C.** Tiếp xúc ngoài. **D.** Tiếp xúc trong.

b) Dây AD của đường tròn cắt đường tròn nhỏ tại C. Khi đó:

A. $AC > CD$. **B.** $AC = CD$. **C.** $AC < CD$. **D.** $CD = OD$.

Câu 95. Cho đoạn OO' và điểm A nằm trên đoạn OO' sao cho $OA = 2O'A$. Đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn (O') bán kính $O'A$.



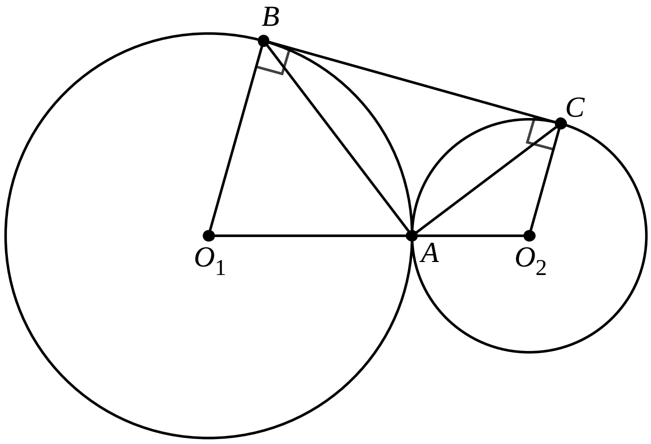
a) Vị trí tương đối của hai đường tròn là:

A. Nằm ngoài nhau. **B.** Cắt nhau. **C.** Tiếp xúc ngoài. **D.** Tiếp xúc trong.

b) Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại C. Khi đó:

A. $AD = \frac{1}{2}AC$. **B.** $AD = 3AC$. **C.** $OD//O'C$. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Câu 96. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài tại A và một đường thẳng d tiếp xúc với $(O_1);(O_2)$ lần lượt tại B,C.



a) Tam giác ABC là:

A. Tam giác cân. **B.** Tam giác đều.

C. Tam giác vuông. **D.** Tam giác vuông cân.

b) Lấy M là trung điểm của BC. Chọn khẳng định **sai?**

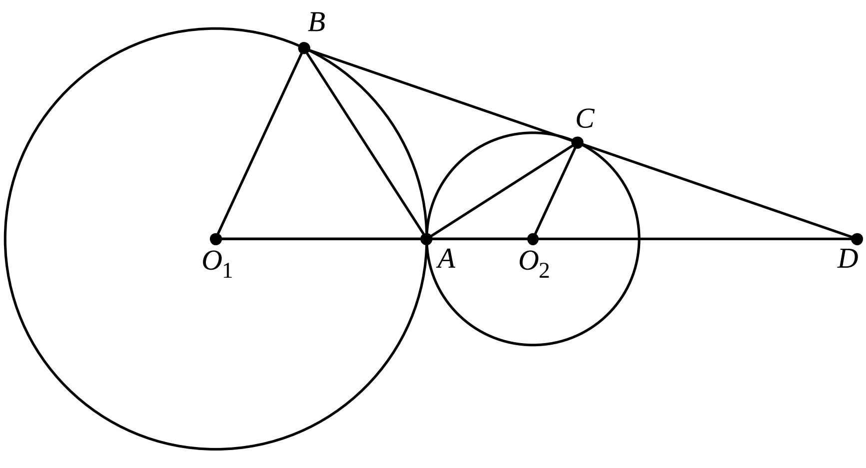
A. AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(O_1);(O_2)$.

B. AM là đường trung bình của hình thang O_1BCO_2.

C. $AM = BC$.

D. $AM = \frac{1}{2}BC$.

Câu 97. Cho $(O_1;3cm)$ tiếp xúc ngoài với $(O_2;1cm)$ tại A. Vẽ hai bán kính O_1B và O_2C song song với nhau cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ O_1O_2. Gọi D là giao điểm của BC và O_1O_2.



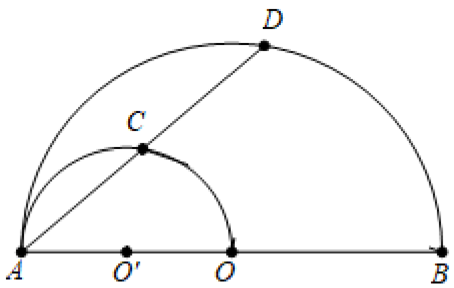
a) Tính số đo $\widehat{BAC}$.

A. $90°$. **B.** $100°$. **C.** $60°$. **D.** $120°$.

b) Tính độ dài O_1D.

A. $O_1D = 4,5cm$. **B.** $O_1D = 5cm$. **C.** $O_1D = 6cm$. **D.** $O_1D = 8cm$.

Câu 98. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. Vẽ nửa đường tròn tâm O' đường kính AO (cùng phía với nửa đường tròn (O)). Một cát tuyến bất kỳ qua A cắt $(O');(O)$ lần lượt tại C, D.



a) Chọn khẳng định sai?

A. C là trung điểm của AD.

B. Các tiếp tuyến tại C và D của các nửa đường tròn song song với nhau.

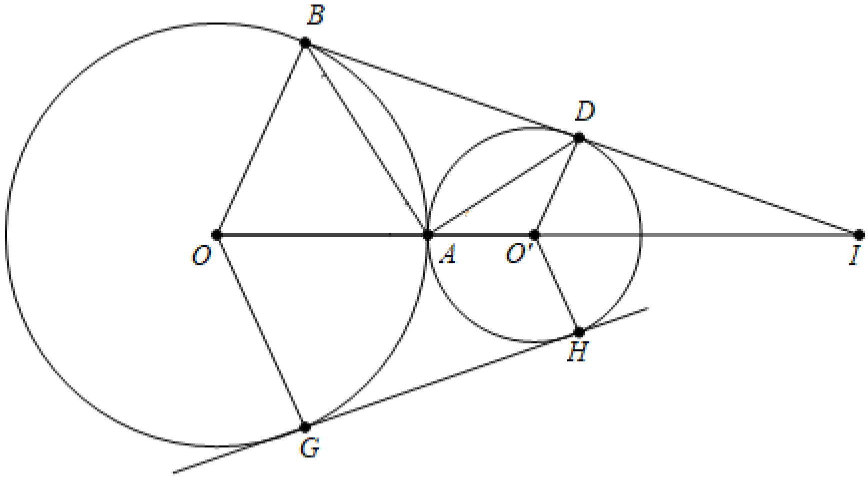
C. $O'C//OD$.

D. Các tiếp tuyến tại C và D của các nửa đường tròn cắt nhau.

b) Nếu BC là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O') thì tính BC theo R (với $OA = R$)

A. $BC = 2R$. **B.** $BC = \sqrt{2}R$. **C.** $BC = \sqrt{3}R$. **D.** $BC = \sqrt{5}R$.

Câu 99. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ $(R > R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ các bán kính $OB//O'D$ với B, D ở cùng phía nửa mặt phẳng bờ OO'. Đường thẳng DB và OO' cắt nhau tại I. Tiếp tuyến chung ngoài GH của (O) và (O') với G, H nằm ở nửa mặt phẳng bờ OO' không chứa B, D.



a) Tính OI theo R và R'.

A. $OI = \dfrac{R+R'}{R-R'}$. **B.** $OI = \dfrac{R(R+R')}{R-R'}$. **C.** $OI = \dfrac{R(R-R')}{R+R'}$. **D.** $OI = \dfrac{R-R'}{R+R'}$.

b) Chọn câu đúng.

A. BD, OO' và GH đồng quy. **B.** BD, OO' và GH không đồng quy.

C. Không có ba đường nào đồng quy. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Câu 100. Số đo $n°$ của cung tròn có độ dài $30,8cm$ trên đường tròn có bán kính $22cm$ là (lấy $\pi \simeq 3,14$ và làm tròn đến độ).

A. 70°. **B.** 80°. **C.** 65°. **D.** 85°.

Câu 101. Số đo $n°$ của cung tròn có độ dài $40,2cm$ trên đường tròn có bán kính $16cm$ là (lấy $\pi \simeq 3,14$ và làm tròn đến độ).

A. 144°. **B.** 145°. **C.** 124°. **D.** 72°.

Câu 102. Tính độ dài cung $30°$ của một đường tròn có bán kính $4dm$.

A. $\frac{4\pi}{3}(dm)$. **B.** $\frac{\pi}{3}(dm)$. **C.** $\frac{\pi}{6}(dm)$. **D.** $\frac{2\pi}{3}(dm)$.

Câu 103. Chu vi đường tròn $R = 9$ bán kính là:

A. 9π. **B.** 12π. **C.** 18π. **D.** 27π.

Câu 104. Chu vi đường tròn bán kính $R = 6$ là:

A. 9π. **B.** 12π. **C.** 18π. **D.** 27π.

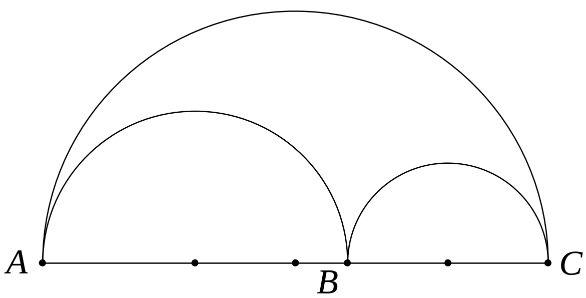
Câu 105. Biết chu vi đường tròn là $C = 48\pi$. Tính đường kính của đường tròn.

A. 48. **B.** 24. **C.** 36. **D.** 18.

Câu 106. Biết chu vi đường tròn là $C = 36\pi(cm)$. Tính đường kính của đường tròn.

A. $18(cm)$. **B.** $14(cm)$. **C.** $20(cm)$. **D.** $36(cm)$.

Câu 107. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng B nằm giữa A và C.



Chọn khẳng định đúng.

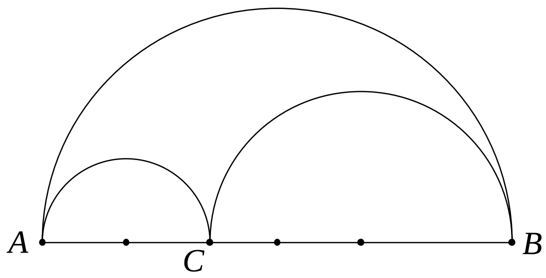
A. Độ dài nửa đường tròn đường kính AC bằng hiệu các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AB và BC.

B. Độ dài nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AB và BC.

C. Độ dài nửa đường tròn đường kính BC bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AB và AC.

D. Độ dài nửa đường tròn đường kính AB bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AC và BC.

Câu 108. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng C nằm giữa A và B, đồng thời $AB = 3AC$.



Chọn khẳng định **sai.**

A. Độ dài nửa đường tròn đường kính AB gấp ba lần độ dài của nửa đường tròn đường kính AC.

B. Độ dài nửa đường tròn đường kính AB gấp $1,5$ lần độ dài của nửa đường tròn đường kính BC.

C. Độ dài nửa đường tròn đường kính AB bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính BC và AC.

D. Độ dài nửa đường tròn đường kính BC bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AC và AB.

Câu 109. Chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh $a\,(cm)$ là:

A. $\frac{4\pi a\sqrt{3}}{3}(cm)$. **B.** $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{3}(cm)$. **C.** $\frac{\pi a\sqrt{3}}{3}(cm)$. **D.** $\frac{5\pi a\sqrt{3}}{3}(cm)$.

Câu 110. Chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh $3(cm)$ là:

A. $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}(cm)$. **B.** $\pi\sqrt{3}(cm)$. **C.** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}(cm)$. **D.** $2\pi\sqrt{3}(cm)$.

Câu 111. Một hình tròn có diện tích $S = 225\pi(cm^2)$. Bán kính của hình tròn đó là:

A. $14(cm)$. **B.** $16(cm)$. **C.** $12(cm)$. **D.** $15(cm)$.

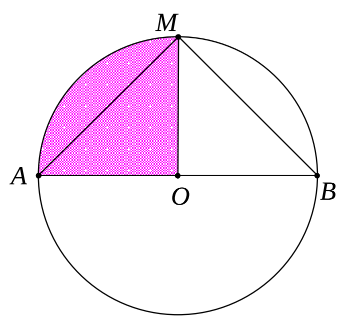
Câu 112. Diện tích hình tròn bán kính $R = 8cm$ là:

A. $8\pi(cm^2)$. **B.** $64\pi(cm^2)$. **C.** $16\pi(cm^2)$. **D.** $32\pi^2(cm^2)$.

Câu 113. Diện tích hình tròn có đường kính $20cm$ là:

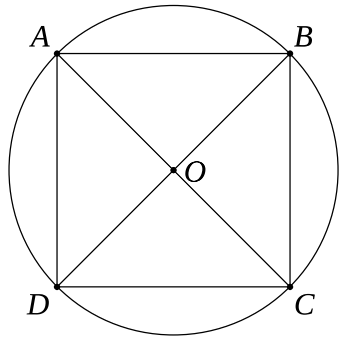
A. $100\pi(cm^2)$. **B.** $10\pi(cm^2)$. **C.** $20\pi(cm^2)$. **D.** $100\pi^2(cm^2)$.

Câu 114. Cho đường tròn $(O;10cm)$, đường kính AB. Điểm $M \in (O)$ sao cho $\widehat{BAM} = 45°$. Tính diện tích hình quạt AOM.



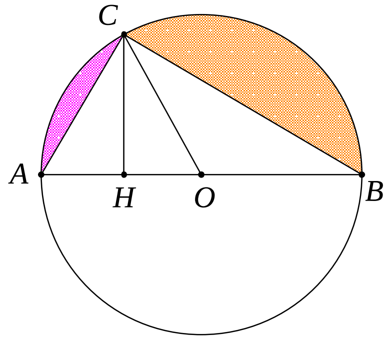
A. $5\pi(cm^2)$. **B.** $25\pi(cm^2)$. **C.** $50\pi(cm^2)$. **D.** $\frac{25}{2}\pi(cm^2)$.

Câu 115. Cho hình vuông có cạnh $6cm$ là nội tiếp đường tròn (O). Hãy tính diện tích hình tròn (O).



A. $18\pi(cm^2)$. **B.** $36\pi(cm^2)$. **C.** $18(cm^2)$. **D.** $36(cm^2)$.

Câu 116. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 4\sqrt{2}cm$. Điểm $C \in (O)$ sao cho $\widehat{ABC} = 30°$. Tính diện tích hình giới hạn bởi đường tròn (O) và $AC; BC$.



A. $\pi - \sqrt{3}$. **B.** $2\pi - 2\sqrt{3}$. **C.** $\pi - 3\sqrt{3}$. **D.** $2\pi - \sqrt{3}$.

Câu 117. Một hình quạt có chu vi bằng $34cm$ và diện tích bằng $66cm^2$. Bán kính của hình quạt bằng?

A. $R = 5(cm)$. **B.** $R = 6(cm)$ hoặc $R = 11(cm)$..

C. $R = 7(cm)$ **D.** $R = 8(cm)$.

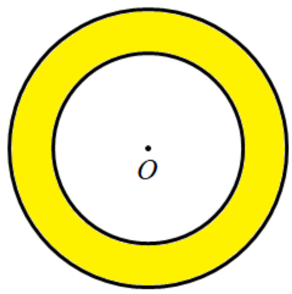
Câu 118. Một hình quạt có chu vi bằng $28(cm)$ và diện tích bằng $49(cm^2)$. Bán kính của hình quạt bằng?

A. $R = 5(cm)$. **B.** $R = 6(cm)$. **C.** $R = 7(cm)$. **D.** $R = 8(cm)$.

Câu 119. Công thức tính diện tích hình vành khuyên tạo bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính R và r (với $R > r$) là

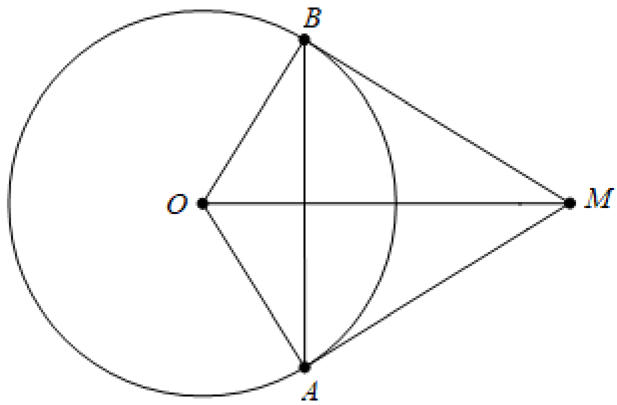
A. $S_v = \pi\left(R^2 - r^2\right)$. **B.** $S_v = \pi\left(r^2 - R^2\right)$. **C.** $S_v = \pi\left(R - r\right)^2$. **D.** $S_v = \pi\left(R^2 - r^2\right)$.

Câu 120. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; 2\text{cm})$; $(O; 3\text{cm})$. Diện tích hình vành khuyên là



A. $1,5\pi\,\text{cm}^2$. **B.** $2\pi\,\text{cm}^2$. **C.** $3\pi\ \text{cm}^2$. **D.** $5\pi\ \text{cm}^2$.

Câu 121. Cho hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại M, biết $\widehat{AMB} = 50°$.

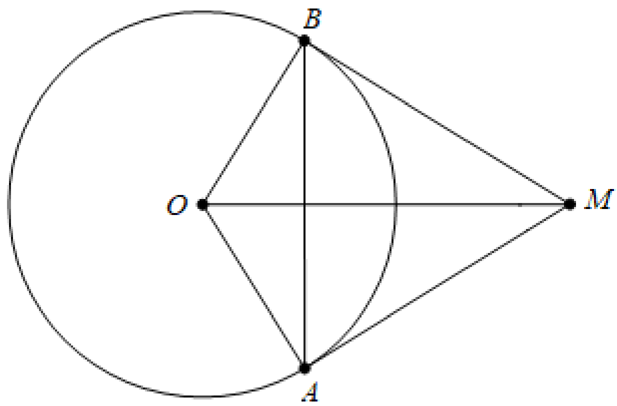


Số đo của $\widehat{AMO}$ và $\widehat{BOM}$ lần lượt là:

A. $\widehat{AMO} = 35°; \widehat{MOB} = 55°$. **B.** $\widehat{AMO} = 65°; \widehat{MOB} = 25°$.

C. $\widehat{AMO} = 55°; \widehat{MOB} = 35°$. **D.** $\widehat{AMO} = 25°; \widehat{MOB} = 65°$.

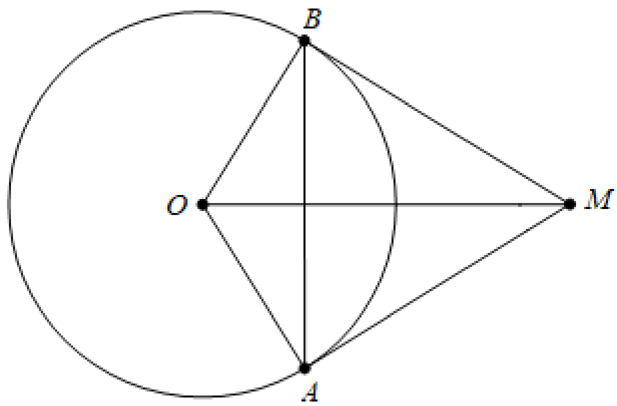
Câu 122. Cho hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại M, biết $\widehat{AMB} = 50°$.



Số đo cung AB nhỏ và số đo cung AB lớn lần lượt là:

A. $130°; 230°$. **B.** $130°; 250°$. **C.** $230°;130°$. **D.** $150°; 210°$.

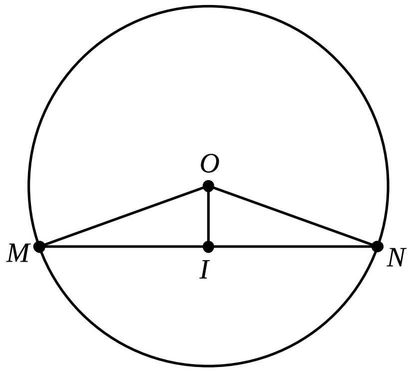
Câu 123. Cho đường tròn $(O; R)$, lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với (O) (A, B là các tiếp điểm).



Số đo góc $\widehat{AOM}$ và số đo cung nhỏ AB lần lượt là

A. $30°$ và $120°$. **B.** $50°$ và $240°$. **C.** $60°$ và $120°$. **D.** $120°$ và $240°$.

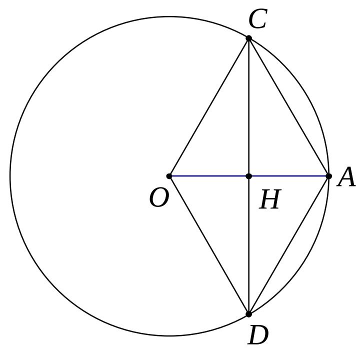
Câu 124. Cho $(O;R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Kẻ OI vuông góc với MN tại I.



Độ dài OI theo R và số đo cung nhỏ MN lần lượt là:

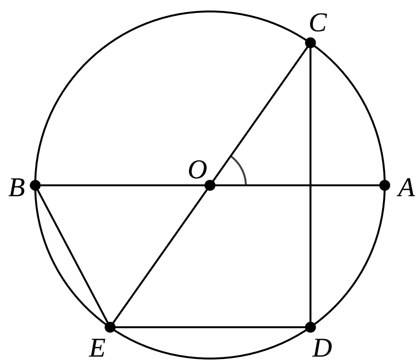
A. $\frac{R\sqrt{3}}{3}$ và $120°$. **B.** $\frac{R}{\sqrt{2}}$ và $150°$. **C.** $\frac{R}{2}$ và $120°$. **D.** $\frac{R}{3}$ và $150°$.

Câu 125. Cho đường tròn $(O;R)$. Gọi H là trung điểm thuộc bán kính OA. Dây CD vuông góc với OA tại H. Tính số đo cung lớn CD.



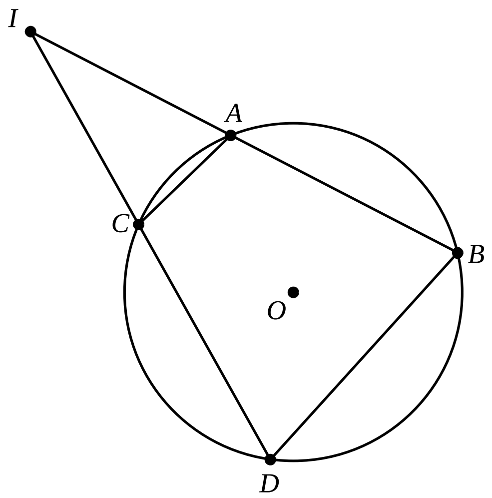
A. $260°$. **B.** $300°$. **C.** $240°$. **D.** $120°$.

Câu 126. Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ góc ở tâm $\widehat{AOC} = 55°$. Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB. Tính số đo cung nhỏ BE.



A. $55°$. **B.** $60°$. **C.** $40°$. **D.** $50°$.

Câu 127. Cho đường tròn (O) và điểm I nằm ngoài (O). Từ điểm I kẻ hai dây cung AB và CD (A nằm giữa I và B, C nằm giữa I và D).



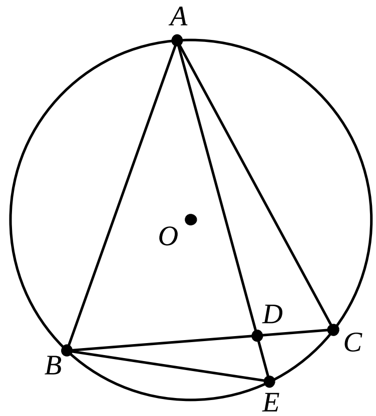
a) Cặp góc nào sau đây bằng nhau?

A. $\widehat{ACI};\widehat{IBD}$. **B.** $\widehat{CAI};\widehat{IBD}$. **C.** $\widehat{ACI};\widehat{IDB}$. **D.** $\widehat{ACI};\widehat{IAC}$.

b) $IA.IB$ bằng

A. $ID.CD$. **B.** $IC.CB$. **C.** $IC.CD$. **D.** $IC.ID$.

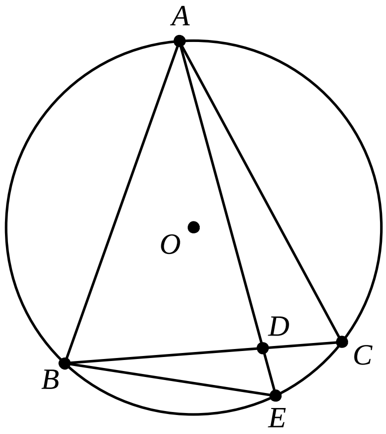
Câu 128. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB, AC bằng nhau. Qua A vẽ một cát tuyến cắt dây BC ở D và cắt (O) ở E.



Khi đó AB^2 bằng:

A. $AD.AC$. **B.** $AD.AE$. **C.** $AD.BD$. **D.** $AE.BE$.

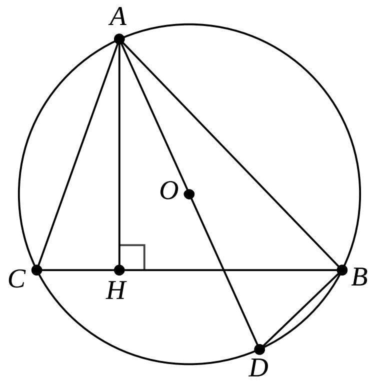
Câu 129. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB, AC bằng nhau. Qua A vẽ một cát tuyến cắt dây BC ở D và cắt (O) ở E.



Khi đó $DA.DE$ bằng:

A. DB^2. **B.** DC^2. **C.** $AB.AC$. **D.** $DB.DC$.

Câu 130. Cho tam giác ABC đường cao AH và nội tiếp trong đường tròn tâm (O), đường kính AD.

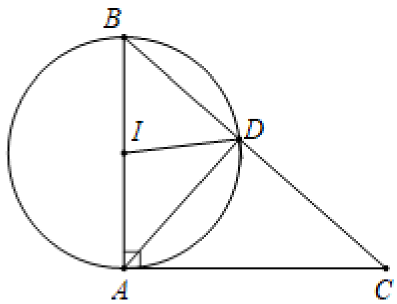


Khi đó tích $AB.AC$ bằng:

A. AH^2. **B.** $AH.AD$. **C.** $AH.HD$. **D.** $AH.HB$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 131. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB = 5cm, \widehat{ABC} = 60°$. Vẽ đường tròn tâm I, đường kính AB và đường tròn tâm I cắt đường thẳng BC ở D.



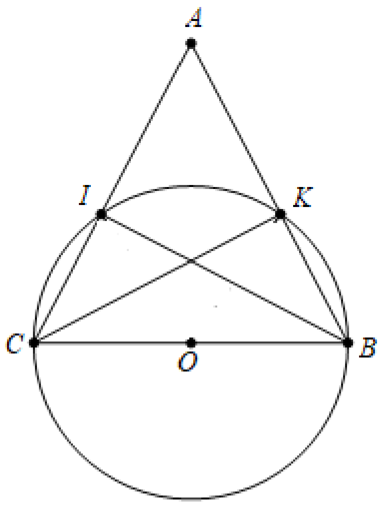
a) $\widehat{ADB} = 100^\circ$

b) D thuộc đường tròn đường kính AC.

c) ΔIBD là tam giác đều.

d) Độ dài cung nhỏ BD của (I) bằng $\frac{\pi}{6}(cm)$

Câu 132. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 40°$. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính BC. Đường tròn (O) cắt AB, AC lần lượt tại I, K



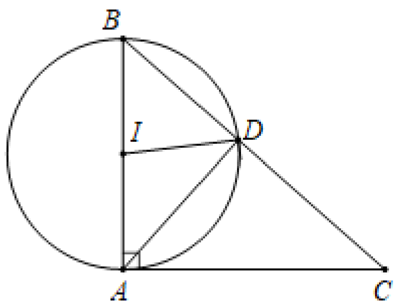
a) ΔIBC vuông tại I và ΔKBC vuông tại K.

b) Số đo cung nhỏ BI bằng số đo cung nhỏ CK.

c) $\widehat{IOK} = 80°$

d) Số đo cung lớn BI bằng $280°$.

Câu 133. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB = 4cm, \widehat{B} = 50°$. Vẽ đường tròn tâm I, đường kính AB và đường tròn tâm I cắt đường thẳng BC ở D.



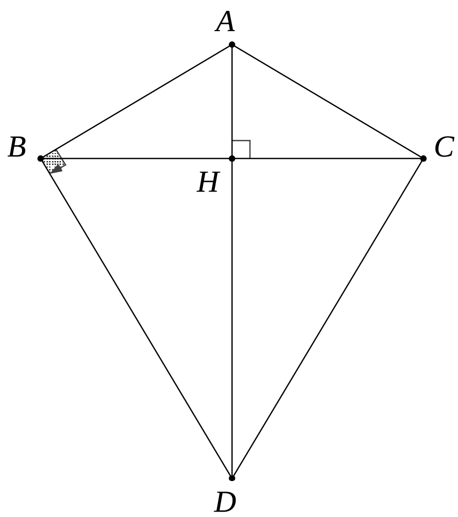
a) $\widehat{BCA} = 40^\circ$

b) $\widehat{DAC} = 60^\circ$

c) Độ dài cung nhỏ BD của (I) bằng $\dfrac{4\pi}{9}(cm)$.

d) Độ dài cung lớn BD của (I) bằng $\dfrac{32\pi}{9}(cm)$.

Câu 134. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao $AH = 2cm, BC = 8cm$. Đường vuông góc với AB tại B cắt đường thẳng AH ở D.



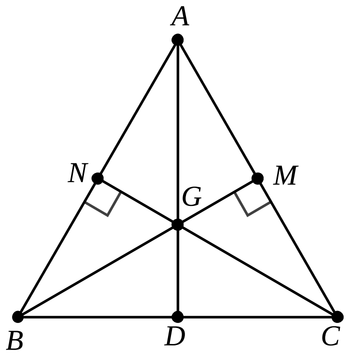
a) AH là đường phân giác $\widehat{BAC}$.

b) $\widehat{ACD} = 90°$

c) Các điểm A, B, D, C cùng thuộc một đường tròn.

d) Đường kính của đường tròn đi qua các điểm A, B, D, C bằng $5cm$.

Câu 135. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a, các đường cao là BM và CN. Gọi D là trung điểm cạnh BC và G là giao điểm của BM và CN.



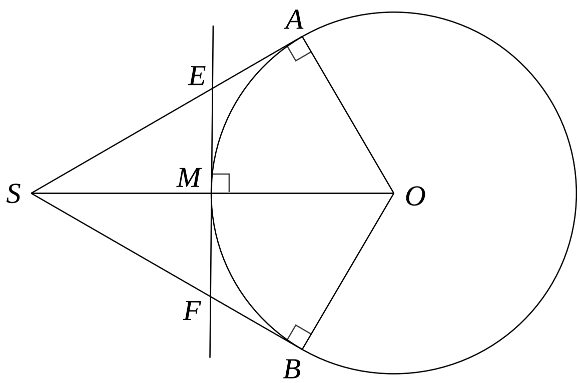
a) Đường tròn đi qua bốn điểm B, N, M, C là đường tròn tâm D bán kính BC.

b) $GD = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

c) Điểm G nằm trong đường tròn tâm D bán kính $\dfrac{BC}{2}$.

d) Điểm A nằm ngoài đường tròn tâm D bán kính $\dfrac{BC}{2}$.

Câu 136. Cho SA, SB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). Gọi M là một điểm tùy ý trên cung nhỏ AB. Tiếp tuyến của (O) tại M cắt SA tại E và cắt SB tại F.



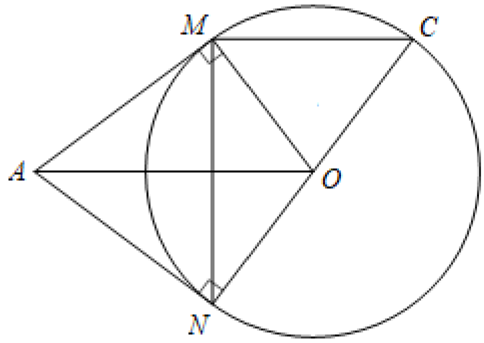
a) $SA > SB$

b) $EA < EM$

c) Chu vi của ΔSEF bằng $2SA$.

d) Giả sử M là giao điểm của đoạn SO với đường tròn (O), khi đó $SE > SF$.

Câu 137. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Vẽ đường kính NOC.



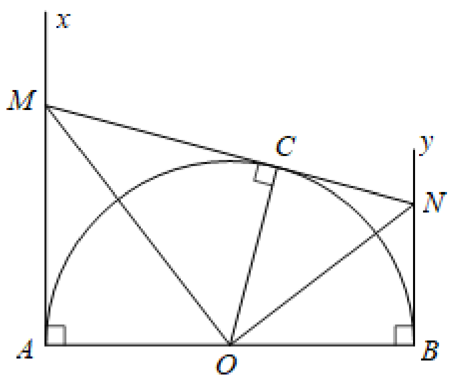
a) $AM = AN$

b) $OA \perp MN$

c) $\widehat{AON} > \widehat{MCO}$.

d) Giả sử $OM = 3\,cm,\ OA = 5\,cm$. Khi đó, chu vi của ΔAMN bằng $\frac{52}{5}(\,cm)$.

Câu 138. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Về cùng phía với nửa đường tròn, vẽ hai tia $Ax,\ By$ vuông góc với AB. Gọi M là một điểm bất kì thuộc tia Ax. Qua M kẻ tiếp tuyến MC (C là tiếp điểm) với nửa đường tròn (O), cắt By tại N.



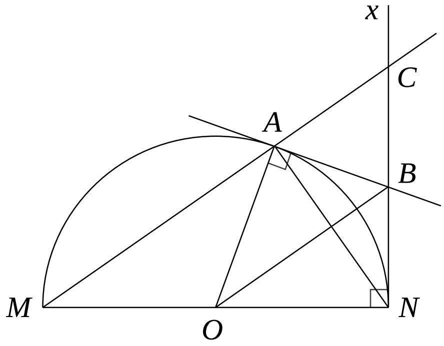
a) $\widehat{AOM} = \widehat{COM}$

b) $\widehat{MON} = 80^\circ$

c) $MN = AM + BN$

d) Giả sử $AB = 2\sqrt{2025}$, khi đó $AM.BN = \sqrt{2025}$

Câu 139. Cho nửa đường tròn (O) đường kính MN, tiếp tuyến Nx. Qua A trên nửa đường tròn (A không trùng với M, N) kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Nx ở B. Tia MA cắt Nx ở C.



a) $\widehat{AMN} = \frac{2}{3}\widehat{AON}$

b) $\widehat{AMN} = \widehat{AOB}$

c) $OB \perp AN$

d) Giả sử $AB = 3(cm)$, khi đó $NC = 7(cm)$.

Câu 140. Cho ΔABC là tam giác nhọn cân tại A. Kẻ hai đường cao BH và CK.

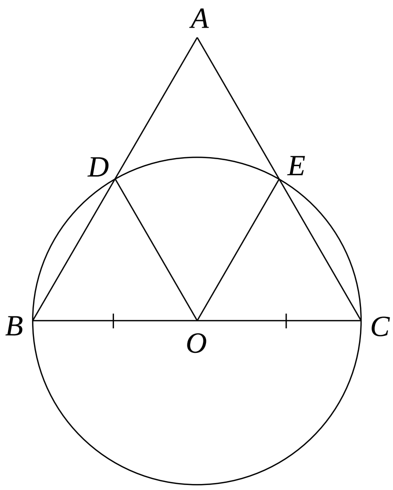
a) Đường tròn tâm O đường kính BC đi qua K và H.

b) Số đo cung nhỏ BK bằng số đo cung nhỏ HC.

c) Số đo cung nhỏ BH lớn số đo cung nhỏ CK.

d) Giả sử $\widehat{BAC} = 40^0$, khi đó số đo của cung nhỏ KH bằng 100^0.

Câu 141. Cho ΔABC đều có $AB = 2\sqrt{3}\,cm$. Đường tròn (O) đường kính BC cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại D và E.



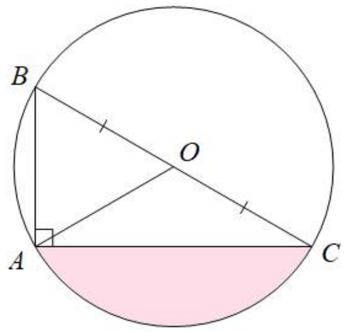
a) $\widehat{BOD} = 60^0$

b) Số đo ba cung nhỏ BD, DE, EC bằng nhau và bằng 60^0.

c) Diện tích tứ giác $ADOE$ bằng $\frac{3\sqrt{3}}{8}cm^2$.

d) Diện tích phần viên phân giới hạn bởi dây CE và cung CE là $\frac{\pi - 3\sqrt{3}}{8}\left(cm^2\right)$.

Câu 142. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 3\,cm,\ BC = 6\,cm$ và đường tròn (O) đường kính BC.



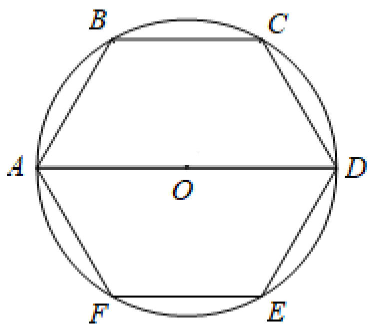
a) Điểm A thuộc đường tròn đường kính BC.

b) $AC = \sqrt{3}\,cm$

c) Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung nhỏ AC và dây AC bằng $9\pi\left(cm^2\right)$.

d) Diện tích phần viên phân giới hạn bởi dây AC và cung nhỏ AC bằng $\frac{3\pi - 9\sqrt{3}}{4}\left(cm^2\right)$.

Câu 143. Cho đường tròn $(O;\ 5\,cm)$ và hình lục giác đều $ABCDEF$ sao cho 6 đỉnh của hình lục giác đều đều thuộc đường tròn.



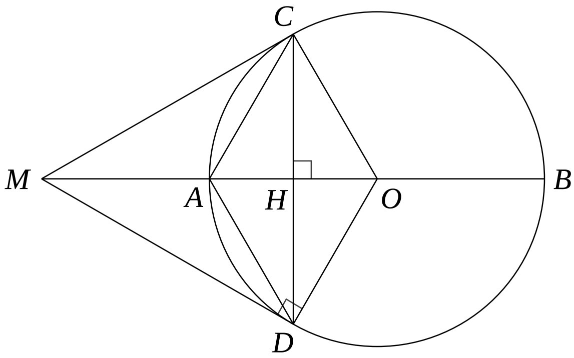
a) Tam giác OAB là tam giác đều.

b) Cung nhỏ AC và cung nhỏ BD bằng nhau.

c) Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung nhỏ AC và dây AC bằng $\frac{5\pi}{3}\left(cm^2\right)$.

d) Diện tích phần viên phân tạo bởi cung nhỏ AC và dây AC bằng $\frac{100\pi - 75\sqrt{3}}{12}\left(cm^2\right)$.

Câu 144. Cho đường tròn $(O;\ R)$ đường kính AB. Gọi H là trung điểm của OA. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt (O) tại C và D. Qua D kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt OA tại M.



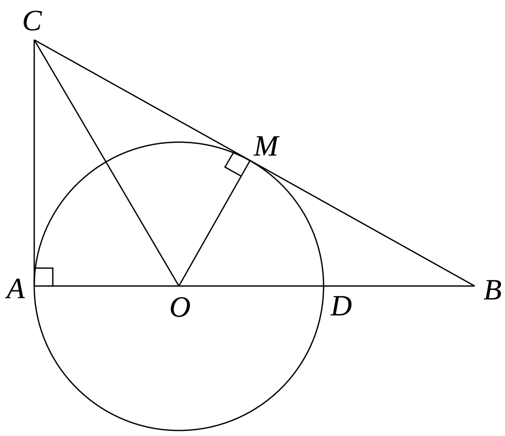
a) Tứ giác $ACOD$ là hình thoi.

b) $AM > R$.

c) MC là tiếp tuyến của (O).

d) ΔMCD đều.

Câu 145. Cho đường tròn (O,R) và đường kính AD. Vẽ tiếp tuyến tại A của đường tròn, từ C trên tiếp tuyến đó vẽ tiếp tuyến thứ hai CM của đường tròn (O) (M là tiếp điểm và M khác A) cắt AD tại B. Biết $AC = 6\,cm,\ AB = 8\,cm$.



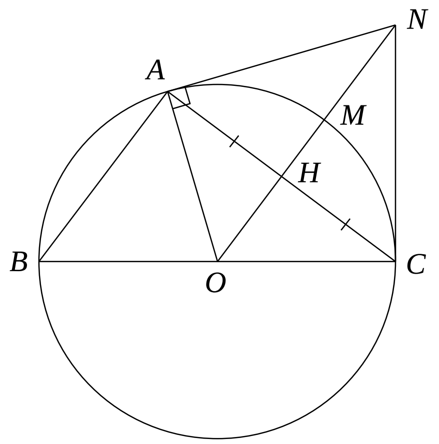
a) $BC = 10\,cm$.

b) $BM = 6\,cm$.

c) $\Delta BMO \backsim \Delta BAC$.

d) $R = 4cm$

Câu 146. Cho đường tròn $(O;\ R)$ đường kính BC, lấy điểm $A \in (O)$. Gọi H là trung điểm của AC. Tia OH cắt (O) tại M. Từ A vẽ tiếp tuyến với (O) cắt tia OM tại N.



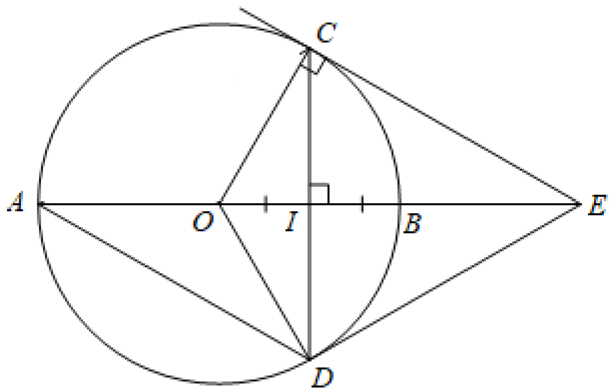
a) $\widehat{BAC} = 90^0$

b) $AB // OM$

c) CN là tiếp tuyến của (O).

d) $\dfrac{AH}{NC} = \dfrac{BC}{NO}$

Câu 147. Cho đường tròn (O, R) đường kính AB. Gọi I là trung điểm của OB. Qua I kẻ dây CD vuông góc với OB. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt AB tại E.



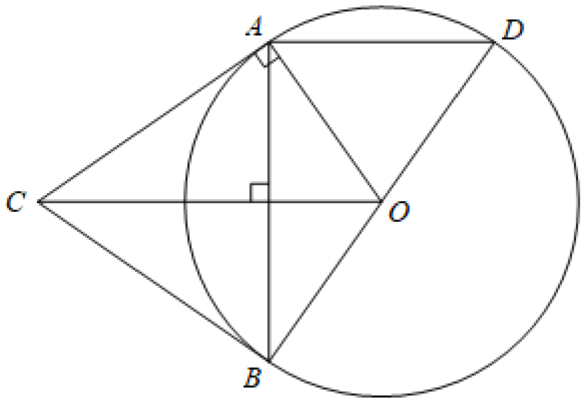
a) $\Delta OIC \backsim \Delta OCE$

b) $OI.OE = 2R$

c) $\widehat{ODE} = 90^0$

d) Gọi F là trung điểm của dây AC. Khi đó $\widehat{DOF} = 180^0$.

Câu 148. Cho đường tròn (O,R) và dây AB. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn tại C. Vẽ đường kính BOD.



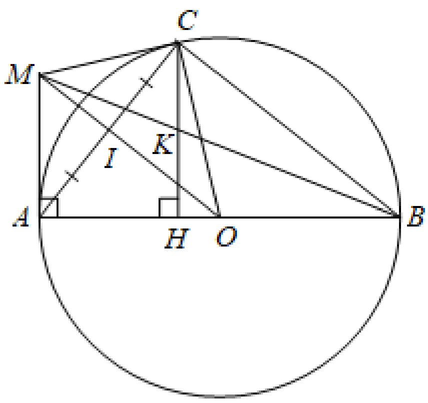
a) Đường thẳng OC là phân giác $\widehat{AOB}$

b) Đường thẳng CB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) Tứ giác $ADOC$ là hình thang cân.

d) Giả sử $R = 15\,cm,\ AB = 24\,cm$. Khi đó $OC = 26\,cm$

Câu 149. Cho đường tròn (O) đường kính AB và C là một điểm trên đường tròn (C khác A và B). Kẻ $CH \perp AB$. Gọi I là trung điểm của AC, OI cắt tiếp tuyến tại A của (O) tại M, MB cắt CH tại K.



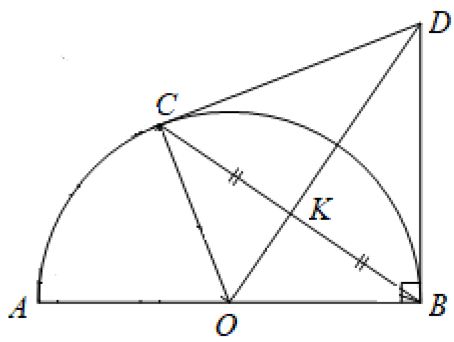
a) $\widehat{AIO}$ là góc nhọn.

b) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) $\widehat{AOI} = \widehat{ACB}$

d) $KH < KC$

Câu 150. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Lấy điểm C nằm trên đường tròn (O). Gọi K là trung điểm của dây cung BC. Qua B dựng tiếp tuyến với (O) cắt OK tại D.



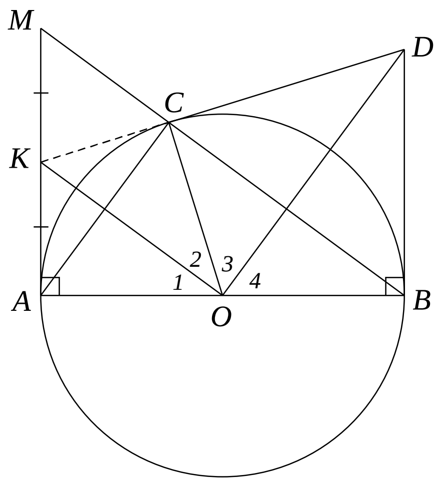
a) $DO \perp BC$

b) DC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) $DC = DB$

d) Vẽ $CH \perp AB$ tại H. Gọi I là trung điểm của CH. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BI tại E. Khi đó $\widehat{ECD} = 180^0$.

Câu 151. Cho đường tròn (O,R) đường kính AB. Lấy điểm C thuộc đường tròn (C khác A và B). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại M. Gọi K là trung điểm của MA. Đường thẳng KC cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) tại D.



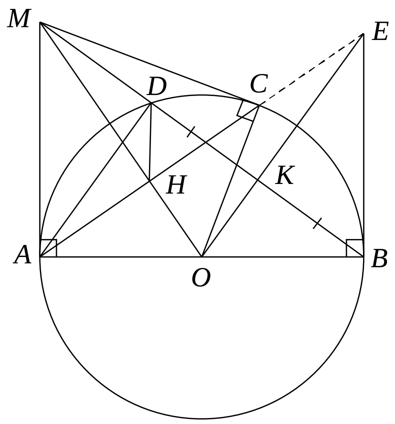
a) ΔABC vuông.

b) $BC.BM = 2R^2$.

c) KC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) $\widehat{KOD} < 90^0$.

Câu 152. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Qua A vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O). Trên Ax lấy điểm M (M khác A), từ M vẽ tiếp tuyến MC của đường tròn (C là tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OM và AC. Đường thẳng MB cắt đường tròn (O) tại D (D nằm giữa M và B). Gọi K là trung điểm của BD. Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OK tại E.



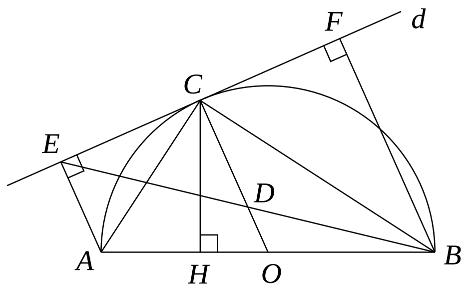
a) $OM \perp AC$ tại H.

b) $MD.MB = MH.MO$

c) $\widehat{MHD} < \widehat{MBA}$

d) Ba điểm A, E, C thẳng hàng.

Câu 153. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Qua điểm C thuộc nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến d của đường tròn. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc từ A và B tới d. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB. Gọi OC cắt BE tại D.



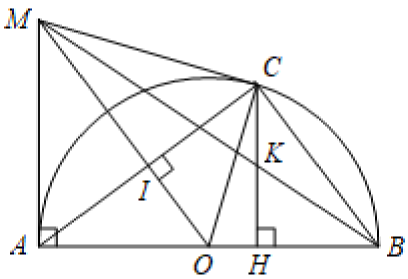
a) $AE//OC//BF$

b) $CE > CF$

c) AC là tia phân giác $\widehat{BAE}$.

d) $CH^2 = AE.BF$

Câu 154. Cho nửa đường tròn $(O;\ R)$ đường kính AB, C là điểm thuộc nửa đường tròn sao cho $AC > BC$ (C khác A và B). Kẻ $CH \perp AB$ và $OI \perp AC$. Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O), tia OI cắt Ax tại M. Gọi giao điểm của BM với CH là K.



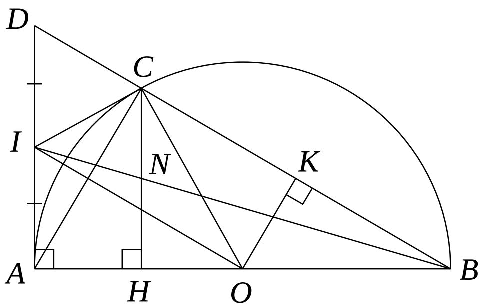
a) $OM // BC$

b) Bốn điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn có tâm là trung điểm OC.

c) $OI.OM = 2R^2$

d) $CK < KH$

Câu 155. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Trên nửa đường tròn lấy điểm C (C khác A và B). Kẻ $OK \perp BC$ tại K. Gọi D là giao điểm của BC với tiếp tuyến tại A của nửa đường tròn (O) và I là trung điểm của AD. Từ C kẻ $CH \perp AB$, BI cắt CH tại N.



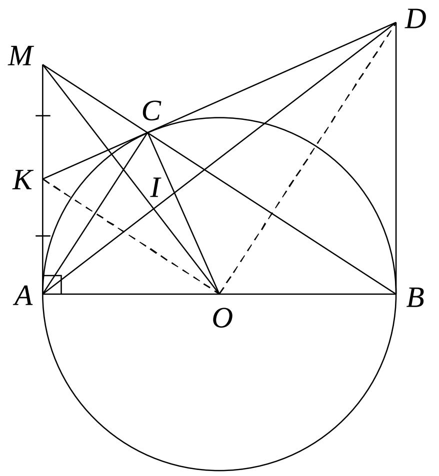
a) $OK // AC$

b) $BC.BD = 2R^2$

c) $\widehat{ICO} < 90^0$

d) $NH = \dfrac{1}{2}CH$.

Câu 156. Cho đường tròn $(O;\ R)$, đường kính AB. Lấy C thuộc đường tròn (O) (C khác A và B). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại M. Gọi K là trung điểm của MA. Tia KC cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) tại D. Đường thẳng AD cắt đường thẳng MO tại I.



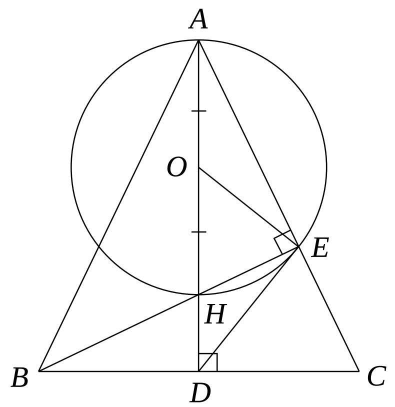
a) ΔABC vuông tại C.

b) $BC.BM = 4R^2$

c) KC là tiếp tuyến của (O).

d) $MI \perp AI$

Câu 157. Cho ΔABC cân tại A, các đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Vẽ đường tròn (O) đường kính AH.



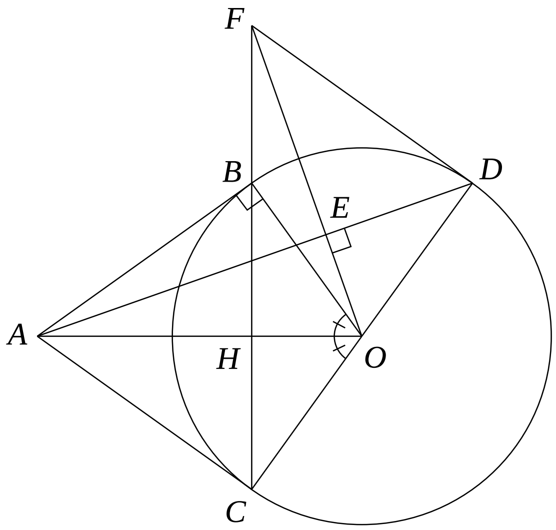
a) Điểm E là điểm nằm trên đường tròn (O).

b) $BD = CD$

c) $DE > \frac{1}{2}BC$

d) DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Câu 158. Cho $B,\ C$ là hai điểm trên đường tròn $(O;\ R)$. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với OB cắt đường phân giác $\widehat{BOC}$ tại A. Gọi H là giao điểm của OA và BC. Kẻ đường kính CD của đường tròn (O), qua O dựng đường thẳng vuông góc với AD tại E và cắt CB tại F.



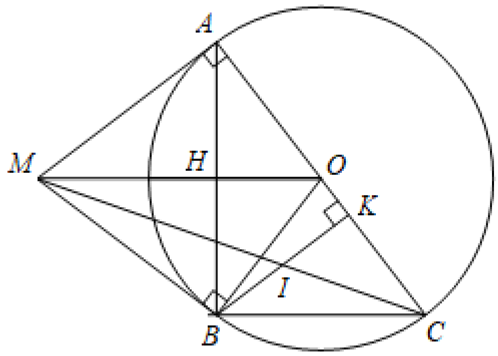
a) ΔBOH là tam giác vuông.

b) $OH.OA = 2R^2$

c) AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) $\widehat{ODF} < 90^0$

Câu 159. Cho $(O;R)$. Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến $MA,\ MB$ với đường tròn ($A,\ B$ là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của MO và dây AB. Kẻ đường kính AC của (O), vẽ BK vuông góc với AC ($K \in AC$). Đường thẳng MC cắt BK tại I.



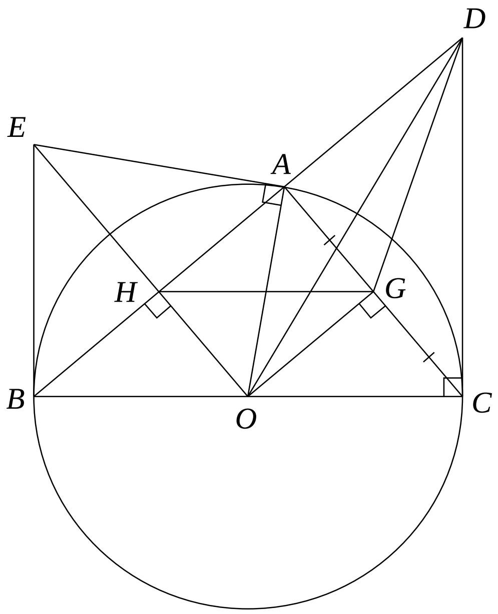
a) Bốn điểm M, A, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

b) $\widehat{BCK} = \widehat{AOM} = \widehat{BOM}$

c) $MB.BC = BK.MO$

d) $BI < \frac{1}{2}BK$

Câu 160. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) có BC là đường kính. Gọi H và G lần lượt là hình chiếu của điểm O trên AB và AC. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt OH tại E. Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt AB tại D.



a) $OH // AC$

b) $\widehat{OBE} = 90^0$

c) $CD.BC = BD.GC$

d) $\widehat{BOD} > \widehat{CGD}$

Câu 161. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Trên nửa đường tròn lấy điểm C bất kì (C khác A và B). Tiếp tuyến tại C và tiếp tuyến tại A cắt nhau tại M. Đường thẳng AC cắt OM tại H.

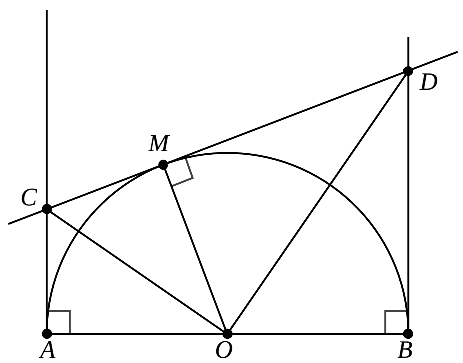
a) $AC \perp MO$

b) $OH.OM = R^2$

c) Tia BH cắt nửa đường tròn tại D. Khi đó $\Delta ODM \backsim \Delta OHD$.

d) Tia AD cắt MH tại I. Khi đó điểm I là trung điểm của MH.

Câu 162. Cho nửa đường tròn tâm (O, R), đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn cùng phía đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt Ax và By lần lượt tại C và D.



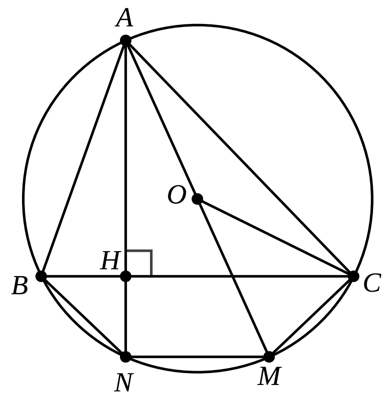
a) $\widehat{COD} = 90°$

b) $MC.MD = 2OM^2$

c) Cho $OD = BA = 2R$. Khi đó $BD = \sqrt{3}R; AC = \dfrac{\sqrt{3}R}{3}$

c) Cho $AB = 10\,cm$. Khi đó $MC.MD = 20\left(cm^2\right)$

Câu 163. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH và nội tiếp đường tròn (O), đường kính AM. Gọi N là giao điểm của AH với đường tròn (O).



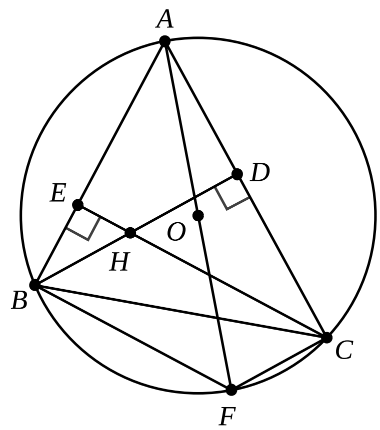
a) $\widehat{ACM} = 90°$

b) $\widehat{OAC} > \widehat{BAH}$

c) Tứ giác $BCMN$ là hình thang cân.

d) $\widehat{BAH} = \widehat{OCA}$

Câu 164. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại (O). Vẽ đường kính AF.



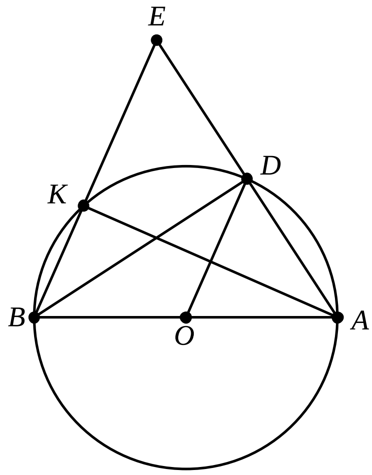
a) $\widehat{ACF} > 90°$

b) $BD // CF$ và $CE // BF$.

c) $BF < CH$

d) $EB.EA = EC.EH$

Câu 165. Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D. Gọi K là giao điểm của EB với (O).



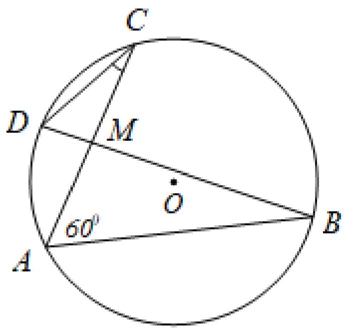
a) $\widehat{BDE} < 90°$

b) $\widehat{DBE} > \widehat{KAE}$

c) Tam giác ABE là tam giác đều.

d) $OD \perp AK$.

Câu 166. Cho đường tròn (O) và các điểm A, B, C, D nằm trên đường tròn như hình vẽ. Biết $\widehat{ACD} = 25^0$ và $\widehat{BAC} = 60^0$.



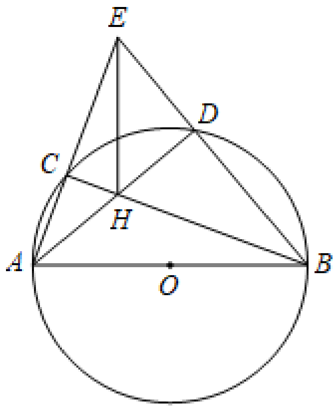
a) $\widehat{ABD} = 50^0$

b) số đo cung nhỏ BC bằng 60^0.

c) $\Delta MAB \backsim \Delta MDC$

d) $\widehat{AMD} = 95^0$

Câu 167. Cho đường tròn (O), đường kính AB. Gọi $C,\ D$ thuộc nửa đường tròn (C thuộc cung AD). AD cắt BC tại H, AC cắt BD tại E.



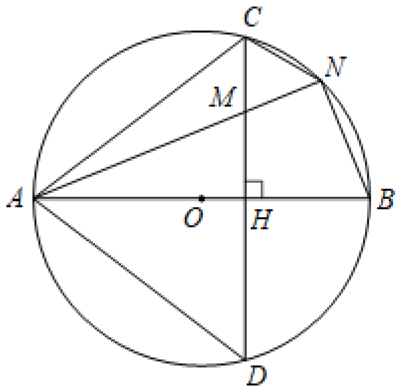
a) $\widehat{ACB}=90^0$

b) $\widehat{CAD}=\widehat{CBD}$

c) $EH\perp AB$

d) $\widehat{CHD}=\dfrac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{CD}+sđ\,\overset{\frown}{AB}\right)$

Câu 168. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Dây CD vuông góc với AB tại H. Lấy M là một điểm trên đoạn thẳng CD. Tia AM cắt đường tròn tại điểm thứ hai N.



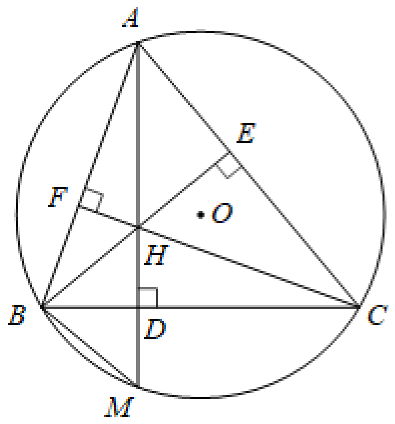
a) Bốn điểm M,N,B,H cùng thuộc một đường tròn.

b) $\Delta MDA\backsim\Delta MNC$

c) $MC.MD=MA.MN$

d) $AC^2=AM.AN$

Câu 169. Cho đường tròn (O) và ba điểm A, B, C nằm trên đường tròn sao cho ΔABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Kẻ AD cắt cung BC tại M.



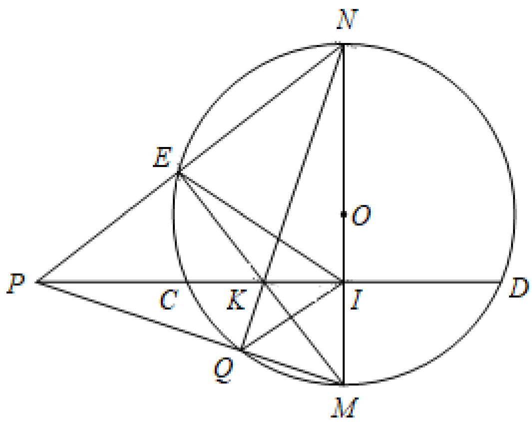
a) $\widehat{ACB} = sđ\,\overset{\frown}{AB}$

b) $\Delta BDH \backsim \Delta BEC$

c) $BD.BC = BH.BE$

d) ΔBMH cân tại M.

Câu 170. Cho đường tròn (O) có dây cung CD cố định. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ CD. Đường kính MN của đường tròn cắt dây CD tại I. Lấy điểm E bất kỳ trên cung lớn CD (E *khác* C, D, N). ME cắt CD tại K. Các đường thẳng NE và CD cắt nhau tại P.



a) $OM \perp CD$

b) Bốn điểm I, K, N, E cùng thuộc một đường tròn.

c) $\widehat{KIE} = \widehat{QME}$

d) IK là phân giác $\widehat{EIQ}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 171. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 6\,cm,\ AC = 8\,cm$. Hỏi bán kính đường tròn đi qua ba điểm $A,\ B,\ C$ bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 172. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $3\sqrt{2}\,(cm)$. Hỏi bán kính của đường tròn đi qua bốn điểm $A,\ B,\ C, D$ bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 173. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4cm, BC = 3cm$. Hỏi bán kính đường tròn đi qua bốn đỉnh A, B, C, D bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 174. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $4cm$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Gọi E là giao điểm của CM và DN. Gọi R là bán kính của đường tròn đi qua bốn điểm A, D, E, M, khi đó giá trị của bằng bao nhiêu ?

Trả lời: ………………..

Câu 175. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $20cm$ và AM, BN, CP là các đường trung tuyến. Hỏi bán kính đường tròn đi qua bốn đỉnh B, P, N, C bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 176. Cho đường tròn $(O;\ 5\,cm)$ và AB là một dây bất kì của đường tròn đó. Biết $AB = 6\,cm$. Hỏi khoảng cách từ O đến dây AB bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 177. Tâm O của một đường tròn cách dây AB của nó một khoảng $3\,cm$ và $\widehat{AOB} = 100^0$. Hỏi bán kính của đường tròn (O) bằng bao nhiêu centimet? (làm tròn đến kết hàng phần trăm của centimet)

Trả lời: ………………..

Câu 178. Cho đường tròn $(O;\ 10\,cm)$ có dây EF, biết khoảng cách từ tâm O tới dây EF bằng $8\,cm$. Hỏi độ dài dây EF bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 179. Cho đường tròn $\left(O;\ 3\sqrt{2}\ cm\right)$ và dây AB sao cho $\widehat{AOB} = 90^0$. Hỏi khoảng cách từ tâm O đến dây AB bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 180. Cho hai đường tròn $(O;13cm)$ và $(O';15cm)$ cắt nhau tại A, B sao cho $AB = 24(cm)$. Độ dài $O'O$ bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 181. Cho hai đường tròn $(O;8cm)$ và $(O';6cm)$ cắt nhau tại A, B sao cho OA là tiếp tuyến của (O'). Độ dài dây AB bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 182. Cho hai đường tròn $(O;20cm)$ và $(O';15cm)$ cắt nhau tại A và B. Biết rằng $AB=24cm$ và O và O' nằm cùng phía đối với AB. Độ dài đoạn nối tâm OO' bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 183. Cho hai đường tròn $(O;10cm)$ và $(O';5cm)$ cắt nhau tại A và B. Biết rằng $AB=8cm$ và O và O' nằm cùng phía đối với AB. Độ dài đoạn nối tâm OO' bằng bao nhiêu centimet? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet).

Trả lời: ………………..

Câu 184. Cho đường tròn $(O;R)$ với $R=5cm$. Vẽ dây AB sao cho số đo cung nhỏ AB bằng nửa số đo cung lớn AB. Tính diện tích tam giác ABC? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet mét vuông).

Trả lời: ………………..

Câu 185. Cho đường tròn $(O;\ 5\,cm)$ và AB là một dây bất kì của đường tròn đó. Biết $AB=6\,cm$. Khoảng cách từ O đến dây AB bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 186. Cho đường tròn $(O;\ 4\,cm)$ và dây AB. Biết rằng sđ $\overset{\frown}{AB}=90^0$. Khoảng cách từ O đến dây AB bằng bao nhiêu centimet? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai của centimet).

Trả lời: ………………..

Câu 187. Cho đường tròn (O) đường kính BC, điểm A nằm trên đường tròn sao cho $\widehat{AOC}=120^0$. Số đo cung nhỏ AB bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Câu 188. Cho đường tròn $(O;\ R)$ và dây $AB=R$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C sao cho $BC=R$. Kéo dài CO cắt (O) lần lượt tại D và E. Số đo cung nhỏ BE bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Câu 189. Cho đường tròn $(O;\ 10\,cm)$ có dây EF, biết khoảng cách từ tâm O tới dây EF bằng $8\,cm$. Độ dài dây EF bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

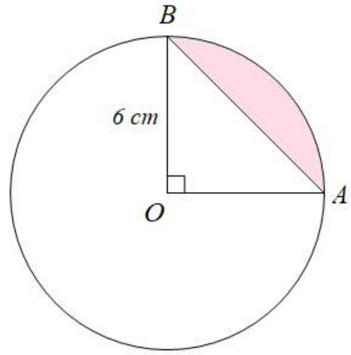
Câu 190. Tính diện tích của hình quạt tròn có bán kính $4\,cm$, ứng với cung 36^0 (làm tròn đến hàng đơn vị của centimet vuông).

Trả lời: ………………..

Câu 191. Tính diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là $8\,cm$ và $5\,cm$ (làm tròn đến hàng đơn vị của centimet vuông).

Trả lời: ………………..

Câu 192. Cho đường tròn $(O;\ 6\,cm)$, hai điểm $A,\ B$ thuộc đường tròn sao cho $\widehat{AOB}=90^0$. Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung AB và dây AB (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet vuông).



Trả lời: ………………..

Câu 193. Cho tam giác ABC nội tiếp $\left(O;6\sqrt{2}\right)$ đường kính BC. Gọi I; K lần lượt là trung điểm của AB; AC. Giá trị biểu thức $\sqrt{BI^2+CK^2+IK^2}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 194. Cho đường tròn $(O;10cm)$. Dây AB và CD song song, có độ dài lần lượt là $16cm$ và $12cm$. Khoảng cách giữa hai dây AB và CD bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 195. Cho đường tròn $(O;6cm)$ và dây $AB=9,6cm$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, cắt các tia OA, OB lần lượt tại E và F. Hỏi diện tích tam giác OEF bằng bao nhiêu centimet vuông?

Trả lời: ………………..

Câu 196. Cho đường tròn $(O;5cm)$. Cát tuyến qua A ở ngoài (O) cắt (O) tại B và C. Cho biết $AB=BC$ và kẻ đường kính COD. Độ dài đoạn thẳng AD bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 197. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho góc AMB bằng $120°$. Biết chu vi tam giác MAB là $6\left(3+2\sqrt{3}\right)cm$, hỏi độ dài AB bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 198. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho góc AMB bằng $60°$. Biết chu vi tam giác MAB là $24\sqrt{3}cm$, khi đó độ dài bán kính đường tròn (O) bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 199. Cho hình vuông có cạnh $5cm$ là nội tiếp đường tròn (O). Diện tích hình tròn (O) bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimet vuông).

Trả lời: ………………..

Câu 200. Cho đường tròn $(O;8cm)$, đường kính AB. Điểm $M \in (O)$ sao cho $\widehat{BAM} = 60°$. Diện tích hình quạt AOM bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet vuông).

Trả lời: ………………..

Câu 201. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2\sqrt{2}cm$. Điểm $C \in (O)$ sao cho $\widehat{ABC} = 30°$. Diện tích hình giới hạn bởi đường tròn (O) và $AC;BC$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet vuông).

Trả lời: ………………..

Câu 202. Cho tam giác ABC có $AB = AC = 4cm, \widehat{A} = 100°$. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet).

Trả lời: ………………..

Câu 203. Cho tam giác ABC có $AB = AC = 3\ cm, \widehat{A} = 120°$. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimet).

Trả lời: ………………..

Câu 204. Cho đường tròn (O) bán kính OA. Từ trung điểm M của OA vẽ dây $BC \perp OA$. Biết độ dài đường tròn (O) là $4\pi(cm)$. Tính độ dài cung lớn BC (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet).

Trả lời: ………………..

Câu 205. Cho đường tròn (O) bán kính OA. Từ trung điểm M của OA vẽ dây $BC \perp OA$. Biết độ dài đường tròn (O) là $6\pi(cm)$. Tính độ dài cung lớn BC (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet).

Trả lời: ………………..

Câu 206. Cho hai tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O) cắt nhau tại N, biết $\widehat{CND} = 60°$. Số đo của $\widehat{DON}$ bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Câu 207. Cho hai tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O) cắt nhau tại N, biết $\widehat{COD} = 100°$. Số đo của $\widehat{CON}$ bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Câu 208. Cho hai tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O) cắt nhau tại N, biết $\widehat{CND} = 40°$. Số đo của cung nhỏ CD bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Câu 209. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O). Số đo cung BC nhỏ bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Câu 210. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O). Số đo cung AC lớn bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Câu 211. Cho đường tròn $(O;R)$, lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM=\sqrt{2}R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với (O) (A,B là các tiếp điểm). Số đo cung AB lớn bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Câu 212. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung $MN=R\sqrt{2}$. Kẻ OI vuông góc với MN tại I. Số đo cung nhỏ MN bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Câu 213. Cho đường tròn $(O;10cm)$ và dây cung $MN=16cm$. Kẻ OI vuông góc với MN tại I. Độ dài OI bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 214. Cho đường tròn $(O;R)$. Gọi H là điểm thuộc bán kính OA sao cho $OH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}OA$. Dây CD vuông góc với OA tại H. Số đo cung lớn CD bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Câu 215. Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ góc ở tâm $\widehat{AOC}=60^\circ$. Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB. Số đo cung nhỏ BE bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Câu 216. Cho đường tròn (O) và điểm I nằm ngoài (O). Từ điểm I kẻ hai dây cung AB và CD (A nằm giữa I và B,C nằm giữa I và D) sao cho $\widehat{CAB}=120^\circ$. Tổng hai góc $\widehat{IAC}$ và $\widehat{IDB}$ bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

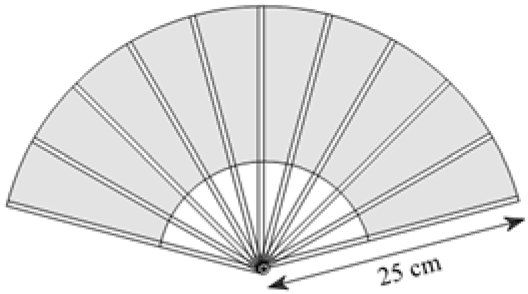
Câu 217. Cho tam giác ABC có $AB=5cm; AC=3cm$ đường cao AH và nội tiếp trong đường tròn tâm (O), đường kính AD. Khi đó tích $AH.AD$ bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Câu 218. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ biết góc $\widehat{C}=45^\circ$ và $AB=10\sqrt{2}\left(cm\right)$. Bán kính đường tròn (O) bằng bao nhiêu centimet?

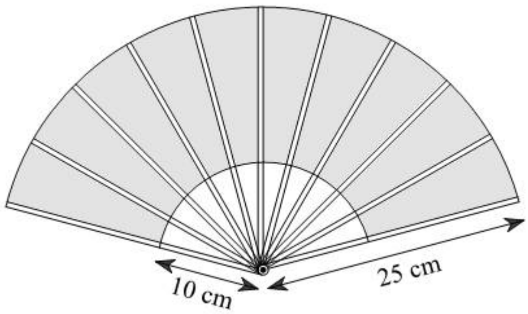
Trả lời: ………………..

Câu 219. Một chiếc quạt giấy khi xòe ra có hình dạng của một hình quạt tròn với bán kính $25\,cm$ và khi xòe hết thì góc tạo bởi hai thanh nan ngoài cùng của chiếc quạt là 150^0. Tính chiều dài cung tròn của chiếc quạt (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet).



Trả lời: ………………..

Câu 220. Một chiếc quạt giấy khi xòe ra có hình dạng của một hình quạt tròn với bán kính $25\,cm$ và khi xòe hết thì góc tạo bởi hai thanh nan ngoài cùng của chiếc quạt là 150^0. Tính diện tích phần giấy làm quạt, biết rằng phần giấy của quạt là một hình vành khuyên có bán kính đường tròn nhỏ là $10\,cm$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimet vuông).

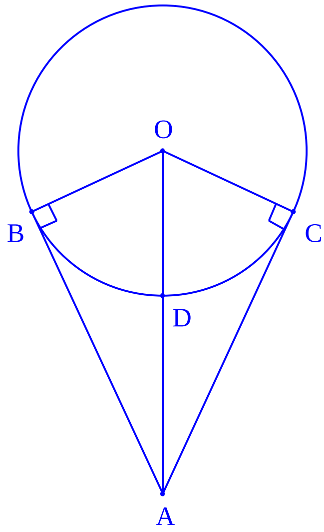


Trả lời: ………………..

Câu 221. Một vệ tinh nhân tạo tầm trung (MEO) chuyển động theo quỹ đạo tròn cách bề mặt Trái Đất một khoảng $2000km$, tâm quỹ đạo vệ tinh trùng với tâm O của Trái Đất. Vệ tinh phát tính hiệu vô tuyến theo đường thẳng đến một vị trí trên mặt đất. Hỏi vị trí xa nhất trên Trái Đất có thể nhận tín hiệu từ vệ tinh này cách vệ tinh một khoảng là bao nhiêu kilômet? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của kilômet). Biết rằng Trái Đất được xem như một hình cầu có bán kính $6400km$.

Trả lời: ………………..

Câu 222. Khí cầu là một túi đựng không khí nóng, thường có khối lượng riêng nhỏ hơn không khí xung quanh và nhờ vào lực đẩy Ác-si-mét có thể bay lên cao. Giả sử có thể xem khinh khí cầu là một khối cầu và các dây nối sẽ tiếp xúc với khối cầu này. Hãy tính chiều dài của các dây nối để khoảng cách từ buồng lái đến điểm thấp nhất của khí cầu là $6m$. Biết rằng bán kính của khối cầu này là $8m$. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của mét.

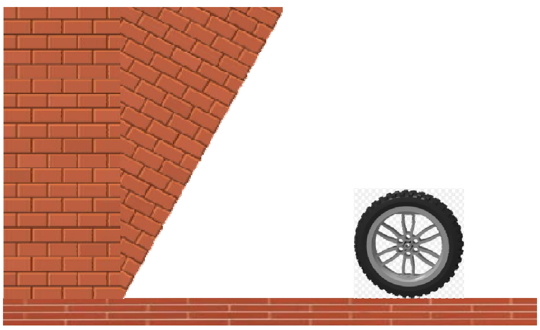


Trả lời: ………………..

Câu 223. Hồ Kingsley ở hạt Clay của Florida (Mỹ) có hình dạng là hình tròn có đường kính $3,2km$. Người ta muốn xây dựng một cây cầu bắc qua hồ Kingsley sao cho khoảng cách từ cây cầu đến tâm của hồ là $1000m$. Hãy tính chiều dài của cây cầu đó (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của kilômet).

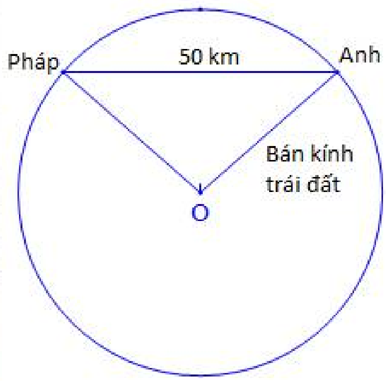
Trả lời: ………………..

Câu 224. Một bánh xe có dạng hình tròn bán kính $25cm$ lăn đến bức tường hợp với mặt đất một góc 60°. Khoảng cách ngắn nhất từ tâm bánh xe đến góc tường bằng bao nhiêu centimet?



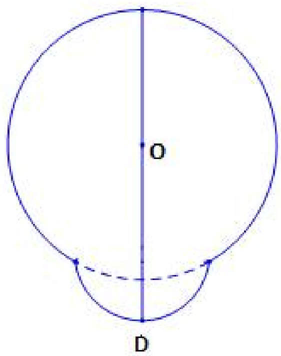
Trả lời: ………………..

Câu 225. Đường hầm vượt eo biển Măng-sơ nối hai nước Anh và Pháp có chiều dài khoảng $50km$ (trong đó có $38km$ chạy xuyên dưới đáy biển). Giả sử rằng vị trí hai đầu đường hầm thuộc Anh và Pháp nằm trên cùng một kinh tuyến ở bề mặt Trái Đất (Trái Đất được xem như một hình cầu có bán kính $6400km$). Hãy tính độ sâu nhất của đường hầm so với bề mặt Trái Đất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của mét).



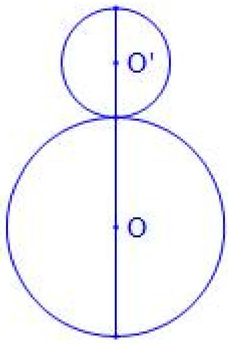
Trả lời: ………………..

Câu 226. Một quả cầu gỗ có bán kính là $R = 10cm$ được đặt trên một cái đế bằng gỗ có dạng là một nửa mặt cầu bán kính bằng $\frac{R}{2}$. Tính khoảng cách từ mặt đất đến điểm cao nhất của mặt cầu gỗ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimét).



Trả lời: ………………..

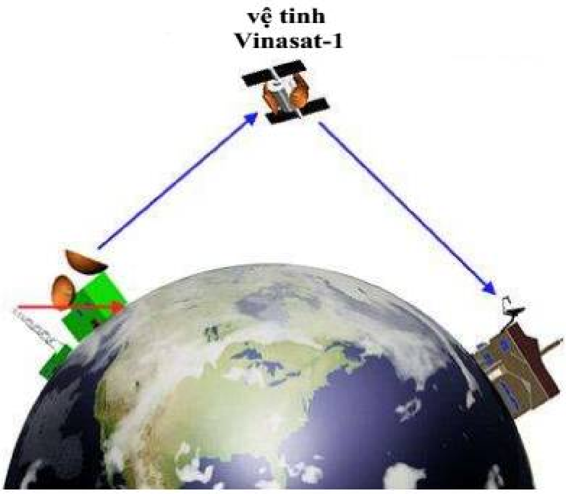
Câu 227. Ở các nước xứ lạnh, vào mùa Đông thường có tuyết rơi dày đặc khắp các con đường, trẻ em tại đây rất thích đắp hình dạng của người tuyết. Có thể xem phần thân dưới và thân trên của người tuyết là hai hình cầu tiếp xúc nhau. Để đắp được một người tuyết cao $1,8m$ với đường kính của phần thân dưới phải gấp đôi đường kính của phần thân trên người tuyết thì bán kính quả cầu tuyết phần thân dưới bằng bao nhiêu centimet?



Trả lời: ………………..

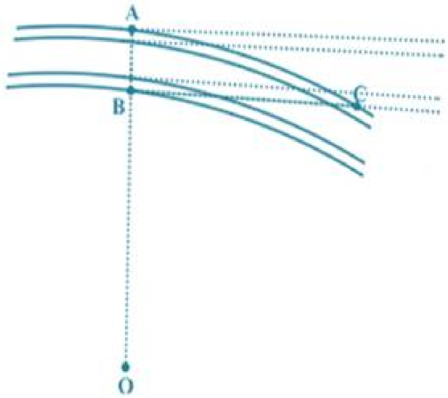
Câu 228. Vinasat-1 là vệ tinh viễn thông địa tĩnh đầu tiên của Việt Nam được phóng vào vũ trụ lúc 22 giờ 17 phút ngày 18 tháng 4 năm 2008 (giờ UTC). Dự án vệ tinh Vinasat-1 đã khởi động từ năm 1998 với tổng mức đầu tư là khoảng hơn 300 triệu USD. Việt Nam đã tiến hành đàm phán với 27 quốc gia và vùng lãnh thổ để có được vị trí 132 độ Đông trên quỹ đạo địa tĩnh.

Hãy tìm khoảng cách từ vệ tinh Vinasat-1 đến mặt đất. Biết rằng khi vệ tinh phát tín hiệu vô tuyến đến một điểm xa nhất trên mặt đất thì từ lúc phát tín hiệu đến mặt đất cho đến lúc vệ tinh thu lại được tín hiệu phản hồi mất khoảng thời gian là $0,3$ giây, biết vận tốc sóng vô tuyến là $3.10^8 m/s$. Trái đất được xem như một hình cầu có bán kính khoảng 6400km (ghi kết quả gần đúng chính xác đến hàng đơn vị của kilômét).



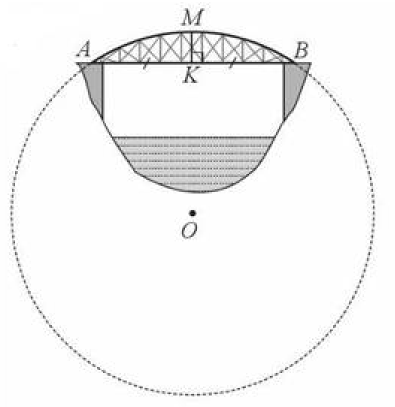
Trả lời: ………………..

Câu 229. Để giúp xe lửa chuyển từ một đường ray từ hướng này sang một đường ray theo hướng khác, người ta làm xen giữa một đoạn đường ray hình vòng cung (hình vẽ). Biết chiều rộng của đường ray là $AB = 1,2m$ và đoạn $BC = 29m$. Tính bán kính $OA = R$ của đoạn đường ray hình vòng cung (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



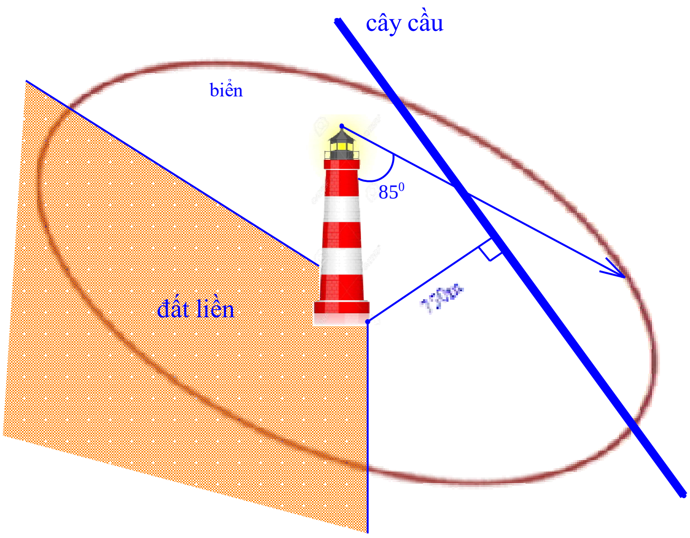
Trả lời: ………………..

Câu 230. Một chiếc cầu được thiết kế như hình bên dưới có độ dài $AB = 50m$, chiều cao $MK = 4m$. Tính bán kính của đường tròn chứa cung AMB (MK đi qua tâm của đường tròn chứa cung AMB và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Trả lời: ………………..

Câu 231. Một ngọn đèn hải đăng cao $100m$ đặt tại bờ biển có góc nâng của đèn không quá 85^o so với phương thẳng đứng. Biết rằng ánh sáng của ngọn đèn hải đăng phát ra xem như một đường thẳng và đèn có thể xoay tròn xung quanh ngọn hải đăng. Một cây cầu bắc qua biển cách ngọn đèn hải đăng $750m$. Khi ngọn đèn hải đăng xoay tròn với góc nâng 85^o thì chiếu sáng được một đoạn của chiếc cầu, hãy tính độ dài đoạn cầu được chiếu sáng đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

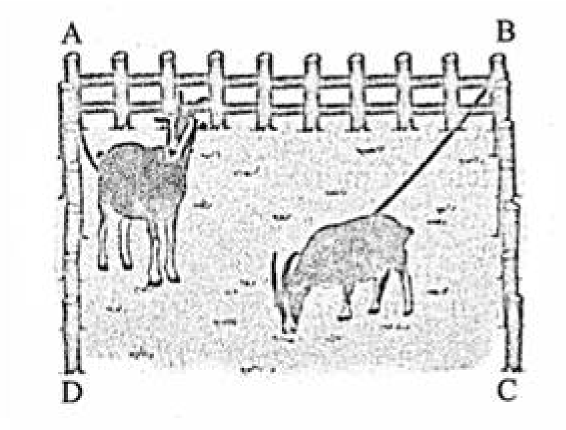


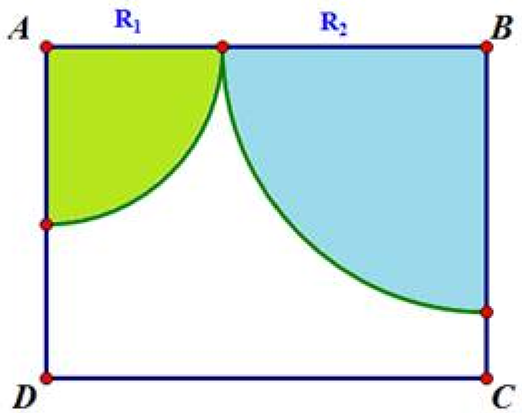
Trả lời: ………………..

Câu 232. Hai hòn đảo xem như hình tròn có khoảng cách từ tâm hòn đảo này đến tâm hòn đảo kia là khoảng $1500m$. Biết rằng đảo lớn có đường kính khoảng $1000m$, còn đảo nhỏ có bán kính khoảng $300m$. Người ta cần xây dựng một cây cầu bắc từ đảo này sang đảo kia sao cho chiều dài cây cầu là ngắn nhất. Hãy tính chiều dài cây cầu này.

Trả lời: ………………..

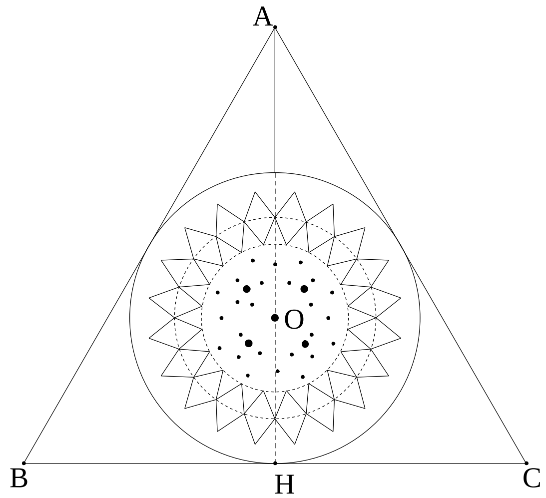
Câu 233. Một vườn có hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 40m$, $AD = 30m$. Người ta muốn buộc hai con dê ở hai góc vườn A, B để hai con dê ăn cỏ. Biết dây thừng cột dê ở A dài $15m$ và dây thừng cột dê ở B dài $25m$. Diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn bằng bao nhiêu mét vuông? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).





Trả lời: ………………..

Câu 234. Đài phun nước ở Công viên Hồ Khánh Hội, TP HCM vừa khánh thành vào ngày 31/08/2019. Đài phun nước có dạng đường tròn (gọi là đường tròn tâm O) và được thiết kế theo hình dáng những cánh hoa đan xen nhau, bên dưới là hệ thống phun nước với nhiều độ cao khác nhau kết hợp với hệ thống chiếu sáng và âm nhạc cùng các mảng cây xanh tạo không gian đô thị vui tươi, sinh động. Bạn Minh Hiền vẽ tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (O) và tính được diện tích tam giác đều là $1300\,m^2$. Tính chu vi của đường tròn (O).



Trả lời: ………………..

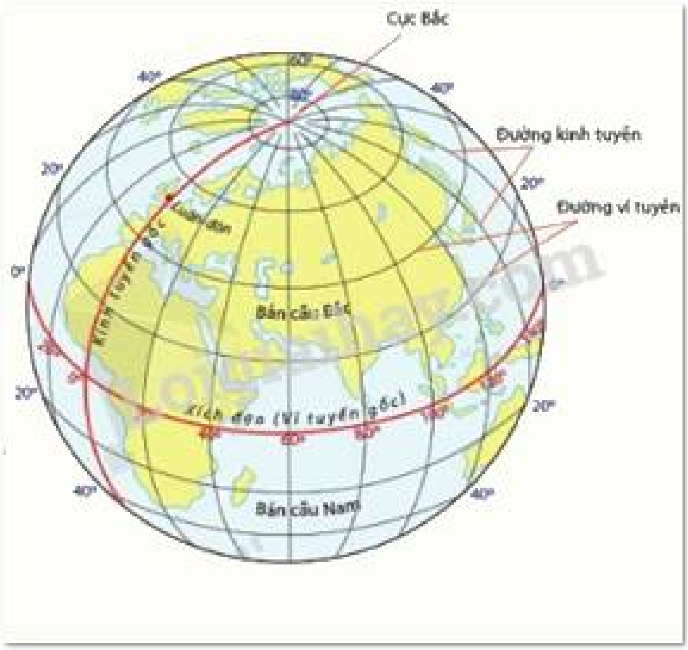
Câu 235. Thầy Thanh muốn làm một cửa sổ dạng vòm (như hình vẽ) gồm phần hình chữ nhật phía dưới và nửa hình tròn phía trên. Phần hình chữ nhật có chiều dài của cạnh đứng là $1m$, chiều dài cạnh ngang là $1.2m$. Biết giá làm mỗi mét vuông cửa là 1.000000 đồng. Hãy tính số tiền mà thầy Thanh cần bỏ ra làm cửa sổ vòm nói trên (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của triệu đồng)

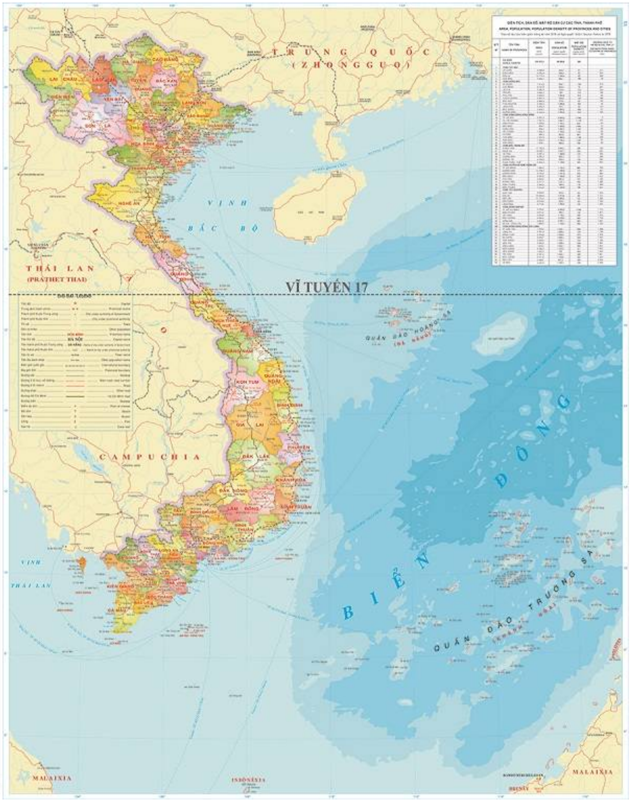
Trả lời: ………………..

Câu 236. Máy kéo nông nghiệp có hai bánh sau to hơn hai bánh trước. Khi bơm căng, bánh xe sau có đường kính là $1,672m$ và bánh xe trước có đường kính là $0,88m$. Hỏi khi bánh xe sau lăn được 10 vòng thì bánh xe trước lăn được mấy vòng?

Trả lời: ………………..

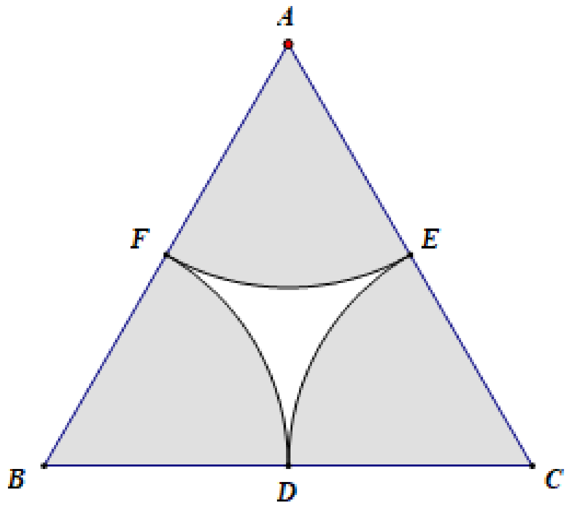
Câu 237. Hiệp định Genève 1954 về chấm dứt chiến tranh ở Đông Dương đã chọn vĩ tuyến $17°$ Bắc, dọc sông Bến Hải – tỉnh Quảng Trị làm khu vực phi quân sự, phân định giới tuyến Bắc – Nam tạm thời cho Việt Nam. Và dòng sông Bến Hải chạy dọc vĩ tuyến 17 này đã thành nơi chia cắt đất nước trong suốt hơn 20 năm chiến tranh Việt Nam. Tính độ dài cung kinh tuyến từ vĩ tuyến 17 đến xích đạo. Biết bán kính trái đất là 6400 km. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của kilômét)





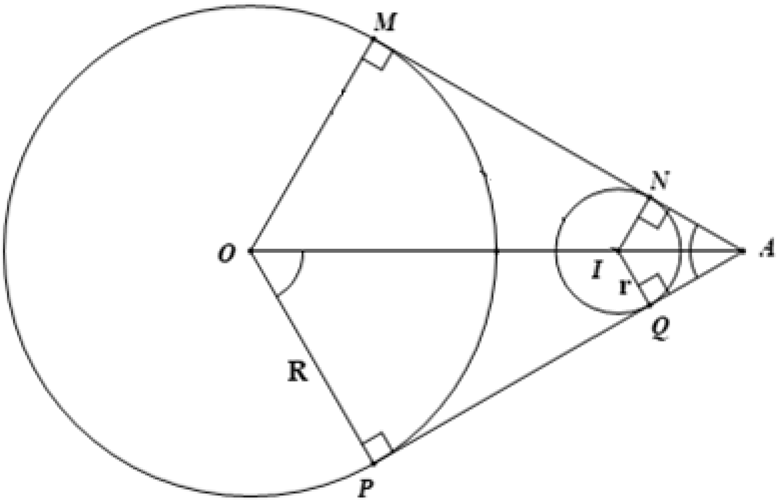
Trả lời: ………………..

Câu 238. Một tấm poster hình tam giác ABC đều có mỗi cạnh $50cm$. Ba cung tròn DE, EF, FD thuộc ba đường tròn bán kính $25cm$ có tâm lần lượt là ba điểm A, B, C (như hình vẽ). Tính diện tích phần còn lại (không tô màu) của tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimét vuông).



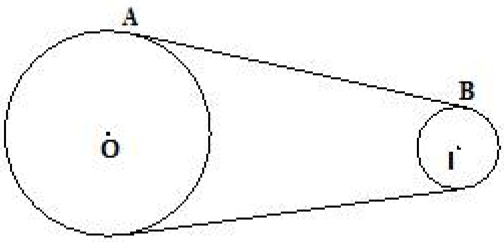
Trả lời: ………………..

Câu 239. Hai ròng rọc có tâm O bán kính R và tâm I bán kính r. Hai tiếp tuyến chung MN và PQ cắt nhau tại A tạo thành góc $60°$(như hình vẽ). Biết $r = 20cm$ và $R = 4r$, Tính độ dài dây cua – roa mắc qua hai ròng rọc trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimét).



Trả lời: ………………..

Câu 240. Một dây curoa bao quay 2 pu-ly như hình vẽ. Trong đó AB là tiếp tuyến chung của hai bánh xe. Gọi O và I lần lượt là tâm của pu-ly lớn và pu-ly nhỏ. Khoảng cách của hai tâm pu-ly là $60cm$. Bán kính của pu-ly lớn là $15cm$, bán kính pu-ly nhỏ là $7cm$ Tính chiều dài dây curoa (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimét)



Trả lời: ………………..

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 241. Cho ΔABC vuông tại A và $\widehat{ABC}=55^\circ$, vẽ đường tròn $(B;\ BA)$ và đường tròn $(C;\ CA)$ chúng cắt nhau tại D (D khác A).

a) Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn (B).

b) Tính số đo cung nhỏ AD của đường tròn $(C;CA)$.

c) Giả sử $BA=15cm$. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi cung nhỏ AD của đường tròn $(B;BA)$.

Câu 242. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A và cùng tiếp xúc với đường thẳng d tại B và C (khác A), trong đó $B\in(O)$ và $C\in(O')$. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC tại M.

a) Giả sử $\widehat{AMB}=100^\circ$. Tính số đo cung nhỏ AB.

b) Chứng minh rằng đường thẳng MA tiếp xúc với (O')

c) Chứng minh rằng ΔABC vuông.

Câu 243. Cho hai đường tròn $(O;\ R)$ và $(O';\ r)$ cắt nhau tại A và B. Gọi M là điểm đối xứng với A qua O, N là điểm đối xứng với A qua O'.

a) Chứng minh rằng ba điểm $M,\ B,\ N$ thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng OO' là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

c) Chứng minh rằng đường thẳng MN tiếp xúc với đường tròn đường kính AB.

Câu 244. Cho đường tròn (O) đường kính AB, tiếp tuyến xx' tại A và tiếp tuyến yy' tại B của (O). Một tiếp tuyến thứ ba của (O) tại điểm P (P khác A và B) cắt xx' tại M và cắt yy' tại N.

a) Chứng minh rằng $MN=MA+NB$

b) Đường thẳng đi qua O và vuông góc với AB cắt MN tại Q. Chứng minh rằng Q là trung điểm của MN.

c) Chứng minh rằng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính MN.

Câu 245. Cho đường tròn (O) và đường tròn (O') cắt nhau tại A và B. Trong đó O' nằm trên đường tròn (O). Kẻ đường kính $O'OC$ của đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng $CA,\ CB$ là hai tiếp tuyến của (O').

b) Giả sử $\widehat{AO'C}=50^\circ$ và $OA=10cm$, tính diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung AB của đường tròn (O').

c) Đường vuông góc với AO' tại O' cắt CB tại I, đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng $O'B$ tại K. Chứng minh rằng $O,\ I,\ K$ thẳng hàng.

Câu 246. Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ các đường kính AOB và $AO'C$. Đường thẳng DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn với $D \in (O)$ và $E \in (O')$. Gọi M là giao điểm của BD và CE.

a) Chứng minh tam giác ADE vuông.

b) Tứ giác $ADME$ là hình gì?

c) Chứng minh MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Câu 247. Cho đường tròn $(O;\ R)$ đường kính AB. Trên OA lấy điểm E. Gọi I là trung điểm của AE, qua điểm I vẽ dây cung $CD \perp AB$, vẽ đường tròn (O') đường kính EB cắt BC tại F.

a) Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc tại B.

b) Tứ giác $ACED$ là hình gì?

c) Chứng minh ba điểm $D,\ E,\ F$ thẳng hàng.

d) Chứng minh IF là tiếp tuyến của (O')

Câu 248. Cho đường tròn $(O;\ R)$ đường kính AB. Trên đường tròn này lấy điểm C sao cho $BC = R$. Từ B vẽ tiếp tuyến với đường tròn, tiếp tuyến này cắt đường thẳng AC tại D.

a) Tính $AC,\ BD$ theo R.

b) Vẽ đường tròn (O') đường kính BD. Chứng minh $O'C$ là tiếp tuyến của (O).

c) Giả sử $R = 5cm$. Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ BC và dây BC của đường tròn $(O;\ R)$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet vuông).

Câu 249. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Vẽ các tia tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn. Lấy điểm M di động trên Ax, điểm N di động trên tia Oy sao cho $AM.BN = R^2$.

a) Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN luôn tiếp xúc với đường thẳng AB.

Câu 250. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, tiếp tuyến Bx. Qua điểm C trên nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Bx tại M. Tia AC cắt Bx tại N.

a) Chứng minh rằng $OM \perp BC$.

b) Chứng minh M là trung điểm của BN

c) Kẻ CH vuông góc với AB, AM cắt CH tại I. Chứng minh I là trung điểm của CH.

Câu 251. Cho nửa đường tròn $(O;\ R)$, đường kính AB. Vẽ hai tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn đó. Trên tia Ax lấy điểm M sao cho $AM > R$. Từ điểm M kẻ tiếp tuyến MC với (O) (C là tiếp điểm). Tia MC cắt By tại D.

a) Chứng minh $MD = MA + BD$

b) Chứng minh ΔMOD vuông.

c) Cho $AM = 2R = 10cm$. Tính BD và chu vi tứ giác $ABDM$.

d) Tia AC cắt tia By tại K. Chứng minh $OK \perp BM$.

Câu 252. Cho đường tròn $(O;\ R)$ đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Bx của (O). Lấy điểm $M \in (O)$ (M khác A và B) sao cho AM cắt tiếp tuyến Bx tại C và $MA > MB$. Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD với (O) (với D là tiếp điểm).

a) Chứng minh $OC \perp BD$

b) Giả sử $\widehat{OBD} = 30^0$ và $R = 4cm$. Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ BD và dây BD.

c) Kẻ MH vuông góc với AB tại H. Tìm vị trí của M để chu vi ΔOMH đạt giá trị lớn nhất.

Câu 253. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O;\ R)$. Gọi $MA,\ MB$ là hai tiếp tuyến với đường tròn (O) (A và B là hai tiếp điểm). Kẻ đường kính AD của (O). Gọi H là giao điểm của OM và AB, I là trung điểm của BD.

a) Chứng minh $OHBI$ là hình chữ nhật.

b) Cho biết OI cắt MB tại K. Chứng minh KD là tiếp tuyến (O).

c) Đường thẳng qua O và vuông góc với MD cắt tia AB tại Q. Chứng minh K là trung điểm của DQ.

Câu 254. Cho đường tròn $(O;\ 3\,cm)$ và điểm M nằm bên ngoài đường tròn. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB ($A,\ B$ là hai tiếp điểm) sao cho $\widehat{AMB} = 60^0$.

a) ΔAMB là tam giác gì?

b) Qua điểm C trên cung nhỏ AB, kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt $MA,\ MB$ lần lượt tại P và Q. Tính $\widehat{POQ}$.

c) Tính chu vi ΔMPQ.

Câu 255. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, về cùng một phía vẽ các tiếp tuyến $Ax,\ By$. Qua điểm M trên nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax và By lần lượt tại C và D. Gọi N là giao điểm của AD và BC, H là giao điểm của MN và AB.

a) Chứng minh $CD = AC + BD$.

a) Chứng minh $MN \perp AB$.

b) Chứng minh $MN = NH$.

Câu 256. Cho đường tròn $(O;\ R)$, đường kính AB. Qua A và B vẽ lần lượt hai tiếp tuyến (d) và (d') với đường tròn (O). Một đường thẳng đi qua O cắt (d) ở M và cắt (d') ở P. Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với MP và cắt (d') tại N. Kẻ $OI \perp MN$ tại I.

a) Chứng minh $OM = OP$ và ΔNMP cân.

b) Chứng minh ΔNMP cân.

c) Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $AMNB$ nhỏ nhất.

Câu 257. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Vẽ hai tiếp tuyến Ax và By về cùng phía với nửa đường tròn. Từ điểm M tùy ý thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) vẽ tiếp tuyến tại M cắt Ax và By lần lượt tại C và D. Gọi E là giao điểm của CO và AM, F là giao điểm của DO và BM.

a) Chứng minh $\widehat{CMA}$ và $\widehat{CMA}$ là hai góc phụ nhau.

b) Chứng minh tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật.

c) Chứng minh $AC.BD$ không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn.

Câu 258. Cho đường tròn $(O;\ 4cm)$ đường kính AB. Lấy điểm H thuộc OA sao cho $OH = 1cm$. Kẻ dây cung DC vuông góc với AB tại H. Tiếp tuyến tại A của đường (O) cắt BC tại E.

b) Chứng minh ΔABC vuông và ΔCBD cân .

a) Chứng minh $\dfrac{EC}{DH} = \dfrac{EA}{DB}$.

c) Gọi I là trung điểm của EA, IB cắt (O) tại Q. Chứng minh CI là tiếp tuyến của (O)

d) Tiếp tuyến tại B của (O) cắt IC tại F. Chứng minh ba đường thẳng $IB,\ HC$ và AF đồng quy.

Câu 259. Cho đường tròn $(O;\ R)$, đường kính $AB = 2R$. Trên đường tròn (O) lấy điểm M $(MA < MB)$. Tiếp tuyến tại M cắt hai tiếp tuyến tại A và B lần lượt là C và D. Vẽ đường thẳng BM cắt tia AC tại E và vẽ $MH \perp AB$.

a) Chứng minh $CD = AC + BD$

b) Chứng minh $OC\ //\ MB$ và $ME.MB = AH.AB$.

c) Chứng minh $ME.MB = AH.AB$.

d) Chứng minh HM là tia phân giác của $\widehat{CHD}$.

Câu 260. Cho đường tròn $(O;\ R)$. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến ME và MF đến đường tròn ($E,\ F$ là các tiếp điểm).

a) Chứng minh OM là đường trung trực của đoạn thẳng EF.

b) Chứng minh M, E, O, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Kẻ đường kính ED của $(O;\ R)$. Hạ $FK \perp ED$. Gọi P là giao điểm của MD và FK. Chứng minh P là trung điểm của FK.

Câu 261. Cho đường tròn $(O;\ R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (O) ($B,\ C$ là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

a) Chứng minh $OH \perp BC$.

b) Chứng minh A, B, C, O cùng thuộc một đường tròn.

c) Lấy D đối xứng với B qua O. Gọi E là giao điểm của AD với đường tròn (O) (E không trùng với D). Chứng minh $DE.BA = BD.BE$

Câu 262. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB và AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ đường kính BD của (O). Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AB, cắt OA tại E.

a) Chứng minh $BC \perp OA$ tại H.

b) Chứng minh $\widehat{OCD} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$.

c) Tứ giác $OBEC$ là hình gì? Vì sao?

Câu 263. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O;\ R)$. Từ M kẻ các tiếp tuyến $MA,\ MB$ tới đường tròn ($A,\ B$ là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của MO với AB.

a) Chứng minh $HA = HB$.

b) Nếu $OM = 2R$. Tính MA theo R và số đo $\widehat{AMB}$.

c) Kẻ đường kính AD của đường tròn (O), MD cắt (O) tại điểm thức hai là C. Chứng minh rằng $\widehat{MHC} = \widehat{ADC}$.

Câu 264. Cho đường tròn $(O;\ 3\,cm)$. Điểm $A \in (O)$. Đường thẳng d vuông góc với OA tại trung điểm của OA cắt đường tròn (O) tại B và C.

a) Chứng minh rằng ΔOAB là tam giác đều.

b) Tính độ dài đoạn BC.

c) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ AB và dây AB

Câu 265. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm C thuộc đường tròn (C khác $A,\ B$). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác $B,\ C$). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt BE tại F. Gọi I là trung điểm của DF.

a) Chứng minh bốn điểm $F,\ C,\ D,\ E$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $DA.DE = DB.DC$.

c) Chứng minh $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$.

d) Chứng minh rằng CI là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Câu 266. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. C là một điểm bất kì trên nửa đường tròn sao cho C khác A và $AC < CB$. Điểm D thuộc cung nhỏ BC sao cho $\widehat{COD} = 90^0$. Gọi E là giao điểm của AD và BC, F là giao điểm của AC và BD. Gọi I là trung điểm của EF.

a) Chứng minh $C,\ E,\ D,\ F$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $FC.FA = FD.FB$.

c) Chứng minh IC là tiếp tuyến của (O).

Câu 267. Cho đường tròn (O) và ba điểm $A,\ B,\ C$ thuộc đường tròn đó sao cho ΔABC cân tại A.

a) Giả sử $BC = 6\,cm$, đường cao AM của ΔABC bằng $4\,cm$. Tính AB.

b) Gọi B' là điểm đối xứng với B qua O. Vẽ $AH \perp CB'$ tại H. Tứ giác $AHCM$ là hình gì?

Câu 268. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 6\,cm,\ AC = 8\,cm$. Vẽ đường tròn (O) đường kính AB cắt BC tại H.

a) Tính AH và CH.

b) Kẻ $OK \perp AH$ tại K, tia OK cắt AC tại D. Chứng minh rằng $DH \perp OH$

Câu 269. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn (I) đường kính BH cắt AB tại D, vẽ đường tròn (K) đường kính HC cắt AC tại E.

a) Chứng minh $ADHE$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh rằng $AD.AB = AE.AC$

c) Giả sử $AB = 3\,cm,\ BC = 5\,cm$. Tính DE và diện tích tứ giác $DEKI$.

Câu 270. Cho $(O;R)$. Từ điểm M ở ngoài đường tròn vẽ tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn. Đường trung trực của đường kính BC cắt đường thẳng AC tại K.

a) Chứng minh $\widehat{OCA} = \widehat{BOM}$

b) Tính độ dài đoạn thẳng MK theo R.

CHƯƠNG 5
ĐƯỜNG TRÒN
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tâm của đường trong ngoại tiếp tam giác vuông là:

A. Trung điểm cạnh huyền. **B.** Trung điểm cạnh góc vuông lớn hơn.
C. Giao ba đường cao. **D.** Giao ba đường trung tuyến.

Lời giải

Chọn A.

Trong tam giác vuông trung điểm cạnh huyền là tâm đường tròn ngoại tiếp.

Câu 2. Chọn câu đúng. Bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông

A. Bằng cạnh nhỏ nhất của tam giác vuông. **B.** Bằng nửa cạnh góc vuông lớn hơn.
C. Bằng nửa cạnh huyền. **D.** Bằng $4cm$.

Lời giải

Chọn C.

Trong tam giác vuông trung điểm cạnh huyền là tâm đường tròn ngoại tiếp. Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông bằng nửa cạnh huyền.

Câu 3. Số tâm đối xứng của đường tròn là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

Nên đường tròn có một tâm đối xứng duy nhất là tâm của đường tròn.

Câu 4. Tâm đối xứng của đường tròn là:

A. Điểm bất kì bên trong đường tròn. **B.** Điểm bất kì bên ngoài đường tròn.
C. Điểm bất kì trên đường tròn. **D.** Tâm của đường tròn.

Lời giải

Chọn D.

Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

Nên đường tròn có một tâm đối xứng duy nhất là tâm của đường tròn.

Câu 5. Khẳng định nào sau đây là đúng khi nói về trục đối xứng của đường tròn

A. Đường tròn không có trục đối xứng.
B. Đường tròn có duy nhất một trục đối xứng là đường kính.
C. Đường tròn có hai trục đối xứng là hai đường kính vuông góc với nhau.
D. Đường tròn có vô số trục đối xứng là đường kính.

Lời giải

Chọn D.

Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kỳ đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn. Nên đường tròn có vô số trục đối xứng.

Câu 6. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là:

A. Giao của ba đường phân giác.

B. Giao của ba đường trung trực.

C. Giao của ba đường cao.

D. Giao của ba đường trung tuyến.

Lời giải

Chọn B.

Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác đó.

Câu 7. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M bất kỳ, biết rằng $OM = R$. Chọn khẳng định đúng?

A. Điểm M nằm ngoài đường tròn.

B. Điểm M nằm trên đường tròn.

C. Điểm M nằm trong đường tròn.

D. Điểm M không thuộc đường tròn.

Lời giải

Chọn B.

Cho điểm M và đường tròn $(O;R)$ ta so sánh khoảng cách OM với bán kính R để xác định vị trí tương đối theo bảng sau:

Vị trí tương đối	Hệ thức
M nằm trên đường tròn (O)	$OM = R$
M nằm trong đường tròn (O)	$OM < R$
M nằm ngoài đường tròn (O)	$OM > R$

Câu 8. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M bất kỳ, biết rằng $OM > R$. Chọn khẳng định đúng?

A. Điểm M nằm ngoài đường tròn.

B. Điểm M nằm trên đường tròn.

C. Điểm M nằm trong đường tròn.

D. Điểm M không thuộc đường tròn.

Lời giải

Chọn A.

Vì $OM > R$ nên điểm M nằm bên ngoài đường tròn.

Câu 9. Cho đường tròn (O) đường kính AB và dây CD không đi qua tâm. Khẳng định nào sau đây là **đúng?**

A. $AB > CD$.

B. $AB = CD$.

C. $AB < CD$.

D. $AB \le CD$.

Lời giải

Chọn A.

Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

Câu 10. Xét dây AB tuỳ ý không đi qua tâm của đường tròn $(O;R)$. Nhận định nào sau đây đúng?

A. $AB < R$.

B. $AB = R$.

C. $AB \le 2R$.

D. $AB < 2R$.

Lời giải

Chọn D.

Xét dây AB tuỳ ý không đi qua tâm của đường tròn $(O;R)$ thì $AB < 2R$.

Câu 11. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. Đoạn thẳng nối hai điểm tuỳ ý của một đường tròn gọi là một dây cung của đường tròn.

B. Mỗi dây đi qua tâm là một đường kính của đường tròn.

C. Khi dây AB không là đường kính của đường tròn tâm $(O;R)$ thì $AB \le 2R$.

D. Khi dây AB là đường kính của đường tròn tâm O bán kính R, ta có $AB = AO + OB = 2R$.

Lời giải

Chọn B.

- Dựa vào khái niệm dây và đường kính, mối quan hệ giữa dây và đường kính có đáp án A, B, D đúng.

- Khi dây AB **không** là đường kính của đường tròn tâm $(O;R)$ thì $AB < 2R$.

Câu 12. Đường thẳng và đường tròn có nhiều nhất bao nhiêu điểm chung.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Đường thẳng cắt đường tròn có nhiều nhất là 2 điểm chung

Câu 13. Nếu đường thẳng và đường tròn có duy nhất một điểm chung thì:

A. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn. **B.** Đường thẳng cắt đường tròn.

C. Đường thẳng không cắt đường tròn. **D.** Tất cả đều đúng.

Lời giải

Chọn A.

Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn thì có duy nhất một điểm chung

Câu 14. Nếu đường thẳng và đường tròn có hai điểm chung thì

A. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn. **B.** Đường thẳng cắt đường tròn.

C. Đường thẳng không cắt đường tròn. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn B.

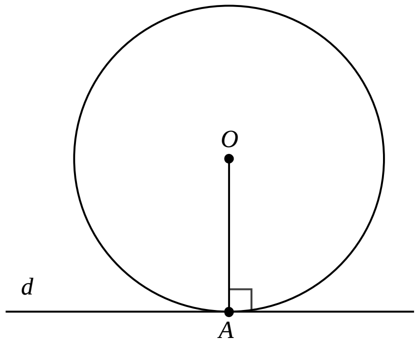
Đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm thì đường thẳng và đường tròn có hai điểm chung.

Câu 15. Nếu đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A thì:

A. $d // OA$. **B.** $d \equiv OA$. **C.** $d \perp OA$ tại A. **D.** $d \perp OA$ tại O.

Lời giải

Chọn C.



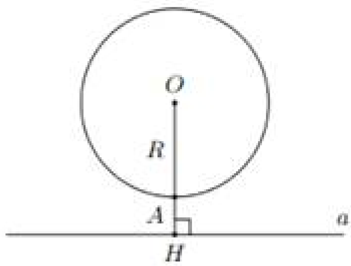
Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm. Nên $d \perp OA$ tại điểm A.

Câu 16. Cho đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng a. Kẻ $OH \perp a$, biết $OH > R$ khi đó đường thẳng a và đường tròn (O) như thế nào với nhau?

A. Cắt nhau. **B.** Không cắt nhau. **C.** Tiếp xúc. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn B.



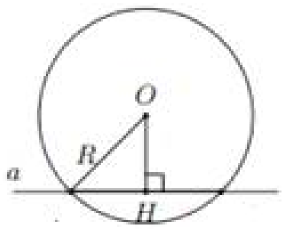
$OH > R$ khi đó đường thẳng a không cắt đường tròn (O)

Câu 17. Cho đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng a. Kẻ $OH \perp a$ tại H, biết $OH < R$, khi đó đường thẳng a và đường tròn (O) như thế nào với nhau?

A. Cắt nhau. **B.** Không cắt nhau. **C.** Tiếp xúc. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn A.



$OH < R$ khi đó đường thẳng a cắt đường tròn (O) tại 2 điểm

Câu 18. Cho hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm. Chọn khẳng định sai?

A. Khoảng cách từ điểm đó đến hai tiếp điểm là bằng nhau.

B. Tia nối điểm đó tới tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính.

C. Tia nối từ tâm tới điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính.

D. Tia nối từ điểm đó tới tâm là tia phân giác của góc tạo bởi tiếp tuyến.

Lời giải

Chọn B.

Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của các góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua tiếp điểm.

Câu 19. "Cho hai tiếp tuyến của một đường trong cắt nhau tại một điểm. Tia nối từ điểm đó tới tâm là tia phân giác của góc tạo bởi … . Tia nối từ tâm tới điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi …". Hai cụm từ thích hợp vào chỗ trống lần lượt là:

A. Hai tiếp tuyến, hai bán kính đi qua tiếp điểm.

B. Hai bán kính đi qua tiếp điểm, hai tiếp tuyến.

C. Hai tiếp tuyến, hai dây cung.

D. Hai dây cung, hai bán kính.

Lời giải

Chọn A.

Câu 20. Mỗi một tam giác có bao nhiêu đường tròn bàng tiếp?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác.

Với một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.

Câu 21. Tâm đường tròn bàng tiếp tam giác là:

A. Giao ba đường trung tuyến.

B. Giao ba đường phân giác trong của tam giác.

C. Giao của 1 đường phân giác góc trong và hai đường phân giác góc ngoài của tam giác.

D. Giao ba đường trung trực.

Lời giải

Chọn C.

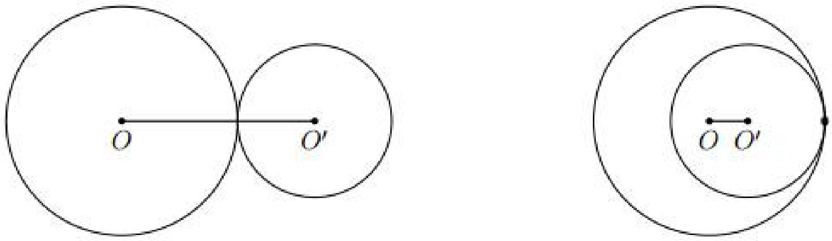
Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác. Tâm đ ường tròn bàng tiếp tam giác là giao của 1 đường phân giác góc trong và hai đường phân giác góc ngoài của tam giác.

Câu 22. Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì số điểm chung của hai đường tròn là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.



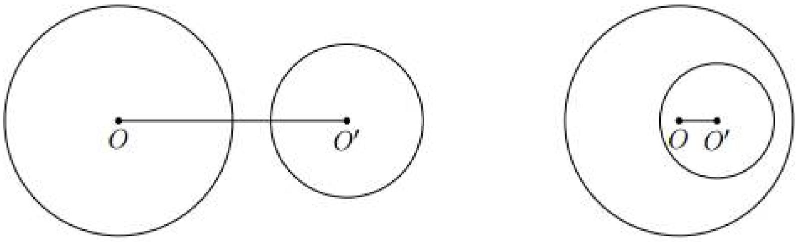
Hai đường tròn tiếp xúc với nhau thì có một điểm chung duy nhất.

Câu 23. Nếu hai đường tròn không cắt nhau thì số điểm chung của hai đường tròn là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D.



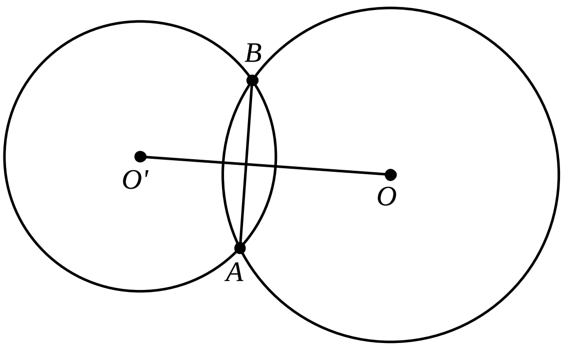
Hai đường tròn không cắt nhau thì không có điểm chung duy nhất.

Câu 24. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ với $R > r$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt và $OO' = d$. Chọn khẳng định đúng?

A. $d = R - r$. **B.** $d > R + r$. **C.** $R - r < d < R + r$. **D.** $d < R - r$.

Lời giải

Chọn C.



Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ $(R > r)$ cắt nhau.

Khi đó (O) và (O') có hai điểm chung và đường nối tâm là đường trung trực của đoạn AB.

Hệ thức liên hệ $R - r < OO' < R + r$.

Câu 25. Chọn khẳng định đúng. Góc ở tâm là góc

A. Có đỉnh nằm trên đường tròn.

B. Có đỉnh trùng với tâm đường tròn.

C. Có hai cạnh là hai đường kính của đường tròn.

D. Có đỉnh nằm trên bán kính của đường tròn.

Lời giải

Chọn B.

Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.

Câu 26. Chọn khẳng định đúng. Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là:

A. Góc ở tâm.
B. Góc tạo bởi hai bán kính.
C. Góc bên ngoài đường tròn.
D. Góc bên trong đường tròn.

Lời giải

Chọn A.

Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.

Câu 27. Chọn khẳng định đúng. Trong một đường tròn, số đo cung nhỏ bằng:

A. Số đo cung lớn.
B. Số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
C. Số đo của góc ở tâm chắn cung lớn.
D. Số đo của cung nửa đường tròn.

Lời giải

Chọn B.

Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

Câu 28. Chọn khẳng định đúng. Trong một đường tròn, số đo cung lớn bằng

A. Số đo cung nhỏ.
B. Hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ (có chung 2 mút với cung lớn).
C. Tổng giữa 360° và số đo của cung nhỏ (có chung 2 mút với cung lớn).
D. Số đo của cung nửa đường tròn.

Lời giải

Chọn B.

Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ (có chung 2 mút với cung lớn).

Câu 29. Trong hai cung của một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau, cung nào nhỏ hơn

A. Có số đo lớn hơn.
B. Có số đó nhỏ hơn 90°.
C. Có số đo lớn hơn 90°.
D. Có số đo nhỏ hơn.

Lời giải

Chọn D.

Trong hai cung của một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau, cung nào nhỏ hơn thì có số đo nhỏ hơn.

Câu 30. Chọn câu đúng. Trong hai cung của một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

A. Hai cung bằng nhau nếu chúng đều là cung nhỏ.
B. Hai cung bằng nhau nếu chúng số đo nhỏ hơn 90°.
C. Hai cung bằng nhau nếu chúng đều là cung lớn.
D. Hai cung bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

Lời giải

Chọn D.

Trong hai cung của một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau, hai cung bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

Câu 31. Góc nội tiếp nhỏ hơn hoặc bằng $90°$ có số đo

A. Bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.

B. Bằng số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

C. Bằng số đo cung bị chắn.

D. Bằng nửa số đo cung lớn.

Lời giải

Chọn A.

Trong một đường tròn: Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng $90°$) có số đo bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.

Câu 32. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn bằng bao nhiêu độ?

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn B.

Trong một đường tròn, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Câu 33. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. Trong một đường tròn, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

B. Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau.

C. Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp cùng chắn cung một cung thì bằng nhau.

D. Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau thì cùng chắn một cung.

Lời giải

Chọn D.

Trong một đường tròn:

+ Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

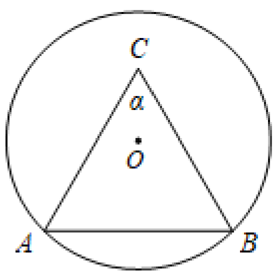
+ Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

+ Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Như vậy hai góc nội tiếp bằng nhau có thể cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau.

Phương án A, B, C đúng và D sai.

Câu 34. Cho đường tròn (O) và góc $\alpha = \widehat{ACB}$ như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây đúng?

A. $\alpha = \frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{AB}$.

B. α là góc nội tiếp của đường tròn (O).

C. α không phải là góc nội tiếp của đường tròn (O).

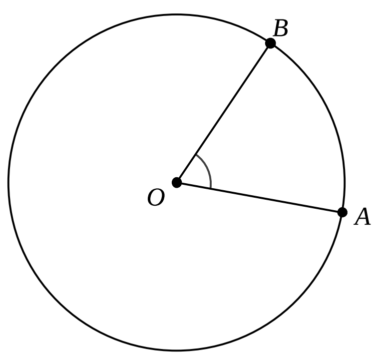
D. Tất cả đều sai.

Lời giải

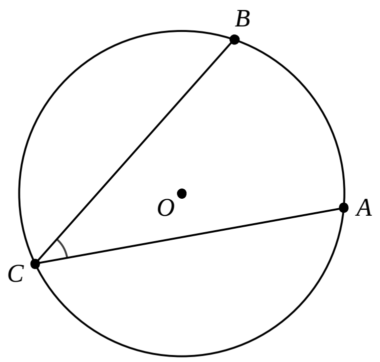
Chọn C.

Do $\widehat{ACB}$ nằm trong đường tròn (O) nên α không phải là góc nội tiếp của đường tròn (O).

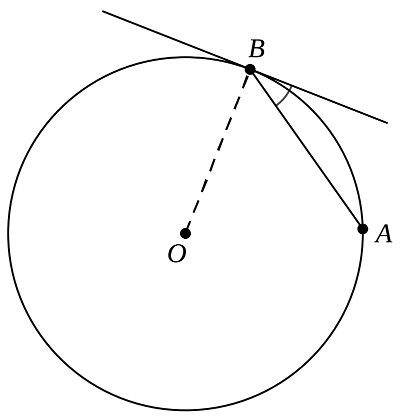
Câu 35. Hình nào dưới đây biểu diễn góc nội tiếp của đường tròn (O)?



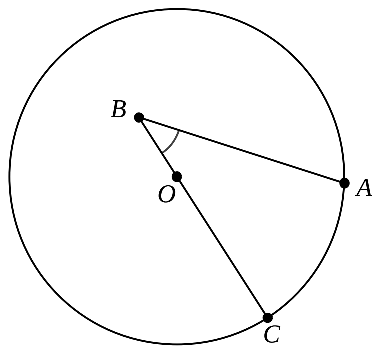
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

Lời giải

Chọn B.

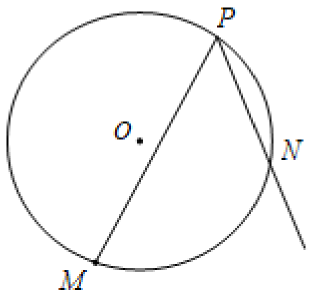
Hình 1 góc $\widehat{BOA}$ là góc ở tâm.

Hình 2 góc $\widehat{BCA}$ là góc nội tiếp chắn cung AB

Hình 3 có 1 cạnh không phải là dây của đường tròn.

Hình 4 đỉnh B không nằm trên đường tròn.

Câu 36. Cho đường tròn (O) và ba điểm M, N, P nằm trên đường tròn (O) như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây đúng?

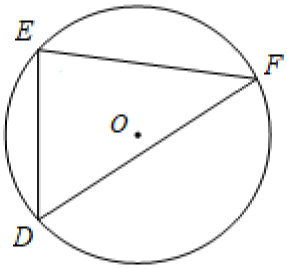
A. $\widehat{MPN} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{MN}$.   **B.** $\widehat{MPN} = sđ\,\overset{\frown}{MN}$.   **C.** $\widehat{MPN} = 2sđ\,\overset{\frown}{MN}$.   **D.** Tất cả đều sai.

Lời giải

Chọn A.

$\widehat{MPN} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{MN}$ (góc nội tiếp)

Câu 37. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác DEF như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây sai?

A. $\widehat{DEF} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{DF}$.   **B.** $\widehat{EDF} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{EF}$.   **C.** $\widehat{DFE} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{DE}$.   **D.** $\widehat{DEF} = \widehat{EDF}$.

Lời giải

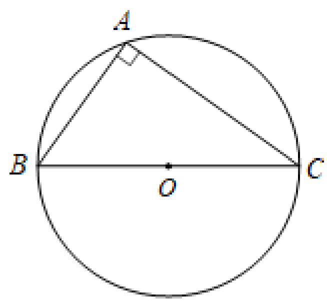
Chọn D.

$\widehat{DEF} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{DF}$ (góc nội tiếp)

$\widehat{EDF} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{EF}$ (góc nội tiếp)

$\widehat{DFE} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{DE}$ (góc nội tiếp)

Câu 38. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây sai?

A. $\widehat{ABC}=\frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{AC}$.

B. $\widehat{ACB}=\frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{AB}$.

C. $\widehat{BAC}$ không phải là góc nội tiếp của đường tròn (O).

D. $sđ\,\overset{\frown}{BC}=180^\circ$.

Lời giải

Chọn C.

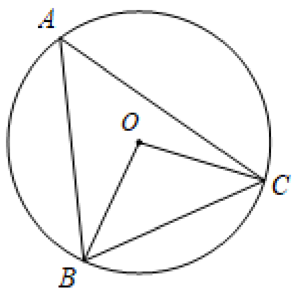
$\widehat{ABC}=\frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{AC}$ (góc nội tiếp)

$\widehat{ACB}=\frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{AB}$ (góc nội tiếp)

$\widehat{BAC}$ là góc nội tiếp của đường tròn (O).

$sđ\,\overset{\frown}{BC}=180^\circ$ do là đường kính của đường tròn (O).

Câu 39. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây sai?

A. $\widehat{BAC}=\frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{BC}$. **B.** $\widehat{BAC}=\widehat{BOC}$. **C.** $\widehat{BAC}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}$. **D.** $\widehat{BOC}=sđ\,\overset{\frown}{BC}$.

Lời giải

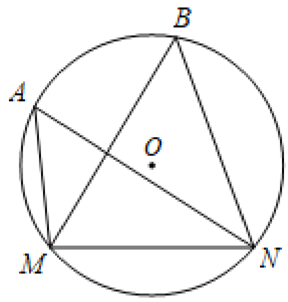
Chọn B.

$\widehat{BAC}=\frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{BC}$ (góc nội tiếp)

$\widehat{BAC}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}$ (góc nội tiếp bằng $\frac{1}{2}$ số đo góc ở tâm cùng chắn một cung)

$\widehat{BOC}=sđ\,\overset{\frown}{BC}$ (góc ở tâm)

Câu 40. Cho đường tròn (O) như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây đúng?

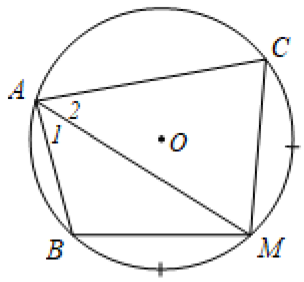
A. $\widehat{MAN} = sđ\,\overset{\frown}{MN}$. **B.** $\widehat{MAN} = \widehat{MBN}$. **C.** $\widehat{MBN} = sđ\,\overset{\frown}{MN}$. **D.** Tất cả đều sai..

Lời giải

Chọn B.

$\widehat{MAN} = \widehat{MBN}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Câu 41. Cho đường tròn (O) và $sđ\,\overset{\frown}{BM} = sđ\,\overset{\frown}{CM}$ như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây đúng?

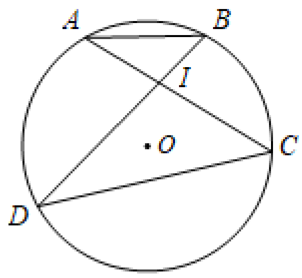
A. $\widehat{A_1} = 2sđ\,\overset{\frown}{BM}$. **B.** $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. **C.** $\widehat{A_2} = 2sđ\,\overset{\frown}{CM}$. **D.** Tất cả đều sai..

Lời giải

Chọn B.

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Câu 42. Cho đường tròn (O) như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây sai?

A. $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. **B.** $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$. **C.** $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{BC}$. **D.** Tất cả đều sai.

Lời giải

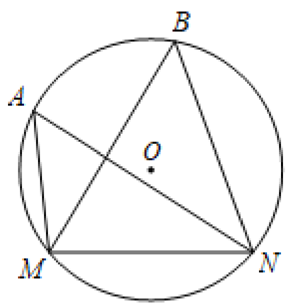
Chọn D.

$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{BC}$ (góc nội tiếp)

Câu 43. Cho đường tròn (O) như hình vẽ.



Nhận định nào sau đây sai?

A. $\widehat{MAN} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{MN}$. **B.** $\widehat{MNN} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{MN}$. **C.** $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$. **D.** Tất cả đều sai.

Lời giải

Chọn D.

$\widehat{MAN} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{MN}$ (góc nội tiếp)

$\widehat{MNN} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{MN}$ (góc nội tiếp)

$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Câu 44. Trên đường tròn $(O;5\text{cm})$ lấy hai điểm A và B. Khi đó

A. $AB < 5\text{cm}$. **B.** $AB = 5\text{cm}$. **C.** $AB \le 10\text{cm}$. **D.** $AB < 10\text{cm}$.

Lời giải

Chọn C.

Trên đường tròn $(O;5\text{cm})$ lấy hai điểm A và B, khi đó AB là dây của đường tròn, suy ra $AB \le 10\text{cm}$

Câu 45. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đi qua cả bốn đỉnh của hình vuông $ABCD$ cạnh a.

A. Tâm là giao điểm A và bán kính $R = a\sqrt{2}$.

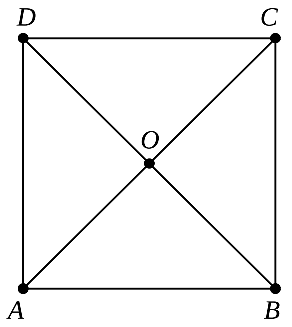
B. Tâm là giao điểm hai đường chéo và bán kính $R = a\sqrt{2}$.

C. Tâm là giao điểm hai đường chéo và bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. Tâm là điểm B và bán kính là $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi O là giao hai đường chéo của hình vuông $ABCD$. Khi đó theo tính chất của hình vuông ta có $OA=OB=OC=OD$ nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$, bán kính $R=OA=\frac{AC}{2}$.

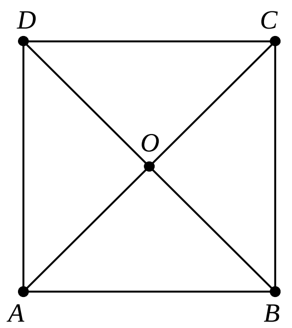
Xét tam giác ABC vuông cân tại B ta có $AC^2=AB^2+BC^2$ suy ra $AC=a\sqrt{2}$ hay $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 46. Tính bán kính R của đường tròn đi qua cả bốn đỉnh của hình vuông $ABCD$ cạnh $3cm$.

A. $R=3\sqrt{2}\,cm$. **B.** $R=\frac{3\sqrt{2}}{2}cm$. **C.** $R=3cm$. **D.** $R=\frac{3\sqrt{3}}{2}cm$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi O là giao hai đường chéo của hình vuông $ABCD$. Khi đó theo tính chất của hình vuông ta có $OA=OB=OC=OD$ nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$, bán kính $R=OA=\frac{AC}{2}$.

Xét tam giác ABC vuông cân tại B ta có $AC^2=AB^2+BC^2=3^2+3^2=18$ suy ra $AC=3\sqrt{2}$ hay $R=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Câu 47. Cho tam giác ABC có các đường cao BD, CE. Biết rằng bốn điểm B, E, D, C cùng nằm trên một đường tròn. Chỉ rõ tâm và bán kính của đường tròn đó.

A. Tâm là trọng tâm tam giác ABC và bán kính $R=\frac{2}{3}AI$ với I là trung điểm của BC.

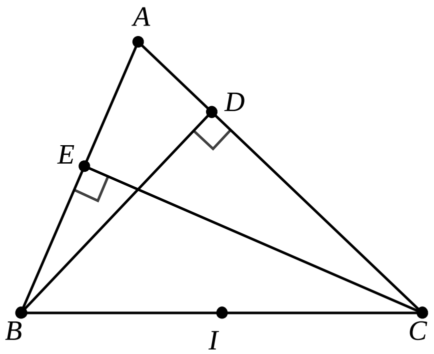
B. Tâm là trung điểm AB và bán kính là $R=\frac{AB}{2}$.

C. Tâm là giao điểm của BD và EC, bán kính là $R=\frac{BD}{2}$.

D. Tâm là trung điểm BC và bán kính là $R = \dfrac{BC}{2}$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi I là trung điểm của BC.

Xét tam giác BEC vuông tại E có $EI = IB = IC = \dfrac{BC}{2}$ (vì EI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền).

Xét tam giác BDC vuông tại D có $DI = IB = IC = \dfrac{BC}{2}$ (vì DI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền).

Từ đó ta có $ID = IE = IB = IC = \dfrac{BC}{2}$ nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DEBC$ và bán kính $R = \dfrac{BC}{2}$.

Câu 48. Cho tam giác ABC có các đường cao BD, CE. Chọn khẳng định đúng.

A. Bốn điểm B, E, D, C cùng nằm trên một đường tròn.

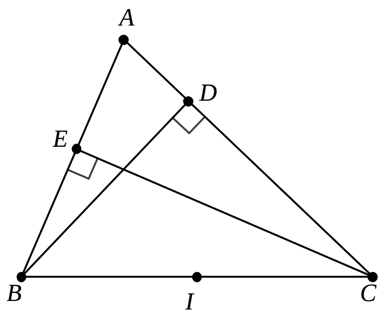
B. Năm điểm A, B, E, D, C cùng nằm trên một đường tròn.

C. Cả A, B đều sai.

D. Cả A, B đều đúng.

Lời giải

Chọn A.



Gọi I là trung điểm của BC.

Xét tam giác BEC vuông tại E có $EI = IB = IC = \dfrac{BC}{2}$ (vì EI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền).

Xét tam giác BDC vuông tại D có $DI = IB = IC = \dfrac{BC}{2}$ (vì DI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền).

Từ đó ta có $ID = IE = IB = IC = \dfrac{BC}{2}$ nên bốn điểm B, E, D, C cùng nằm trên một đường tròn có bán kính $R = \dfrac{BC}{2}$.

Ta thấy $IA > ID$ nên điểm A không thuộc đường tròn trên.

Câu 49. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, xác định vị trí tương đối của điểm $A(-1;-1)$ và đường tròn tâm là gốc toạ độ O, bán kính $R = 2$.

A. Điểm A nằm ngoài đường tròn.
B. Điểm A nằm trên đường tròn.
C. Điểm A nằm trong đường tròn.
D. Không kết luận được.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $OA = \sqrt{(-1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2} < 2 = R$ nên A nằm trong đường tròn tâm O bán kính $R = 2$.

Câu 50. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, xác định vị trí tương đối của điểm $A(-3;-4)$ và đường tròn tâm là gốc toạ độ O, bán kính $R = 3$.

A. Điểm A nằm ngoài đường tròn.
B. Điểm A nằm trên đường tròn.
C. Điểm A nằm trong đường tròn.
D. Không kết luận được.

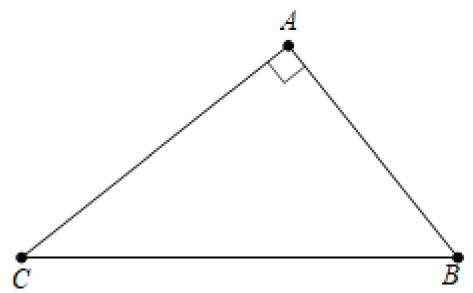
Lời giải

Chọn A.

Ta có $OA = \sqrt{(-3-0)^2 + (-4-0)^2} = 5 > 3 = R$ nên A nằm bên ngoài đường tròn tâm O bán kính $R = 3$.

Đáp án cần chọn là A.

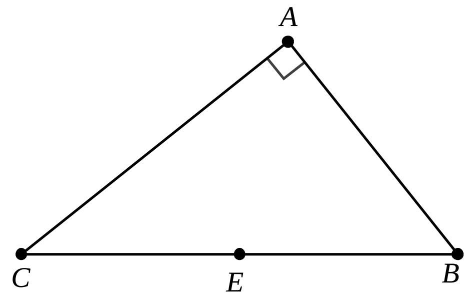
Câu 51. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = 20\,cm$. Hỏi bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu ?



A. $20cm$.
B. $10cm$.
C. $40cm$.
D. $30cm$.

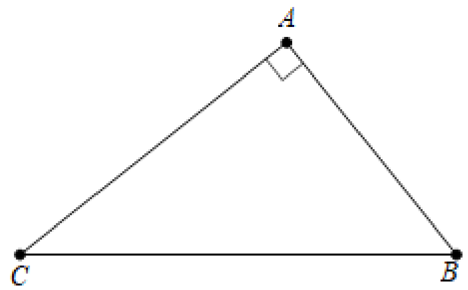
Lời giải

Chọn B.



Vì tam giác ABC vuông tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm cạnh huyền BC, bán kính là $R=\frac{BC}{2}=10cm$.

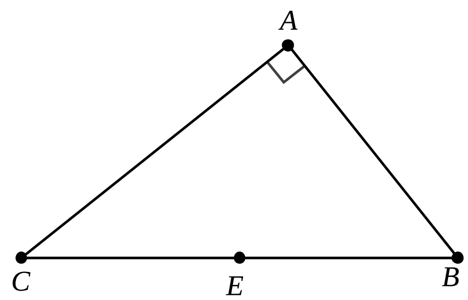
Câu 52. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB=5cm; AC=12cm$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



A. $R=26cm$. **B.** $R=13cm$. **C.** $R=\frac{13}{2}cm$. **D.** $R=6cm$.

Lời giải

Chọn C.



Vì tam giác ABC vuông tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm cạnh huyền BC, bán kính là $R=\frac{BC}{2}$.

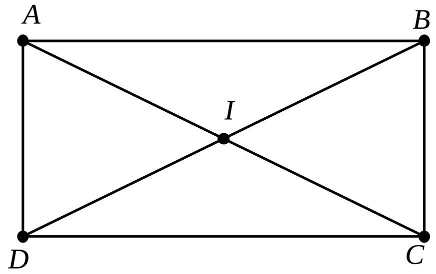
Theo định lý Phythagore ta có $BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=13$ nên bán kính $R=\frac{13}{2}$.

Câu 53. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=12cm, BC=5cm$. Tính bán kính R của đường tròn đi qua bốn đỉnh A,B,C,D.

A. $R = 7,5cm$. **B.** $R = 13cm$. **C.** $R = 6cm$. **D.** $R = 6,5cm$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi I là giao hai đường chéo, ta có $IA = IB = IC = ID$ (vì $BD = AC$ và I là trung điểm mỗi đường)

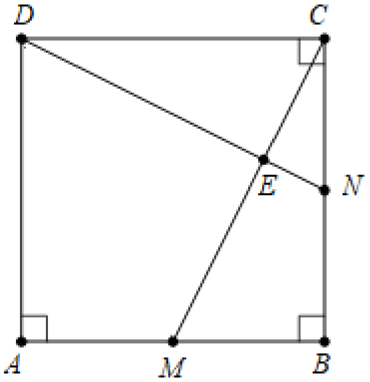
Nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn tâm I bán kính $R = \dfrac{AC}{2}$

Theo định lý Phythagore trong tam giác vuông ABC ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 13$ nên

$R = \dfrac{AC}{2} = 6,5cm$.

Vậy bán kính cần tìm là $R = 6,5cm$.

Câu 54. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Gọi E là giao điểm của CM và DN.



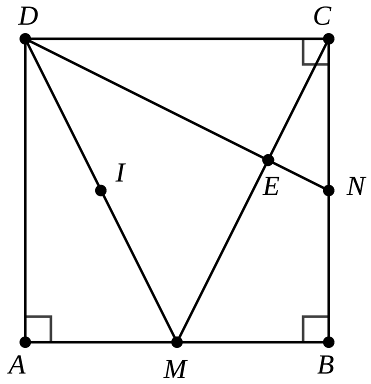
Tâm của đường tròn đi qua bốn điểm A, D, E, M là:

A. Trung điểm của DM. **B.** Trung điểm của DB.

C. Trung điểm của DE. **D.** Trung điểm của DA.

Lời giải

Chọn A.



Ta có $\Delta DCN = \Delta CMB$ (c – g – c) suy ra $\widehat{CDN} = \widehat{ECN}$ nên $\widehat{CNE} + \widehat{ECN} = \widehat{CNE} + \widehat{CDN} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{CEN} = 90^\circ$ hay $CM \perp DN$

Gọi I là trung điểm của DM .

Xét tam giác vuông ADM ta có $AI = ID = IM = \dfrac{DM}{2}$. Xét tam giác vuông DEM ta có $EI = ID = IM = \dfrac{DM}{2}$. Nên $EI = ID = IM = IA = \dfrac{DM}{2}$.

Do đó bốn điểm A, D, E, M cùng thuộc đường tròn tâm I bán kính $\dfrac{DM}{2}$.

Câu 55. Cho hai đường tròn $(O;\ 5\,cm)$ và $(O';2\,cm)$ và đoạn thẳng $OO' = 3\,cm$. Nhận xét nào sau đây đúng?

A. Đường tròn (O) và đường tròn (O') cắt nhau tại hai điểm.

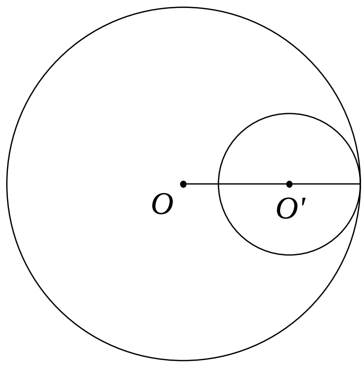
B. Đường tròn (O) và đường tròn (O') không cắt nhau.

C. Đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc ngoài với nhau.

D. Đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc trong với nhau.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $OO' = R - r$ $(3\,cm = 5\,cm - 2\,cm)$

Nên đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc trong.

Câu 56. Cho hai đường tròn $(O;\ 3\,cm)$ và $(O';\ 2\,cm)$ và đoạn thẳng $OO' = 5\,cm$. Nhận xét nào sau đây đúng?

A. Đường tròn (O) và đường tròn (O') cắt nhau tại hai điểm.

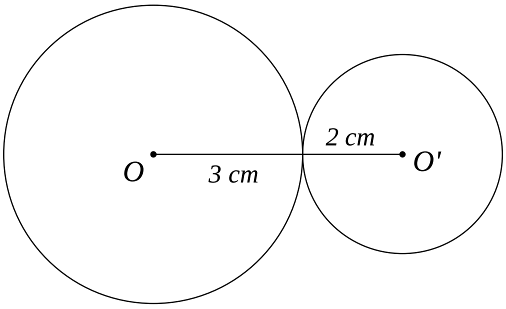
B. Đường tròn (O) và đường tròn (O') không cắt nhau.

C. Đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc ngoài với nhau.

D. Đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc trong với nhau.

Lời giải

Chọn C.



Ta có $OO' = R + r\ \ (5\,cm = 3\,cm + 2\,cm)$

Nên đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc ngoài với nhau.

Câu 57. Cho đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng a. d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a. Điền vào các vị trí (1); (2) trong bảng sau

R	d	**Vị trí tương đối của đường thẳng a và đường tròn $(O;R)$**
$5\,cm$	$4\,cm$	$\ldots(1)\ldots$
$8\,cm$	$\ldots(2)\ldots$	Tiếp xúc nhau

A. (1): cắt nhau; (2): $8cm$.

B. (1): $9cm$; (2): Tiếp xúc nhau.

C. (1): không cắt nhau; (2): $8cm$.

D. (1): cắt nhau; (2): $6cm$.

Lời giải

Chọn A.

+ Vì $d < R(4cm < 5cm)$ nên đường thẳng cắt đường tròn.

+ Vì đường thẳng tiếp xúc với đường tròn nên $d = R = 8cm$.

Câu 58. Cho đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng a. d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a. Điền vào các vị trí (1); (2) trong bảng sau

R	d	**Vị trí tương đối của đường thẳng a và đường tròn $(O;R)$**
$3cm$	$5cm$	$\ldots(1)\ldots$

…(2)…	$9cm$	Tiếp xúc nhau

A. (1): cắt nhau; (2): $9cm$.
B. (1): tiếp xúc nhau; (2): $8cm$.
C. (1): không cắt nhau; (2): $9cm$.
D. (1): không cắt nhau; (2): $10cm$.

Lời giải

Chọn C.

+ Vì $d > R(5cm > 3cm)$ nên đường thẳng không cắt đường tròn hay (1) điền là: không cắt nhau.

+ Vì đường thẳng tiếp xúc với đường tròn nên $d = R = 9cm$ hay (2) điền là $9cm$.

Câu 59. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(4;5)$. Hãy xác định tương đối của đường tròn $(A;5)$ và các trục toạ độ.

A. Trục hoành cắt đường tròn và trục tung tiếp xúc với đường tròn.
B. Trục tung cắt đường tròn và trục hoành tiếp xúc với đường tròn.
C. Cả hai trục toạ độ đều cắt đường tròn.
D. Cả hai trục toạ độ đều tiếp xúc với đường tròn.

Lời giải

Chọn B.

Vì $A(4;5)$ nên khoảng cách từ A đến trục hoành là $d_1 = |y_A| = 5$, khoảng cách từ A đến trục tung là $d_2 = |x_A| = 4$.

Nhận thấy $d_2 = R(=5)$ nên trục hoành tiếp xúc với đường tròn $(A;5)$.

Và $d_2 = 4 < 5 = R$ nên trục tung cắt đường tròn $(A;5)$.

Câu 60. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(-2;3)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn $(A;2)$ và các trục toạ độ.

A. Trục tung cắt đường tròn và trục hoành tiếp xúc với đường tròn.
B. Trục hoành không cắt đường tròn và trục tung tiếp xúc với đường tròn.
C. Cả hai trục toạ độ đều cắt đường tròn.
D. Cả hai trục toạ độ đều tiếp xúc với đường tròn.

Lời giải

Chọn B.

Vì $A(-2;3)$ nên khoảng cách từ A đến trục hoành là $d_1 = |y_A| = 3$, khoảng cách từ A đến trục tung là $d_2 = |x_A| = 2$.

Nhận thấy $d_2 = R(=2)$ nên trục tung tiếp xúc với đường tròn $(A;2)$.

Và $d_2 = 3 > 2 = R$ nên trục hoành không cắt đường tròn $(A;2)$.

Đáp án cần chọn là B.

Câu 61. Cho $a;b$ là hai đường thẳng song song và cách nhau một khoảng $3cm$. Lấy điểm I trên a và vẽ đường tròn $(I;3,5cm)$. Khi đó đường tròn với đường thẳng b.

A. Cắt nhau. **B.** Không cắt nhau. **C.** Tiếp xúc. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn A.

Vì hai đường thẳng song song a,b cách nhau một khoảng là $3cm$ mà $I\in a$ nên khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng b là $d=3cm$.

Suy ra $d<R\,(3cm<3,5cm)$ nên đường tròn $(I;3,5cm)$ và đường thẳng b cắt nhau.

Câu 62. Cho $a;b$ là hai đường thẳng song song và cách nhau một khoảng $2,5cm$. Lấy điểm I trên a và vẽ đường tròn $(I;2,5cm)$. Khi đó đường tròn với đường thẳng b.

A. Cắt nhau. **B.** Không cắt nhau. **C.** Tiếp xúc. **D.** Đáp án khác.

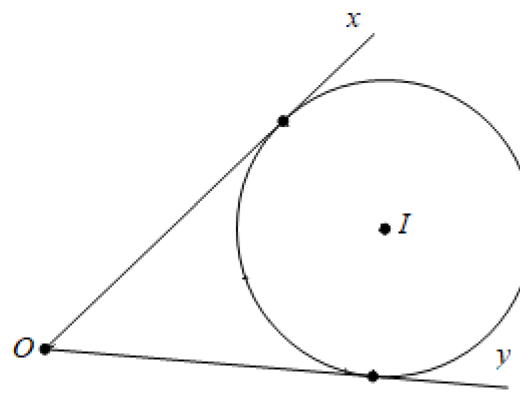
Lời giải

Chọn C.

Vì hai đường thẳng song song a,b cách nhau một khoảng là $2,5cm$ mà $I\in a$ nên khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng b là $d=2,5cm$.

Suy ra $d=R=2,5cm$ nên đường tròn $(I;2,5cm)$ và đường thẳng b tiếp xúc với nhau.

Câu 63. Cho góc $\widehat{xOy}$ $\left(0^\circ<\widehat{xOy}<180^\circ\right)$. Đường tròn (I) là đường tròn tiếp xúc với cả hai đường thẳng $Ox;Oy$. Khi đó điểm I chạy trên đường nào?

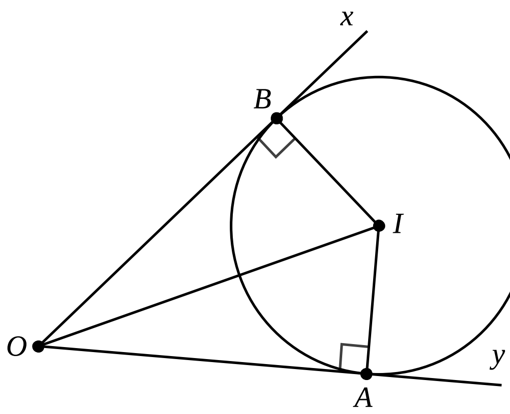


A. Đường thẳng vuông góc với Ox tại O. **B.** Tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

C. Tia Oz nằm giữa Ox và Oy. **D.** Tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ trừ điểm O.

Lời giải

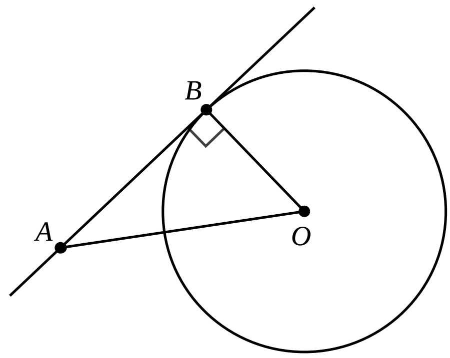
Chọn D.



Kẻ $IA \perp Oy; IB \perp Ox$ tại A, B.

Vì (I) tiếp xúc với cả $Ox; Oy$ nên $IA = IB$ suy ra I thuộc tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ $(I \neq O)$ (tính chất tia phân giác của một góc).

Câu 64. Cho đường tròn tâm O bán kính $3cm$ và một điểm A cách O là $5cm$. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (B là tiếp điểm). Tính độ dài AB.



A. $AB = 4cm$. **B.** $AB = 5cm$. **C.** $AB = 8cm$. **D.** $AB = 10cm$.

Lời giải

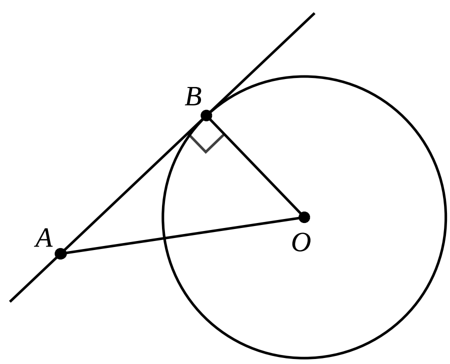
Chọn A.

Vì AB là tiếp tuyến và B là tiếp điểm nên $OB = R = 3cm; AB \perp OB$ tại B.

Áp dụng định lý Phythagore cho tam giác ABO vuông tại B ta được:

$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4cm$.

Câu 65. Cho đường tròn tâm O bán kính $6cm$ và một điểm A cách O là $10cm$. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (B là tiếp điểm). Tính độ dài AB.



A. $AB = 5cm$. **B.** $AB = 4cm$. **C.** $AB = 6cm$. **D.** $AB = 8cm$.

Lời giải

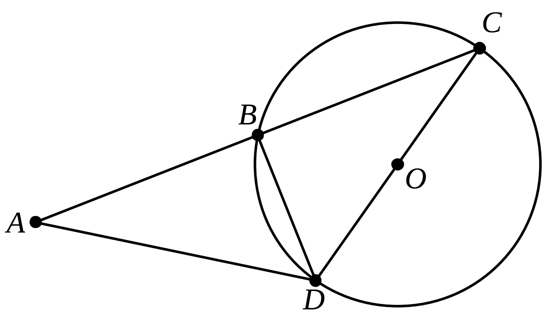
Chọn D.

Vì AB là tiếp tuyến và B là tiếp điểm nên $OB = R = 6cm; AB \perp OB$ tại B.

Áp dụng định lý Phythagore cho tam giác ABO vuông tại B ta

được: $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8cm$.

Câu 66. Cho đường tròn $(O; R)$. Cát tuyến qua A ở ngoài (O) cắt (O) tại B và C. Cho biết $AB = BC$ và kẻ đường kính COD. Tính độ dài đoạn thẳng AD.



A. $AD = R$. **B.** $AD = 3R$. **C.** $AD = \frac{R}{2}$. **D.** $AD = 2R$.

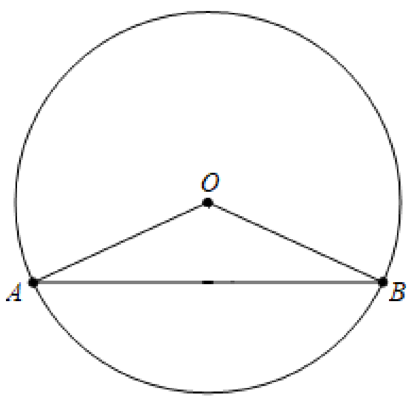
Lời giải

Chọn D.

Xét (O) có $OB = OC = OD$ nên $BO = \frac{DC}{2}$ hay ΔBDC vuông tại B suy ra $BD \perp AC$.

$\Delta ABD = \Delta CBD$ nên $DA = DC = 2R$.

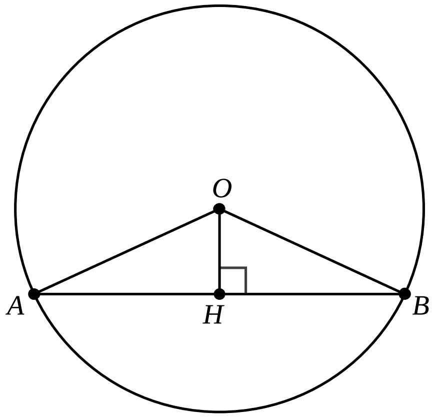
Câu 67. Cho đường tròn (O) có bán kính $R = 5cm$. Khoảng cách từ tâm O đến dây AB là $3cm$. Tính độ dài dây AB.



A. $AB = 6cm$. **B.** $AB = 8cm$. **C.** $AB = 10cm$. **D.** $AB = 12cm$.

Lời giải

Chọn B.



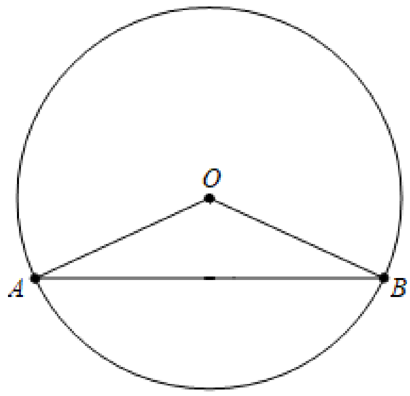
Kẻ $OH \perp AB$ tại H suy ra H là trung điểm của AB.

Xét tam giác OHB vuông tại H có $OH = 3; OB = 5$. Theo định lý Phythagore ta có:

$HB = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Mà H là trung điểm của AB nên $AB = 2HB = 8\,cm$.Vậy $AB = 8\,cm$.

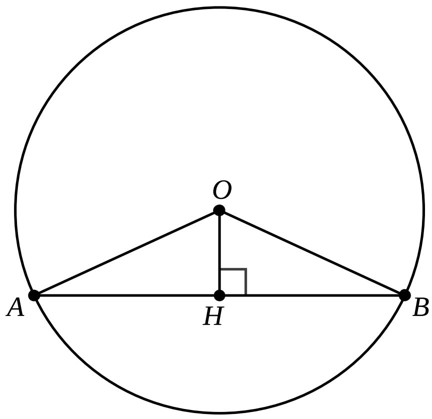
Câu 68. Cho đường tròn (O) có bán kính $R = 6,5\,cm$. Khoảng cách từ tâm O đến dây AB là $2,5\,cm$. Tính độ dài dây AB.



A. $AB = 12\,cm$. **B.** $AB = 10\,cm$. **C.** $AB = 8\,cm$. **D.** $AB = 6\,cm$.

Lời giải

Chọn A.



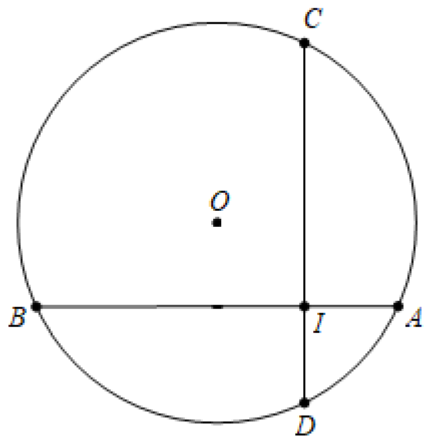
Kẻ $OH \perp AB$ tại H suy ra H là trung điểm của AB.

Xét tam giác OHB vuông tại H có $OH = 2,5; OB = 6,5$. Theo định lý Phythagore ta có:

$HB=\sqrt{OB^2-OH^2}=\sqrt{6,5^2-2,5^2}=6$.

Mà H là trung điểm của AB nên $AB=2HB=12\,cm$. Vậy $AB=12\,cm$.

Câu 69. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai dây AB,CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Biết $IA=2cm; IB=4cm$.

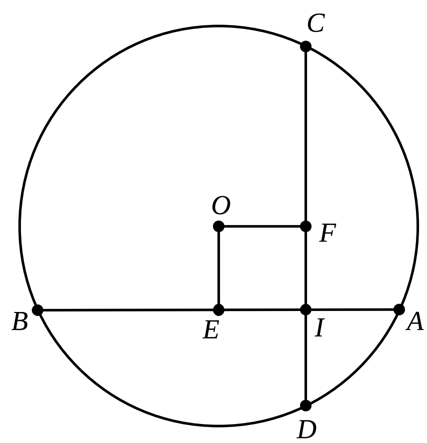


Tổng khoảng cách từ tâm O dây AB,CD là:

A. $4\,cm$. **B.** $3\,cm$. **C.** $2\,cm$. **D.** $1\,cm$.

Lời giải

Chọn C.



Xét đường tròn tâm (O).

Kẻ $OE\perp AB$ tại E suy ra E là trung điểm của AB, kẻ $OF\perp CD$ tại F.

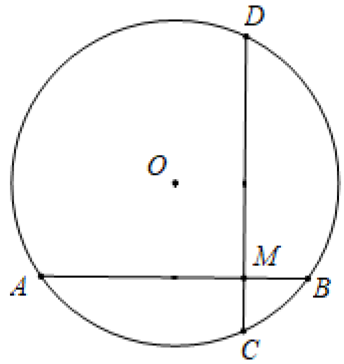
Vì dây $AB=CD$ nên $OE=OF$ (hai dây bằng nhau thì cách đều tâm).

Xét tứ giác $OEIF$ có $\widehat{E}=\widehat{F}=\hat{I}=90^\circ$ nên $OEIF$ là hình chữ nhật và $OE=OF$ nên $OEIF$ là hình vuông $\Rightarrow OE=OF=EI$.

Mà $AB=IA+IB=6\,cm$ nên $EB=3cm$ suy ra $EI=EB-IB=1cm$ nên $OE=OF=1cm$

Vậy tổng khoảng cách từ tâm đến hai dây AB,CD là $2\,cm$.

Câu 70. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai dây AB,CD vuông góc với nhau ở M. Biết $AB=16\,cm$; $CD=12\,cm; MC=2\,cm$.

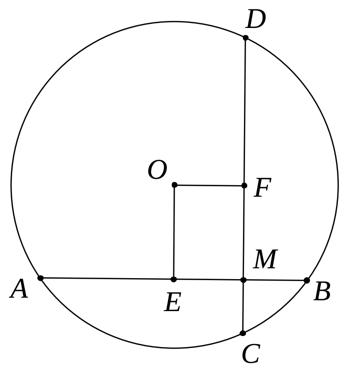


Khoảng cách từ tâm O đến dây AB là:

A. $5cm$. **B.** $4cm$. **C.** $3cm$. **D.** $2cm$.

Lời giải

Chọn B.



Xét đường tròn tâm (O).

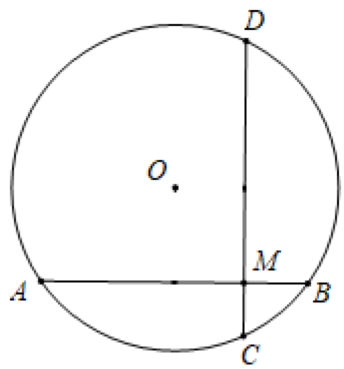
Kẻ $OE \perp AB$ tại E suy ra E là trung điểm của AB, kẻ $OF \perp CD$ tại F suy ra F là trung điểm của CD.

Xét tứ giác $OEMF$ có $\widehat{E} = \widehat{F} = \widehat{M} = 90°$ nên $OEIF$ là hình chữ nhật, suy ra $FM = OE$.

Ta có $CD = 12cm$ suy ra $FC = 6cm$ mà $MC = 2cm \Rightarrow FM = FC - MC = 4cm$ nên $OE = 4cm$

Vậy khoảng cách từ tâm O đến dây AB là $4cm$.

Câu 71. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai dây AB, CD vuông góc với nhau ở M. Biết $AB = 14cm;\ CD = 12cm; MC = 2cm$.

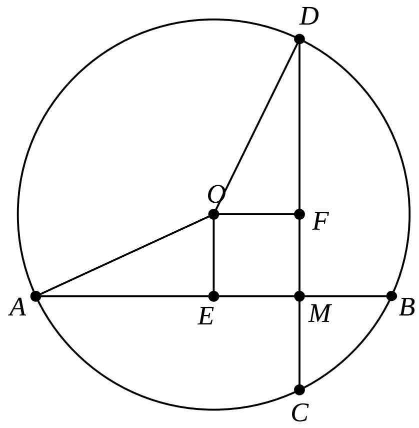


Bán kính R và khoảng cách từ tâm O đến dây CD lần lượt là

A. $\sqrt{29}\,cm; \sqrt{65}\,cm$. **B.** $\sqrt{65}\,cm; \sqrt{29}\,cm$. **C.** $9cm; \sqrt{29}\,cm$. **D.** $\sqrt{29}\,cm; 9cm$.

Lời giải

Chọn B.



Lấy E, F lần lượt là trung điểm của hai dây AB và CD. Khi đó:

$OE \perp AB; OF \perp AC$ lại có $\widehat{FME} = 90°$ nên $OEMF$ là hình chữ nhật.

Suy ra $OE = MF = CF - MC = 4\,cm$.

Xét đường tròn (O), có $OE = 4\,cm, E$ là trung điểm của AB nên $AE = \dfrac{14}{2} = 7\,cm$.

Áp dụng định lý Phythagore cho tam giác vuông OEA ta có $OA = \sqrt{AE^2 + OE^2} = \sqrt{65}$ nên $R = \sqrt{65}$.

Lại có $OD = \sqrt{65}\,cm$; $FD = 6\,cm$ nên áp dụng định lý Phythagore cho tam giác vuông OFD ta có:

$OF = \sqrt{OD^2 - FD^2} = \sqrt{29}\,cm$.

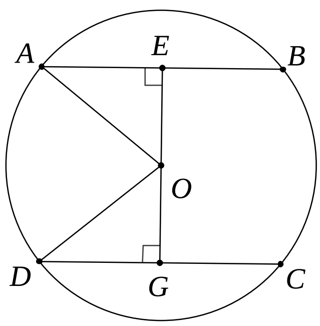
Do đó khoảng cách từ tâm đến dây CD là $\sqrt{29}\,cm$.

Câu 72. Cho đường tròn (O) có hai dây AB, CD không đi qua tâm. Biết rằng khoảng cách từ tâm đến hai dây là bằng nhau. Kết luận nào sau đây là **đúng?**

A. $AB > CD$. **B.** $AB = CD$. **C.** $AB < CD$. **D.** $AB // CD$.

Lời giải

Chọn B.



Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông ta có $AE = \sqrt{AO^2 - OE^2} = DG = \sqrt{OD^2 - OG^2}$ từ đó suy ra $AB = CD = 2AE = 2DG$

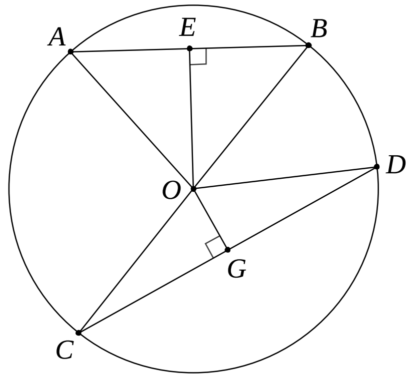
Lưu ý: Trong một đường tròn hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Câu 73. Cho đường tròn (O) có hai dây AB, CD không đi qua tâm. Biết rằng khoảng cách từ tâm đến dây AB lớn hơn khoảng cách từ tâm O đến dây CD. Kết luận nào sau đây là **đúng?**

A. $AB > CD$. **B.** $AB = CD$. **C.** $AB < CD$. **D.** $AB // CD$.

Lời giải

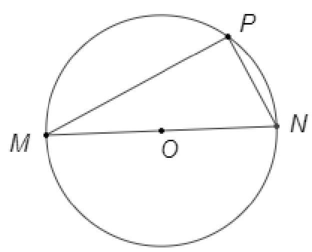
Chọn C.



Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông ta có $AE = \sqrt{AO^2 - OE^2}$; $CG = \sqrt{OD^2 - OG^2}$ và $OE > OG$; $OA = OC$ từ đó suy ra $AE < CG$ hay $AB < CD$.

Chú ý: Trong một đường tròn: Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

Câu 74. Cho đường tròn đường kính MN. Với P là một điểm bất kì (khác M và N) nằm trên đường tròn.



Kết luận nào sau đây đúng?

A. $MP + NP < MN$. **B.** $MP - NP \geq MN$.

C. $MN < MP + NP \leq 2MN$. **D.** $MN < MP + NP < 2MN$.

Lời giải

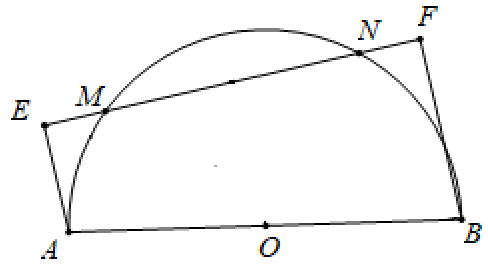
Chọn D.

Xét ΔMNP có $MN < MP + NP$ (bất đẳng thức tam giác)

Xét đường tròn đường kính MN. Với P là một điểm bất kì (khác M và N) nằm trên đường tròn nên MP; NP là các dây cung nên $MP < MN$ và $NP < MN$

Suy ra $MP + NP < 2MN$. Vậy $MN < MP + NP < 2MN$

Câu 75. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và một dây MN. Kẻ AE và BF vuông góc với MN lần lượt tại E và F.

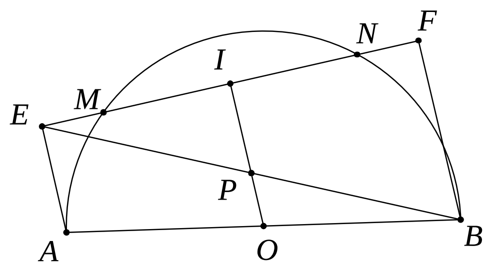


Kết luận nào sau đây đúng?

A. $OE = \frac{3}{2}OF$. **B.** $OE = OF$. **C.** $OE > OF$. **D.** $OE < OF$.

Lời giải

Chọn B.



Lấy I là trung điểm của MN, khi đó OI là đường trung tuyến của tam giác cân ONM nên $OI \perp MN$.

Ta có $AE//FB//OI$ (vì cùng vuông với EF)

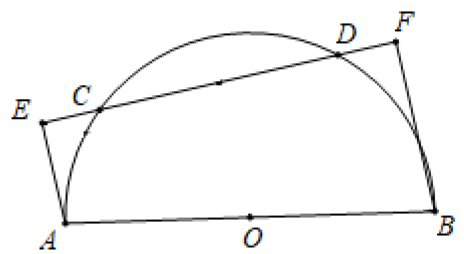
Xét ΔABE có $OP//AE$ và $OA = OB$ nên $PE = PB$

Xét ΔBEF có $PO//BF$ và $PE = PB$ nên $IE = IF$.

Xét tam giác OEF có OI vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên ΔOEF cân tại O.

Suy ra $OE = OF$.

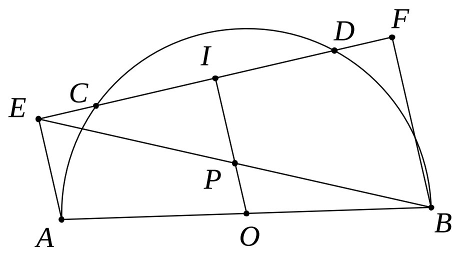
Câu 76. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và một dây CD. Kẻ AE và BF vuông góc với CD lần lượt tại E và F. So sánh độ dài CE và DF.



A. $CE > DF$. **B.** $CE = \frac{3}{2}DF$. **C.** $CE = DF$. **D.** $CE < DF$.

Lời giải

Chọn C.



Lấy I là trung điểm của CD, khi đó OI là đường trung tuyến của tam giác cân OCD nên $OI \perp CD$.

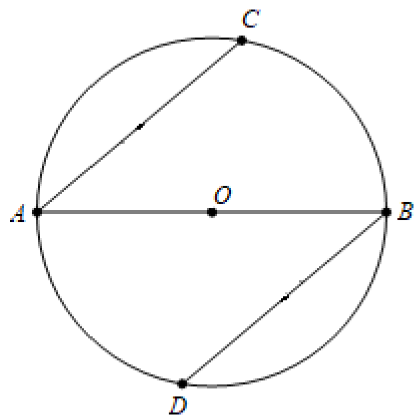
Ta có $AE//FB//OI$ (vì cùng vuông với EF)

Xét ΔABE có $OP//AE$ và $OA = OB$ nên $PE = PB$

Xét ΔBEF có $PO//BF$ và $PE = PB$ nên $IE = IF$.

Ta có $IE = IF; IC = ID$ suy ra $IE - IC = IF - ID$ hay $EC = DF$.

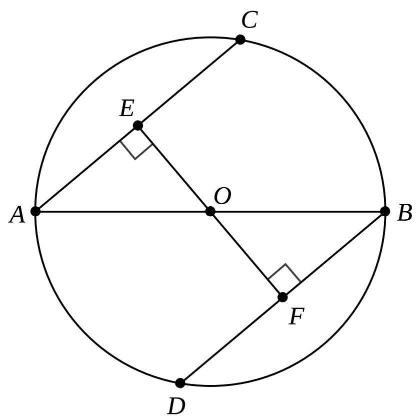
Câu 77. Cho đường tròn (O), đường kính AB. Kẻ hai dây AC và BD song song. So sánh độ dài AC và BD.



A. $AC = BD$. **B.** $AC < BD$. **C.** $AC > BD$. **D.** $AC = 2BD$.

Lời giải

Chọn A.



Kẻ đường thẳng qua O vuông góc với AC tại E và cắt BD tại F thì $EF \perp BD$ tại F vì $AC//BD$.

Xét hai tam giác vuông OEA và tam giác OFB có $OB = OA; \widehat{EAO} = \widehat{FBO}$ (so le trong)

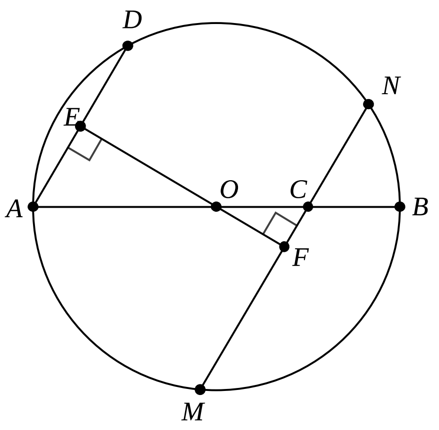
Nên $\Delta AEO = \Delta BFO$ (ch-gn) suy ra $AE = BF$ hay $AC = DB$

Câu 78. Cho đường tròn (O), đường kính AB. Lấy điểm C là trung điểm đoạn OB. Kẻ dây MN qua C và dây $AD//MN$. So sánh độ dài AD và MN.

A. $AD = 2MN$. **B.** $AD = MN$. **C.** $AD < MN$. **D.** $AD > MN$.

Lời giải

Chọn C.



Kẻ đường thẳng qua O vuông góc với AC tại E và cắt BD tại F thì $EF \perp BD$ tại F vì $AC//BD$.

Xét hai tam giác vuông OEA và tam giác OFB có $\widehat{AEO} = \widehat{OFC} = 90°; \widehat{AOE} = \widehat{FOC}$ (đối đỉnh)

Nên $\Delta AEO \backsim \Delta CFO$ (g - g) suy ra $\dfrac{OE}{OF} = \dfrac{OA}{OC}$ mà $OA = OB = 2.OC$ suy ra $\dfrac{OE}{OF} = \dfrac{OA}{OC} = 2$ hay $OE = 2OF$

. hay $OE > OF$

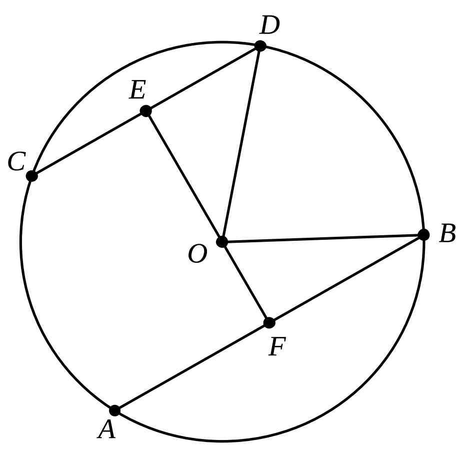
Theo định lí Phytagore ta có $FN = \sqrt{ON^2 - OF^2}$ và $ED = \sqrt{OD^2 - OE^2}$ mà $ON = OD$; $OE > OF$ suy ra $FN > ED$ hay $AD < MN$

Câu 79. Cho đường tròn $(O;8cm)$. Dây AB và CD song song, có độ dài lần lượt là $14cm$ và $10cm$. Tính khoảng cách giữa hai dây

A. $2\sqrt{15}\,(cm)$. **B.** $\sqrt{39} + \sqrt{15}\,(cm)$. **C.** $\dfrac{\sqrt{39} + \sqrt{15}}{2}(cm)$. **D.** $2\sqrt{39}\,(cm)$.

Lời giải

Chọn B.



Kẻ đường thẳng qua O vuông góc với CD tại E và cắt AB tại F thì $EF \perp AB$ vì $AB//CD$

Khi đó E là trung điểm của CD và F là trung điểm của AB

Nên $ED = \dfrac{CD}{2} = 5cm; FB = \dfrac{AB}{2} = 7cm; OD = OB = 8cm$

Áp dụng định lý Phythagore cho tam giác vuông OED ta được $OE = \sqrt{OD^2 - ED^2} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39}cm$.

Áp dụng định lý Phythagore cho tam giác vuông OFB ta được $OF = \sqrt{OB^2 - FB^2} = \sqrt{8^2 - 7^2} = \sqrt{15}\,cm$.

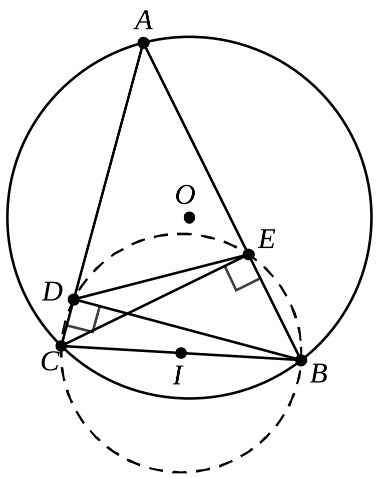
Vậy khoảng cách giữa hai dây là $EF = OE + OF = \sqrt{39} + \sqrt{15}\,cm$.

Câu 80. Cho tam giác ABC nhọn và có các đường cao BD, CE. So sánh BC và DE.

A. $BC = DE$. **B.** $BC = \dfrac{2}{3}DE$. **C.** $BC > DE$. **D.** $BC < DE$.

Lời giải

Chọn C.



Lấy I là trung điểm của BC

Xét tam giác vuông BDC có DI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $DI = IB = IC = \dfrac{BC}{2}$.

Xét tam giác vuông BEC có EI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $EI = IB = IC = \dfrac{BC}{2}$

Từ đó $ID = IE = IB = IC = \dfrac{BC}{2}$ hay bốn điểm B, C, D, E cùng thuộc đường tròn $\left(I; \dfrac{BC}{2}\right)$

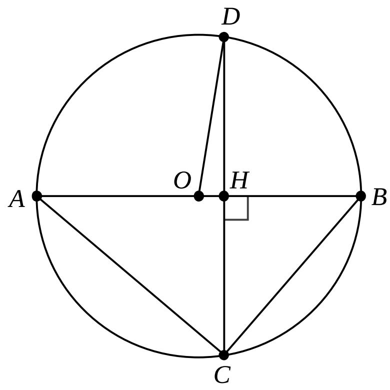
Xét $\left(I; \dfrac{BC}{2}\right)$ có BC là đường kính và DE là dây không đi qua tâm nên $BC > DE$.

Câu 81. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 14cm$, dây CD có độ dài $12cm$ vuông góc với AB tại H nằm giữa O và B. Độ dài HA là:

A. $\sqrt{13}cm$. **B.** $14 + \sqrt{13}\,cm$. **C.** $7 + \sqrt{13}\,cm$. **D.** $7 + 2\sqrt{13}\,cm$.

Lời giải

Chọn C.



Xét (O) có $AB \perp CD$ tại H và AB là đường kính nên H là trung điểm của CD nên

$HD = HC = \dfrac{CD}{2} = 6cm$

Vì $AB = 14$ suy ra $OA = OB = OD = \dfrac{14}{2} = 7cm$

Áp dụng định lý Phythagore cho tam giác vuông OHD ta được $OH = \sqrt{OD^2 - DH^2} = \sqrt{13}$

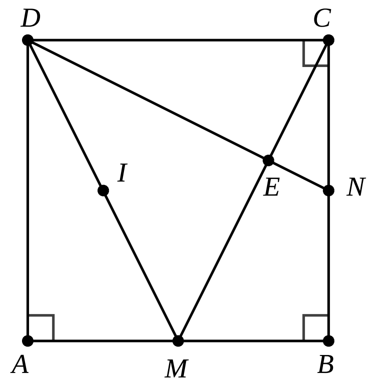
Khi đó $HA = OA + OH = 7 + \sqrt{13}\,cm$.

Câu 82. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Gọi E là giao điểm của CM và DN. So sánh AE và DM.

A. $AM = \dfrac{3}{2}AE$. **B.** $DM < AE$. **C.** $DM = AE$. **D.** $DM > AE$.

Lời giải

Chọn D.



+ Ta có $\widehat{CDN} = \widehat{ECN}$ (vì cùng phụ với $\widehat{CNE}$) nên $\widehat{CNE} + \widehat{ECN} = \widehat{CNE} + \widehat{CDN} = 90°$ suy ra

$\widehat{CEN} = 90° \Rightarrow CM \perp DN$

+ Gọi I là trung điểm của DM

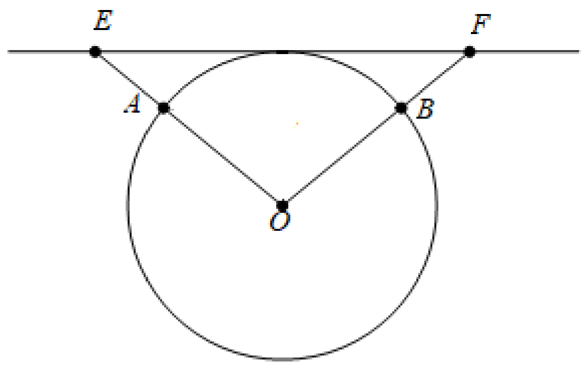
Xét tam giác vuông ADM ta có $AI = ID = IM = \dfrac{DM}{2}$. Xét tam giác vuông DEM ta có:

$EI = ID = IM = \dfrac{DM}{2}$ nên $EI = ID = IM = IA = \dfrac{DM}{2}$.

Do đó bốn điểm A, D, E, M cùng thuộc đường tròn tâm I bán kính $R = \dfrac{DM}{2}$.

Xét $\left(I; \dfrac{DM}{2}\right)$ có DM là đường kính và AE là dây không đi qua tâm nên $DM > AE$.

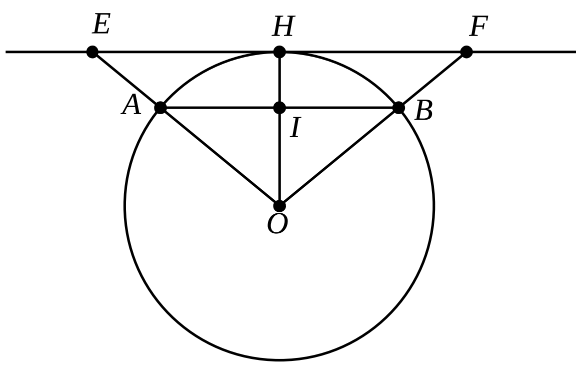
Câu 83. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $AB = 1,2R$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, cắt các tia OA, OB lần lượt tại E và F. Tính diện tích tam giác OEF theo R.



A. $S_{OEF} = 0,75R^2$. **B.** $S_{OEF} = 1,5R^2$. **C.** $S_{OEF} = 0,8R^2$. **D.** $S_{OEF} = 1,75R^2$.

Lời giải

Chọn A.



Kẻ $OH \perp EF$ tại H và cắt AB tại I suy ra $OI \perp AB$ (vì $AB // EF$)

Xét (O) có $OI \perp AB$ tại I nên I là trung điểm của AB

Suy ra $IA = IB = \dfrac{AB}{2} = 0,6R$. Lại có $OA = R$.

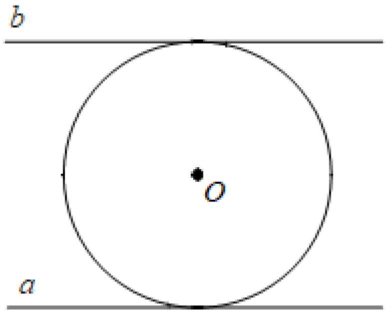
Áp dụng định lý Phythagore cho tam giác vuông OIA ta có $OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = 0,8R$.

Mà $AI // EH$ nên $\dfrac{AI}{EH} = \dfrac{OI}{OH} = \dfrac{0,8R}{R}$ nên $EH = \dfrac{0,6R}{0,8} = 0,75R$

ΔOEF cân tại O (vì $\widehat{E} = \widehat{F} = \widehat{BAO} = \widehat{ABO}$) có $OH \perp EF$ nên H là trung điểm của EF.

$EF = 2EH = 1,5R$ nên $S_{EOF} = \dfrac{OH.EF}{2} = 0,75R^2$.

Câu 84. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau, cách nhau một khoảng là $6cm$. Một đường tròn (O) tiếp xúc với a và b.



Hỏi tâm O di động trên đường nào?

A. Tâm O di động trên đường thẳng song song và cách đều a,b một khoảng $4cm$.

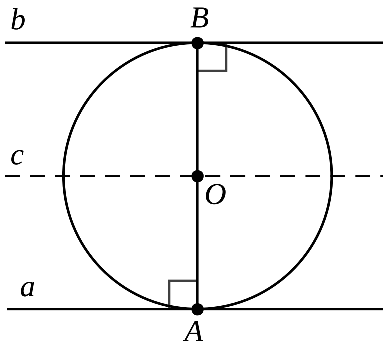
B. Tâm O di động trên đường thẳng song song và cách đều a,b một khoảng $6cm$.

C. Tâm O di động trên đường thẳng đi qua O vuông góc với a,b.

D. Tâm O di động trên đường thẳng song song và cách đều a,b một khoảng $3cm$.

Lời giải

Chọn D.



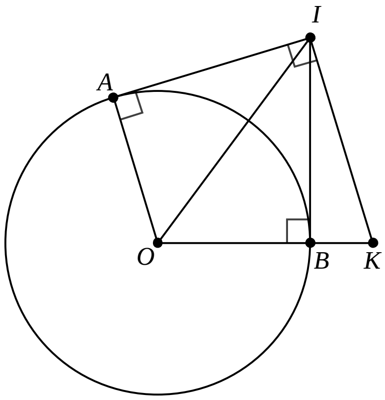
Kẻ đường thẳng $OA \perp a$ tại A cắt b tại B thì $OB \perp b$ tại B vì $a//b$.

Vì (O) tiếp xúc với cả a,b nên $OA = OB$. Lại có $AB = 6cm$ suy ra $OA = OB = \frac{6}{2} = 3cm$.

Hay tâm O cách a và b một khoảng cùng bằng $3cm$.

Nên O chạy trên đường thẳng c song song và cách đều a,b một khoảng $3cm$.

Câu 85. Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại I. Đường thẳng qua I và vuông góc với IA cắt OB tại K.



Chọn khẳng định **đúng.**

A. $OI = OK = KI$. **B.** $KI = KO$. **C.** $OI = OK$. **D.** $OI = IK$.

Lời giải

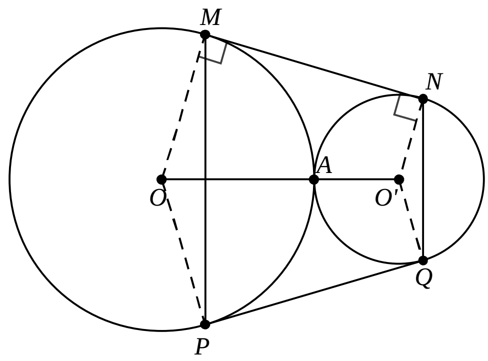
Chọn B.

Xét (O) có IA, IB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại I nên $\widehat{AOI} = \widehat{KOI}$.

Mà $OA//KI$ (vì cùng vuông góc với AI) nên $\widehat{KIO} = \widehat{IOA}$ (hai góc ở vị trí so le trong)

Từ đó $\widehat{KOI} = \widehat{KIO}$ suy ra ΔKOI cân tại $K \Rightarrow KI = KO$.

Câu 86. Cho hai đường tròn $(O);(O')$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với $M \in (O); N \in (O')$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua OO' và Q là điểm đối xứng với N qua OO'. Khi đó, tứ giác $MNQP$ là hình gì?



A. Hình thang. **B.** Hình thang cân. **C.** Hình thang vuông. **D.** Hình bình hành.

Lời giải

Chọn B.

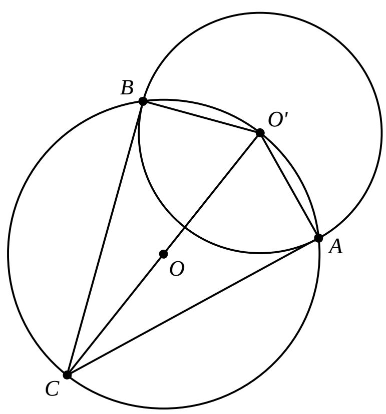
Vì P là điểm đối xứng với M qua OO'

Q là điểm đối xứng với N qua OO' nên $MN = PQ$; $P \in (O); Q \in (O')$

Mà $MP \perp OO'; NQ \perp OO' \Rightarrow MP // NQ$ mà $\widehat{NMP} = \widehat{QPM}$ (do $\widehat{OMN} = \widehat{OPQ}$, $\widehat{OMP} = \widehat{OPM}$)

Nên $MNPQ$ là hình thang cân.

Câu 87. Cho hai đường tròn $(O);(O')$ cắt nhau tại A, B trong đó $O' \in (O)$. Kẻ đường kính $O'C$ của đường tròn (O).



Chọn khẳng định sai?

A. $AC = CB$.

B. $\widehat{CBO'} = 90°$.

C. CA, CB là hai cát tuyến của (O').

D. CA, CB là hai tiếp tuyến của (O').

Lời giải

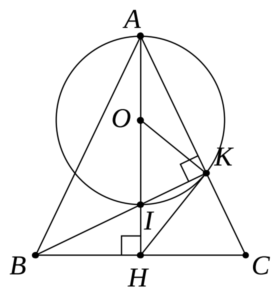
Chọn C.

Xét đường tròn (O) có $O'C$ là đường kính, suy ra $\widehat{CBO'} = \widehat{CAO'} = 90°$ hay $CB \perp O'B$ tại B và $AC \perp AO'$ tại A.

Do đó AC, BC là hai tiếp tuyến của (O') nên $AC = CB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Nên A, B, D đúng.

Câu 88. Cho tam giác ABC cân tại A. Các đường cao AH và BK cắt nhau ở I, vẽ đường tròn tâm O đường kính AI.



Chọn khẳng định **đúng.**

A. BK là tiếp tuyến của (O).

B. BC là tiếp tuyến của (O).

C. AC là tiếp tuyến của (O).

D. HK là tiếp tuyến của (O).

Lời giải

Chọn D.

Do ΔABC cân tại A (GT) nên đường cao AH đồng thời là trung tuyến. Suy ra $BH = HC$.

Do BK là đường cao của ΔABC. Suy ra $BK \perp AC$.

ΔKBC vuông tại K có H là trung điểm của BC nên $KH = BH = HC = \frac{1}{2}BC$.

Suy ra ΔKBH cân tại H nên $\widehat{KBH} = \widehat{HKB}$ (1).

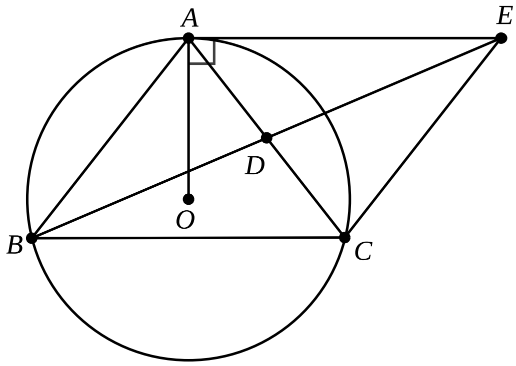
$K \in (O)$ đường kính AI nên $KO = IO = R$. Suy ra ΔKOI cân tại O nên $\widehat{OKI} = \widehat{OIK}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OKB} + \widehat{HKB} = \widehat{OIK} + \widehat{IBH} = \widehat{HIB} + \widehat{IBH} = 90°$

Suy ra $HK \perp OK$ tại K.

Do đó HK là tiếp tuyến của (O).

Câu 89. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là trung điểm cạnh AC, tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BD tại E.



Chọn khẳng định **đúng.**

A. $AE//OB$ và tứ giác $ABCE$ là hình bình hành.

B. $AE//BC$ và tứ giác $ABCE$ là hình bình hành.

C. $AE//BC$ và tứ giác $ABCE$ là hình thoi.

D. $AE//OB$ và tứ giác $ABCE$ là hình thoi.

Lời giải

Chọn B.

Vì tam giác ABC cân tại A có O là tâm đường tròn ngoại tiếp nên đường thẳng $AO \perp BC$.

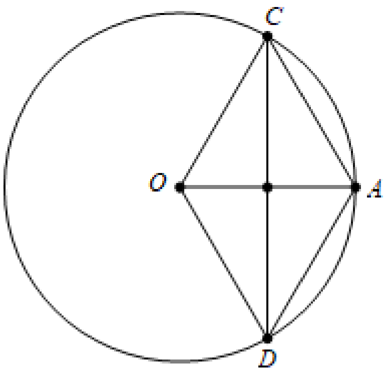
Lại có $AO \perp AE$ (tính chất tiếp tuyến) nên $AE//BC$.

Vì $AE//BC$ nên $\widehat{EAC} = \widehat{ACB}$ (hai góc ở vị trí so le trong), lại có $\widehat{ADE} = \widehat{BDC}$ (đối đỉnh) và $AD = DC$.

Nên $\Delta ADE = \Delta CDB$ (g – c – g) suy ra $AE = BC$

Tứ giác $AECB$ có $AE = BC; AE//BC$ nên $AECB$ là hình bình hành.

Câu 90. Cho đường tròn (O), bán kính OA. Dây CD là đường trung trực của OA.



a) Tứ giác $OCAD$ là hình gì?

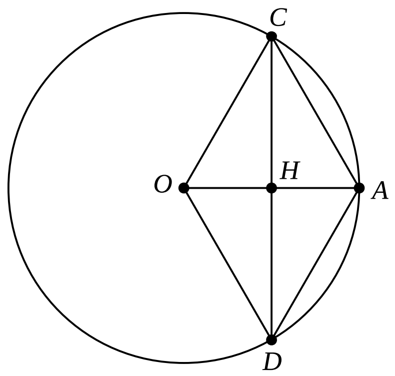
A. Hình bình hành. **B.** Hình thoi. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình thang cân.

b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại C, tiếp tuyến này cắt đường thẳng OA tại I. Biết $OA = R$. Tính CI theo R.

A. $2R$. **B.** $CI = R$. **C.** $CI = R\sqrt{2}$. **D.** $CI = R\sqrt{3}$.

Lời giải

a) **Chọn B.**

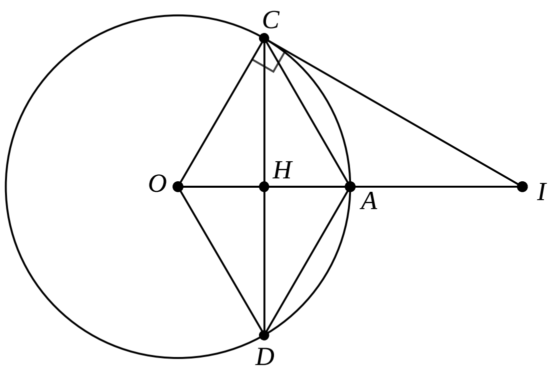


Gọi H là giao của OA và CD.

Xét (O) có $OA \perp CD$ nên H là trung điểm của CD.

Xét tứ giác $OCAD$ có hai đường chéo OA và CD vuông góc với nhau và giao nhau tại trung điểm H mỗi đường nên $OCAD$ là hình thoi.

b) **Chọn D.**

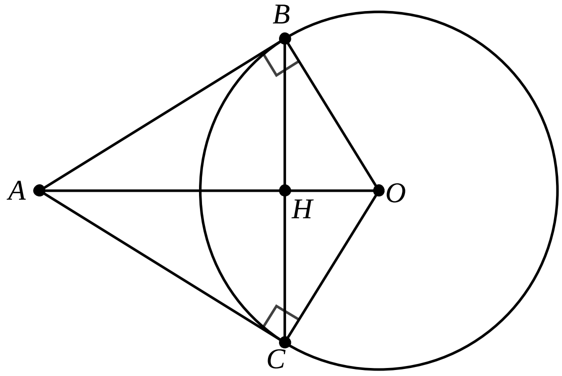


Xét tam giác COA có $OC = OA = R$ và $OC = AC$

(do $OCAD$ là hình thoi) nên ΔCOA là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{COI} = 60°$.

Xét tam giác vuông OCI có $CI = OC.\tan 60° = R\sqrt{3}$. Vậy $CI = R\sqrt{3}$.

Câu 91. Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại A. Gọi H là giao của BC với AO.



a) Chọn khẳng định **sai**?

A. $OA \perp BC$. **B.** OA là đường trung trực của BC.

C. $AB = AC$. **D.** $OA \perp BC$ tại trung điểm của AO.

b) Vẽ đường kính CD của (O). Khi đó:

A. $BD//OA$. **B.** $BD//AC$. **C.** $BD \perp OA$. **D.** BD cắt OA.

Lời giải

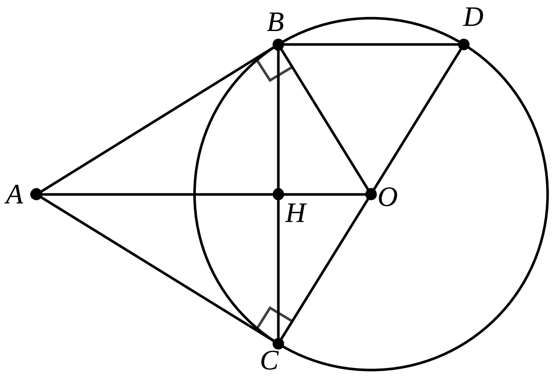
a) **Chọn D.**

Xét (O) có hai tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại A nên $AB = AC$ (tính chất).

Lại có $OB = OC$ nên AO là đường trung trực của đoạn BC hay $AO \perp BC$ tại H là trung điểm của BC.

Ta chưa kết luận được H có là trung điểm của AO hay không nên đáp án D sai.

b) **Chọn A.**



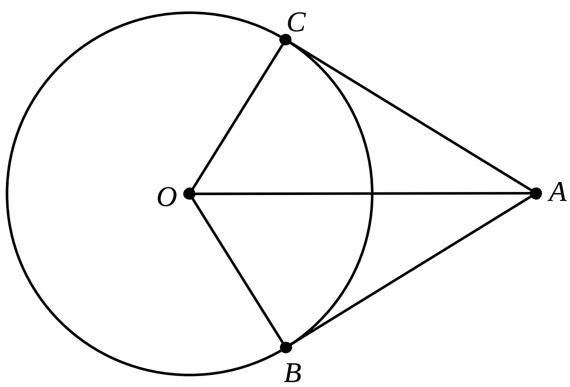
Ta có $AO \perp BC$ (*)

Xét tam giác BCD có DC là đường kính của (O) và $B \in (O)$ nên ΔBDC vuông tại B hay $BD \perp BC$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $BD//AO$.

Mà AO và AC cắt nhau nên BD và AC không thể song song.

Câu 92. Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại A. Biết $OB = 3cm; OA = 5cm$.



a) Chọn khẳng định sai?

A. $AC = AB = 4cm$. **B.** $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$. **C.** $\sin \widehat{OBA} = \frac{4}{5}$. **D.** $\sin \widehat{OCA} = \frac{3}{5}$.

b) Vẽ đường kính CD của (O). Tính BD.

A. $BD = 2cm$. **B.** $BD = 3,6cm$. **C.** $BD = 1,8cm$. **D.** $BD = 4cm$.

Lời giải

a) **Chọn D.**

Xét (O) có AB, AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A nên $AB = AC$; $\widehat{CAO} = \widehat{BAO}$; $\widehat{BOA} = \widehat{COA}$

Xét ΔABO vuông tại B có $OB = 3cm; OA = 5cm$, theo định lý Phythagore ta có:

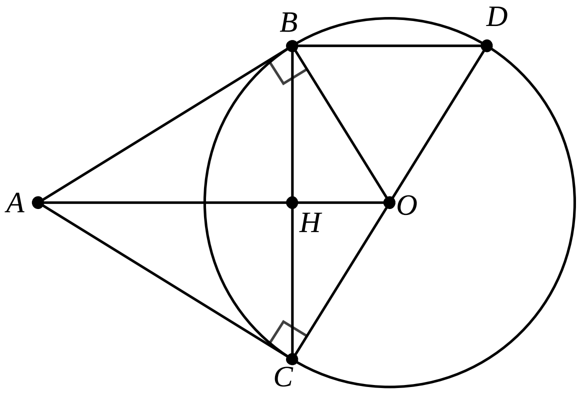
$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4cm$.

Nên $AC = AB = 4cm$ hay đáp án A đúng.

Xét tam giác ABO vuông tại B có $\sin \widehat{ABO} = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{4}{5}$ nên C đúng.

Mà $\widehat{BOA} = \widehat{COA}$ nên $\sin \widehat{COA} = \dfrac{4}{5}$ do đó D sai.

b) **Chọn B.**



Gọi H là giao của BC với AO.

Xét (O) có hai tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại A nên $AB = AC$ (tính chất).

Lại có $OB = OC$ nên AO là đường trung trực của đoạn BC hay $AO \perp BC$ tại H là trung điểm của BC.

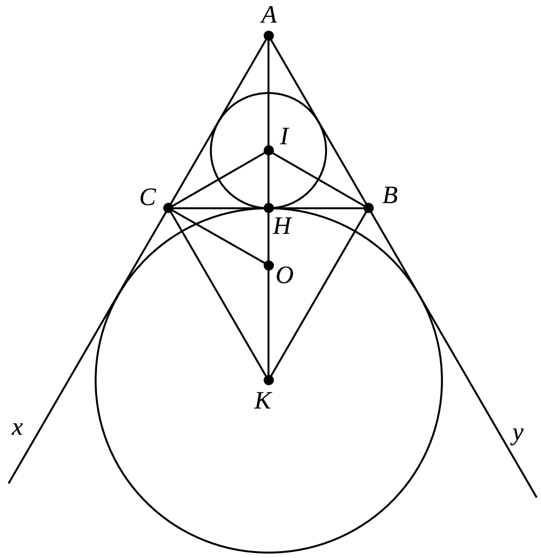
Xét tam giác BCD có H là trung điểm BC và O là trung điểm DC nên là đường trung bình của tam giác BCD.

Suy ra $BD = 2.OH$

Ta có $\Delta ABO \backsim \Delta BHO$ (g.g) nên $BO^2 = OH.OA$ hay $OH = \dfrac{OB^2}{OA} = \dfrac{9}{5} = 1,8cm$.

Từ đó $BD = 2.OH = 2.1,8 = 3,6cm$.

Câu 93. Cho tam giác ABC cân tại A và I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A. Gọi O là trung điểm của IK và H là giao điểm của BC với AI.



a) Tâm của đường tròn đi qua bốn điểm B,I,C,K là:

A. Điểm O. **B.** Điểm H. **C.** Trung điểm AK. **D.** Trung điểm BK.

b) Tính bán kính đường tròn đi qua bốn điểm B,I,C,K biết $AB = AC = 20cm$; $BC = 24cm$

A. $14\,cm$. **B.** $12\,cm$. **C.** $15\,cm$. **D.** $16\,cm$.

Lời giải

a) **Chọn A.**

Vì tam giác ABC cân tại A nên $I;K \in$ đường thẳng AH.

Ta có $\widehat{HCI} = \dfrac{1}{2}\widehat{HCA}; \widehat{KCH} = \dfrac{1}{2}\widehat{xCH} \Rightarrow \widehat{ICK} = \widehat{ICH} + \widehat{HCK} = \dfrac{1}{2}(\widehat{ACH} + \widehat{HCx}) = 90^\circ$

Tương tự ta cũng có $\widehat{IBK} = 90^\circ$

Xét hai tam giác vuông ICK và IBK có $OI = OK = OB = OC = \dfrac{IK}{2}$

Nên bốn điểm $B;I;C;K$ nằm trên đường tròn $\left(O;\dfrac{IK}{2}\right)$.

b) **Chọn C.**

Ta có tam giác CKI vuông nên $\widehat{CKI} + \widehat{CIO} = 90^\circ$, lại có $\widehat{CIK} + \widehat{ICH} = 90^\circ$ mà CI là phân giác $\widehat{ACB}$ nên $\widehat{ACI} = \widehat{CKO}$.

Có tam giác COK cân tại O nên $\widehat{ACI} = \widehat{OCK} (= \widehat{CKO})$

Nên $\widehat{ICO} + \widehat{ACI} = \widehat{ICO} + \widehat{OCK} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{ACO} = 90^\circ \Rightarrow OC \perp AC$

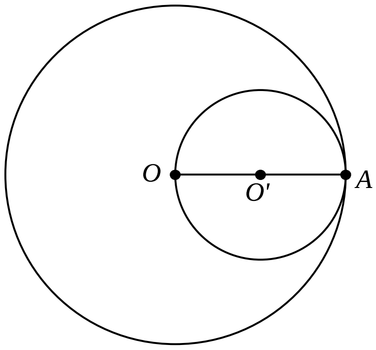
Ta có $HB = HC$ (AK là trung trực của BC) suy ra $HB = \dfrac{BC}{2} = 12$.

Theo Phythagore ta có $AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = 16$

Lại có $\Delta ACH \backsim \Delta COH$ (hai tam giác vuông có $\widehat{COH} = \widehat{ACH}$ vì cùng phụ với $\widehat{HCO}$)

Suy ra $\frac{AH}{AC}=\frac{HC}{CO}$ nên $CO=\frac{AC.HC}{AH}=15$.

Câu 94. Cho đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn (O') đường kính OA.



a) Vị trí tương đối của hai đường tròn là:

A. Nằm ngoài nhau. **B.** Cắt nhau. **C.** Tiếp xúc ngoài. **D.** Tiếp xúc trong.

b) Dây AD của đường tròn cắt đường tròn nhỏ tại C. Khi đó:

A. $AC > CD$. **B.** $AC = CD$. **C.** $AC < CD$. **D.** $CD = OD$.

Lời giải

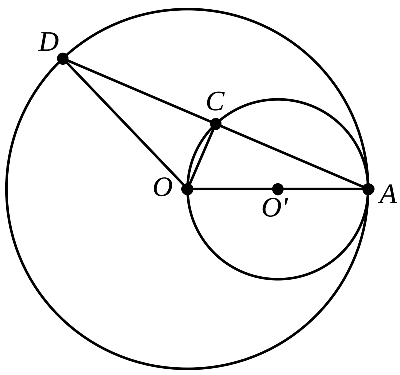
a) **Chọn D.**

Vì hai đường tròn có một điểm chung là A và $OO'=OA-\frac{OA}{2}=R-r$ nên hai đường tròn tiếp xúc trong.

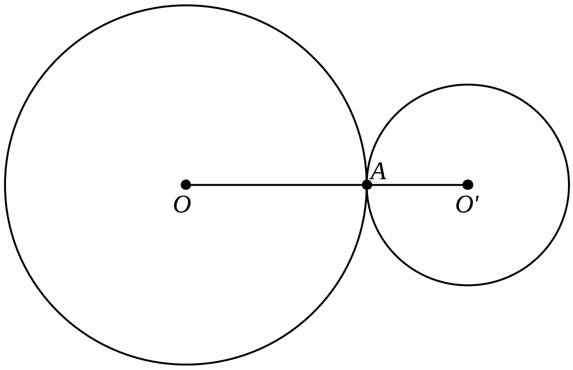
b) **Chọn B.**

Xét đường tròn (O') có OA là đường kính và $C\in(O')$ nên ΔACO vuông tại C hay $OC\perp AD$.

Xét đường tròn (O) có $OA=OD\Rightarrow\Delta OAD$ cân tại O có OC là đường cao cũng là đường trung tuyến nên $CD=CA$.



Câu 95. Cho đoạn OO' và điểm A nằm trên đoạn OO' sao cho $OA=2O'A$. Đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn (O') bán kính $O'A$.



a) Vị trí tương đối của hai đường tròn là:

A. Nằm ngoài nhau. **B.** Cắt nhau. **C.** Tiếp xúc ngoài. **D.** Tiếp xúc trong.

b) Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại C. Khi đó:

A. $AD=\frac{1}{2}AC$. **B.** $AD=3AC$. **C.** $OD//O'C$. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Lời giải

a) **Chọn C.**

Vì hai đường tròn có một điểm chung là A và $OO'=OA+O'A=R+r$ nên hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

b) **Chọn C.**

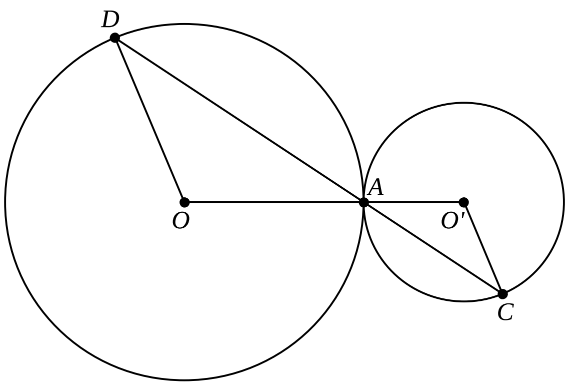
Xét đường tròn (O') và (O) có $O'A=\frac{1}{2}OA$ nên $\frac{OA}{O'A}=2$.

Xét $\Delta O'AC$ cân tại O' và ΔOAD cân tại D có $\widehat{OAD}=\widehat{O'AD}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{OAD}=\widehat{O'CA}$.

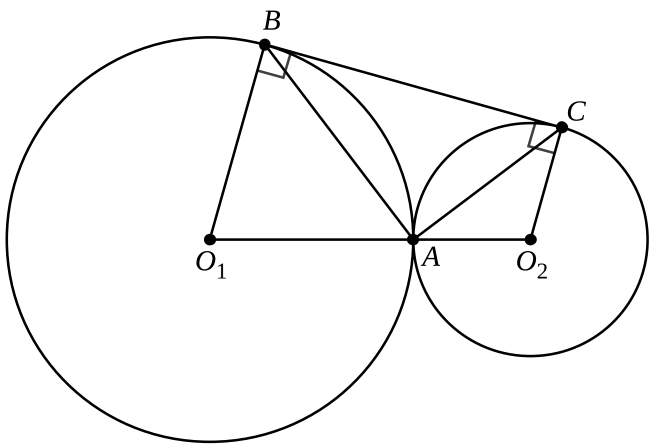
Suy ra $\widehat{OAD}=\widehat{O'AD}$

Suy ra $\Delta OAD\backsim\Delta O'AC$ (g - g) $\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{OA}{O'A}=2$

Lại có vì $\widehat{OAD}=\widehat{O'CA}$ mà hai góc ở vị trí so le trong nên $OD//O'C$.



Câu 96. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài tại A và một đường thẳng d tiếp xúc với $(O_1);(O_2)$ lần lượt tại B,C.



a) Tam giác ABC là:

A. Tam giác cân. **B.** Tam giác đều.

C. Tam giác vuông. **D.** Tam giác vuông cân.

b) Lấy M là trung điểm của BC. Chọn khẳng định **sai?**

A. AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(O_1);(O_2)$.

B. AM là đường trung bình của hình thang O_1BCO_2.

C. $AM = BC$.

D. $AM = \dfrac{1}{2}BC$.

Lời giải

a) **Chọn C.**

Xét (O_1) có $O_1B = O_1A \Rightarrow \Delta O_1AB$ cân tại $O_1 \Rightarrow \widehat{O_1BA} = \widehat{O_1AB}$

Xét (O_2) có $O_2C = O_2A \Rightarrow \Delta O_2CA$ cân tại $O_2 \Rightarrow \widehat{O_2CA} = \widehat{O_2AC}$

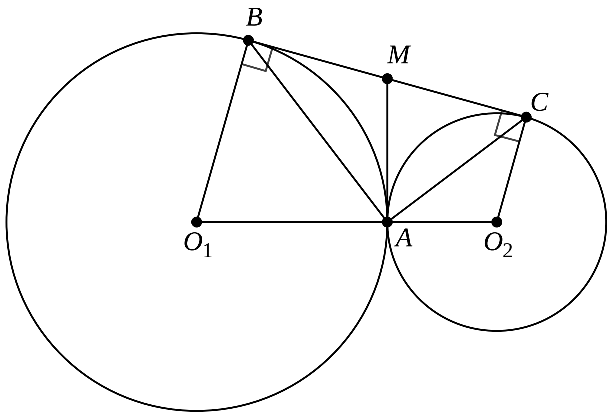
Mà $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 360° - \widehat{C} - \widehat{B} = 180°$

$180° - \widehat{O_1BA} - \widehat{O_1AB} + 180° - \widehat{O_2CA} - \widehat{O_2AC} = 180°$

$2(\widehat{O_1AB} + \widehat{O_2AC}) = 180°$

$\Rightarrow \widehat{O_1AB} + \widehat{O_2AC} = 90° \Rightarrow \widehat{BAC} = 90°$ hay ΔABC vuông tại A.

b) **Chọn B.**



Vì ΔABC vuông tại A có AM là trung tuyến nên $AM = BM = DM = \dfrac{BC}{2}$.

Xét tam giác BMA cân tại $M \Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{MAB}$, mà $\widehat{O_1BA} = \widehat{O_1AB}$ (cmt) nên

$\widehat{O_1BA} + \widehat{MBA} = \widehat{O_1AB} + \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{O_1AM} = \widehat{O_1BM} = 90°$.

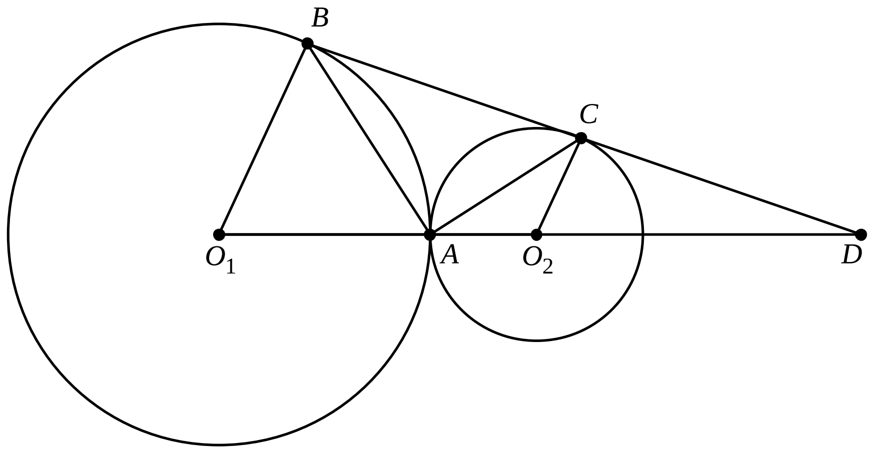
$\Rightarrow MA \perp AO_1$ tại A nên AM là tiếp tuyến của (O_1)

Tương tự ta cũng có $\Rightarrow MA \perp AO_2$ tại A nên AM là tiếp tuyến của (O_2)

Hay AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Vậy phương án A, C, D đúng. B sai.

Câu 97. Cho $(O_1;3cm)$ tiếp xúc ngoài với $(O_2;1cm)$ tại A. Vẽ hai bán kính O_1B và O_2C song song với nhau cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ O_1O_2. Gọi D là giao điểm của BC và O_1O_2.



a) Tính số đo $\widehat{BAC}$.

A. $90°$. **B.** $100°$. **C.** $60°$. **D.** $120°$.

b) Tính độ dài O_1D.

A. $O_1D = 4,5cm$. **B.** $O_1D = 5cm$. **C.** $O_1D = 6cm$. **D.** $O_1D = 8cm$.

Lời giải

a) **Chọn A.**

Xét (O_1) có $O_1B = O_1A \Rightarrow \Delta O_1AB$ cân tại O_1 $\Rightarrow \widehat{O_1BA} = \widehat{O_1AB}$

Xét (O_2) có $O_2C = O_2A \Rightarrow \Delta O_2CA$ cân tại $O_2 \Rightarrow \widehat{O_2CA} = \widehat{O_2AC}$

Lại có $O_1B // O_2C \Rightarrow \widehat{O_1BC} + \widehat{O_2CB} = 180°$ (hai góc trong cùng phía bù nhau)

Suy ra $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 360° - \widehat{O_2CB} - \widehat{O_1BC} = 180°$

$180° - \widehat{O_1BA} - \widehat{O_1AB} + 180° - \widehat{O_2CA} - \widehat{O_2AC} = 180°$

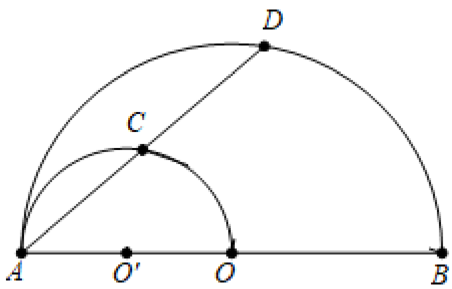
$2(\widehat{O_1AB} + \widehat{O_2AC}) = 180°$

$\Rightarrow \widehat{O_1AB} + \widehat{O_2AC} = 90° \Rightarrow \widehat{BAC} = 90°$.

b) Vì ΔO_1BD có $O_1B // O_2C$ nên theo hệ quả định lý Thalète ta có: $\dfrac{O_2D}{O_1D} = \dfrac{O_2C}{O_1B} = \dfrac{1}{3}$ suy ra $\dfrac{O_1O_2}{O_1D} = \dfrac{2}{3}$.

Mà $O_1O_2 = O_1A + O_2A = 3 + 1 = 4 \Rightarrow O_1D = \dfrac{3}{2}.O_1O_2 = \dfrac{3}{2}.4 = 6cm$.

Câu 98. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. Vẽ nửa đường tròn tâm O' đường kính AO (cùng phía với nửa đường tròn (O)). Một cát tuyến bất kỳ qua A cắt $(O');(O)$ lần lượt tại C, D.



a) Chọn khẳng định sai?

A. C là trung điểm của AD.

B. Các tiếp tuyến tại C và D của các nửa đường tròn song song với nhau.

C. $O'C // OD$.

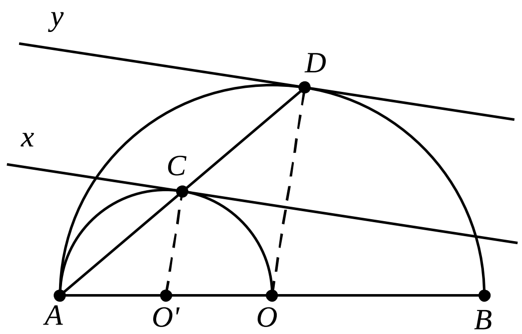
D. Các tiếp tuyến tại C và D của các nửa đường tròn cắt nhau.

b) Nếu BC là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O') thì tính BC theo R (với $OA = R$)

A. $BC = 2R$. **B.** $BC = \sqrt{2}R$. **C.** $BC = \sqrt{3}R$. **D.** $BC = \sqrt{5}R$.

Lời giải

a) **Chọn D.**



Xét đường tròn (O') có OA là đường kính và $C \in (O')$ nên $\widehat{ACO} = 90° \Rightarrow AD \perp CO$

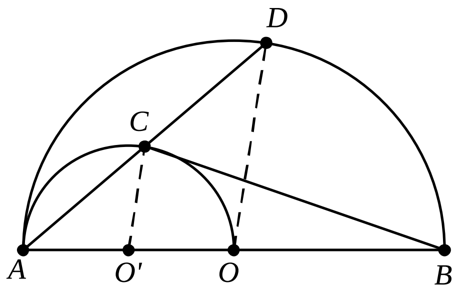
Xét đường tròn (O) có $OA = OD \Rightarrow \Delta OAD$ cân tại O có OC là đường cao nên OC cũng là đường trung tuyến hay C là trung điểm của AD.

Xét tam giác AOD có $O'C$ là đường trung bình nên $O'C//OD$

Kẻ các tiếp tuyến $Cx; Dy$ với các nửa đường tròn ta có $Cx \perp O'C; Dy \perp OD$ mà $O'C//OD$ nên $Cx \perp Dy$.

Do đó phương án A, B, C đúng.

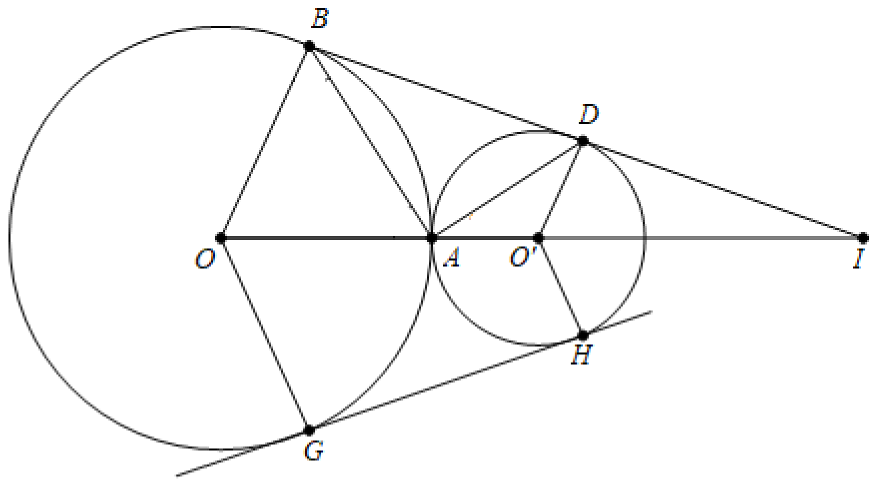
b) **Chọn B.**



Ta có $OB = R; OO' = \frac{R}{2} \Rightarrow O'B = \frac{3R}{2}; O'C = \frac{R}{2}$

Theo định lý Phytagore ta có: $BC = \sqrt{OB^2 - O'C^2} = \sqrt{\frac{9R^2}{4} - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{2}R$.

Câu 99. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ $(R > R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ các bán kính $OB//O'D$ với B, D ở cùng phía nửa mặt phẳng bờ OO'. Đường thẳng DB và OO' cắt nhau tại I. Tiếp tuyến chung ngoài GH của (O) và (O') với G, H nằm ở nửa mặt phẳng bờ OO' không chứa B, D.



a) Tính OI theo R và R'.

A. $OI = \frac{R+R'}{R-R'}$. **B.** $OI = \frac{R(R+R')}{R-R'}$. **C.** $OI = \frac{R(R-R')}{R+R'}$. **D.** $OI = \frac{R-R'}{R+R'}$.

b) Chọn câu đúng.

A. BD, OO' và GH đồng quy. **B.** BD, OO' và GH không đồng quy.

C. Không có ba đường nào đồng quy. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Lời giải

a) **Chọn B.**

Xét tam giác IOB có $OB//O'D$ (gt)

Áp dụng định lí Thales ta có $\dfrac{OI}{O'I}=\dfrac{OB}{O'D}$ suy ra $\dfrac{OI}{O'I}=\dfrac{R}{R'}$ mà

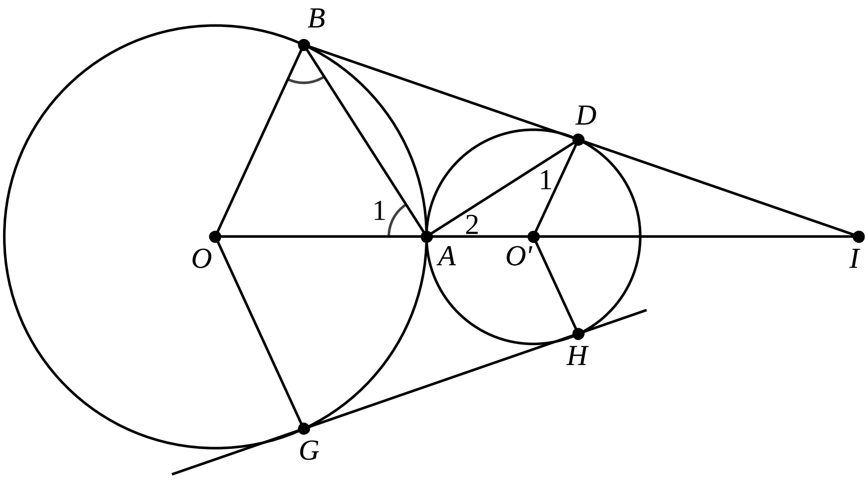
$O'I = OI - OO' = OI - (OA + AO') = OI - (R + R')$

Nên $\dfrac{OI}{OI-(R+R')}=\dfrac{R}{R'} \Rightarrow OI.R' = R[OI-(R+R')]$

$OI.R - OI.R' = R(R+R')$.

$OI(R-R') = R(R+R')$

$OI = \dfrac{R(R+R')}{R-R'}$.



b) **Chọn A.**

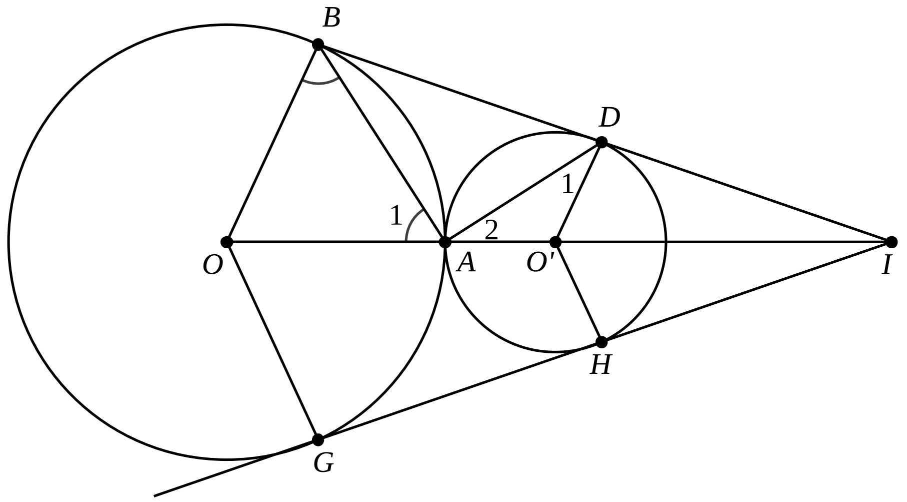
Gọi giao điểm của OO' và GH là I'

Ta có $OG//O'H$ (do cùng vuông góc GH)

Theo định lí Talet trong tam giác OGI' ta có $\dfrac{I'O}{I'O'}=\dfrac{OG}{O'H}=\dfrac{R}{R'}$ hay $\dfrac{I'O}{I'O'}=\dfrac{OI}{O'I}=\dfrac{R}{R'}$

$\Rightarrow I'$ trùng với I.

Vậy BD, OO' và GH đồng quy.



Câu 100. Số đo $n°$ của cung tròn có độ dài $30,8cm$ trên đường tròn có bán kính $22cm$ là (lấy $\pi \simeq 3,14$ và làm tròn đến độ).

A. 70°. **B.** 80°. **C.** 65°. **D.** 85°.

Lời giải

Chọn B.

Độ dài cung tròn $l = \frac{\pi Rn}{180} = \frac{\pi .22.n}{180} = 30,8$ suy ra $n \approx 80^\circ$

Câu 101. Số đo $n°$ của cung tròn có độ dài $40,2cm$ trên đường tròn có bán kính $16cm$ là (lấy $\pi \simeq 3,14$ và làm tròn đến độ).

A. 144°. **B.** 145°. **C.** 124°. **D.** 72°.

Lời giải

Chọn A.

Độ dài cung tròn $l = \frac{\pi Rn}{180} = \frac{\pi .16.n}{180} = 40,2$ suy ra $n = \frac{40,2.180}{16.\pi} \approx 144^\circ$.

Câu 102. Tính độ dài cung $30°$ của một đường tròn có bán kính $4dm$.

A. $\frac{4\pi}{3}(dm)$. **B.** $\frac{\pi}{3}(dm)$. **C.** $\frac{\pi}{6}(dm)$. **D.** $\frac{2\pi}{3}(dm)$.

Lời giải

Chọn D.

Độ dài cung tròn $l = \frac{\pi Rn}{180} = \frac{\pi .4.30}{180} = \frac{2\pi}{3}(dm)$

Câu 103. Chu vi đường tròn $R = 9$ bán kính là:

A. 9π. **B.** 12π. **C.** 18π. **D.** 27π.

Lời giải

Chọn C.

Chu vi $C = 2\pi R = 2\pi .9 = 18\pi$.

Câu 104. Chu vi đường tròn bán kính $R = 6$ là:

A. 9π . **B.** 12π . **C.** 18π . **D.** 27π .

Lời giải

Chọn B.

Chu vi $C = 2\pi R = 2\pi.6 = 12\pi$.

Câu 105. Biết chu vi đường tròn là $C = 48\pi$. Tính đường kính của đường tròn.

A. 48 . **B.** 24 . **C.** 36 . **D.** 18 .

Lời giải

Chọn A.

Chu vi $C = \pi d = 48\pi \Rightarrow d = 48$.

Vậy đường kính cần tìm là 48 .

Câu 106. Biết chu vi đường tròn là $C = 36\pi(cm)$. Tính đường kính của đường tròn.

A. $18(cm)$. **B.** $14(cm)$. **C.** $20(cm)$. **D.** $36(cm)$.

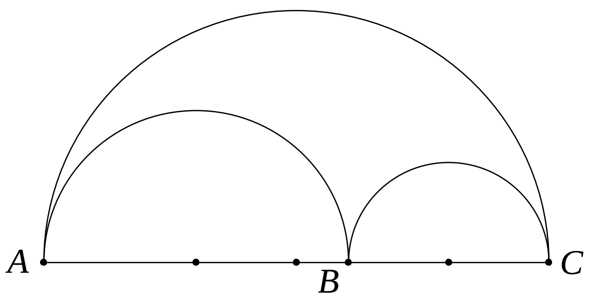
Lời giải

Chọn D.

Chu vi $C = \pi d = 36\pi \Rightarrow d = 36$.

Vậy đường kính cần tìm là $36(cm)$.

Câu 107. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng B nằm giữa A và C .



Chọn khẳng định đúng.

A. Độ dài nửa đường tròn đường kính AC bằng hiệu các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AB và BC .

B. Độ dài nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AB và BC .

C. Độ dài nửa đường tròn đường kính BC bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AB và AC .

D. Độ dài nửa đường tròn đường kính AB bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AC và BC .

Lời giải

Chọn B.

Độ dài nửa đường tròn đường kính AC là $l_1 = \pi.\frac{AC}{2}$.

Độ dài nửa đường tròn đường kính AB là $l_1 = \pi.\frac{AB}{2}$.

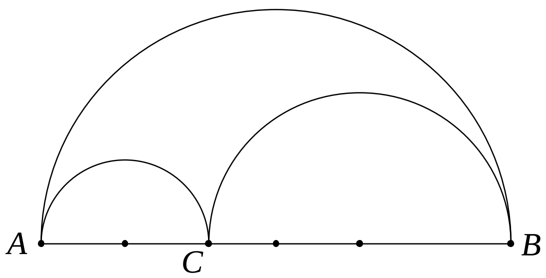
Độ dài nửa đường tròn đường kính BC là $l_1 = \pi.\frac{BC}{2}$.

Mà ba điểm A, B, C thẳng hàng sao cho B nằm giữa A và C nên $AB + BC = AC$

Do đó $l_1 = \pi.\frac{AC}{2} = \pi\left(\frac{AB}{2} + \frac{BC}{2}\right) = \pi.\frac{AB}{2} + \pi.\frac{BC}{2} = l_2 + l_3$.

Vậy độ dài nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AB và BC.

Câu 108. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng C nằm giữa A và B, đồng thời $AB = 3AC$.



Chọn khẳng định **sai.**

A. Độ dài nửa đường tròn đường kính AB gấp ba lần độ dài của nửa đường tròn đường kính AC.

B. Độ dài nửa đường tròn đường kính AB gấp $1,5$ lần độ dài của nửa đường tròn đường kính BC.

C. Độ dài nửa đường tròn đường kính AB bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính BC và AC.

D. Độ dài nửa đường tròn đường kính BC bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AC và AB.

Lời giải

Chọn D.

Độ dài nửa đường tròn đường kính AC là $l_1 = \pi.\frac{AC}{2}$.

Độ dài nửa đường tròn đường kính AB là $l_1 = \pi.\frac{AB}{2}$.

Độ dài nửa đường tròn đường kính BC là $l_1 = \pi.\frac{BC}{2}$.

Mà ba điểm A, B, C thẳng hàng sao cho C nằm giữa A và B và $AB = 3AC$ nên $\begin{cases} AC + CB = AB \\ AB = 3AC \\ AB = \frac{3}{2}BC \end{cases}$

Do đó $l_2 = \pi.\frac{AB}{2} = \pi\left(\frac{AC}{2} + \frac{BC}{2}\right) = \pi.\frac{AC}{2} + \pi.\frac{BC}{2} = l_1 + l_3$ nên C đúng, D sai.

Lại có $AB = 3AC \Rightarrow l_2 = \pi \dfrac{AB}{2} = \pi \dfrac{3AC}{2} = 3.\pi \dfrac{AC}{2} = 3l_1$ nên A đúng.

$AB = \dfrac{3}{2}BC \Rightarrow l_2 = \pi \dfrac{AC}{2} = \dfrac{3}{2}\pi \dfrac{BC}{2} = \dfrac{3}{2}l_3$ nên B đúng.

Câu 109. Chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh $a(cm)$ là:

A. $\dfrac{4\pi a\sqrt{3}}{3}(cm)$. **B.** $\dfrac{2\pi a\sqrt{3}}{3}(cm)$. **C.** $\dfrac{\pi a\sqrt{3}}{3}(cm)$. **D.** $\dfrac{5\pi a\sqrt{3}}{3}(cm)$.

Lời giải

Chọn B.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow C = 2\pi R = \dfrac{2\pi a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 110. Chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh $3(cm)$ là:

A. $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}(cm)$. **B.** $\pi\sqrt{3}(cm)$. **C.** $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}(cm)$. **D.** $2\pi\sqrt{3}(cm)$.

Lời giải

Chọn D.

Nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \sqrt{3} \Rightarrow C = 2\pi R = 2\pi\sqrt{3}(cm)$

Câu 111. Một hình tròn có diện tích $S = 225\pi(cm^2)$. Bán kính của hình tròn đó là:

A. $14(cm)$. **B.** $16(cm)$. **C.** $12(cm)$. **D.** $15(cm)$.

Lời giải

Chọn D.

Diện tích $S = \pi R^2 = 225\pi \Leftrightarrow R^2 = 225 \Rightarrow R = 15(cm)$

Câu 112. Diện tích hình tròn bán kính $R = 8cm$ là:

A. $8\pi(cm^2)$. **B.** $64\pi(cm^2)$. **C.** $16\pi(cm^2)$. **D.** $32\pi^2(cm^2)$.

Lời giải

Chọn B.

Diện tích $S = \pi R^2 = \pi.8^2 = 64\pi(cm^2)$

Câu 113. Diện tích hình tròn có đường kính $20cm$ là:

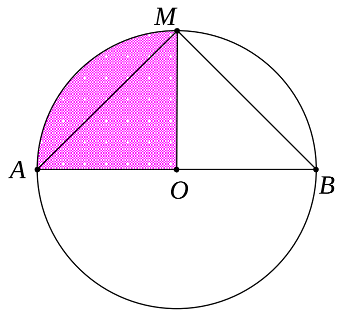
A. $100\pi(cm^2)$. **B.** $10\pi(cm^2)$. **C.** $20\pi(cm^2)$. **D.** $100\pi^2(cm^2)$.

Lời giải

Chọn A.

Diện tích $S = \pi R^2 = \pi.\left(\dfrac{20}{2}\right)^2 = 100\pi(cm^2)$.

Câu 114. Cho đường tròn $(O;10cm)$, đường kính AB. Điểm $M \in (O)$ sao cho $\widehat{BAM} = 45°$. Tính diện tích hình quạt AOM .



A. $5\pi(cm^2)$. **B.** $25\pi(cm^2)$. **C.** $50\pi(cm^2)$. **D.** $\frac{25}{2}\pi(cm^2)$.

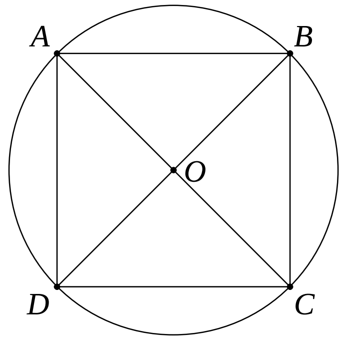
Lời giải

Chọn B.

Xét đường tròn (O) có: $\begin{cases} OA = OM \\ \widehat{MAO} = 45^\circ \end{cases}$ suy ra ΔAOM là tam giác vuông cân $\Rightarrow \widehat{MOA} = 90^0$.

Vậy diện tích hình quạt AOM là $S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi .10^2.90}{360} = 25\pi(cm^2)$.

Câu 115. Cho hình vuông có cạnh $6cm$ là nội tiếp đường tròn (O). Hãy tính diện tích hình tròn (O).



A. $18\pi(cm^2)$. **B.** $36\pi(cm^2)$. **C.** $18(cm^2)$. **D.** $36(cm^2)$.

Lời giải

Chọn A.

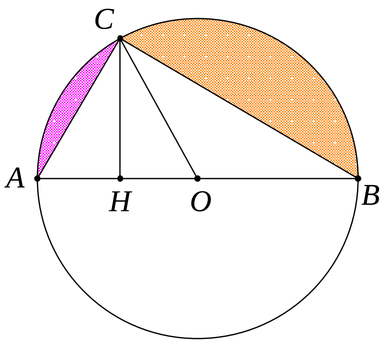
Gọi hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) khi đó $OA = OB = OC = OD = R \Rightarrow O$ là giao điểm của AC và BD $\Rightarrow R = \frac{AC}{2}$

Xét tam giác vuông ABC ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 6^2 + 6^2 = 72$

$AC = 6\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

Diện tích hình tròn (O) là $S = \pi R^2 = \pi\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18\pi(cm^2)$.

Câu 116. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 4\sqrt{2}cm$. Điểm $C \in (O)$ sao cho $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tính diện tích hình giới hạn bởi đường tròn (O) và $AC; BC$.



A. $\pi-\sqrt{3}$. **B.** $2\pi-2\sqrt{3}$. **C.** $\pi-3\sqrt{3}$. **D.** $2\pi-\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Diện tích hình tròn (O) là: $S_{(O)}=\pi R^2$

Ta có góc $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow \widehat{BAC}=90^0-\widehat{CBA}=90^0-30^0=60^0$.

Tam giác AOC có $\widehat{CAO}=60°$ và $OA=OC=R$ nên tam giác AOC đều cạnh bằng R.

Giả sử CH là đường cao của tam giác ABC, ta có:

$$CH=CO.\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}.R\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}CH.AB=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}R.2R=\frac{\sqrt{3}}{2}R^2.$$

Diện tích hình giới hạn bởi đường tròn (O) và AC,BC là:

$$\frac{1}{2}S_{(O)}-S_{ABC}=\frac{1}{2}\pi R^2-\frac{\sqrt{3}}{2}R^2=\frac{1}{2}\left(\pi-\sqrt{3}\right)R^2=\frac{1}{2}\left(\pi-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}\right)^2=2\pi-2\sqrt{3}.$$

Câu 117. Một hình quạt có chu vi bằng $34cm$ và diện tích bằng $66cm^2$. Bán kính của hình quạt bằng?

A. $R=5(cm)$. **B.** $R=6(cm)$ hoặc $R=11(cm)$..

C. $R=7(cm)$ **D.** $R=8(cm)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\begin{cases}\dfrac{lR}{2}=66\\ l+2R=34\end{cases}$ hay $\begin{cases}lR=132\\ l+2R=34\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}l.2R=264\\ l+2R=34\end{cases}$

Khi đó l và $2R$ là nghiệm của phương trình $X^2-34X+264=0$

Ta có $l=22$; $2R=12$ hoặc $2R=22$; $l=12$ khi đó $R=6$ hoặc $R=11$.

Câu 118. Một hình quạt có chu vi bằng $28(cm)$ và diện tích bằng $49(cm^2)$. Bán kính của hình quạt bằng?

A. $R=5(cm)$. **B.** $R=6(cm)$. **C.** $R=7(cm)$. **D.** $R=8(cm)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\begin{cases}\dfrac{lR}{2}=49\\ l+2R=28\end{cases}$ khi đó $\begin{cases}lR=98\\ l+2R=28\end{cases}$ hay $\begin{cases}l.2R=196\\ l+2R=28\end{cases}$

Khi đó l và $2R$ là nghiệm của phương trình $X^2-28X+196=0$ ta được nghiệm kép hay

$\begin{cases}2R=14\\ l=14\end{cases}$ khi đó $\begin{cases}R=7\\ l=14\end{cases}$. Vậy $R=7(cm)$.

Câu 119. Công thức tính diện tích hình vành khuyên tạo bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính R và r (với $R>r$) là

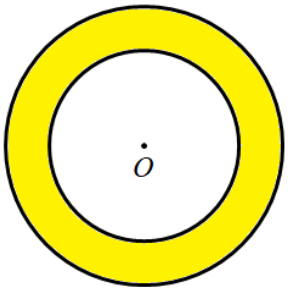
A. $S_v=\pi\left(R^2-r^2\right)$. **B.** $S_v=\pi\left(r^2-R^2\right)$. **C.** $S_v=\pi\left(R-r\right)^2$. **D.** $S_v=\pi\left(R^2-r^2\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Lý thuyết

Câu 120. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O;2\,\text{cm})$; $(O;3\,\text{cm})$. Diện tích hình vành khuyên là



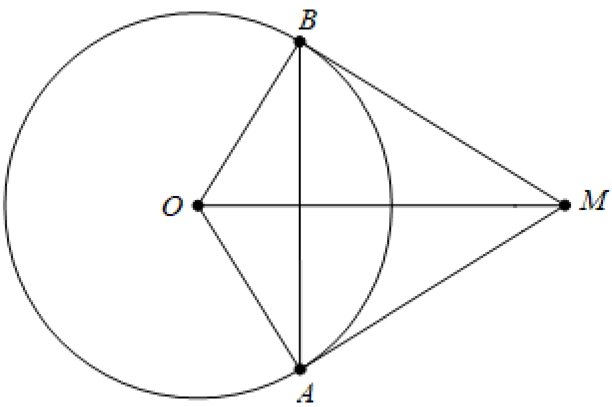
A. $1,5\pi\,\text{cm}^2$. **B.** $2\pi\,\text{cm}^2$. **C.** $3\pi\ \text{cm}^2$. **D.** $5\pi\ \text{cm}^2$.

Lời giải

Chọn D.

Diện tích hình vành khuyên là: $S_v=\pi\left(R^2-r^2\right)=\pi\left(3^2-2^2\right)=5\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 121. Cho hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại M, biết $\widehat{AMB}=50°$.



Số đo của $\widehat{AMO}$ và $\widehat{BOM}$ lần lượt là:

A. $\widehat{AMO}=35°;\widehat{MOB}=55°$. **B.** $\widehat{AMO}=65°;\widehat{MOB}=25°$.

C. $\widehat{AMO}=55°;\widehat{MOB}=35°$. **D.** $\widehat{AMO}=25°;\widehat{MOB}=65°$.

Lời giải

Chọn D.

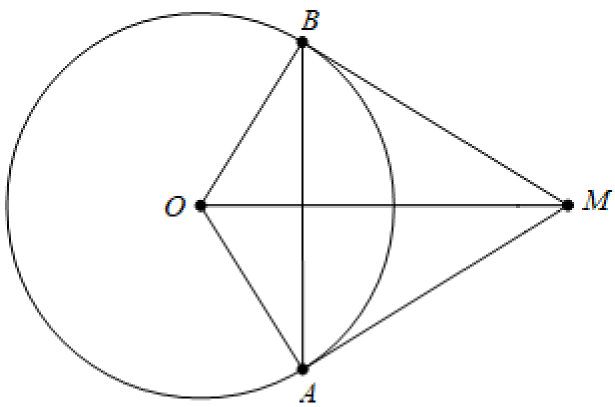
Vì MA, MB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}; MO$ là tia phân giác của $\widehat{AMB}$ hay $\widehat{AMO} = \frac{1}{2}\widehat{AMB} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$.

Mà tam giác OAM vuông tại A (do MA là tiếp tuyến) nên $\widehat{MOA} = 90 - \widehat{AMO} = 65^\circ$.

Mà OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$ nên $\widehat{MOB} = \widehat{MOA} = 65^\circ$.

Vậy $\widehat{AMO} = 25^\circ; \widehat{MOB} = 65^\circ$.

Câu 122. Cho hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại M, biết $\widehat{AMB} = 50^\circ$.



Số đo cung AB nhỏ và số đo cung AB lớn lần lượt là:

A. $130^\circ; 230^\circ$. **B.** $130^\circ; 250^\circ$. **C.** $230^\circ; 130^\circ$. **D.** $150^\circ; 210^\circ$.

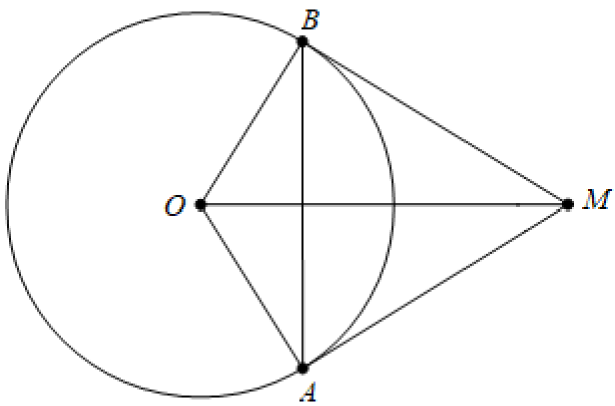
Lời giải

Chọn A.

Xét tứ giác $OAMB$ có $\widehat{BOA} + \widehat{OBM} + \widehat{OAM} + \widehat{AMB} = 360^\circ$ suy ra $\widehat{BOA} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

Vậy số đo cung nhỏ AB là 130°; số đo cung lớn AB là $360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$.

Câu 123. Cho đường tròn $(O; R)$, lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với (O) (A, B là các tiếp điểm).



Số đo góc $\widehat{AOM}$ và số đo cung nhỏ AB lần lượt là

A. 30° và 120°. **B.** 50° và 240°. **C.** 60° và 120°. **D.** 120° và 240°.

Lời giải

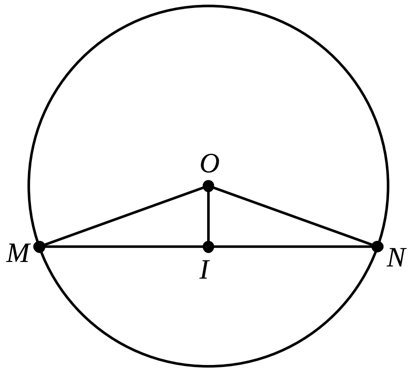
Chọn C.

Xét tam giác AOM vuông tại A ta có: $\cos\widehat{AOM}=\dfrac{OA}{OM}=\dfrac{R}{2R}=\dfrac{1}{2}$ suy ra $\widehat{AOM}=60^\circ$

Xét đường tròn (O) có $MA;MB$ là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M nên OM là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$. Suy ra $\widehat{AOB}=2.\widehat{AOM}=2.60^\circ=120^\circ$ mà $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm chắn cung AB

Nên số đo cung nhỏ AB là 120°.

Câu 124. Cho $(O;R)$ và dây cung $MN=R\sqrt{3}$. Kẻ OI vuông góc với MN tại I.



Độ dài OI theo R và số đo cung nhỏ MN lần lượt là:

A. $\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$ và 120°. **B.** $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$ và 150°. **C.** $\dfrac{R}{2}$ và 120°. **D.** $\dfrac{R}{3}$ và 150°.

Lời giải

Chọn C.

Xét (O) có $OI\perp MN$ tại I nên I là trung điểm của MN suy ra $MI=IN=\dfrac{\sqrt{3}R}{2}$

Xét tam giác OIM vuông tại I, theo định lý Phythagore ta có $OI^2=OM^2-MI^2$ hay

$$OI=\sqrt{R^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}R}{2}\right)^2}=\dfrac{R}{2}.$$

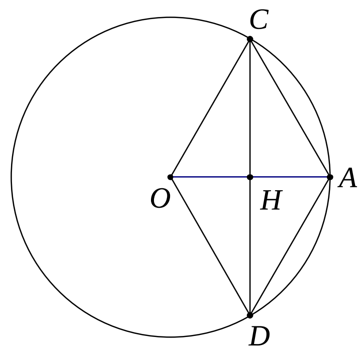
Xét tam giác OIM vuông tại I ta có: $\sin\widehat{MOI}=\dfrac{MI}{MO}=\dfrac{\sqrt{3}R}{2}:R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\widehat{MOI}=60^\circ$

ΔMON cân tại O có OI vừa là đường cao vừa là đường phân giác

nên $\widehat{MON}=2\widehat{MOI}=2.60^\circ=120^\circ$.

Suy ra số đo cung nhỏ MN là 120°.

Câu 125. Cho đường tròn $(O;R)$. Gọi H là trung điểm thuộc bán kính OA. Dây CD vuông góc với OA tại H. Tính số đo cung lớn CD.



A. $260°$. **B.** $300°$. **C.** $240°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn C.

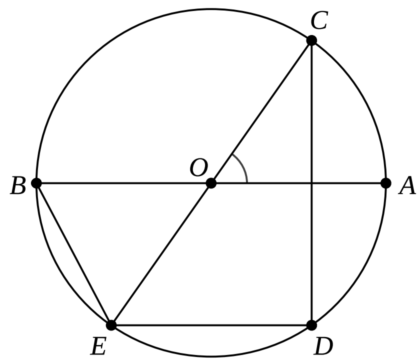
Xét đường tròn (O) có $OA \perp CD$ tại H nên H là trung điểm của CD.

Tứ giác $OCAD$ có hai đường chéo vuông góc và giao nhau tại trung điểm mỗi đường nên $OCAD$ là hình thoi.

$\Rightarrow OC = CA$ mà $OC = OA$ nên $OC = OA = AC$ hay tam giác OAC đều $\Rightarrow \widehat{COA} = 60° \Rightarrow \widehat{COD} = 120°$

Do đó số đo cung nhỏ CD là $120°$ và số đo cung lớn CD là $360° - 120° = 240°$.

Câu 126. Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ góc ở tâm $\widehat{AOC} = 55°$. Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB. Tính số đo cung nhỏ BE.



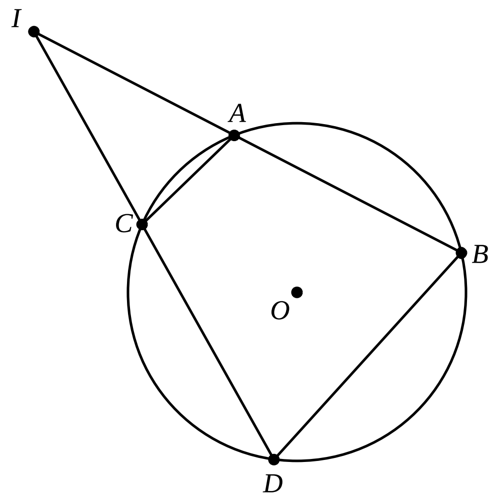
A. $55°$. **B.** $60°$. **C.** $40°$. **D.** $50°$.

Lời giải

Chọn A.

Xét (O) có $CD \perp OA, ED // OA \Rightarrow CD \perp ED$ hay $\widehat{EDC} = 90°$ mà $E; D; C \in (O)$ nên C là đường kính của (O) hay $E; O; C$ thẳng hàng. Do đó $\widehat{BOE} = \widehat{COA} = 55°$ (đối đỉnh) nên số đo cung nhỏ BE là $55°$.

Câu 127. Cho đường tròn (O) và điểm I nằm ngoài (O). Từ điểm I kẻ hai dây cung AB và CD (A nằm giữa I và B, C nằm giữa I và D).



a) Cặp góc nào sau đây bằng nhau?

A. $\widehat{ACI};\widehat{IBD}$. **B.** $\widehat{CAI};\widehat{IBD}$. **C.** $\widehat{ACI};\widehat{IDB}$. **D.** $\widehat{ACI};\widehat{IAC}$.

b) $IA.IB$ bằng

A. $ID.CD$. **B.** $IC.CB$. **C.** $IC.CD$. **D.** $IC.ID$.

Lời giải

a) **Chọn A.**

Xét (O) có $\widehat{ACD}$ là góc nội tiếp chắn cung AD (chứa điểm B);

$\widehat{ABD}$ là góc nội tiếp chắn cung AD (chứa điểm C) nên $\widehat{ACD}+\widehat{ABD}=\frac{1}{2}.360^\circ=180^\circ$

Lại có $\widehat{ACD}+\widehat{ACI}=180^\circ$ nên $\widehat{ACI}=\widehat{IBD}$.

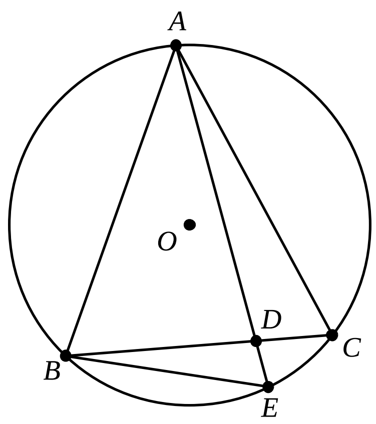
Tương tự ta có $\widehat{IAC}=\widehat{IDB}$.

b) **Chọn D.**

Xét ΔIAC và ΔIDB có $\hat{I}$ chung và $\widehat{ACI}=\widehat{IBD}$ (câu trước) nên $\Delta IAC\backsim\Delta IDB$ (g-g)

Suy ra $\frac{IA}{ID}=\frac{IC}{IB}$ hay $IA.IB=IC.ID$. Đáp án D.

Câu 128. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB, AC bằng nhau. Qua A vẽ một cát tuyến cắt dây BC ở D và cắt (O) ở E.



Khi đó AB^2 bằng:

A. $AD.AC$. **B.** $AD.AE$. **C.** $AD.BD$. **D.** $AE.BE$.

Lời giải

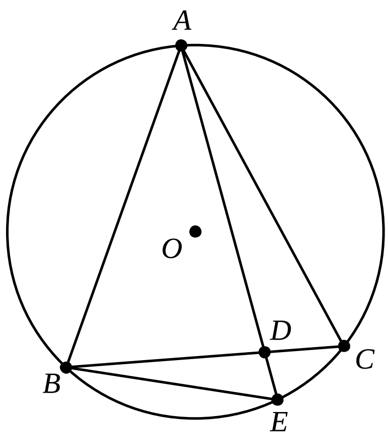
Chọn B.

Xét (O) có $\widehat{AEB}=\widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau $AB=AC$)

Xét ΔABD và ΔAEB có $\widehat{A}$ chung và $\widehat{AEB}=\widehat{ABC}$ (cmt) nên $\Delta ABD \backsim \Delta AEB$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AD}{AB}$ nên $AB^2=AE.AD$.

Câu 129. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB, AC bằng nhau. Qua A vẽ một cát tuyến cắt dây BC ở D và cắt (O) ở E.



Khi đó $DA.DE$ bằng:

A. DB^2. **B.** DC^2. **C.** $AB.AC$. **D.** $DB.DC$.

Lời giải

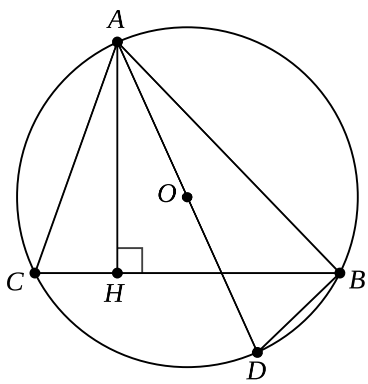
Chọn D.

Xét (O) có $\widehat{AEB}=\widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp chắn cung bằng nhau $AB=AC$)

Xét ΔADC và ΔBDE có $\widehat{ADC}=\widehat{BDE}$ (đối đỉnh) và $\widehat{AEB}=\widehat{ABC}$ (cmt)

Nên $\Delta ADC \backsim \Delta BDE$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{DC}{DE}$ nên $DA.DE=DB.DC$.

Câu 130. Cho tam giác ABC đường cao AH và nội tiếp trong đường tròn tâm (O), đường kính AD.



Khi đó tích $AB.AC$ bằng:

A. AH^2. **B.** $AH.AD$. **C.** $AH.HD$. **D.** $AH.HB$.

Lời giải

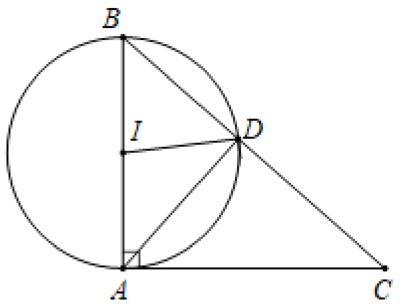
Chọn B.

Xét (O) có $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB); $\widehat{ABD}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Nên $\Delta ACH \backsim \Delta ADB$ (g - g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{AD}=\dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH.AD=AC.AB$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 131. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB = 5cm, \widehat{ABC} = 60°$. Vẽ đường tròn tâm I, đường kính AB và đường tròn tâm I cắt đường thẳng BC ở D.



a) $\widehat{ADB} = 100^\circ$

b) D thuộc đường tròn đường kính AC.

c) ΔIBD là tam giác đều.

d) Độ dài cung nhỏ BD của (I) bằng $\frac{\pi}{6}(cm)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Xét đường tròn (I) đường kính AB có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

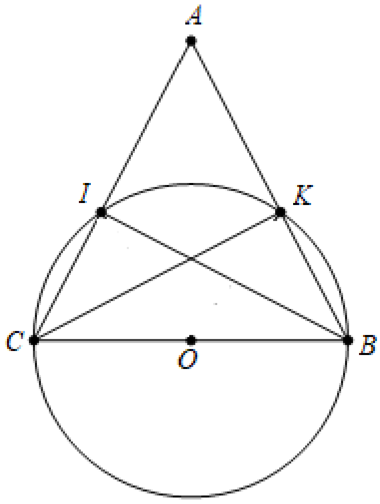
b) Ta có $\widehat{ADC} = 90^\circ$ (vì $\widehat{ADB} = 90^\circ$), do đó D thuộc đường tròn đường kính AC.

c) Ta có ΔIBD cân tại I có $\hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \Delta IBD$ đều nên $\widehat{BID} = 60^\circ$

d) ΔIBD đều nên $\widehat{BID} = 60^\circ$, suy ra $sđ\,\overset{\frown}{BD} = 60^\circ$ (góc ở tâm)

Độ dài cung nhỏ BD của (I) là $l = \dfrac{\pi.\frac{5}{2}.60}{180^\circ} = \dfrac{5\pi}{6}(cm)$.

Câu 132. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 40°$. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính BC. Đường tròn (O) cắt AB, AC lần lượt tại I, K



a) ΔIBC vuông tại I và ΔKBC vuông tại K.

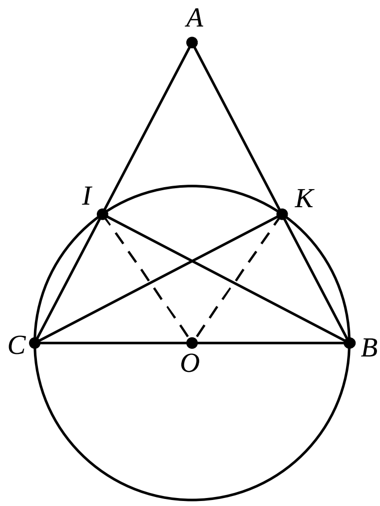
b) Số đo cung nhỏ BI bằng số đo cung nhỏ CK.

c) $\widehat{IOK} = 80°$

d) Số đo cung lớn BI bằng $280°$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**



a) b) Xét các tam giác ΔIBC và ΔKBC có BC là đường kính của (O) và $I;K \in (O)$

Nên ΔIBC vuông tại I và ΔKBC vuông tại K.

Xét hai tam giác vuông ΔIBC và ΔKBC ta có BC chung; $\widehat{ABC} = \widehat{ABC}$ (do ΔABC cân)

$\Rightarrow \Delta IBC = \Delta KBC$ (ch - gn) $\Rightarrow IB = CK$

suy ra số đo hai cung nhỏ CK và BI bằng nhau.

c) Xét tam giác cân ABC cân tại A có $\widehat{A} = 40° \Rightarrow \widehat{KBO} = \widehat{ICO} = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$

Xét tam giác OKB cân tại O có $\widehat{KBO} = 70°$ suy ra $\widehat{KOB} = 180° - 2.70° = 40°$

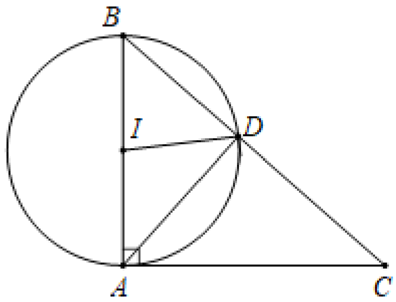
Tương tự ta có $\widehat{IOC}=40^\circ$.

Suy ra $\widehat{IOK}=180^\circ-40^\circ-40^\circ=100^\circ$.

d) $sđ\,\overset{\frown}{IK}=\widehat{IOK}=100^\circ$ (góc ở tâm)

Suy ra số đo cung lớn IK là: $360^\circ-100^\circ=260^\circ$

Câu 133. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB=4cm, \hat{B}=50^\circ$. Vẽ đường tròn tâm I, đường kính AB và đường tròn tâm I cắt đường thẳng BC ở D.



a) $\widehat{BCA}=40^\circ$

b) $\widehat{DAC}=60^\circ$

c) Độ dài cung nhỏ BD của (I) bằng $\dfrac{4\pi}{9}(cm)$.

d) Độ dài cung lớn BD của (I) bằng $\dfrac{32\pi}{9}(cm)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Xét tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B}=50^\circ$ nên $\hat{C}=90^\circ-50^\circ=40^\circ$.

b) Xét đường tròn (I) đường kính AB có $\widehat{ADB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

suy ra $\widehat{DAC}=\hat{B}=50^\circ$ (cùng phụ với $\widehat{BAD}$)

c) Vì $\widehat{DAC}=50^\circ \Rightarrow \widehat{BAD}=90^\circ-50^\circ=40^\circ$ suy ra số đo cung BD nhỏ là $n^\circ=2.40^\circ=80^\circ$

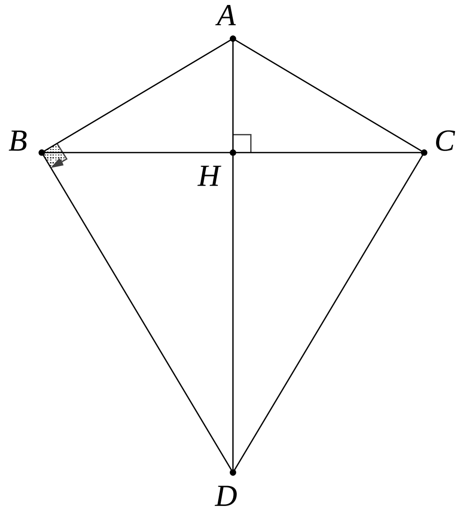
Độ dài cung nhỏ BD của (I) là $l=\dfrac{\pi.\frac{4}{2}.80}{180}=\dfrac{8\pi}{9}(cm)$

d) Số đo cung lớn BD là $360^\circ-80^\circ=280^\circ$

Độ dài cung lớn BD là $l_1=\dfrac{\pi\frac{4}{2}.280}{180}=\dfrac{28\pi}{9}(cm)$

Cách 2: Độ dài cung lớn BD là: $2\pi.2-\dfrac{8\pi}{9}=\dfrac{28\pi}{9}(cm)$

Câu 134. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao $AH = 2cm, BC = 8cm$. Đường vuông góc với AB tại B cắt đường thẳng AH ở D.



a) AH là đường phân giác $\widehat{BAC}$.

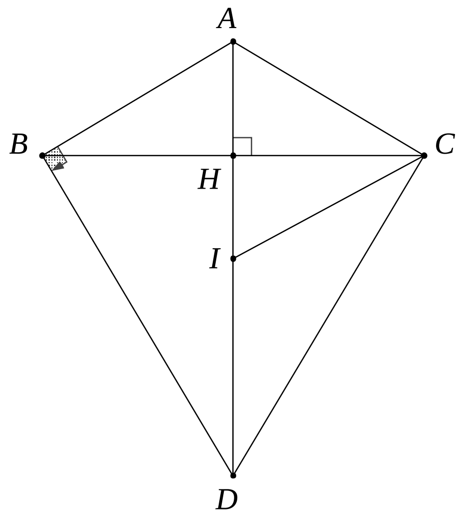
b) $\widehat{ACD} = 90°$

c) Các điểm A, B, D, C cùng thuộc một đường tròn.

d) Đường kính của đường tròn đi qua các điểm A, B, D, C bằng $5cm$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**



a) b) Ta có ΔABC cân tại A có đường cao AH nên AH cũng là đường phân giác $\widehat{BAC}$ hay $\widehat{CAD} = \widehat{DAB}$.

Suy ra $\Delta ACD = \Delta ABD$ (c – g – c) nên $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = 90°$.

c) Lấy I là trung điểm AD. Xét hai tam giác vuông ABD và ACD có $IA = ID = IB = IC = \dfrac{AD}{2}$.

Nên I là điểm cách đều A, B, D, C hay A, B, D, C cùng nằm trên đường tròn tâm I đường kính AD.

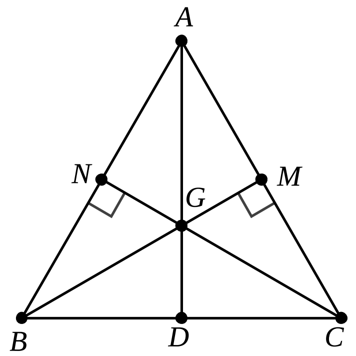
d) Vì $BC = 8cm \Rightarrow BH = 4cm$. Áp dụng định lý Phythagore cho tam giác vuông AHB ta được

$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$.

Ta có $\Delta ABD \backsim \Delta HAB$ suy ra $AB^2 = AH.AD$ hay $AD = \dfrac{AB^2}{AH} = \dfrac{20}{2} = 10$

Vậy đường kính cần tìm là $10cm$.

Câu 135. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a, các đường cao là BM và CN. Gọi D là trung điểm cạnh BC và G là giao điểm của BM và CN.



a) Đường tròn đi qua bốn điểm B, N, M, C là đường tròn tâm D bán kính BC.

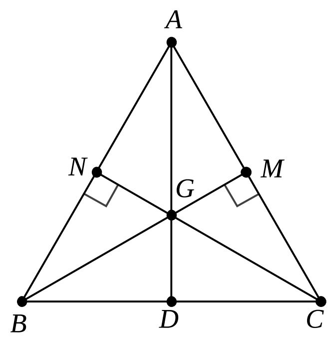
b) $GD = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

c) Điểm G nằm trong đường tròn tâm D bán kính $\dfrac{BC}{2}$.

d) Điểm A nằm ngoài đường tròn tâm D bán kính $\dfrac{BC}{2}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**



a) Xét hai tam giác vuông BNC và BMC có ND, MD là hai đường trung tuyến.

$DN = DB = DC = DM = \dfrac{BC}{2}$ nên bốn điểm B, N, M, C cùng thuộc đường tròn tâm D bán kính $\dfrac{BC}{2}$.

b) c) d) Ta có G là trực tâm ΔABC nên G cũng là trọng tâm ΔABC suy ra $GD = \frac{1}{3}AG$.

D là trung điểm BC suy ra $AD \perp BD; DC = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$

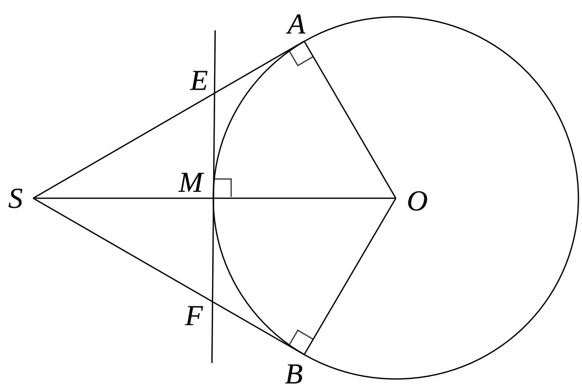
Theo định lý Phythagore cho tam giác vuông ADC ta có $AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $GD = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Nhận thấy $GD = \frac{a\sqrt{3}}{6} < \frac{a}{2} = \frac{BC}{2}$ nên điểm G nằm trong đường tròn tâm D bán kính $\frac{BC}{2}$.

Và $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2} > \frac{a}{2} = \frac{BC}{2}$ nên điểm A nằm ngoài đường tròn tâm D bán kính $\frac{BC}{2}$.

Câu 136. Cho SA, SB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). Gọi M là một điểm tùy ý trên cung nhỏ AB. Tiếp tuyến của (O) tại M cắt SA tại E và cắt SB tại F.



a) $SA > SB$

b) $EA < EM$

c) Chu vi của ΔSEF bằng $2SA$.

d) Giả sử M là giao điểm của đoạn SO với đường tròn (O), khi đó $SE > SF$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Vì S là giao của hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) nên $SA = SB$.

b) Vì E là giao của hai tiếp tuyến tại A và M của đường tròn (O) nên $EA = EM$.

c) Ta có F là giao của hai tiếp tuyến tại M và B của đường tròn (O) nên $FM = FB$.

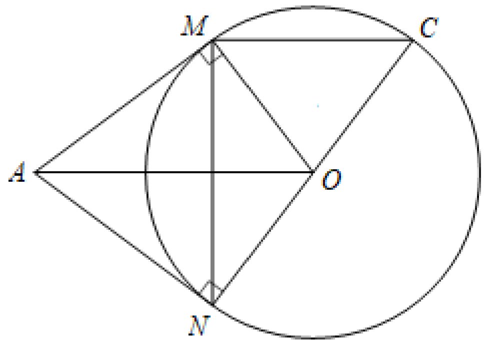
Chu vi của ΔSEF là $SE + SF + EF = SE + SF + EM + MF = SE + SF + EA + FB = SA + SB = 2SA$

d) Ta có $SM \perp EF$ nên SM là đường cao của ΔSEF

Ngoài ra SM là đường phân giác của ΔSEF

Nên ΔSEF cân tại $S \Rightarrow SE = SF$.

Câu 137. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Vẽ đường kính NOC .



a) $AM = AN$

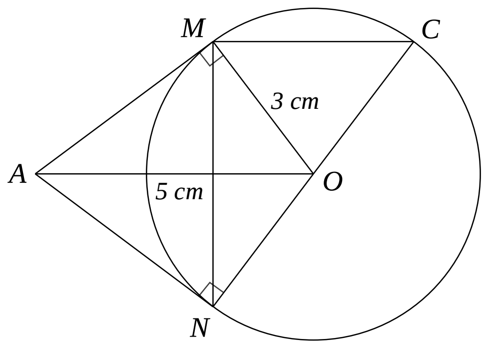
b) $OA \perp MN$

c) $\widehat{AON} > \widehat{MCO}$.

d) Giả sử $OM = 3\,cm$, $OA = 5\,cm$. Khi đó, chu vi của ΔAMN bằng $\frac{52}{5}(\,cm)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**



a) Vì A là giao của hai tiếp tuyến tại M và N của đường tròn (O) nên $AM = AN$.

b) $AM = AN$ nên A nằm trên đường trung trực của MN

$OM = ON = R$ nên O nằm trên đường trung trực của MN

$\Rightarrow AO$ là đường trung trực của $MN \Rightarrow AO \perp MN$.

c) $MC \perp MN$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

mà $AO \perp MN \Rightarrow AO//MC \Rightarrow \widehat{AON} = \widehat{MCO}$ (đồng vị)

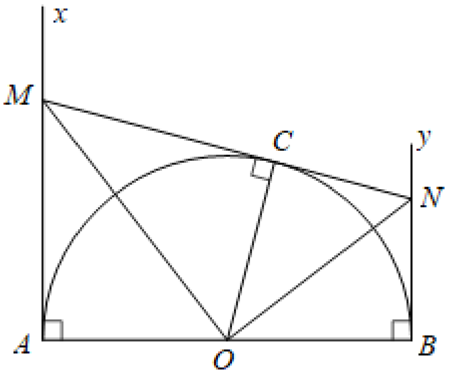
d) Tính $AM = 4\,cm = AN$. Gọi AO cắt MN tại H

Khi đó $S_{AMO} = \frac{1}{2}AM.MO = \frac{1}{2}MH.AO \Rightarrow MH = \frac{AM.MO}{AM} = \frac{4.3}{5} = \frac{12}{5}\,cm$

Do đó $MN = 2MH = \dfrac{24}{5}cm$.

Chu vi của ΔAMN bằng $C_{\Delta AMN} = AM + AN + MN = 4 + 4 + \dfrac{24}{5} = \dfrac{64}{5}(cm)$

Câu 138. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Về cùng phía với nửa đường tròn, vẽ hai tia $Ax,\ By$ vuông góc với AB. Gọi M là một điểm bất kì thuộc tia Ax. Qua M kẻ tiếp tuyến MC (C là tiếp điểm) với nửa đường tròn (O), cắt By tại N.



a) $\widehat{AOM} = \widehat{COM}$

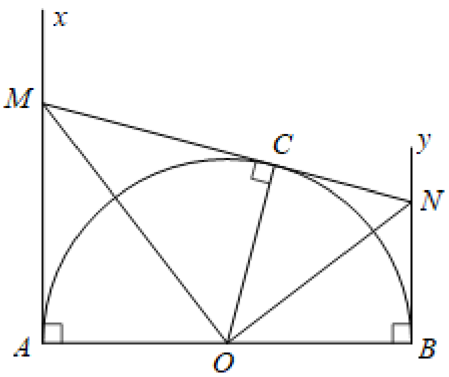
b) $\widehat{MON} = 80^{\circ}$

c) $MN = AM + BN$

d) Giả sử $AB = 2\sqrt{2025}$, khi đó $AM.BN = \sqrt{2025}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**



a) Vì M là giao của hai tiếp tuyến tại A và C của đường tròn (O) nên MO là đường phân giác $\widehat{AOC}$, suy ra $\widehat{AOM} = \widehat{COM}$

b) Vì N là giao của hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) nên NO là đường phân giác $\widehat{BOC}$, suy ra $\widehat{BON} = \widehat{CON}$

Ta có: $\widehat{AOM}+\widehat{COM}+\widehat{BON}+\widehat{CON}=180^{\circ}$ hay $2\widehat{COM}+2\widehat{CON}=180^{\circ}$ suy ra

$\widehat{COM}+\widehat{CON}=\dfrac{180^{\circ}}{2}=90^{\circ}$

Do đó $\widehat{MON}=\widehat{COM}+\widehat{CON}=90^{\circ}$.

c) Ta có: $MC=MA; NC=NB$

Do đó: $MN=MC+CN=MA+NB$

d) Ta có $\Delta OCM \backsim \Delta NCO\ (g-g)$

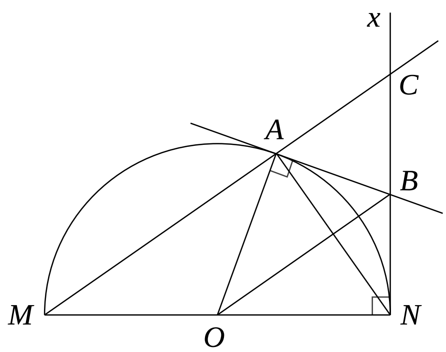
suy ra $MC.CN=OC^2=\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2=\left(\dfrac{2\sqrt{2025}}{2}\right)^2=2025$

hay $MC.CN=\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2=\left(\dfrac{2\sqrt{2025}}{2}\right)^2=2025$

mà $AM.BN=MC.CN$

Do đó $AM.BN=2025$

Câu 139. Cho nửa đường tròn (O) đường kính MN, tiếp tuyến Nx. Qua A trên nửa đường tròn (A không trùng với M, N) kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Nx ở B. Tia MA cắt Nx ở C.



a) $\widehat{AMN}=\dfrac{2}{3}\widehat{AON}$

b) $\widehat{AMN}=\widehat{AOB}$

c) $OB\perp AN$

d) Giả sử $AB=3(cm)$, khi đó $NC=7(cm)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Ta có $\widehat{AMN}=\dfrac{1}{2}\widehat{AON}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AN)

b) Vì B là giao của hai tiếp tuyến tại A và N của đường tròn (O) nên BO là đường phân giác $\widehat{AON}$,

suy ra $\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{AON}$

mà $\widehat{AMN} = \frac{1}{2}\widehat{AON}$

Do đó $\widehat{AMN} = \widehat{AOB}$

c) Ta có OB là trung trực của $AN \Rightarrow OB \perp AN$

d) Ta có $OB // MC$ vì cùng vuông góc với AN

ΔNMC có $\begin{cases} OM = ON \\ OB // MC \end{cases} \Rightarrow BN = BC$.

Mà $NB = AB = 3(cm)$

Suy ra $NC = 2NB = 6(cm)$

Câu 140. Cho ΔABC là tam giác nhọn cân tại A. Kẻ hai đường cao BH và CK.

a) Đường tròn tâm O đường kính BC đi qua K và H.

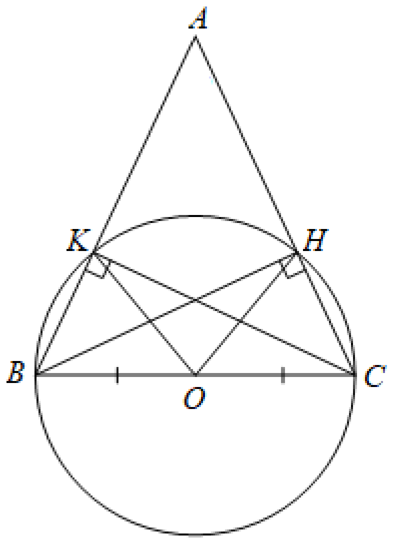
b) Số đo cung nhỏ BK bằng số đo cung nhỏ HC.

c) Số đo cung nhỏ BH lớn số đo cung nhỏ CK.

d) Giả sử $\widehat{BAC} = 40^0$, khi đó số đo của cung nhỏ KH bằng 100^0.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**



a) ΔKBC vuông tại K có KO là trung tuyến $\Rightarrow KO = OB = OC$

ΔHBC vuông tại H có HO là trung tuyến $\Rightarrow HO = OB = OC$

Vậy H, K thuộc đường tròn tâm O đường kính BC.

b) ΔOBK cân tại $O \Rightarrow \widehat{BOK} = 180^0 - 2.\widehat{KBO}$

ΔOCH cân tại $O \Rightarrow \widehat{HOC} = 180^0 - 2.\widehat{HCO}$

Mà ΔABC cân tại $A \Rightarrow \widehat{KBO} = \widehat{HCO}$.

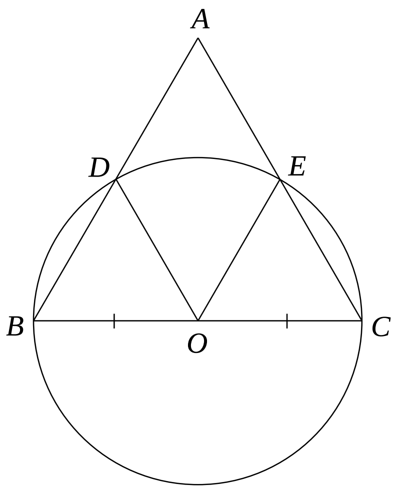
Từ đó $\widehat{BOK} = \widehat{HOC} \Rightarrow sđ\,\overset{\frown}{BK} = sđ\,\overset{\frown}{HC}$

c) Ta có $sđ\,\overset{\frown}{BK} = sđ\,\overset{\frown}{HC}$

mà $\begin{cases} sđ\,\overset{\frown}{BH} = sđ\,\overset{\frown}{BK} + sđ\,\overset{\frown}{KH} \\ sđ\,\overset{\frown}{CK} = sđ\,\overset{\frown}{CH} + sđ\,\overset{\frown}{KH} \end{cases} \Rightarrow sđ\,\overset{\frown}{BH} = sđ\,\overset{\frown}{CK}$.

d) Từ $\widehat{BAC} = 40^0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 70^0 \Rightarrow \widehat{BOK} = 40^0 \Rightarrow \widehat{KOH} = 100^0 \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{HK} = 140^0$.

Câu 141. Cho ΔABC đều có $AB = 2\sqrt{3}\,cm$. Đường tròn (O) đường kính BC cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại D và E.



a) $\widehat{BOD} = 60^0$

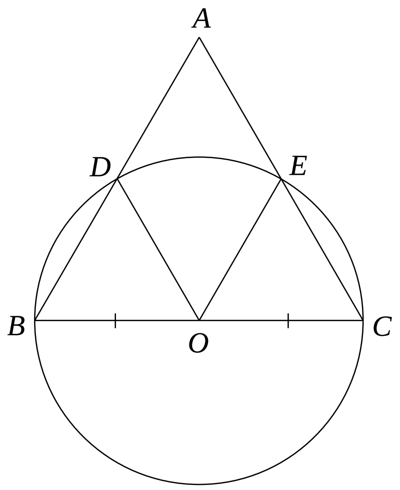
b) Số đo ba cung nhỏ BD, DE, EC bằng nhau và bằng 60^0.

c) Diện tích tứ giác $ADOE$ bằng $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}cm^2$.

d) Diện tích phần viên phân giới hạn bởi dây CE và cung CE là $\dfrac{\pi - 3\sqrt{3}}{8}\left(cm^2\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**



a) ΔBOD cân tại $O\left(OB = OD = \dfrac{BC}{2}\right)$ có $\widehat{ABC} = 60^0$ nên ΔBOD đều, suy ra $\widehat{BOD} = 60^0$

b) ΔCOE cân tại $O\left(OC = OE = \dfrac{BC}{2}\right)$ có $\widehat{ACB} = 60^0$ nên ΔCOE đều, suy ra $\widehat{COE} = 60^0$

Do đó $\widehat{DOE} = 180^0 - \left(\widehat{BOD} + \widehat{EOC}\right) = 180^0 - \left(60^0 + 60^0\right) = 60^0$

Suy ra $\widehat{BOD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOC} = 60^0$

Nên $sđ\,\overset{\frown}{BD} = sđ\,\overset{\frown}{DE} = sđ\,\overset{\frown}{EC} = 60^0$ (góc ở tâm)

c) ΔABC đều cạnh $AB = 2\sqrt{3}\,cm$ nên diện tích ΔABC bằng $\dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,cm^2$.

Diện tích tứ giác $ADOE$ là $S_{ADOE} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\,cm^2$.

d) ΔABC đều nên $BC = 2\sqrt{3}\,cm \Rightarrow OC = \sqrt{3}\,cm$

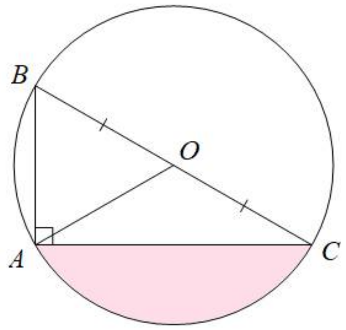
Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung CE là: $S_1 = \dfrac{n}{360}.\pi R^2 = \dfrac{60}{360}.\pi.\left(\sqrt{3}\right)^2 = \dfrac{\pi}{2}\,cm^2$

Diện tích ΔABC bằng $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,cm^2$.

Diện tích ΔOEC là $S_2 = \dfrac{1}{4}S_{\Delta ABC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\,cm^2$.

Diện tích phần viên phân giới hạn bởi dây CE và cung CE là : $S = S_1 - S_2 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{8} = \dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8}\left(cm^2\right)$

Câu 142. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 3\,cm,\ BC = 6\,cm$ và đường tròn (O) đường kính BC.



a) Điểm A thuộc đường tròn đường kính BC.

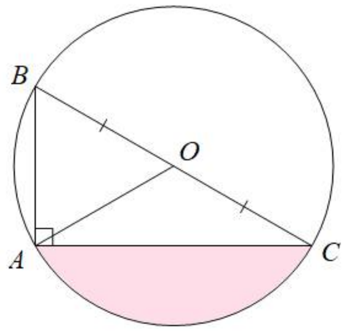
b) $AC = \sqrt{3}\,cm$

c) Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung nhỏ AC và dây AC bằng $9\pi\left(cm^2\right)$.

d) Diện tích phần viên phân giới hạn bởi dây AC và cung nhỏ AC bằng $\dfrac{3\pi - 9\sqrt{3}}{4}\left(cm^2\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**



a) O là trung điểm của BC.

ΔABC vuông tại A có AO là trung tuyến nên $OA = OB = OC$

Vậy A thuộc đường tròn tâm O đường kính BC.

b) ΔABC vuông tại A, theo Định lí Pythagore, ta có:

$AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow AC = 3\sqrt{3}\,cm$.

c) Tính được $OC = 3\,cm$ và $\cos B = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^0$

ΔAOB cân tại O và $\widehat{ABC} = 60^0$ nên ΔAOB đều, suy ra $\widehat{AOB} = 60^0$, do đo $\widehat{AOC} = 120^0$.

Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung AC là:

$S_1 = \dfrac{120}{360}.\pi R^2 = \dfrac{1}{3}.\pi.3^2 = 3\pi\left(cm^2\right)$.

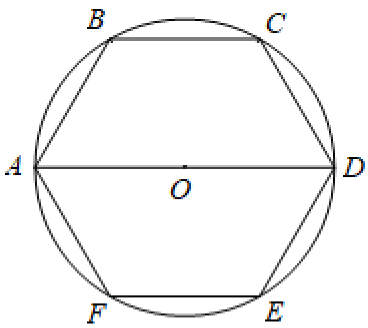
d) Ta có $AC = 3\sqrt{3}\,cm$. Diện tích ΔABC là $S_2 = \dfrac{1}{2}.AB.AC = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}\,cm$.

Ta có $S_{\Delta OAC}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}cm^2$.

Khi đó diện tích hình viên phân tạo bởi dây AC và cung AC là

$$S=S_1-S_{OAC}=3\pi-\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{12\pi-9\sqrt{3}}{4}\left(cm^2\right)$$

Câu 143. Cho đường tròn $(O;\ 5\,cm)$ và hình lục giác đều $ABCDEF$ sao cho 6 đỉnh của hình lục giác đều đều thuộc đường tròn.



a) Tam giác OAB là tam giác đều.

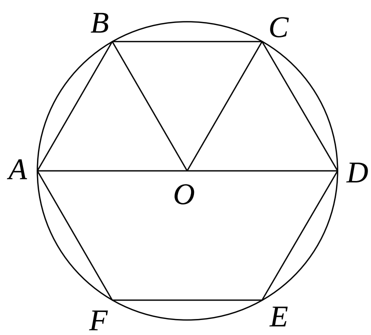
b) Cung nhỏ AC và cung nhỏ BD bằng nhau.

c) Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung nhỏ AC và dây AC bằng $\dfrac{5\pi}{3}\left(cm^2\right)$.

d) Diện tích phần viên phân tạo bởi cung nhỏ AC và dây AC bằng $\dfrac{100\pi-75\sqrt{3}}{12}\left(cm^2\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**



a) ΔOAB cân tại O và $\widehat{OAB}=60^0$ nên ΔOAB là tam giác đều.

b) Ta có sđ $\overset{\frown}{AC}=\widehat{AOC}=120^0$

Và sđ $\overset{\frown}{BD}=\widehat{BOD}=120^0$.

Vậy $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

c) Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung nhỏ AC và dây AC là $S_1=\dfrac{n}{360}.\pi R^2=\dfrac{120}{360}.\pi.5^2=\dfrac{25\pi}{3}\left(cm^2\right)$

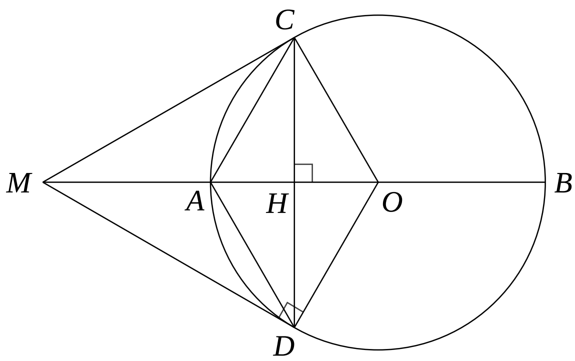
d) Tính diện tích ΔOAB được $\dfrac{25\sqrt{3}}{4}\,cm^2$

$$S_{\Delta OAC}=S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}S_{ABCO}=\frac{25\sqrt{3}}{4}\,cm^2$$

Diện tích phần viên phân tạo bởi cung AC và dây AC là

$$S=S_1-S_{\Delta OAC}=\frac{25\pi}{3}-\frac{25\sqrt{3}}{4}=\frac{100\pi-75\sqrt{3}}{12}\left(cm^2\right).$$

Câu 144. Cho đường tròn $(O;\,R)$ đường kính AB. Gọi H là trung điểm của OA. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt (O) tại C và D. Qua D kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt OA tại M.



a) Tứ giác $ACOD$ là hình thoi.

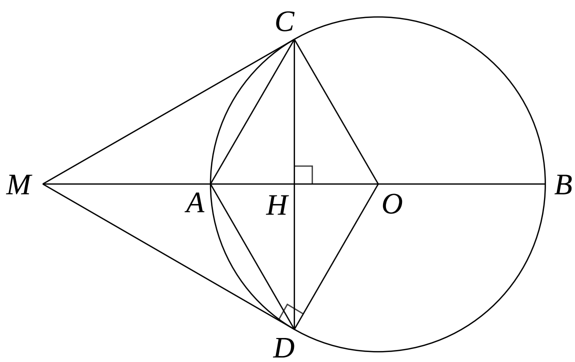
b) $AM>R$.

c) MC là tiếp tuyến của (O).

d) ΔMCD đều.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**



a) ΔCOD cân tại O và có $OH\perp CD$ nên OH là đường trung tuyến, suy ra $CH=DH$

Tứ giác $ACOD$ có hai đường chéo AO và CD vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình thoi.

b) c) ΔAOD đều nên $\widehat{AOD}=60^0$ hay $\widehat{MOD}=60^0\Rightarrow\widehat{AMD}=30^0\Rightarrow AM=AD=R$

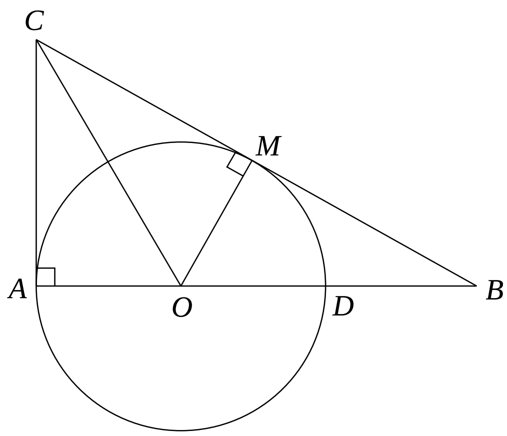
Do đó $MA = AO = AC$.

ΔCMO có $CA = \frac{1}{2}OM$ nên vuông tại $C \Rightarrow MC \perp OC$

Vậy MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) $MC = MD \Rightarrow \Delta MCD$ cân tại M, mặt khác $\widehat{CMD} = 60^0$ nên ΔMCD đều.

Câu 145. Cho đường tròn (O,R) và đường kính AD. Vẽ tiếp tuyến tại A của đường tròn, từ C trên tiếp tuyến đó vẽ tiếp tuyến thứ hai CM của đường tròn (O) (M là tiếp điểm và M khác A) cắt AD tại B. Biết $AC = 6\,cm,\ AB = 8\,cm$.



a) $BC = 10\,cm$.

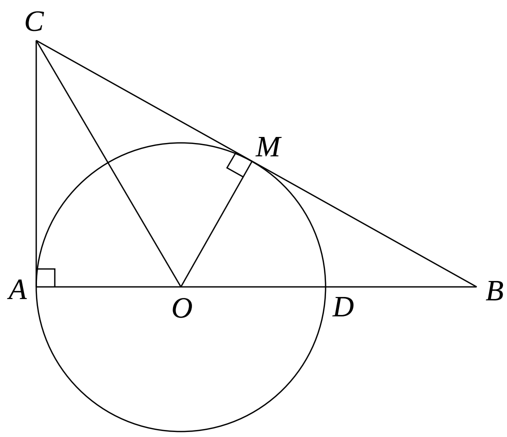
b) $BM = 6\,cm$.

c) $\Delta BMO \backsim \Delta BAC$.

d) $R = 4cm$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**



a) ΔCAB vuông tại A, theo Pythagore ta có:

$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\,cm$.

b) Ta có $CA = CM = 6\,cm \Rightarrow BM = BC - CM = 10 - 6 = 4\,cm$

d) Xét ΔBMO và ΔBAC, có:

$\widehat{BMO} = \widehat{BAC} = 90^0$

$\widehat{ABC}$ chung

Nên $\Delta BMO \backsim \Delta BAC\ (g-g)$

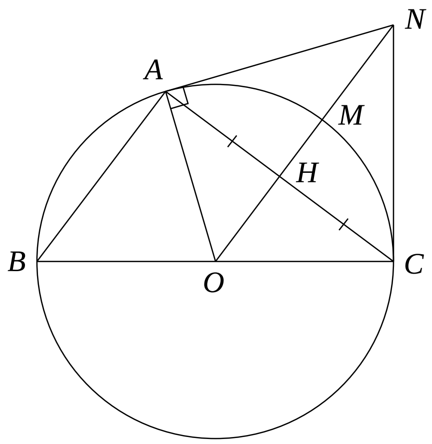
d) $\Delta BMO \backsim \Delta BAC$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{MO}{AC}$

$\Rightarrow MO = \dfrac{BM\,.\,AC}{BA} = \dfrac{4.6}{8} = 3cm$

Do đó $R = 3cm$

Câu 146. Cho đường tròn $(O;\ R)$ đường kính BC, lấy điểm $A \in (O)$. Gọi H là trung điểm của AC. Tia OH cắt (O) tại M. Từ A vẽ tiếp tuyến với (O) cắt tia OM tại N.



a) $\widehat{BAC} = 90^0$

b) $AB // OM$

c) CN là tiếp tuyến của (O).

d) $\dfrac{AH}{NC} = \dfrac{BC}{NO}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) ΔABC có $OA = OB = OC = \dfrac{1}{2}BC = R$ nên $\widehat{BAC} = 90^0$

b) ΔABC vuông tại $A \Rightarrow AB \perp AC$

Chứng minh $OM \perp AC$.

Khi đó $AB // OM$.

c) Chứng minh $\widehat{AOH}=\widehat{COH}\Rightarrow \Delta AON=\Delta CON$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow \widehat{OCN}=\widehat{OAN}=90^0$.

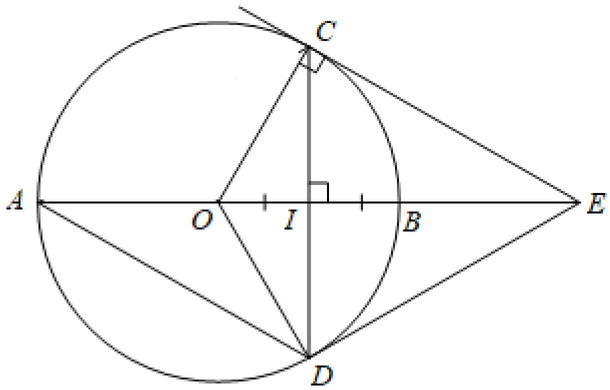
Vậy CN là tiếp tuyến của (O).

d) Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta CON$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{NC}=\dfrac{BC}{NO}$

$\Rightarrow \dfrac{2AH}{NC}=\dfrac{BC}{NO}(AC=2AH)$

Câu 147. Cho đường tròn (O,R) đường kính AB. Gọi I là trung điểm của OB. Qua I kẻ dây CD vuông góc với OB. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt AB tại E.



a) $\Delta OIC \backsim \Delta OCE$

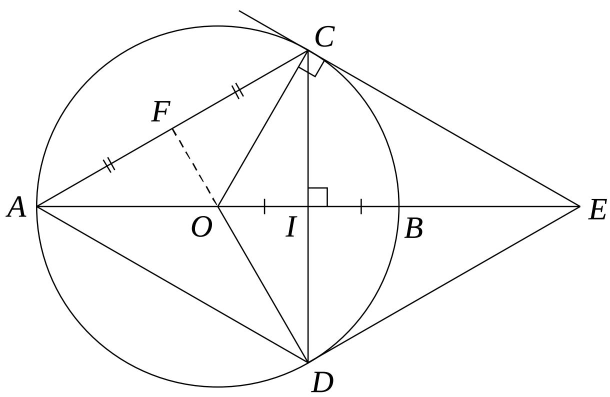
b) $OI.OE=2R$

c) $\widehat{ODE}=90^0$

d) Gọi F là trung điểm của dây AC. Khi đó $\widehat{DOF}=180^0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**



a) Xét ΔOIC và ΔOCE, có:

$\widehat{OIC} = \widehat{OCE} = 90^0$

$\widehat{COE}$ chung

Nên $\Delta OIC \backsim \Delta OCE$

b) $\Delta OIC \backsim \Delta OCE \ (g-g) \Rightarrow OI.OE = OC^2 = R^2$

c) Chứng minh OE là tia phân giác $\widehat{COD} \Rightarrow \Delta COE = \Delta DOE \ (c-g-c)$

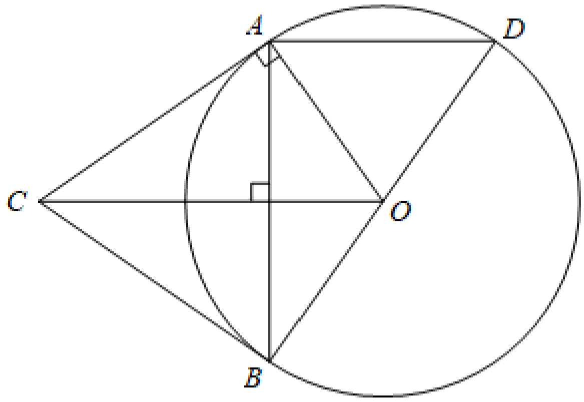
$\Rightarrow \widehat{ODE} = \widehat{OCE} = 90^0$

d) Chứng minh $AO = OB = 2OI$ và AI là trung tuyến của $\Delta ACD \Rightarrow O$ là trọng tâm.

Khi đó DO là đường trung tuyến nên đi qua trung điểm của $AC \Rightarrow D,\ O,\ F$ thẳng hàng hay

$\widehat{DOF} = 180^0$

Câu 148. Cho đường tròn (O, R) và dây AB. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn tại C. Vẽ đường kính BOD.



a) Đường thẳng OC là phân giác $\widehat{AOB}$

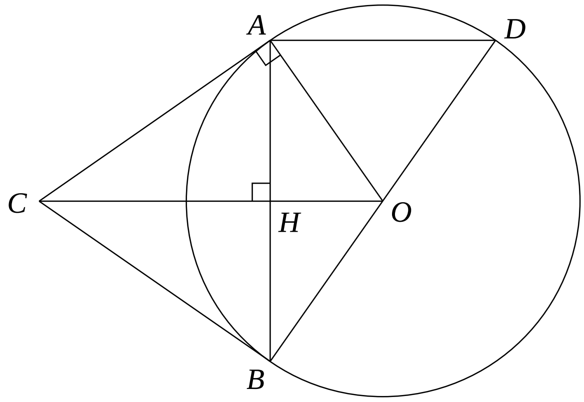
b) Đường thẳng CB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) Tứ giác $ADOC$ là hình thang cân.

d) Giả sử $R = 15\,cm,\ AB = 24\,cm$. Khi đó $OC = 26\,cm$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**



Gọi $H = OC \cap AB$

a) ΔAOB cân tại , có $OC \perp AB$ nên OC là phân giác $\widehat{AOB}$ hay $\widehat{AOH} = \widehat{BOH}$

b) Ta có $\widehat{AOH} = \widehat{BOH}, OA = OB, OC$ cạnh chung

$\Rightarrow \Delta AOC = \Delta BOC\ (c-g-c) \Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OBC} = 90^0$.

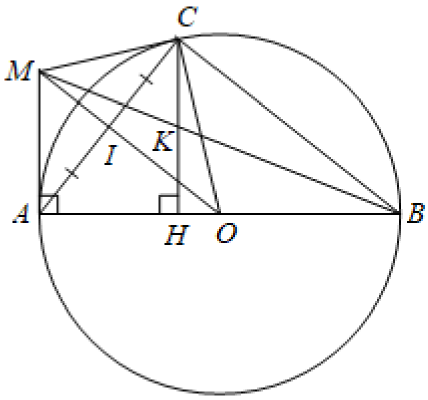
Vậy CB là tiếp tuyến của đường tròn.

c) ΔABD vuông tại $A \Rightarrow AD \perp AB$ mà $CO \perp AB$ nên $AD // OC$ hay tứ giác $ADOC$ là hình thang.

d) $AB = 24\,cm \Rightarrow AH = 12\,cm$. Tính được $HO = 9\,cm$.

Chứng minh $\Delta OHA \backsim \Delta OAC\ (g-g) \Rightarrow OC = \dfrac{AO^2}{OH} = \dfrac{15^2}{9} = 25\,cm$

Câu 149. Cho đường tròn (O) đường kính AB và C là một điểm trên đường tròn (C khác A và B). Kẻ $CH \perp AB$. Gọi I là trung điểm của AC, OI cắt tiếp tuyến tại A của (O) tại M, MB cắt CH tại K.



a) $\widehat{AIO}$ là góc nhọn.

b) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) $\widehat{AOI} = \widehat{ACB}$

d) $KH < KC$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) ΔOAC cân tại O, có OI là đường trung tuyến nên $OI \perp AC$ hay $\widehat{AIO} = 90^0$

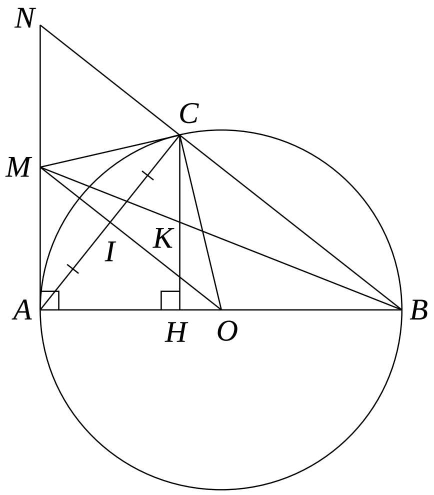
b) Ta có $\widehat{AOI} = \widehat{BOI}; OA = OC; OM$ cạnh chung

$\Rightarrow \Delta AOM = \Delta COM\ (c-g-c)$

$\Rightarrow \widehat{MCO} = \widehat{MAO} = 90^0$ nên MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) OI là đường trung bình ΔABC nên $OI // BC$, suy ra $\widehat{AOI} = \widehat{ACB}$ (đồng vị)

d)



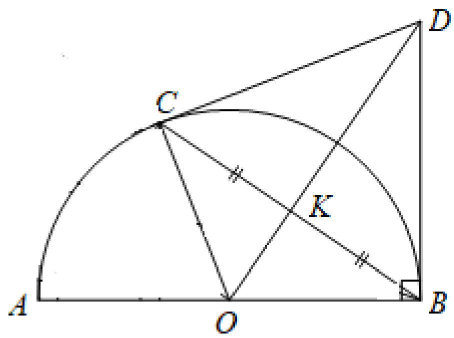
Gọi AM và BC cắt nhau tại N.

Ta có $OI//BC$ nên $MI//NC \Rightarrow AM = MN$.

Vì $CH//AN$ (cùng vuông góc với AB) nên $\frac{KH}{AM} = \frac{BK}{BM}$ và $\frac{CK}{MN} = \frac{BK}{BM}$

Từ đó ta có $\frac{KH}{AM} = \frac{KC}{MN} \Rightarrow KH = KC$ (vì $AM = MN$)

Câu 150. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Lấy điểm C nằm trên đường tròn (O). Gọi K là trung điểm của dây cung BC. Qua B dựng tiếp tuyến với (O) cắt OK tại D.



a) $DO \perp BC$

b) DC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) $DC = DB$

d) Vẽ $CH \perp AB$ tại H. Gọi I là trung điểm của CH. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BI tại E. Khi đó $\widehat{ECD} = 180^0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Chứng minh $OK \perp BC \Rightarrow DO \perp BC$

b) Ta có $\widehat{COK} = \widehat{BOK}; OB = OC; OD$ cạnh chung

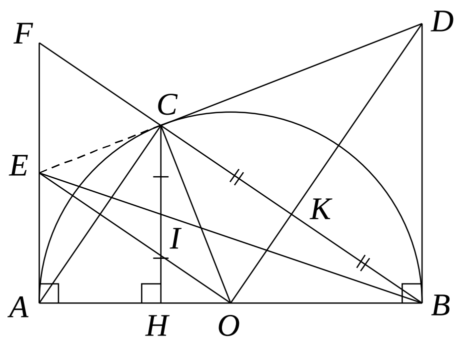
$\Rightarrow \Delta COD = \Delta BOD\ (c-g-c)$

$\Rightarrow \widehat{DCO} = \widehat{DBO} = 90^0$

nên DC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

c) vì D là giao điểm của hai tiếp tuyến tại B và C nên $DC = DB$

d)



Gọi BC cắt AE tại F.

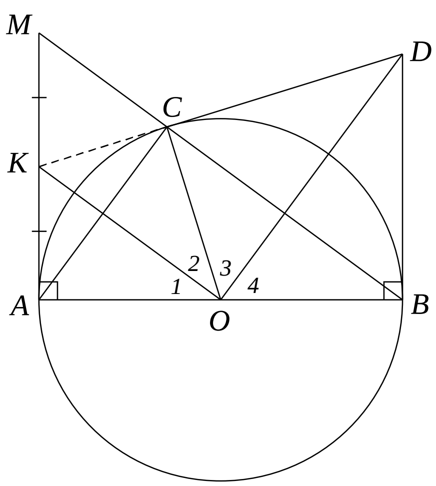
Chứng minh $CH // AF \Rightarrow \frac{IH}{AE} = \frac{BI}{BE}$ và $\frac{BI}{BE} = \frac{CI}{EF}$.

Từ đó $\frac{IH}{AE} = \frac{CI}{EF} \Rightarrow AE = EF$. ΔACF vuông tại C có CE là trung tuyến $\Rightarrow CE = AE$

Chứng minh $\Delta OEA = \Delta OEC\ (c-c-c) \Rightarrow \widehat{OCE} = \widehat{OAE} = 90^0$.

Suy ra $\widehat{ECD} = \widehat{ECO} + \widehat{OCD} = 180^0$

Câu 151. Cho đường tròn (O,R) đường kính AB. Lấy điểm C thuộc đường tròn (C khác A và B). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại M. Gọi K là trung điểm của MA. Đường thẳng KC cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) tại D.



a) ΔABC vuông.

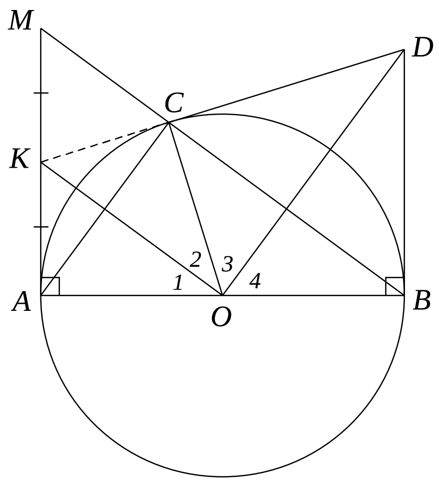
b) $BC.BM = 2R^2$.

c) KC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) $\widehat{KOD} < 90^0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**



a) ΔABC có trung tuyến CO mà $CO = \dfrac{AB}{2}$ nên ΔABC vuông tại C.

b) Chứng minh $\Delta BCA \backsim \Delta BAM$ $(g-g) \Rightarrow AB^2 = BC.BM$ hay $BC.BM = 4R^2$

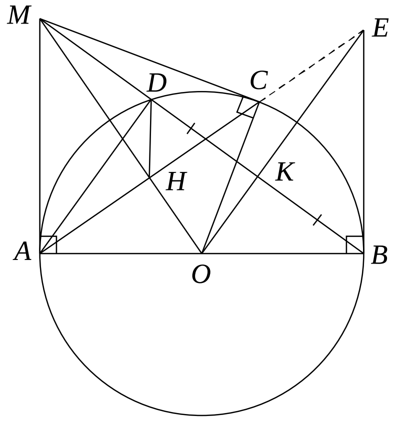
c) Chứng minh $KC = KA \Rightarrow \Delta CKO = \Delta AKO$ $(c-c-c)$

$\Rightarrow \widehat{KCO} = \widehat{KAO} = 90^0$, nên KC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

d) Chứng minh $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$, $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$

Khi đó $\widehat{KOD} = \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = \dfrac{180^0}{2} = 90^0$.

Câu 152. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Qua A vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O). Trên Ax lấy điểm M (M khác A), từ M vẽ tiếp tuyến MC của đường tròn (C là tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OM và AC. Đường thẳng MB cắt đường tròn (O) tại D (D nằm giữa M và B). Gọi K là trung điểm của BD. Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OK tại E.



a) $OM \perp AC$ tại H.

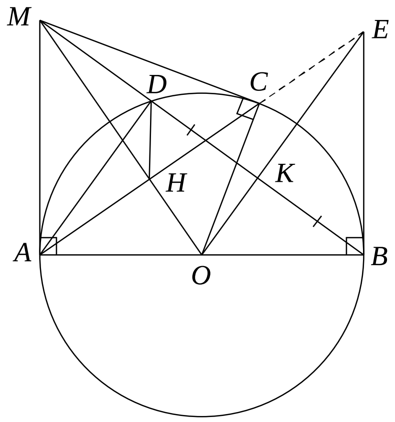
b) $MD.MB = MH.MO$

c) $\widehat{MHD} < \widehat{MBA}$

d) Ba điểm $A,\ E,\ C$ thẳng hàng.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**



a) Chứng minh MO là trung trực của AC nên $OM \perp AC$

b) Chứng minh $MD.MB = MA^2$ và $MH.MO = MA^2$

Nên $MD.MB = MH.MO$.

c) Chứng minh $\Delta MDH \backsim \Delta MOB\ (c-g-c) \Rightarrow \widehat{MHD} = \widehat{MBA}$.

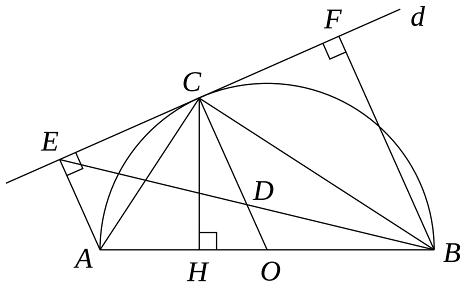
d) Chứng minh $OK \perp BM \Rightarrow OK.OE = OB^2$

Và $OH.OM = OA^2$ mà $OA = OB \Rightarrow OH.OM = OK.OE$

Khi đó $\Delta OHE \backsim \Delta OKM\ (c-g-c) \Rightarrow \widehat{OHE} = \widehat{OKM} = 90^0$

Mà $\widehat{OHC} = 90^0$, nên $H,\ C,\ E$ thẳng hàng.

Câu 153. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Qua điểm C thuộc nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến d của đường tròn. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc từ A và B tới d. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB. Gọi OC cắt BE tại D.



a) $AE//OC//BF$

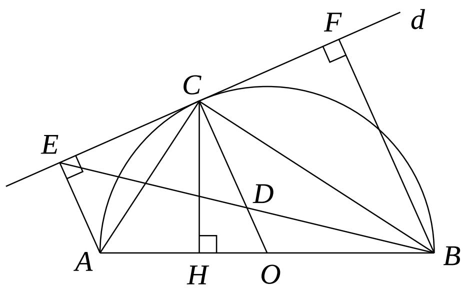
b) $CE > CF$

c) AC là tia phân giác $\widehat{BAE}$.

d) $CH^2 = AE.BF$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**



a) Ta có $AE \perp EF; OC \perp EF; BF \perp EF$ nên $AE//OC//BF$

b) Ta có $AE//OC//BF \Rightarrow BD = DE \Rightarrow EC = CF$

c) Ta có $AE//CO \Rightarrow \widehat{EAC} = \widehat{ACO}$ (so le trong)

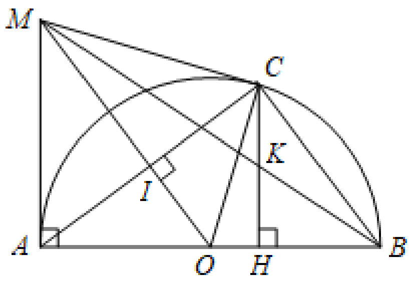
Mà ΔOAC cân tại $O \Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{CAO}$, suy ra $\widehat{EAC} = \widehat{CAO} \Rightarrow$ AC là tia phân giác $\widehat{BAE}$.

d) Chứng minh $\Delta AEC = \Delta AHC$ (cạnh huyền – góc nhọn)$\Rightarrow AE = AH$

Chứng minh $\Delta BHC = \Delta BFC$ (cạnh huyền – góc nhọn)$\Rightarrow BH = BF$

Chứng minh $\Delta BHC \backsim \Delta CHA$ $(g-g) \Rightarrow CH^2 = AH.BH = AE.BF$.

Câu 154. Cho nửa đường tròn $(O;\, R)$ đường kính AB, C là điểm thuộc nửa đường tròn sao cho $AC > BC$ (C khác A và B). Kẻ $CH \perp AB$ và $OI \perp AC$. Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O), tia OI cắt Ax tại M. Gọi giao điểm của BM với CH là K.



a) $OM//BC$

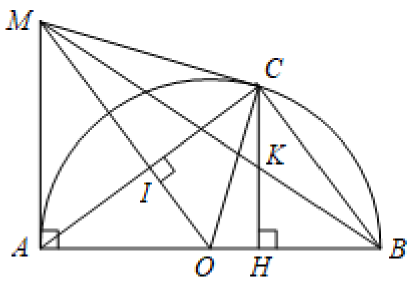
b) Bốn điểm C,H,O,I cùng thuộc một đường tròn có tâm là trung điểm OC.

c) $OI.OM=2R^2$

d) $CK<KH$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

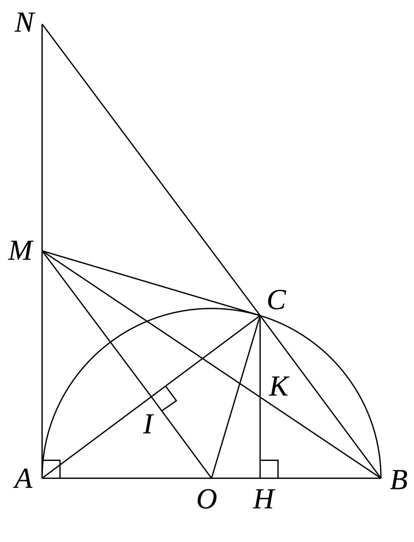


a) Ta có $OM//BC$ vì cùng vuông góc với AC

b) ΔOIC vuông tại I có OC là cạnh huyền và ΔOHC vuông tại H có OC là cạnh huyền nên C,H,O,I cùng thuộc một đường tròn có tâm là trung điểm OC.

c) Chứng minh $\Delta OIA \backsim \Delta OAM\ (g-g) \Rightarrow OI.OM=OA^2=R^2$

d) Gọi AM cắt BC tại N.



Chứng minh $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$

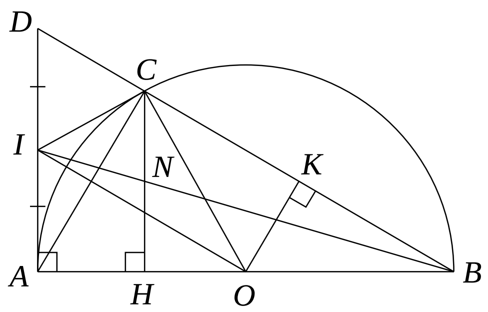
$\Rightarrow \Delta AOM = \Delta COM\ (c-g-c) \Rightarrow MA = MC$.

Chứng minh $MC = MN$ suy ra $MA = MN$

Vì $CH // NA \Rightarrow \frac{KH}{AM} = \frac{BK}{BM}$ và $\frac{BK}{BM} = \frac{CK}{MN}$

Suy ra $CK = HK$ (vì $MA = MN$).

Câu 155. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Trên nửa đường tròn lấy điểm C (C khác A và B). Kẻ $OK \perp BC$ tại K. Gọi D là giao điểm của BC với tiếp tuyến tại A của nửa đường tròn (O) và I là trung điểm của AD. Từ C kẻ $CH \perp AB$, BI cắt CH tại N.



a) $OK // AC$

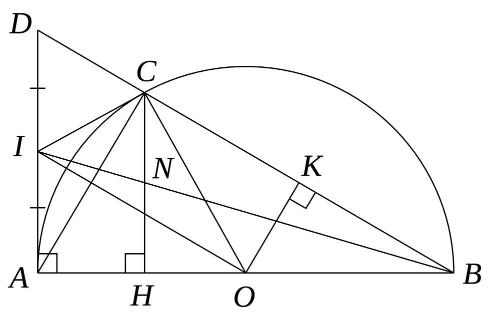
b) $BC.BD = 2R^2$

c) $\widehat{ICO} < 90^0$

d) $NH = \frac{1}{2}CH$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**



a) Chứng minh $AC \perp BC$ rồi suy ra $OK // AC$ (cùng $\perp BC$)

b) Chứng minh $\Delta BCA \backsim \Delta BAD\ (g-g) \Rightarrow BC.BD = BA^2 = (2R)^2 = 4R^2$.

c) Chứng minh ΔACD vuông tại $C \Rightarrow CI = AI$

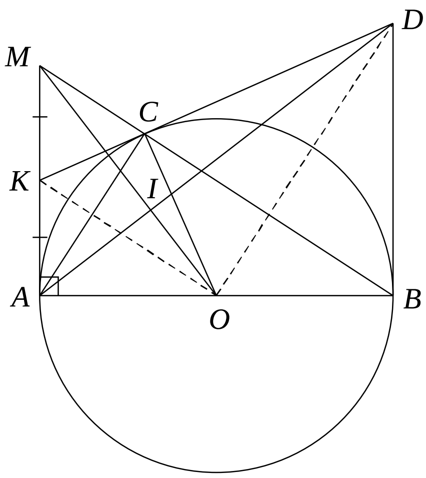
Chứng minh $\Delta OAI = \Delta OCI\ (c-c-c) \Rightarrow \widehat{ICO} = \widehat{IAO} = 90^0$

d) Chứng minh $CH//AD \Rightarrow \dfrac{NH}{AI} = \dfrac{BN}{BI}$ và $\dfrac{BN}{BI} = \dfrac{CN}{DI}$.

Do đó $\dfrac{NH}{AI} = \dfrac{CN}{DI} \Rightarrow NH = CN$ vì $AI = DI$.

Hay $NH = \dfrac{1}{2}CH$

Câu 156. Cho đường tròn $(O;\ R)$, đường kính AB. Lấy C thuộc đường tròn (O) (C khác A và B). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại M. Gọi K là trung điểm của MA. Tia KC cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) tại D. Đường thẳng AD cắt đường thẳng MO tại I.



a) ΔABC vuông tại C.

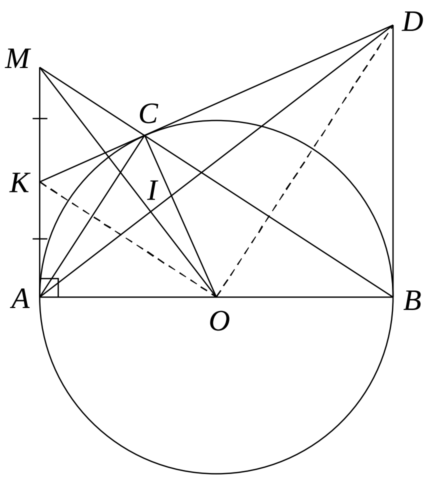
b) $BC.BM = 4R^2$

c) KC là tiếp tuyến của (O).

d) $MI \perp AI$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**



a) ΔABC có CO là trung tuyến mà $CO=\dfrac{AB}{2}$ $\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

b) Chứng minh $\Delta BCA \backsim \Delta BAM$ $(g-g) \Rightarrow BC.BM = AB^2 = (2R)^2 = 4R^2$.

c) Chứng minh $KC = KA = KM$ $\Rightarrow \Delta CKO = \Delta AKO$ $(c-c-c) \Rightarrow \widehat{KCO} = \widehat{KAO} = 90^0$

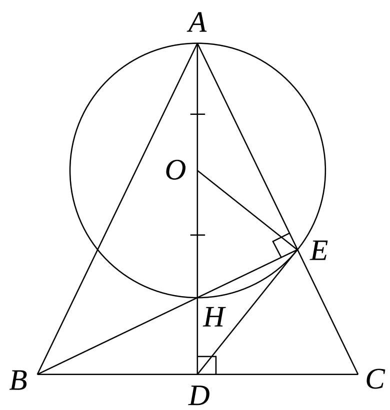
d) Chứng minh $OK \perp OD$

Chứng minh $\Delta OCK \backsim \Delta DCO$ $(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{KC}{CO} = \dfrac{CO}{CD} \Rightarrow \dfrac{KA}{AO} = \dfrac{OB}{BD} \Rightarrow \dfrac{AM}{AO} = \dfrac{AB}{BD} \Rightarrow \Delta MAO \backsim \Delta ABD$ $(c-g-c) \Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{BAD}$

$\Rightarrow \widehat{AMI} + \widehat{MAI} = \widehat{IAO} + \widehat{MAI} = 90^0 \Rightarrow MI \perp AI$.

Câu 157. Cho ΔABC cân tại A, các đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Vẽ đường tròn (O) đường kính AH.



a) Điểm E là điểm nằm trên đường tròn (O).

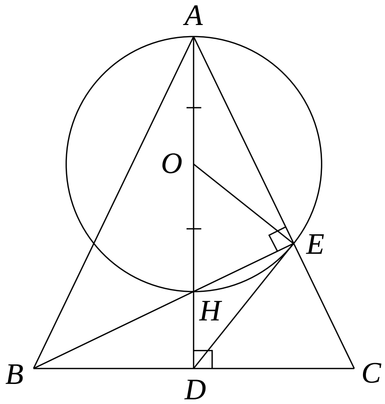
b) $BD = CD$

c) $DE > \dfrac{1}{2}BC$

d) DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**



a) ΔAHE vuông tại E có EO là trung tuyến nên $EO=\dfrac{AH}{2}=OA=OH$ nên E thuộc đường tròn (O)

b) ΔABC cân tại A, có đường cao AD nên $BD=CD$

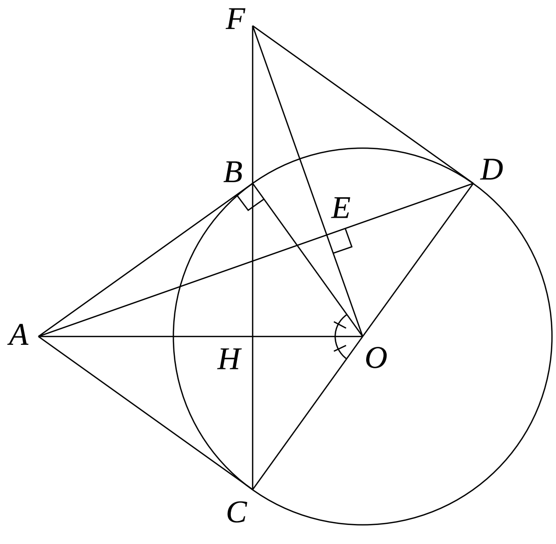
c)) ΔBEC vuông tại E có ED là trung tuyến nên $BD=CD=DE=\dfrac{1}{2}BC$

d) Ta có $BD=CD=DE$ nên $\widehat{DBE}=\widehat{DEB}$ mà $OE=OH\Rightarrow\widehat{OEH}=\widehat{OHE}$

Nên $\widehat{OED}=\widehat{OEH}+\widehat{HED}=\widehat{OHE}+\widehat{HBD}=90^0$.

Vậy DE là tiếp tuyến của (O)

Câu 158. Cho $B,\ C$ là hai điểm trên đường tròn $(O;\ R)$. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với OB cắt đường phân giác $\widehat{BOC}$ tại A. Gọi H là giao điểm của OA và BC. Kẻ đường kính CD của đường tròn (O), qua O dựng đường thẳng vuông góc với AD tại E và cắt CB tại F.



a) ΔBOH là tam giác vuông.

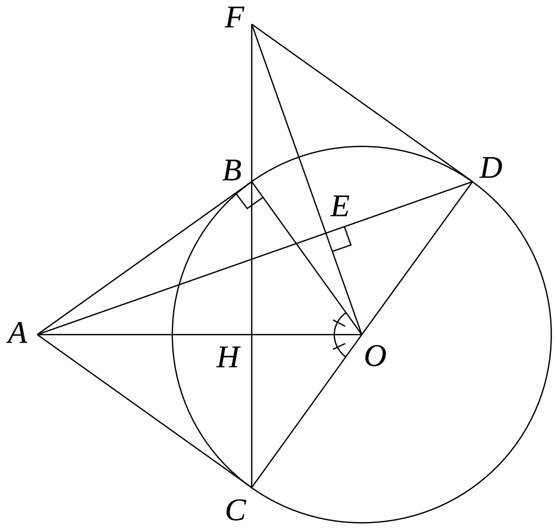
b) $OH.OA=2R^2$

c) AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) $\widehat{ODF}<90^0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**



a) ΔOBC cân tại O có OH là phân giác nên cũng là trung trực $\Rightarrow OH \perp BC$ hay ΔBOH vuông tại H

b) Chứng minh $\Delta OHB \backsim \Delta OBA\ (g-g) \Rightarrow OH.OA = BO^2 \Rightarrow OH.OA = R^2$

c) Chứng minh $\Delta ABO = \Delta ACO$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{ABO} = 90^0$

Vậy nên AC là tiếp tuyến của $(O;\ R)$.

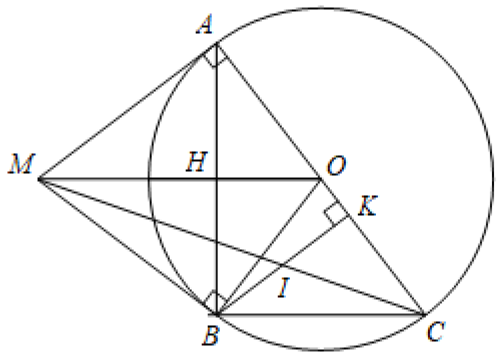
d) Chứng minh $\Delta OHF \backsim \Delta OEA\ (g-g) \Rightarrow \dfrac{OH}{OE} = \dfrac{OF}{OA} \Rightarrow OH.OA = OE.OF$

Chứng minh $OH.OA = OB^2 = R^2 = OD^2$.

Khi đó $OE.OF = OD^2 \Rightarrow \dfrac{OE}{OD} = \dfrac{OD}{OF}$

Chứng minh $\Delta OED \backsim \Delta ODF\ (c-g-c) \Rightarrow \widehat{ODF} = \widehat{OED} = 90^0$.

Câu 159. Cho $(O;R)$. Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến $MA,\ MB$ với đường tròn ($A,\ B$ là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của MO và dây AB. Kẻ đường kính AC của (O), vẽ BK vuông góc với AC ($K \in AC$). Đường thẳng MC cắt BK tại I.



a) Bốn điểm M, A, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

b) $\widehat{BCK} = \widehat{AOM} = \widehat{BOM}$

c) $MB.BC = BK.MO$

d) $BI < \dfrac{1}{2}BK$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Gọi E là trung điểm MO

ΔOAM vuông tại A có AE là đường trung tuyến nên $EA = EM = EO$

ΔOBM vuông tại B có BE là đường trung tuyến nên $EB = EM = EO$

Do đó M, A, O, B cùng thuộc đường tròn có tâm E là trung điểm của MO

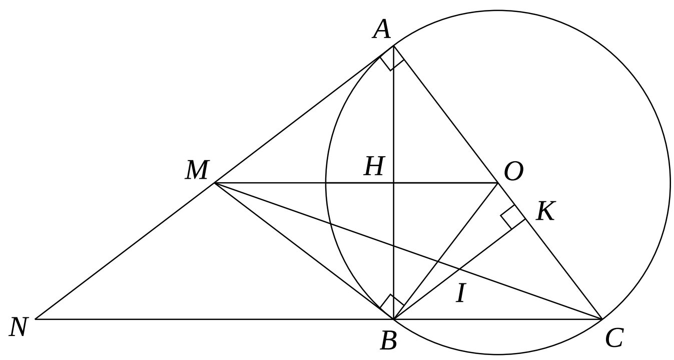
b) Ta có $\widehat{BCK} = \widehat{AOM}$ (do $MO // BC$ vì MO, BC cùng vuông góc AB)

$\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến)

Suy ra $\widehat{BCK} = \widehat{AOM} = \widehat{BOM}$

c) Chứng minh $\Delta MBO \backsim \Delta BKC$ $(g-g) \Rightarrow \dfrac{MB}{BK} = \dfrac{MO}{BC} \Rightarrow MB.BC = BK.MO$.

d) Gọi N là giao của AM với BC.



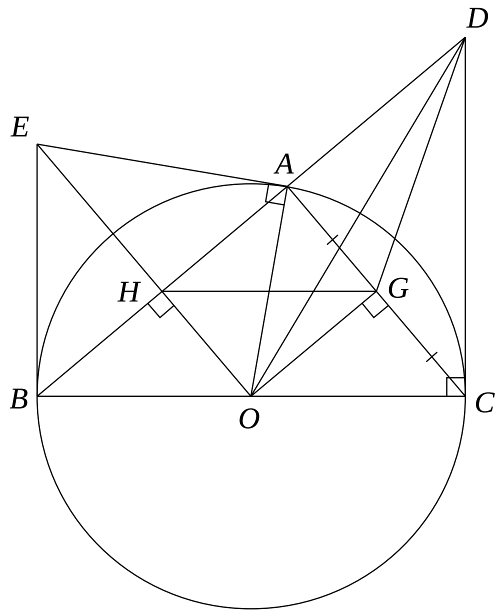
Ta có $MO // NC$ (cùng $\perp AB$)

MO là đường trung bình $\Rightarrow MN = MA$

Chứng minh $BK // AN \Rightarrow \dfrac{BI}{MN} = \dfrac{CI}{CM}$ và $\dfrac{CI}{CM} = \dfrac{IK}{MA} \Rightarrow \dfrac{BI}{MN} = \dfrac{IK}{MA} \Rightarrow BI = IK$ (vì $MN = MA$)

Hay $BI = \dfrac{1}{2}BK$

Câu 160. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) có BC là đường kính. Gọi H và G lần lượt là hình chiếu của điểm O trên AB và AC. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt OH tại E. Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt AB tại D.



a) $OH//AC$

b) $\widehat{OBE}=90^0$

c) $CD.BC=BD.GC$

d) $\widehat{BOD}>\widehat{CGD}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $OH\perp AB; AC\perp AB\Rightarrow OH//AC$

b) Chứng minh $\Delta AOE=\Delta BOE\left(c-g-c\right)\Rightarrow\widehat{OBE}=\widehat{OAE}=90^0$

c) $AG=GC$.

Từ $CD.BC=2BD.GC=BD.AC$

Chứng minh $\Delta BAC\backsim\Delta BCD\ \left(g-g\right)\Rightarrow\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{AC}{DC}\Rightarrow BC.DC=AC.BD$

d) Từ $CD.BC=2BD.GC\Rightarrow CD.2BO=BD.GC\Rightarrow\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{CG}{BO}$

$\widehat{ABC}=\widehat{ACD}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$) $\Rightarrow\Delta GCD\backsim\Delta OBD\ \left(c-g-c\right)\Rightarrow\widehat{CGD}=\widehat{BOD}$.

Câu 161. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB=2R$. Trên nửa đường tròn lấy điểm C bất kì (C khác A và B). Tiếp tuyến tại C và tiếp tuyến tại A cắt nhau tại M. Đường thẳng AC cắt OM tại H.

a) $AC\perp MO$

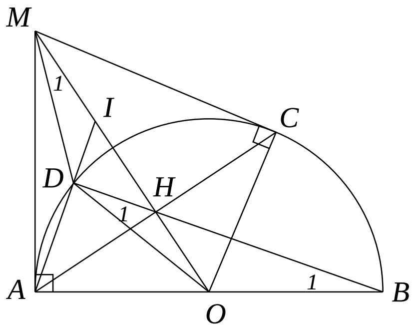
b) $OH.OM=R^2$

c) Tia BH cắt nửa đường tròn tại D. Khi đó $\Delta ODM\backsim\Delta OHD$.

d) Tia AD cắt MH tại I. Khi đó điểm I là trung điểm của MH.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**



a) MO là trung trực của AC nên $AC \perp MO$

b) Chứng minh $\Delta OHC \backsim \Delta COM$ $(g-g) \Rightarrow OH.OM = OC^2 = R^2$

c) Từ $OH.OM = R^2 = OD^2 \Rightarrow \dfrac{OH}{OD} = \dfrac{OD}{OM} \Rightarrow \Delta ODM \backsim \Delta OHD$ $(c-g-c)$

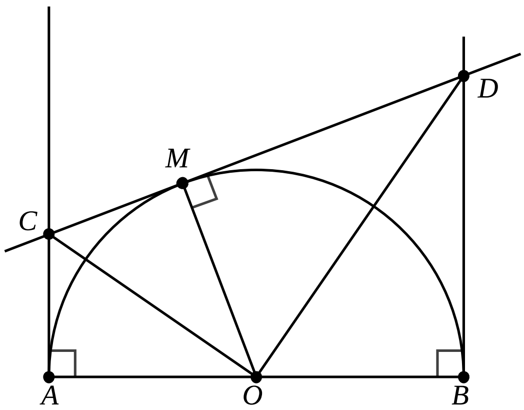
d) Chứng minh $\widehat{M_1} = \widehat{D_1} = \widehat{B_1} = \widehat{MAD} \Rightarrow \Delta IMD \backsim \Delta IAM$ $(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{IM}{IA} = \dfrac{ID}{IM} \Rightarrow ID.IA = IM^2\ (1)$

Chứng minh $\Delta IDH \backsim \Delta IHA$ $(g-g) \Rightarrow IH^2 = ID.IA\ (2)$

Từ (1), $(2) \Rightarrow IM^2 = IH^2 \Rightarrow IM = IH$.

Câu 162. Cho nửa đường tròn tâm (O,R), đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn cùng phía đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn (M khác A,B) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt Ax và By lần lượt tại C và D.



a) $\widehat{COD} = 90°$

b) $MC.MD = 2OM^2$

c) Cho $OD = BA = 2R$. Khi đó $BD = \sqrt{3}R; AC = \dfrac{\sqrt{3}R}{3}$

c) Cho $AB = 10\,cm$. Khi đó $MC.MD = 20\left(cm^2\right)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Xét nửa (O) có MC và AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại C nên OC là phân giác $\widehat{MOA}$ do đó $\widehat{AOC} = \widehat{COM}$.

Lại có MD và BD là hai tiếp tuyến cắt nhau tại D nên OD là phân giác $\widehat{MOB}$ do đó $\widehat{DOB} = \widehat{DOM}$.

Từ đó $\widehat{AOC} + \widehat{BOD} = \widehat{COM} + \widehat{MOD} = \dfrac{\widehat{AOC} + \widehat{BOD} + \widehat{COM} + \widehat{MOD}}{2} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

Nên $\widehat{COD} = 90^\circ$

b) Có $\Delta CMO \backsim \Delta OMD$ (g.g) suy ra $MC.MD = OM^2$.

c) Áp dụng định lý Phythagore cho tam giác BDO ta có $BD = \sqrt{OD^2 - OB^2} = \sqrt{3}.R$

Mà $MD = BD; MC = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên $MD = \sqrt{3}R$

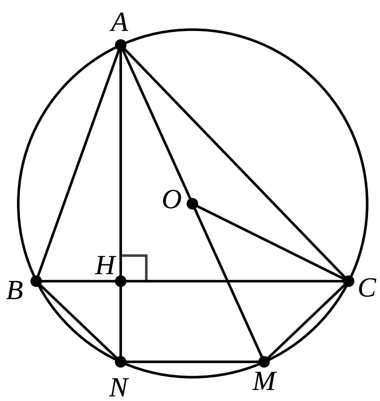
Theo câu trước ta có $MC.MD = OM^2$

$\Rightarrow MC = \dfrac{OM^2}{MD} = \dfrac{R^2}{\sqrt{3}.R} = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$ nên $AC = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $BD = \sqrt{3}R; AC = \dfrac{\sqrt{3}R}{3}$.

d) Có $MC.MD = OM^2 = R^2$ nên $MC.MD = 25(cm^2)$.

Câu 163. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH và nội tiếp đường tròn (O), đường kính AM. Gọi N là giao điểm của AH với đường tròn (O).



a) $\widehat{ACM} = 90^\circ$

b) $\widehat{OAC} > \widehat{BAH}$

c) Tứ giác $BCMN$ là hình thang cân.

d) $\widehat{BAH} = \widehat{OCA}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Xét (O) có $\widehat{ACM}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{ACM}=90°$.

b) Xét (O) có $\widehat{ABC}$ là góc nội tiếp chắn cung AC và $\widehat{CAM}$ là góc nội tiếp chắn cung CM

Nên $\widehat{ABC}=\dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AC}$; $\widehat{CAM}=\dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{CM}$

Lại có sđ$\overset{\frown}{AC}$ + sđ$\overset{\frown}{CM}=180°$ nên $\widehat{ABC}+\widehat{CAM}=\dfrac{180°}{2}=90°$

Mà $\widehat{ABC}+\widehat{BAH}=90°$ nên $\widehat{BAH}=\widehat{CAM}$.

b) Xét (O) có $\widehat{ANM}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{ANM}=90°$ hay $AN\perp NM$ mà $BC\perp AN\Rightarrow NM\,//\,BC$

Lại có $\widehat{BAN}=\widehat{CAM}$ (cmt) nên $\widehat{BAM}=\widehat{CAN}$; lại có $\widehat{BAM}+\widehat{BNM}=180°$ và $\widehat{CAN}+\widehat{CMN}=180°$ từ đó suy ra $\widehat{CMN}=\widehat{BNM}$

Từ đó tứ giác $BNMC$ có $NM//BC$; $\widehat{CMN}=\widehat{BNM}$ nên $BNMC$ là hình thang cân.

d) Xét (O) có $\widehat{ABC}$ là góc nội tiếp chắn cung AC và $\widehat{CAM}$ là góc nội tiếp chắn cung CM

Nên $\widehat{ABC}=\dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC}$; $\widehat{CAM}=\dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{CM}$

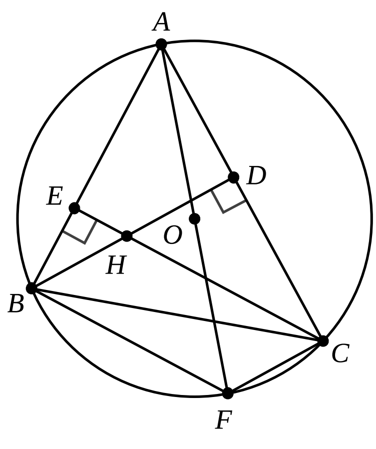
Lại có sđ$\overset{\frown}{AC}$ + sđ $\overset{\frown}{CM}=180°$ nên $\widehat{ABC}+\widehat{CAM}=\dfrac{180°}{2}=90°$.

Mà $\widehat{ABC}+\widehat{HAB}=90°$ nên $\widehat{BAH}=\widehat{CAM}$ (1)

Lại có ΔOAC cân tại O (do $OA=OC=$ bán kính) nên $\widehat{OCA}=\widehat{OAC}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OCA}=\widehat{BAH}$.

Câu 164. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại (O). Vẽ đường kính AF .



a) $\widehat{ACF} > 90°$

b) $BD//CF$ và $CE//BF$.

c) $BF < CH$

d) $EB.EA = EC.EH$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) b) c) Xét (O) có $\widehat{ACF} = 90°; \widehat{ABF} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $CF \perp AC; BF \perp AB$ mà $BD \perp AC; CE \perp AB$

$\Rightarrow BD//CF; CE//BF$

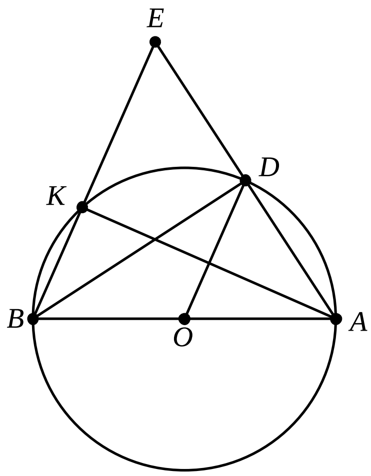
$\Rightarrow BHCF$ là hình bình hành

$\Rightarrow BH = CF; BF = CH$

d) Xét hai tam giác vuông ΔEBH và ΔECA có $\widehat{EBH} = \widehat{ECA}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$)

Nên $\Delta EBH \backsim \Delta ECA$ (g-g)$\Rightarrow \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{EH}{EA} \Rightarrow EB.EA = EC.EH$.

Câu 165. Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D. Gọi K là giao điểm của EB với (O).



a) $\widehat{BDE} < 90°$

b) $\widehat{DBE} > \widehat{KAE}$

c) Tam giác ABE là tam giác đều.

d) $OD \perp AK$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Xét (O) có $\widehat{BDA}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $\widehat{BDE}=90°$

b) Ta có $\widehat{DBK}=\widehat{KAD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung KD) hay $\widehat{DBE}=\widehat{KAE}$

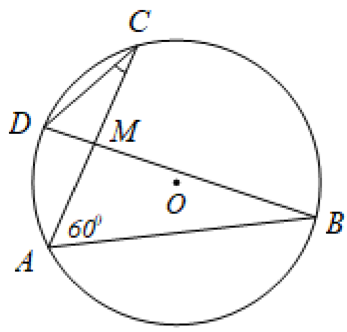
c) Ta có $\widehat{BDA}=90°$ nên $BD\perp EA$ mà D là trung điểm EA.

Do đó ΔBEA có BD vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên ΔBEA cân tại B.

d) Xét (O) có $\widehat{BKA}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $AK\perp BE$

Mà OD là đường trung bình của tam giác ABE nên $OD//BE$ từ đó $OD\perp AK$.

Câu 166. Cho đường tròn (O) và các điểm A,B,C,D nằm trên đường tròn như hình vẽ. Biết $\widehat{ACD}=25^0$ và $\widehat{BAC}=60^0$.



a) $\widehat{ABD}=50^0$

b) số đo cung nhỏ BC bằng 60^0.

c) $\Delta MAB \backsim \Delta MDC$

d) $\widehat{AMD}=95^0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}=25^0$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$)

b) Ta có $sđ\,\overset{\frown}{BC}=2\widehat{BAC}=120^0$ (góc nội tiếp)

Do đó số đo cung nhỏ BC bằng 120^0.

a) Xét ΔMCD và ΔMBA có:

$\widehat{CMD}=\widehat{BMA}$ (đối đỉnh)

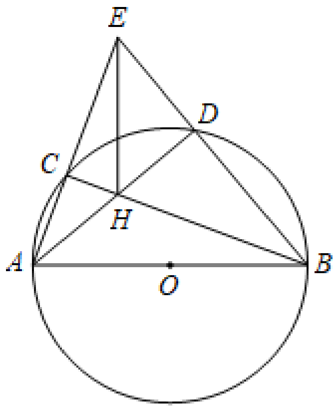
$\widehat{MCD}=\widehat{MBA}=\dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$)

$\Rightarrow \Delta MCD \backsim \Delta MBA\ (g-g)$.

b) Ta có $\widehat{MBA}=\widehat{MCD}=25^0$, nên $\widehat{AMB}=180^0-\left(\widehat{MAB}+\widehat{MBA}\right)=95^0$

Mà $\widehat{AMD}=\widehat{MAB}+\widehat{MBA}=60^0+25^0=85^0$ (góc ngoài của tam giác)

Câu 167. Cho đường tròn (O), đường kính AB. Gọi C, D thuộc nửa đường tròn (C thuộc cung AD). AD cắt BC tại H, AC cắt BD tại E.



a) $\widehat{ACB} = 90^0$

b) $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$

c) $EH \perp AB$

d) $\widehat{CHD} = \frac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{CD} + sđ\,\overset{\frown}{AB}\right)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

c) $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{CD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$)

c) $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AC \perp BC$

$\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)$\Rightarrow AD \perp DB$

ΔAEB có H là trực tâm $\Rightarrow EH \perp AB$.

d) Ta có $\widehat{CHD} = \widehat{CAD} + \widehat{ACB}$ (góc ngoài của tam giác)

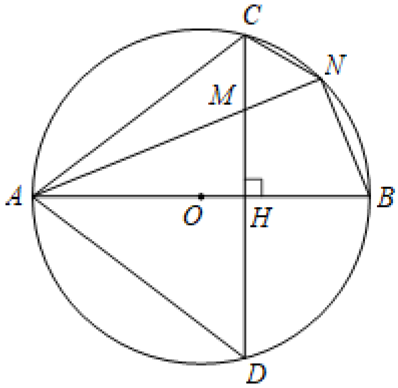
Mà:

$\widehat{CAD} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{CD}$ (góc nội tiếp)

$\widehat{ACB} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{AB}$ (góc nội tiếp)

Do đó $\widehat{CHD} = \widehat{CAD} + \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{CD} + sđ\,\overset{\frown}{AB}\right)$

Câu 168. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Dây CD vuông góc với AB tại H. Lấy M là một điểm trên đoạn thẳng CD. Tia AM cắt đường tròn tại điểm thứ hai N.



a) Bốn điểm M, N, B, H cùng thuộc một đường tròn.

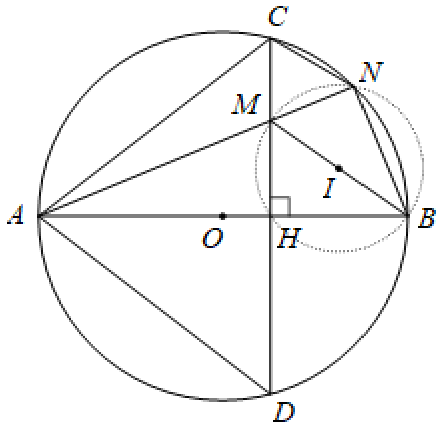
b) $\Delta MDA \backsim \Delta MNC$

c) $MC.MD = MA.MN$

d) $AC^2 = AM.AN$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**



a) $\widehat{ANB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Lấy I là trung điểm của MB.

ΔMNB vuông tại $N \Rightarrow IN = IM = IB$ $\quad (1)$

ΔMHB vuông tại $H \Rightarrow IM = IH = IB$ $\quad (2)$

Từ $(1), (2) \Rightarrow IM = IN = IB = IH$

nên M, N, B, H cùng thuộc đường tròn tâm I, bán kính IM.

b) Xét ΔMDA và ΔMNC có:

$\widehat{DMA} = \widehat{NMC}$ (đối đỉnh)

$\widehat{ADM} = \widehat{MNC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

$\Rightarrow \Delta MDA \backsim \Delta MNC$ $(g-g)$

c) $\Delta MDA \backsim \Delta MNC$ $(g-g) \Rightarrow \dfrac{MN}{MD} = \dfrac{MC}{MA} \Rightarrow MC.MD = MA.MN$.

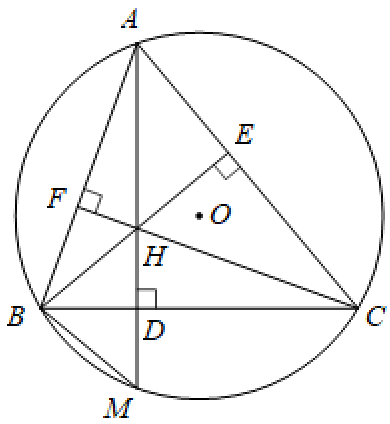
d) $OC = OD$ (bán kính) $\Rightarrow \Delta OCD$ cân tại O, mà $OH \perp CD \Rightarrow CH = DH$

Hay AB là trung trực của $CD \Rightarrow AC = AD \Rightarrow \Delta ACD$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ADC}$

Mà $\widehat{ADC} = \widehat{ANC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$) suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{ANC}$

Chứng minh $\Delta AMC \backsim \Delta ACN$ $(g-g) \Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AC}{AN} \Rightarrow AC^2 = AM.AN$

Câu 169. Cho đường tròn (O) và ba điểm A, B, C nằm trên đường tròn sao cho ΔABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Kẻ AD cắt cung BC tại M.



a) $\widehat{ACB} = sđ\overset{\frown}{AB}$

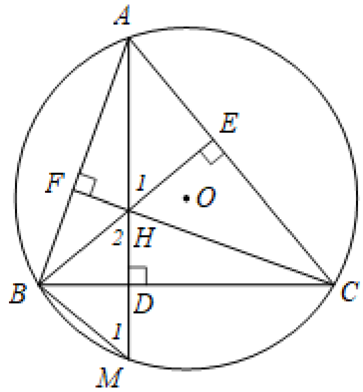
b) $\Delta BDH \backsim \Delta BEC$

c) $BD.BC = BH.BE$

d) ΔBMH cân tại M.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**



a) $\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2} sđ\overset{\frown}{AB}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$)

b) Ta có:

$\widehat{CEB} = \widehat{BDH} = 90^0$

$\widehat{CBE}$ chung

$\Rightarrow \Delta BDH \backsim \Delta BEC\ (g-g)$

c) $\Delta BDH \backsim \Delta BEC\ (g-g) \Rightarrow \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{BH}{BC} \Rightarrow BD.BC = BH.BE$

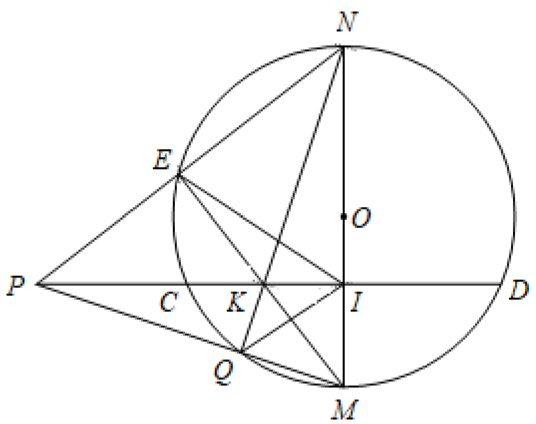
d) $\widehat{M_1} = \widehat{ACB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$)

Chưng minh $\Delta AEH \backsim \Delta ADC\ (g-g) \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{H_1}$, mà $\widehat{H_1} = \widehat{H_2}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{H_2}$.

Vậy ΔBMH cân tại B.

Câu 170. Cho đường tròn (O) có dây cung CD cố định. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ CD. Đường kính MN của đường tròn cắt dây CD tại I. Lấy điểm E bất kỳ trên cung lớn CD (E *khác* C, D, N). ME cắt CD tại K. Các đường thẳng NE và CD cắt nhau tại P.



a) $OM \perp CD$

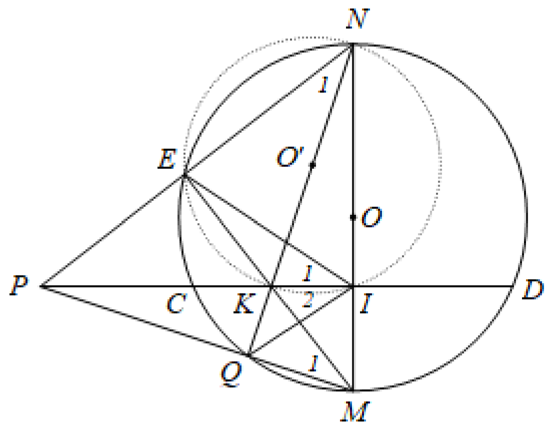
b) Bốn điểm I, K, N, E cùng thuộc một đường tròn.

c) $\widehat{KIE} = \widehat{QME}$

d) IK là phân giác $\widehat{EIQ}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**



a) Ta có $sđ\ \overset{\frown}{CM} = sđ\ \overset{\frown}{DM} \Rightarrow \widehat{COM} = \widehat{DOM}$ (góc ở tâm chắn hai cung bằng nhau).

ΔOCD cân tại O lại có OM là tia phân giác

$\Rightarrow OM \perp CD \Rightarrow \widehat{CIN} = 90^0$.

b) Gọi O' là trung điểm của KN.

ΔNEK vuông tại E và EO' là đường trung tuyến nên $O'E = O'N = O'K = \frac{1}{2}NK$

ΔNIK vuông tại I và IO' là đường trung tuyến nên $O'I = O'N = O'K = \frac{1}{2}NK$

Do đó bốn điểm $I,\ K,\ N,\ E$ cùng thuộc một đường tròn tâm O', bán kính $O'N$.

c) ΔPMN có K là trực tâm, suy ra $NQ \perp PM$.

$\widehat{I_1} = \widehat{N_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{KE}$)

$\widehat{N_1} = \widehat{M_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EQ}$).

Suy ra $\widehat{I_1} = \widehat{M_1}$ hay $\widehat{KIE} = \widehat{QME}$

d) Chứng minh bốn điểm $K,\ Q,\ M,\ I$ cùng thuộc một đường tròn.

Suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{I_2}$.

Mà $\widehat{I_1} = \widehat{M_1}$

Nên $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$ hay IK là phân giác $\widehat{EIQ}$.

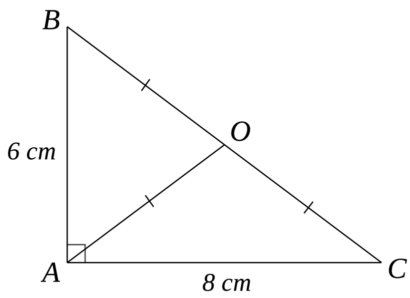
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 171. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 6\,cm,\ AC = 8\,cm$. Hỏi bán kính đường tròn đi qua ba điểm $A,\ B,\ C$ bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5



Gọi O là trung điểm của BC.

ΔABC vuông tại A có AO là đường trung tuyến

ứng với cạnh huyền BC nên $OA = \dfrac{BC}{2} = OB = OC$.

Vậy ba điểm $A,\ B,\ C$ cùng thuộc đường tròn tâm O, bán kính OB.

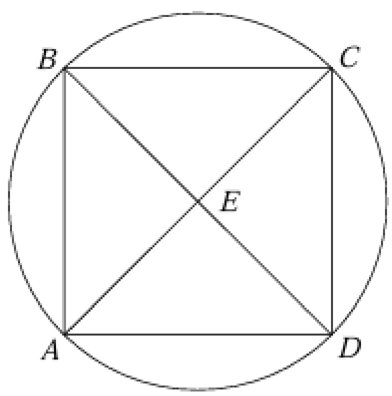
Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow BC = 10\,cm \Rightarrow OB = \dfrac{BC}{2} = 5\,cm$.

Câu 172. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $3\sqrt{2}\,(cm)$. Hỏi bán kính của đường tròn đi qua bốn điểm $A,\ B,\ C, D$ bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3



Gọi E là giao điểm của hai đường chéo hình vuông $ABCD$

Suy ra $EA = EB = EC = ED$. Vậy bốn điểm $A,\ B,\ C,\ D$ cùng thuộc đường tròn tâm E, bán kính EA.

Ta có $BD^2 = AB^2 + AD^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 36 \Rightarrow BD = 6\,cm$

Như vậy $BE = \frac{BD}{2} = \frac{6}{2} = 3\,cm$.

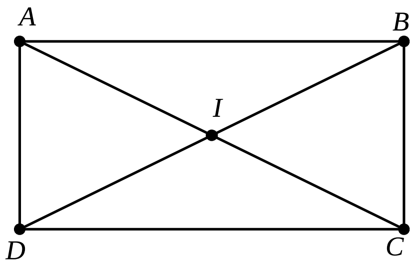
Vậy bán kính của đường tròn tâm E là $3\,cm$.

Câu 173. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4cm, BC = 3cm$. Hỏi bán kính đường tròn đi qua bốn đỉnh A, B, C, D bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $2,5$



Gọi I là giao hai đường chéo, ta có $IA = IB = IC = ID$ (vì $BD = AC$ và I là trung điểm mỗi đường)

Nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{AC}{2}$

Theo định lý Phythagore trong tam giác vuông ABC ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ nên $R = \frac{AC}{2} = \frac{5}{2} = 2,5(cm)$.

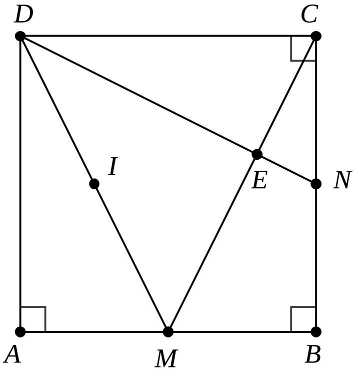
Vậy bán kính cần tìm là $R = 2,5\,cm$.

Câu 174. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $4cm$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Gọi E là giao điểm của CM và DN. Gọi R là bán kính của đường tròn đi qua bốn điểm A, D, E, M, khi đó giá trị của bằng bao nhiêu ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5



+ Ta có $\widehat{CDN} = \widehat{ECN}$ (vì cùng phụ với $\widehat{CNE}$) nên $\widehat{CNE} + \widehat{ECN} = \widehat{CNE} + \widehat{CDN} = 90°$ suy ra $\widehat{CEN} = 90° \Rightarrow CM \perp DN$.

+ Gọi I là trung điểm của DM.

Xét tam giác vuông ADM ta có $AI = ID = IM = \dfrac{DM}{2}$. Xét tam giác vuông DEM ta có

$EI = ID = IM = \dfrac{DM}{2}$.

Nên $EI = ID = IM = IA = \dfrac{DM}{2}$.

Do đó bốn điểm A, D, E, M cùng thuộc đường tròn tâm I bán kính $R = \dfrac{DM}{2}$.

Xét tam giác ADM vuông tại A có $AD = 4cm; AM = \dfrac{AB}{2} = 2\,cm$ nên theo định lý Phythagore ta có

$DM = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$.

Suy ra bán kính đường tròn đi qua 4 điểm A, D, E, M là $R = \dfrac{DM}{2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\,cm$.

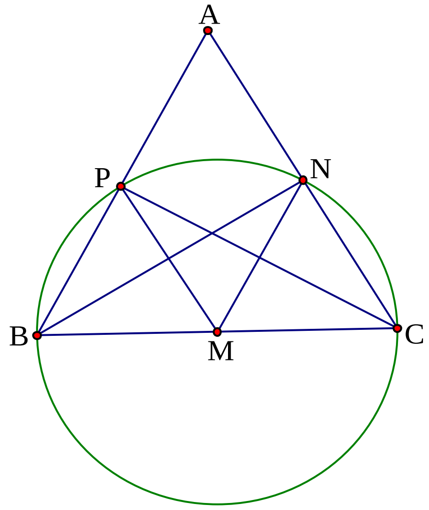
Do đó $R^2 = 5$

Câu 175. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $20cm$ và AM, BN, CP là các đường trung tuyến. Hỏi bán kính đường tròn đi qua bốn đỉnh B, P, N, C bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 10



Vì tam giác ABC đều nên các trung tuyến đồng thời cũng là đường cao, suy ra AM, BN, CP lần lượt vuông góc với BC, AC, AB.

+ ΔBPC là tam giác vuông, có BC là cạnh huyền nên $\Rightarrow MP = \dfrac{1}{2}BC = BM = MC\ (1)$

+ ΔBNC là tam giác vuông, có BC là cạnh huyền nên $\Rightarrow NM = \dfrac{1}{2}BC = BM = MC\ (2)$

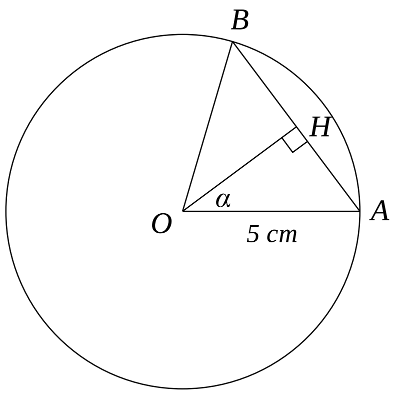
Từ (1) và (2) $PM = NM = MB = MC$. Hay các điểm B, P, N, C cùng thuộc đường tròn, đường kính $BC = 20cm$, tâm đường tròn là trung điểm M của BC. Suy ra bán kính $10cm$

Câu 176. Cho đường tròn $(O;\ 5\,cm)$ và AB là một dây bất kì của đường tròn đó. Biết $AB = 6\,cm$. Hỏi khoảng cách từ O đến dây AB bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4



Gọi $OH \perp AB$.

ΔOAB cân tại $O \Rightarrow OH$ vừa là đường cao, đường trung tuyến

$$\Rightarrow AH = BH = \frac{AB}{2} = 3\,cm.$$

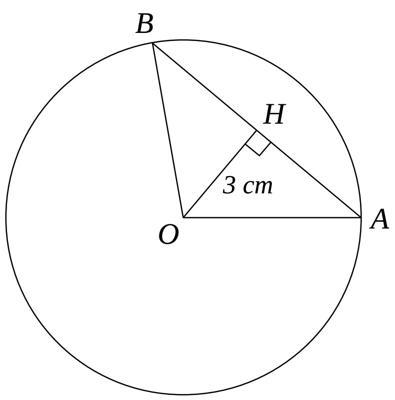
$$OH^2 = OA^2 - HA^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2 \Rightarrow OH = 4\,cm$$

Câu 177. Tâm O của một đường tròn cách dây AB của nó một khoảng $3\,cm$ và $\widehat{AOB} = 100^0$. Hỏi bán kính của đường tròn (O) bằng bao nhiêu centimet? (làm tròn đến kết hàng phần trăm của centimet)

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $4,67$



Gọi $OH = 3\,cm$ khoảng cách từ tâm O đến AB.

ΔOAB cân tại A, nên đường cao OH cũng là đường phân giác

Mà $\widehat{AOB} = 100^0$ nên $\widehat{AOH} = 50^0$

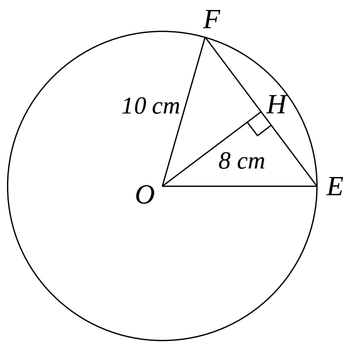
$\cos\widehat{AOH}=\dfrac{OH}{OA}\Rightarrow OA=\dfrac{OH}{\cos\widehat{AOH}}=\dfrac{3}{\cos 50^0}\approx 4,67\,cm$

Câu 178. Cho đường tròn $(O;\,10\,cm)$ có dây EF, biết khoảng cách từ tâm O tới dây EF bằng $8\,cm$. Hỏi độ dài dây EF bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 12



Gọi $OH\perp EF$ tại H

ΔOEF cân tại O, có OH là đường cao, nên cũng là trung tuyến $\Rightarrow EH=FH$.

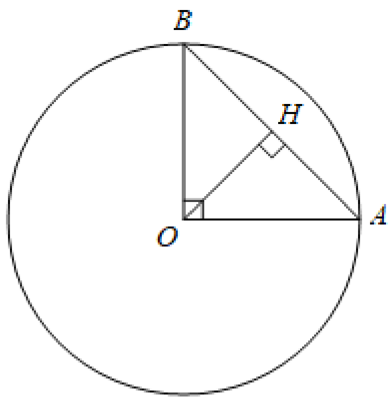
$HE^2=OE^2-OH^2=10^2-8^2=6^2\Rightarrow HE=6\,cm\Rightarrow EF=12\,cm$.

Câu 179. Cho đường tròn $(O;\,3\sqrt{2}\,cm)$ và dây AB sao cho $\widehat{AOB}=90^0$. Hỏi khoảng cách từ tâm O đến dây AB bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3



Vì $OA=OB$ và $\widehat{AOB}=90^0$ nên ΔABO vuông cân tại A, do đó $\widehat{OAB}=45^0$

Gọi $OH\perp AB$ tại H.

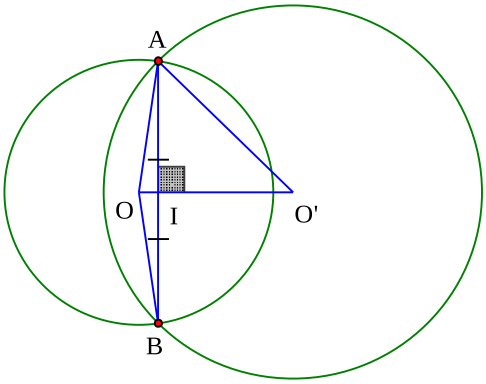
Ta có $OH=OA.\widehat{OAB}=3\sqrt{2}.\sin 45^0=3\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3\,cm$

Câu 180. Cho hai đường tròn $(O;13cm)$ và $(O';15cm)$ cắt nhau tại A,B sao cho $AB=24(cm)$. Độ dài $O'O$ bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 14



Gọi $I = OO' \cap AB \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AIO} = \widehat{AIO'} = 90^0 \\ IA = IB = \dfrac{1}{2}AB = 12(cm) \end{cases}$

Từ ΔAIO vuông tại I, ta có: $OI = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5(cm)$

Từ $\Delta AIO'$ vuông tại I, ta có: $O'I = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9(cm)$

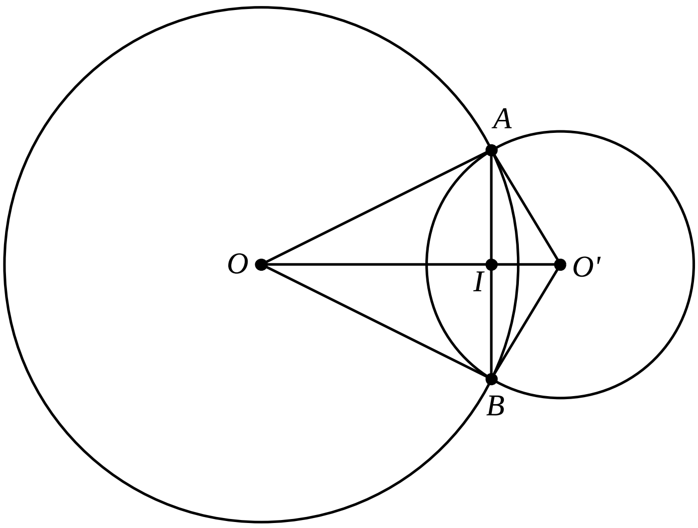
Do đó $OO' = 5 + 9 = 14(cm)$.

Câu 181. Cho hai đường tròn $(O;8cm)$ và $(O';6cm)$ cắt nhau tại A, B sao cho OA là tiếp tuyến của (O'). Độ dài dây AB bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $9,6$



Vì OA là tiếp tuyến của (O') nên $\Delta OAO'$ vuông tại A.

Vì (O) và (O') cắt nhau tại A, B nên đường nối tâm OO' là trung trực của đoạn AB.

Gọi giao điểm của AB và OO' là I thì $AB \perp OO'$ tại I là trung điểm của AB.

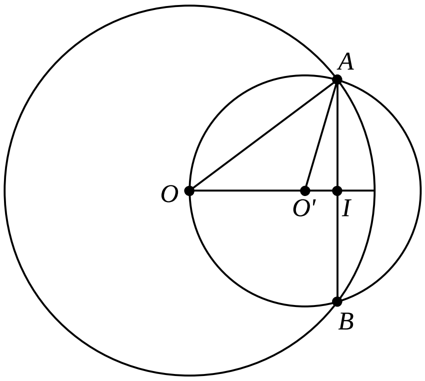
Chứng minh và vận dụng hệ thức $\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{O'A^2}$ ta được $\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{8^2}+\frac{1}{6^2}$ suy ra $AI=4,8cm$ nên $AB=9,6cm$

Câu 182. Cho hai đường tròn $(O;20cm)$ và $(O';15cm)$ cắt nhau tại A và B. Biết rằng $AB=24cm$ và O và O' nằm cùng phía đối với AB. Độ dài đoạn nối tâm OO' bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 7



Ta có $AI=\frac{1}{2}AB=12\,cm$.

Theo định lý Phytagore ta có: $OI^2=OA^2-AI^2=256\Rightarrow OI=16\,cm$

$O'I=\sqrt{O'A^2-IA^2}=9cm$

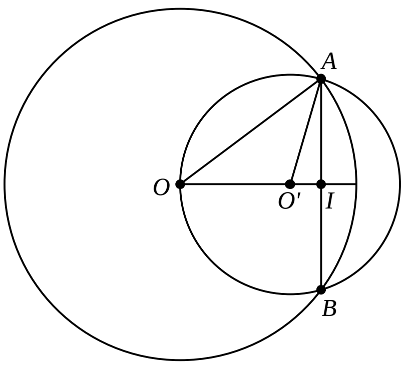
Do đó: $OO'=OI-O'I=16-9=7(cm)$.

Câu 183. Cho hai đường tròn $(O;10cm)$ và $(O';5cm)$ cắt nhau tại A và B. Biết rằng $AB=8cm$ và O và O' nằm cùng phía đối với AB. Độ dài đoạn nối tâm OO' bằng bao nhiêu centimet? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $6,2$



Ta có $AI=\frac{1}{2}AB=4\,cm$.

Theo định lý Phytagore ta có: $OI^2 = OA^2 - AI^2 = 10^2 - 4^2 = 84 \Rightarrow OI = 2\sqrt{21}\,cm$

$O'I = \sqrt{O'A^2 - IA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

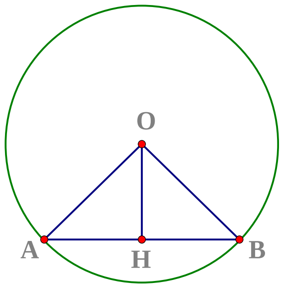
Do đó: $OO' = OI - O'I = 2\sqrt{21} - 3 \approx 6,2(cm)$.

Câu 184. Cho đường tròn $(O;R)$ với $R = 5cm$. Vẽ dây AB sao cho số đo cung nhỏ AB bằng nửa số đo cung lớn AB. Tính diện tích tam giác ABC? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet mét vuông).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $10,8$



Vì số đo cung nhỏ bằng nửa số đo cung lớn

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AB}_{nho} = 360^0 : 3 = 120^0 \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^0$

ΔAOB cân tại $O \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = 30^0$

Kẻ OH vuông góc với AB, ta được: $OH = OA.\sin A = R.\sin 30^0 = \dfrac{1}{2}R$

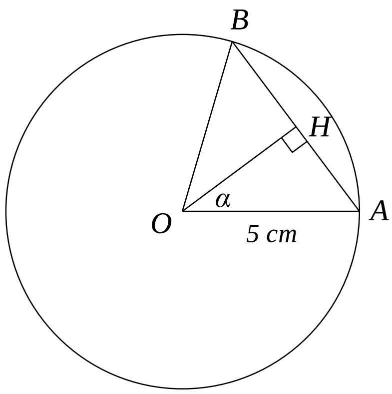
$$\Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{2}AB.OH = \frac{1}{2}R\sqrt{3}.\frac{1}{2}R = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} \approx 10,8\left(cm^2\right)$$

Câu 185. Cho đường tròn $(O;\ 5\,cm)$ và AB là một dây bất kì của đường tròn đó. Biết $AB = 6\,cm$. Khoảng cách từ O đến dây AB bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4



Gọi $OH \perp AB$.

ΔOAB cân tại $O \Rightarrow OH$ vừa là đường cao, đường trung tuyến

$\Rightarrow AH = BH = \dfrac{AB}{2} = 3\,cm$.

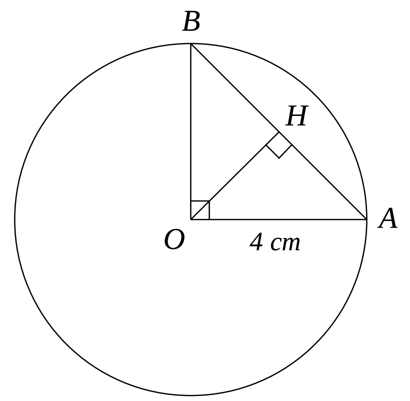
$OH^2 = OA^2 - HA^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2 \Rightarrow OH = 4\,cm$

Câu 186. Cho đường tròn $(O;\ 4\,cm)$ và dây AB. Biết rằng sđ $\overset{\frown}{AB} = 90^0$. Khoảng cách từ O đến dây AB bằng bao nhiêu centimet? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai của centimet).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2,83



Gọi $OH \perp AB$ tại H. $\overset{\frown}{AB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^0$

ΔABO vuông cân tại A,

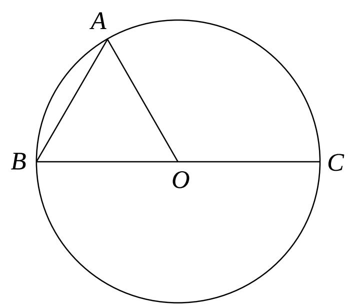
Ta có $OH = OA.\sin A = 4.\sin 45^0 = 4.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\,cm \approx 2{,}83cm$

Câu 187. Cho đường tròn (O) đường kính BC, điểm A nằm trên đường tròn sao cho $\widehat{AOC} = 120^0$. Số đo cung nhỏ AB bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 60



Vì $\widehat{AOB} = 120^0 \Rightarrow \widehat{AOC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^0$

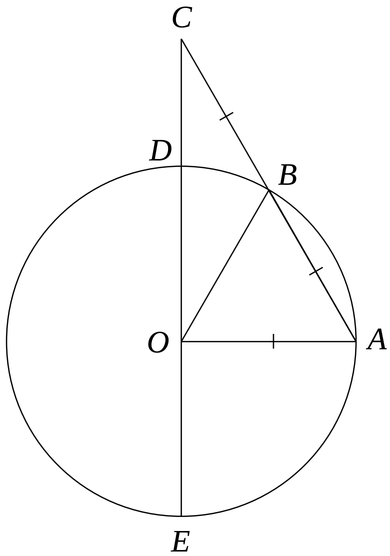
Ta có *sđ* $\overset{\frown}{AB} = \widehat{AOB} = 60^0$.

Câu 188. Cho đường tròn $(O;\ R)$ và dây $AB = R$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C sao cho $BC = R$. Kéo dài CO cắt (O) lần lượt tại D và E. Số đo cung nhỏ BE bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 150



ΔAOC có OB là đường trung tuyến, mà $OB = BA = BC$

Nên $\widehat{AOC} = 90^0$

ΔOAB có $OB = AB = OA = R$ nên là tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{A} = 60^0 \Rightarrow \widehat{C} = 30^0$.

Ta có: $\widehat{BOC} = \widehat{BCO} = 30^0 \Rightarrow \widehat{BOE} = 150^0$

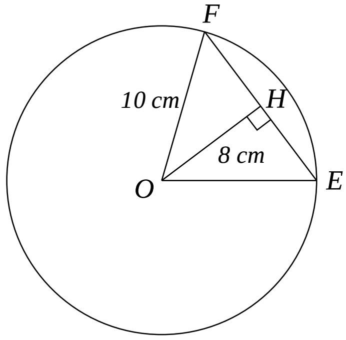
Khi đó *sđ* $\overset{\frown}{BE} = \widehat{BOE} = 150^0$

Câu 189. Cho đường tròn $(O;\ 10\,cm)$ có dây EF, biết khoảng cách từ tâm O tới dây EF bằng $8\,cm$. Độ dài dây EF bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 12



Gọi $OH \perp EF$ tại H

ΔOEF cân tại O, có OH là đường cao, nên cũng là trung tuyến

$\Rightarrow EH = FH$.

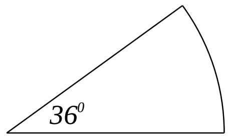
$HE^2 = OE^2 - OH^2 = 10^2 - 8^2 = 6^2 \Rightarrow HE = 6\,cm \Rightarrow EF = 12\,cm$.

Câu 190. Tính diện tích của hình quạt tròn có bán kính $4\,cm$, ứng với cung 36^0 (làm tròn đến hàng đơn vị của centimet vuông).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5



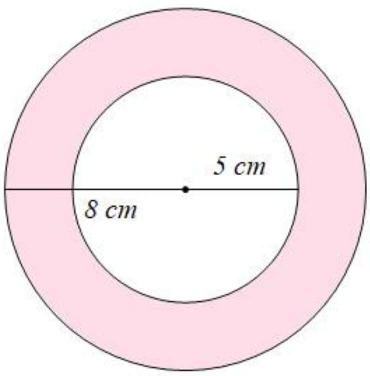
Diện tích hình quạt tròn là $S_1 = \dfrac{n}{360}\pi R^2 = \dfrac{36}{360}.\pi.4^2 \approx 5\,cm^2$

Câu 191. Tính diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là $8\,cm$ và $5\,cm$ (làm tròn đến hàng đơn vị của centimet vuông).

Trả lời: ………………..

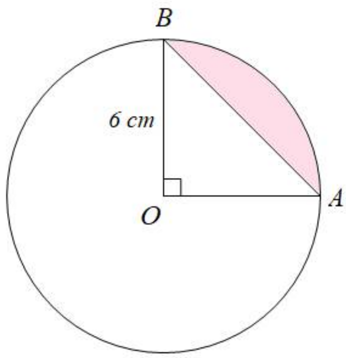
Lời giải

Đáp án: 126



Diện tích hình vành khuyên là $S = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi.\left(8^2 - 5^2\right) \approx 126cm^2$

Câu 192. Cho đường tròn $(O;\ 6\,cm)$, hai điểm $A,\ B$ thuộc đường tròn sao cho $\widehat{AOB} = 90^0$. Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ AB và dây AB (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet vuông).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $10,3$

Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung nhỏ AB là: $S_1 = \frac{n}{360}.\pi R^2 = \frac{90}{360}.\pi.6^2 = 9\pi\ cm^2$.

Diện tích ΔAOB là $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.6^2 = 18\,cm^2$

Diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung AB và dây AB là

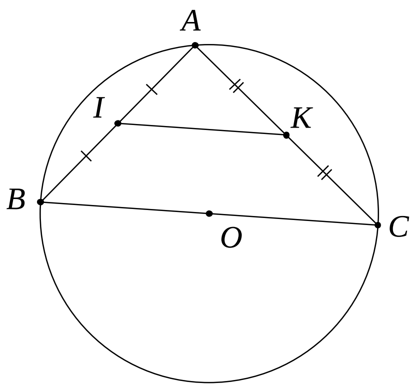
$S_2 = S_1 - S_{\Delta AOB} = 9\pi - 18 \approx 10,3\,cm^2$.

Câu 193. Cho tam giác ABC nội tiếp $\left(O;6\sqrt{2}\right)$ đường kính BC. Gọi I; K lần lượt là trung điểm của AB; AC. Giá trị biểu thức $\sqrt{BI^2+CK^2+IK^2}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 6



Vì I; K lần lượt là trung điểm của AB; AC nên $BI = \frac{1}{2}AB$; $CK = \frac{1}{2}AC$ (tính chất trung điểm);

$IK = \frac{1}{2}BC$ (tính chất đường trung bình của tam giác).

Ta có: $\sqrt{BI^2+CK^2+IK^2} = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2+AC^2+BC^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2BC^2}=\frac{BC}{2}\sqrt{2}=\frac{6\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}=6$.

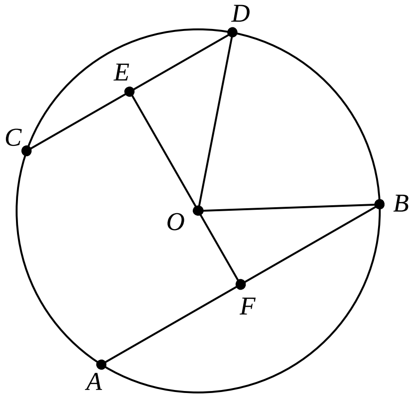
Vậy $\sqrt{BI^2+CK^2+IK^2}=6$.

Câu 194. Cho đường tròn $(O;10cm)$. Dây AB và CD song song, có độ dài lần lượt là $16cm$ và $12cm$. Khoảng cách giữa hai dây AB và CD bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 14



Kẻ đường thẳng qua O vuông góc với CD tại E và cắt AB tại F thì $EF \perp AB$ vì $AB//CD$

Khi đó E là trung điểm của CD và F là trung điểm của AB

Nên $ED=6cm; FB=8cm; OD=OB=10cm$

Áp dụng định lý Phythagore cho tam giác vuông OED ta được $OE=\sqrt{OD^2-ED^2}=8cm$.

Áp dụng định lý Phythagore cho tam giác vuông OFB ta được $OF=\sqrt{OB^2-FB^2}=6cm$.

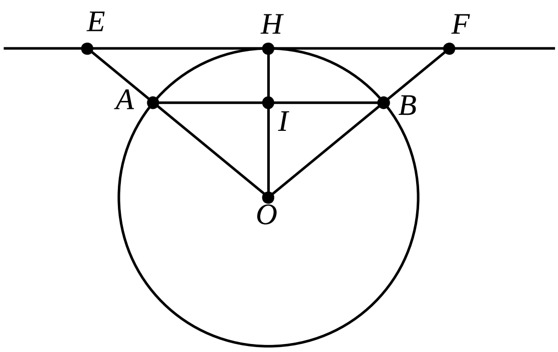
Vậy khoảng cách giữa hai dây là $EF=OE+OF=14cm$.

Câu 195. Cho đường tròn $(O;6cm)$ và dây $AB=9,6cm$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, cắt các tia OA,OB lần lượt tại E và F. Hỏi diện tích tam giác OEF bằng bao nhiêu centimet vuông?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 48



Kẻ $OH \perp EF$ tại H và cắt AB tại I suy ra $OI \perp AB$ (vì $AB//EF$)

Xét (O) có $OI \perp AB$ tại I nên I là trung điểm của AB

$IA = IB = \dfrac{AB}{2} = 4,8\,cm$. Lại có $OA = 6cm$.

Áp dụng định lý Phythagore cho tam giác vuông OIA ta có $OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = \sqrt{6^2 - 4,8^2} = 3,6cm$.

Mà $AI // EH$ nên $\dfrac{AI}{EH} = \dfrac{OI}{OH} = \dfrac{3,6}{6} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow EH = \dfrac{AI.5}{3} = \dfrac{4,8.5}{3} = 8$

ΔOEF cân tại O (vì $\widehat{E} = \widehat{F} = \widehat{BAO} = \widehat{ABO}$) có $OH \perp EF$ nên H là trung điểm của EF.

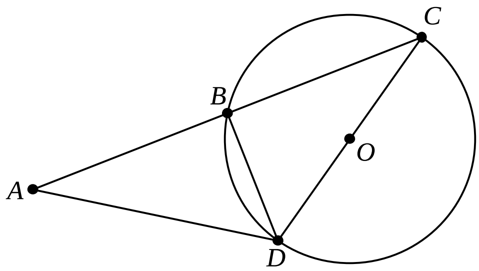
$EF = 2EH = 16cm$ nên $S_{EOF} = \dfrac{6.16}{2} = 48\,(cm^2)$

Câu 196. Cho đường tròn $(O;5cm)$. Cát tuyến qua A ở ngoài (O) cắt (O) tại B và C. Cho biết $AB = BC$ và kẻ đường kính COD. Độ dài đoạn thẳng AD bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 10



Xét (O) có $OB = OC = OD$ suy ra $BO = \dfrac{DC}{2}$ hay ΔBDC vuông tại B (tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông).

Suy ra $BD \perp AC$.

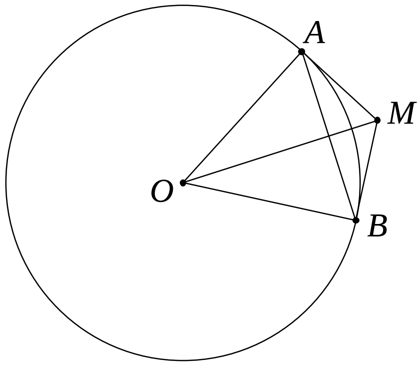
$\Delta ABD = \Delta CBD$ nên $DA = DC = 2R = 10cm$.

Câu 197. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho góc AMB bằng $120°$. Biết chu vi tam giác MAB là $6\left(3 + 2\sqrt{3}\right)cm$, hỏi độ dài AB bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 18



Gọi R là bán kính của (O)

Xét (O) có $MA = MB; \widehat{AMO} = \widehat{BMO}$ (tính chất hai tiếp tuyến bằng nhau)

Nên $\widehat{AMO} = 60°$. Xét tam giác vuông AOM có $AM = AO.\cot \widehat{AMO} = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$ nên $MA = MB = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

Lại có $\widehat{AOB} + \widehat{AMB} = 180° \Rightarrow \widehat{AOB} = 60°$ suy ra ΔAOB là tam giác đều
hay $AB = OB = OA = R$

Chu vi tam giác MAB là $MA + MB + AB = \dfrac{R\sqrt{3}}{3} + \dfrac{R\sqrt{3}}{3} + R = 6\left(3 + 2\sqrt{3}\right)$

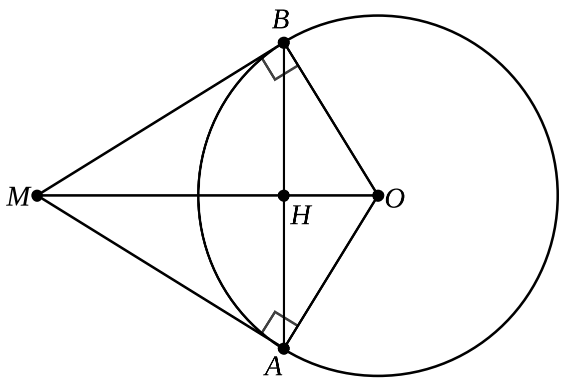
$R\left(\dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right) = 6\left(3 + 2\sqrt{3}\right)$ suy ra $R = 18cm$ nên $AB = 18cm$.

Câu 198. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho góc AMB bằng $60°$. Biết chu vi tam giác MAB là $24\sqrt{3}cm$, khi đó độ dài bán kính đường tròn (O) bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 8



Xét (O) có $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) mà $\widehat{AMB} = 60°$ nên ΔMAB đều suy ra chu vi ΔMAB là $MA + MB + AB = 3AB$ suy ra $3AB = 24\sqrt{3} \Rightarrow AB = 8\sqrt{3}cm = MA = MB$

Lại có $\widehat{AMO} = \dfrac{1}{2}\widehat{AMB} = 30°$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

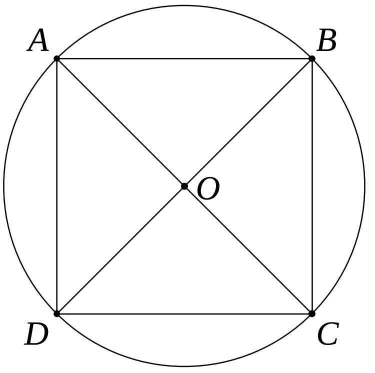
Xét tam giác vuông MAO có $\tan \widehat{AMO} = \dfrac{OA}{MA} \Rightarrow OA = MA.\tan 30^\circ = 8\,cm$

Câu 199. Cho hình vuông có cạnh $5cm$ là nội tiếp đường tròn (O). Diện tích hình tròn (O) bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimet vuông).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 39



Gọi hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) khi đó $OA = OB = OC = OD = R$ là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow R = \dfrac{AC}{2}$.

Xét tam giác vuông ABC ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 50 \Rightarrow AC = 5\sqrt{2} \Rightarrow R = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

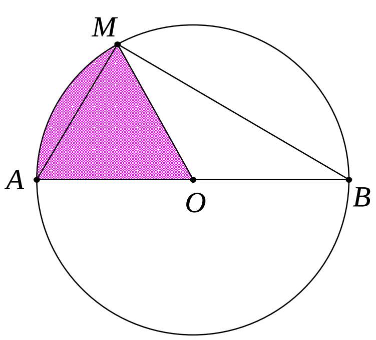
Diện tích hình tròn (O) là $S = \pi R^2 = \dfrac{25\pi}{2} \approx 39(cm^2)$

Câu 200. Cho đường tròn $(O;8cm)$, đường kính AB. Điểm $M \in (O)$ sao cho $\widehat{BAM} = 60^\circ$. Diện tích hình quạt AOM bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet vuông).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 33,5



Xét đường tròn (O) có $\widehat{BAM} = 60^\circ$ suy ra số đo cung MB bằng $2.60^\circ = 120^\circ$

Suy ra số đo cung AM bằng $n^\circ = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

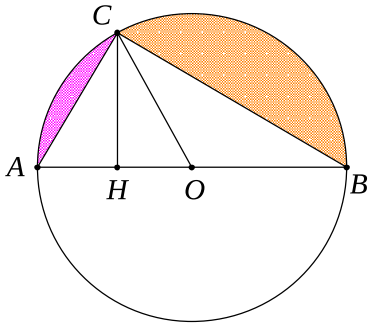
Vậy diện tích hình quạt AOM là $S = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{\pi.8^2.60}{360} = \dfrac{32\pi}{3} \approx 33,5(cm^2)$

Câu 201. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2\sqrt{2}cm$. Điểm $C \in (O)$ sao cho $\widehat{ABC} = 30°$. Diện tích hình giới hạn bởi đường tròn (O) và $AC; BC$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet vuông).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $1,4$



Diện tích hình tròn (O) là: $S_{(O)} = \pi R^2$

Ta có góc $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0 - \widehat{CBA} = 90^0 - 30^0 = 60^0$.

Tam giác AOC có $\widehat{CAO} = 60°$ và $OA = OC = R$ nên tam giác AOC đều cạnh bằng R.

Gọi CH là đường cao của tam giác ABC, ta có:

$$CH = CO.\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.R \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}CH.AB = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}R.2R = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2.$$

Diện tích hình giới hạn bởi đường tròn (O) và AC, BC là:

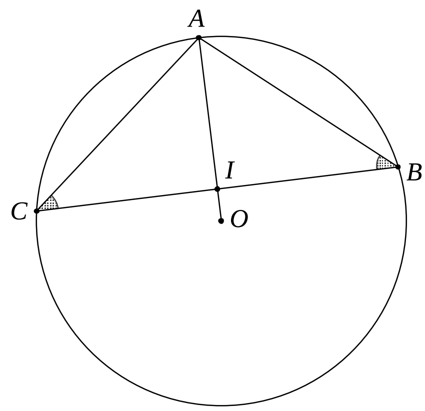
$$\frac{1}{2}S_{(O)} - S_{ABC} = \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}R^2 = \frac{1}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)R^2 = \frac{1}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\right)^2 = \pi - \sqrt{3} \approx 1,4\left(cm^2\right)$$

Câu 202. Cho tam giác ABC có $AB = AC = 4cm, \widehat{A} = 100°$. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $19,5$



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vì tam giác ABC cân tại A nên AO vừa là đường cao vừa là phân giác của $\widehat{BAC}$

Suy ra $\widehat{CAO} = \dfrac{100^\circ}{2} = 50^\circ$

Gọi I là giao điểm của AO và BC. Xét tam giác CAI có $AC = 4; \widehat{CAI} = 50^\circ$ nên $\sin\widehat{CAI} = \dfrac{CI}{AC}$ suy ra $CI = AC.\sin\widehat{CAI} = 4.\sin 50^\circ (cm)$

Xét tam giác OAC cân tại O (vì $OA = OC$)

có $\widehat{OCA} = \widehat{OAC} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$

Xét tam giác CIO vuông tại I có $\sin\widehat{COI} = \dfrac{CI}{OC}$ suy ra $OC = \dfrac{IC}{\sin\widehat{COI}} = \dfrac{4\sin 50^\circ}{\sin 80^\circ}$

Nên bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R = OC = \dfrac{IC}{\sin\widehat{COI}} = \dfrac{4\sin 50^\circ}{\sin 80^\circ}$

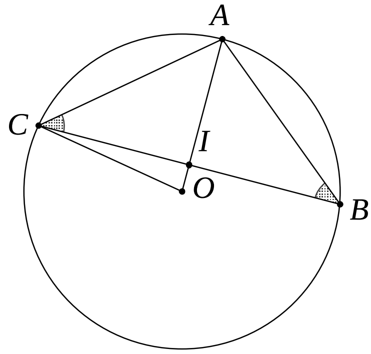
Chu vi đường tròn (O) là $C = 2\pi R = 2\pi = \dfrac{4\sin 50^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 19,5(cm)$

Câu 203. Cho tam giác ABC có $AB = AC = 3\ cm, \widehat{A} = 120^\circ$. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimet).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 19



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vì tam giác ABC cân tại A nên AO vừa là đường cao vừa là phân giác của $\widehat{BAC}$. Suy ra $\widehat{CAO} = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$

Xét tam giác có $OA = OC; \widehat{CAO} = 60^\circ \Rightarrow \Delta CAO$ đều nên $OA = OC = AC = 3cm$

Nên bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R = 3cm$

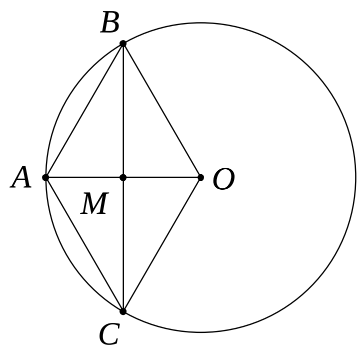
Chu vi đường tròn (O) là $C = 2\pi R = 6\pi \approx 19(cm)$

Câu 204. Cho đường tròn (O) bán kính OA. Từ trung điểm M của OA vẽ dây $BC \perp OA$. Biết độ dài đường tròn (O) là $4\pi (cm)$. Tính độ dài cung lớn BC (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $8,4$



Vì độ dài đường tròn là 4π nên $4\pi = 2\pi.R \Rightarrow R = 2cm$ (R là bán kính đường tròn)

Xét tứ giác $ABOC$ có hai đường chéo $AO \perp BC$ tại M là trung điểm mỗi đường nên tứ giác $ABOC$ là hình thoi.

Suy ra $OB = OC = AB \Rightarrow \Delta ABO$ đều $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ$

Suy ra số đo cung lớn BC là $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$

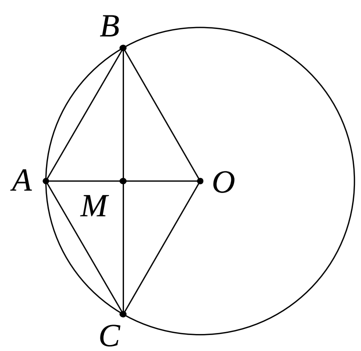
Độ dài cung lớn BC là $l = \dfrac{\pi.2.240}{180} = \dfrac{8\pi}{3} \approx 8,4(cm).$

Câu 205. Cho đường tròn (O) bán kính OA. Từ trung điểm M của OA vẽ dây $BC \perp OA$. Biết độ dài đường tròn (O) là $6\pi (cm)$. Tính độ dài cung lớn BC (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $12,6$



Vì độ dài đường tròn là 6π nên $6\pi = 2\pi.R \Rightarrow R = 3cm$ (R là bán kính đường tròn)

Xét tứ giác $ABOC$ có hai đường chéo $AO \perp BC$ tại M là trung điểm mỗi đường nên tứ giác $ABOC$ là hình thoi.

Suy ra $OB = OC = AB \Rightarrow \Delta ABO$ đều $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ$

Suy ra số đo cung lớn BC là $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$

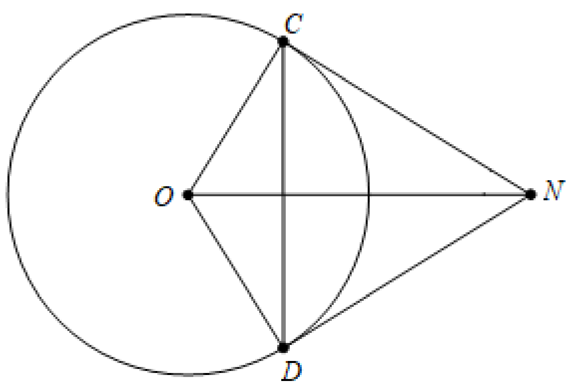
Độ dài cung lớn BC là $l = \dfrac{\pi.3.240}{180} = 4\pi \approx 12,6(cm)$

Câu 206. Cho hai tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O) cắt nhau tại N, biết $\widehat{CND} = 60°$. Số đo của $\widehat{DON}$ bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 60



Vì NC, ND là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên ON là tia phân giác của $\widehat{COD}; NO$ là tia phân giác của $\widehat{CND}$ hay $\widehat{DNO} = \dfrac{1}{2}\widehat{DMC} = \dfrac{60°}{2} = 30°$.

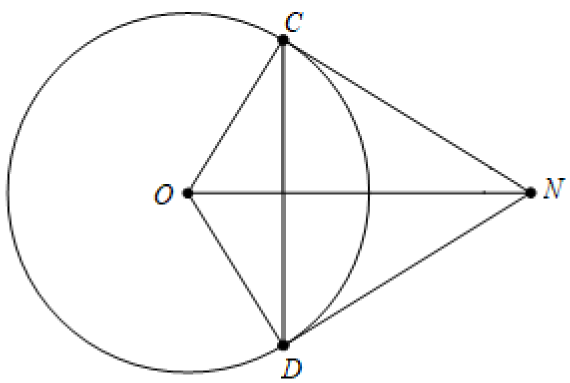
Mà tam giác ODN vuông tại D (do ND là tiếp tuyến) nên $\widehat{DON} = 90° - \widehat{DNO} = 90° - 30° = 60°$.

Câu 207. Cho hai tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O) cắt nhau tại N, biết $\widehat{COD} = 100°$. Số đo của $\widehat{CON}$ bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 40



Vì NC, ND là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên ON là tia phân giác của $\widehat{COD}; NO$ là tia phân giác của $\widehat{CND}$ hay $\widehat{CON} = \frac{1}{2}\widehat{COD} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$.

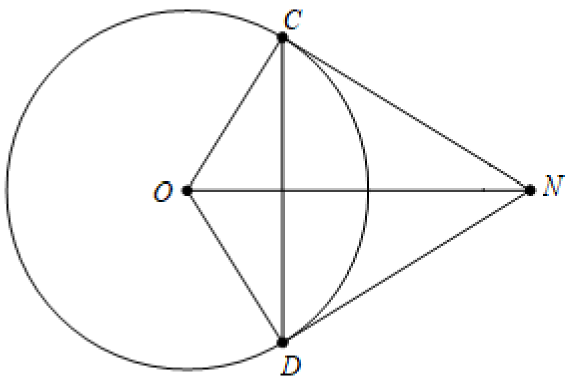
Mà tam giác OCN vuông tại C (do NC là tiếp tuyến) nên $\widehat{CNO} = 90^\circ - \widehat{CON} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

Câu 208. Cho hai tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O) cắt nhau tại N, biết $\widehat{CND} = 40^\circ$. Số đo của cung nhỏ CD bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 140



Vì NC, ND là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{OCN} = \widehat{ODN} = 90^\circ$

Xét tứ giác $ODNC$ có $\widehat{COD} + \widehat{OCN} + \widehat{CND} + \widehat{ODN} = 360^\circ$.

Suy ra $\widehat{COD} = 360^\circ - \widehat{OCN} - \widehat{ODN} - \widehat{CND} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

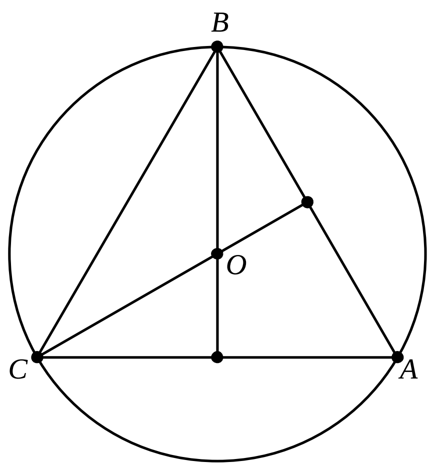
Suy ra số đo cung nhỏ CD là 140°

Câu 209. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O). Số đo cung BC nhỏ bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 120



Cách 1: Ta có $\widehat{BOC} = 2.\widehat{BAC} = 120^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở tâm)

Do đó số đo cung nhỏ BC là $120°$.

Cách 2: Vì tam giác ABC đều có tâm O là tâm đường tròn ngoại tiếp nên O cũng là giao ba đường phân giác nên $BO;CO$ lần lượt là các đường phân giác $\widehat{ABC};\widehat{ACB}$.

Ta có $\widehat{BCO}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}=\frac{60°}{2}=30°;\widehat{CBO}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}=\frac{60°}{2}=30°$.

Xét tam giác BOC có $\widehat{BOC}=180°-\widehat{CBO}-\widehat{BCO}=180°-30°-30°=120°$.

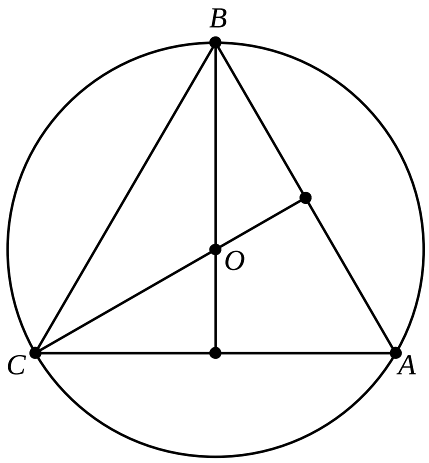
Do đó số đo cung nhỏ BC là $120°$.

Câu 210. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O). Số đo cung AC lớn bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 240



Cách 1: Ta có $\widehat{AOC}=2.\widehat{ABC}=120°$ (góc nội tiếp và góc ở tâm)

Do đó số đo cung lớn AC là $360°-120°=240°$.

Cách 2: Vì tam giác ABC đều có tâm O là tâm đường tròn ngoại tiếp nên O cũng là giao ba đường phân giác nên $AO;CO$ lần lượt là các đường phân giác $\widehat{BAC};\widehat{ACB}$.

Ta có $\widehat{CAO}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}=\frac{60°}{2}=30°;\widehat{ACO}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}=\frac{60°}{2}=30°$.

Xét tam giác AOC có $\widehat{AOC}=180°-\widehat{CAO}-\widehat{ACO}=120°$ nên số đo cung nhỏ AC là $120°$.

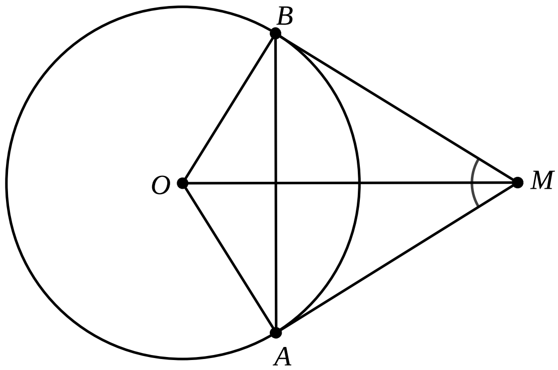
Do đó số đo cung lớn AC là $360°-120°=240°$.

Câu 211. Cho đường tròn $(O;R)$, lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM=\sqrt{2}R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với (O) (A,B là các tiếp điểm). Số đo cung AB lớn bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 270



Xét tam giác OBM vuông tại B ta có $\cos\widehat{BMO} = \dfrac{OB}{OM} = \dfrac{R}{\sqrt{2}R} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ suy ra $\widehat{BMO} = 45°$

Suy ra $\widehat{BOM} = 90° - 45° = 45°$.

Xét đường tròn (O) có $MA;MB$ là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M nên OM là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$. Suy ra $\widehat{AOB} = 2.\widehat{BOM} = 2.45° = 90°$ mà $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm chắn cung AB

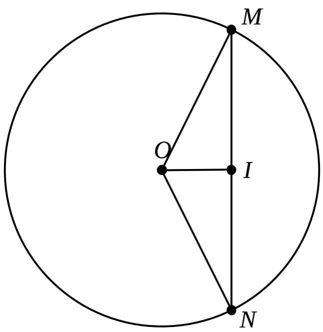
Nên số đo cung nhỏ AB là $90°$ suy ra số đo cung lớn AB là $360° - 90° = 270°$.

Câu 212. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{2}$. Kẻ OI vuông góc với MN tại I. Số đo cung nhỏ MN bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 90



Xét tam giác OIM vuông tại I ta có: $\sin\widehat{MOI} = \dfrac{MI}{MO} = \dfrac{\sqrt{2}R}{2} : R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ suy ra $\widehat{MOI} = 45°$

ΔMON cân tại O có OI vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên $\widehat{MON} = 2\widehat{MOI} = 2.45° = 90°$.

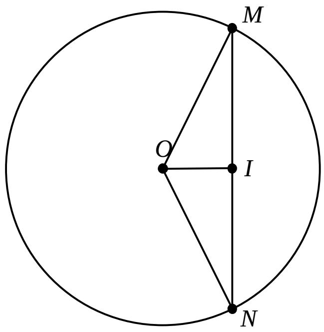
Suy ra số đo cung nhỏ MN là $90°$.

Câu 213. Cho đường tròn $(O;10cm)$ và dây cung $MN = 16cm$. Kẻ OI vuông góc với MN tại I. Độ dài OI bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 6



Xét (O) có $OI \perp MN$ tại I nên I là trung điểm của MN nên $MI = IN = \frac{18}{2} = 8cm$

Xét tam giác OIM vuông tại I, theo định lý Phythagore ta có

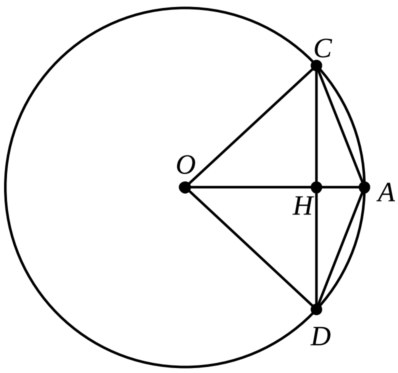
$OI^2 = OM^2 - MI^2 \Rightarrow OI = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6cm$.

Câu 214. Cho đường tròn $(O;R)$. Gọi H là điểm thuộc bán kính OA sao cho $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}OA$. Dây CD vuông góc với OA tại H. Số đo cung lớn CD bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 300



Xét đường tròn (O) có $OA \perp CD$ tại H nên H là trung điểm của CD.

Xét tam giác OHC vuông tại H có $\cos \widehat{HOC} = \frac{OH}{OC} = \frac{\frac{\sqrt{3}R}{2}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{HOC} = 30°$.

Mà tam giác OCD cân tại O $(OC = OD = R)$ có OH là đường cao nên OH cũng là đường phân giác,

suy ra $\widehat{DOC} = 2.\widehat{COH} = 2.30° = 60°$.

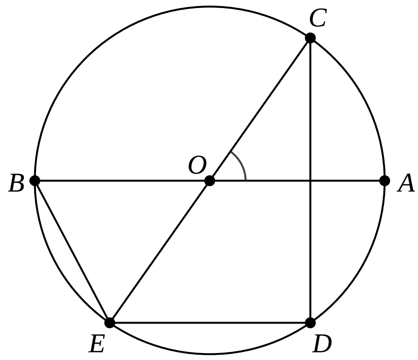
Do đó số đo cung nhỏ CD là $60°$ và số đo cung lớn CD là $360° - 60° = 300°$.

Câu 215. Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ góc ở tâm $\widehat{AOC} = 60°$. Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB. Số đo cung nhỏ BE bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 60



Xét (O) có $CD \perp OA, ED//OA \Rightarrow CD \perp ED$ hay $\widehat{EDC} = 90°$ mà $E;D;C \in (O)$ nên C là đường kính của (O) hay $E;O;C$ thẳng hàng.

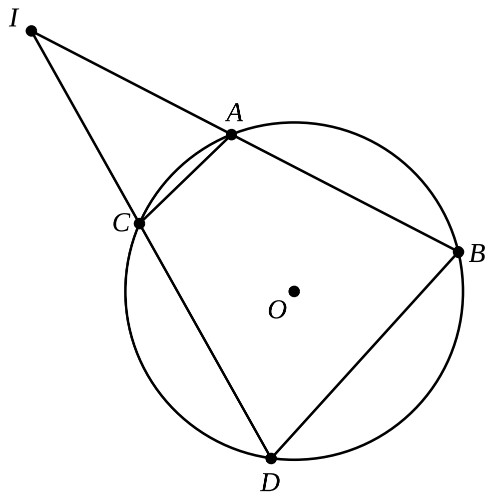
Do đó $\widehat{BOE} = \widehat{COA} = 60°$ (đối đỉnh) nên số đo cung nhỏ BE là $60°$.

Câu 216. Cho đường tròn (O) và điểm I nằm ngoài (O). Từ điểm I kẻ hai dây cung AB và CD (A nằm giữa I và B, C nằm giữa I và D) sao cho $\widehat{CAB} = 120°$. Tổng hai góc $\widehat{IAC}$ và $\widehat{IDB}$ bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 120



Xét (O) có $\widehat{CAB}$ là góc nội tiếp chắn cung BC (chứa điểm D)

$\widehat{DBC}$ là góc nội tiếp chắn cung BC (chứa điểm A) nên $\widehat{CAB} + \widehat{CDB} = \frac{1}{2}.360° = 180°$.

$\widehat{CAB} = 120°$ (gt) $\Rightarrow \widehat{CDB} = 180° - \widehat{CAB} = 180° - 120° = 60°$ hay $\widehat{IDB} = 60°$

Lại có $\widehat{CAB} + \widehat{CAI} = 180°$ (kề bù) nên $\widehat{IAC} = 180° - \widehat{CAB} = 60°$.

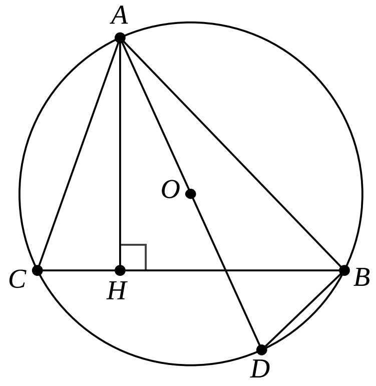
Do đó $\widehat{IAC} + \widehat{IDB} = 120°$.

Câu 217. Cho tam giác ABC có $AB = 5cm; AC = 3cm$ đường cao AH và nội tiếp trong đường tròn tâm (O), đường kính AD. Khi đó tích $AH.AD$ bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 15



Xét (O) có $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB); $\widehat{ABD}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Nên $\Delta ACH \backsim \Delta ADB$ (g - g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{AD}=\dfrac{AH}{AB}$ suy ra $AH.AD=AC.AB$.

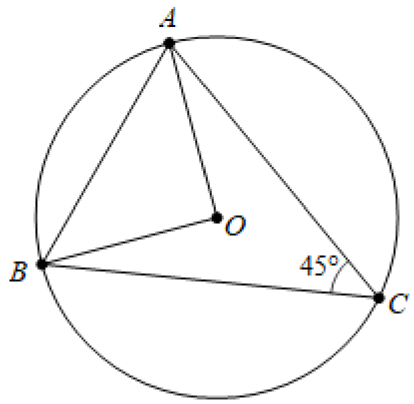
Vậy $AH.AD=3.5=15cm^2$.

Câu 218. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ biết góc $\widehat{C}=45^\circ$ và $AB=10\sqrt{2}\left(cm\right)$. Bán kính đường tròn (O) bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 10



Xét đường tròn (O) có $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn cung AB

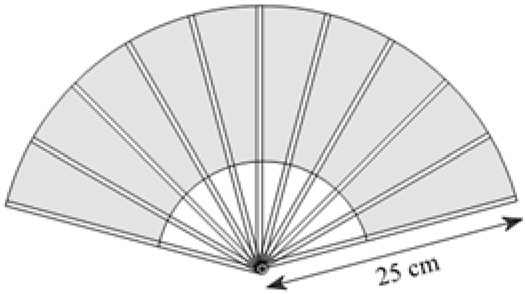
Mà $\widehat{ACB}=45^\circ \Rightarrow \widehat{AOB}=90^\circ \Rightarrow \Delta AOB$ vuông cân tại O.

Theo định lý Phythagore ta có: $OA^2+OB^2=AB^2$

$$2OA^2=AB^2 \Rightarrow AO^2=\frac{AB^2}{2}=\frac{\left(10\sqrt{2}\right)^2}{2}=100 \Rightarrow AO=10\left(cm\right)$$

Vậy bán kính đường tròn là $R=10\left(cm\right)$.

Câu 219. Một chiếc quạt giấy khi xòe ra có hình dạng của một hình quạt tròn với bán kính $25\,cm$ và khi xòe hết thì góc tạo bởi hai thanh nan ngoài cùng của chiếc quạt là 150^0. Tính chiều dài cung tròn của chiếc quạt (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet).



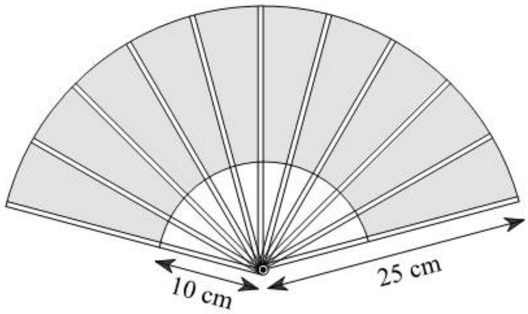
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $65,4$

Chiều dài cung tròn của chiếc quạt là: $l=\dfrac{n}{180^0}.\pi R=\dfrac{150^0}{180^0}.\pi.25\approx 65,4\,cm$

Câu 220. Một chiếc quạt giấy khi xòe ra có hình dạng của một hình quạt tròn với bán kính $25\,cm$ và khi xòe hết thì góc tạo bởi hai thanh nan ngoài cùng của chiếc quạt là 150^0. Tính diện tích phần giấy làm quạt, biết rằng phần giấy của quạt là một hình vành khuyên có bán kính đường tròn nhỏ là $10\,cm$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimet vuông).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 687

Diện tích hình quạt tròn với bán kính $25\,cm$ là : $S_1=\dfrac{n}{360}.\pi R^2=\dfrac{150}{360}.\pi.25^2=\dfrac{3125}{12}\pi\,cm^2$

Diện tích hình quạt tròn với bán kính $10\,cm$ là: $S_2=\dfrac{n}{360}.\pi R^2=\dfrac{150}{360}.\pi.10^2=\dfrac{125}{3}\pi\,cm^2$

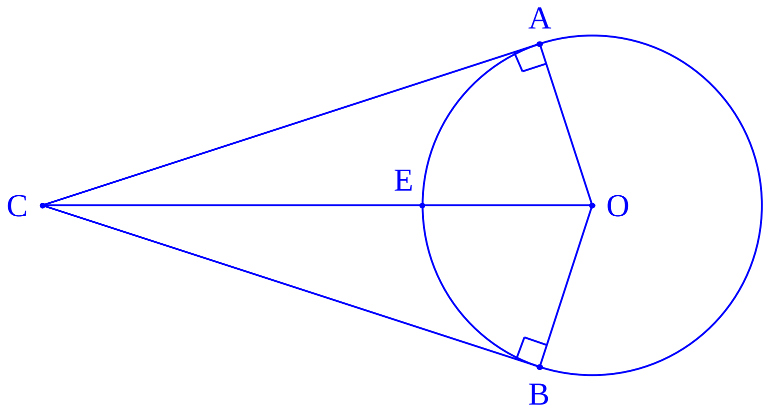
Diện tích phần làm giấy là $S=S_1-S_2=\dfrac{3125}{12}\pi-\dfrac{125}{3}\pi\approx 687\,cm^2$.

Câu 221. Một vệ tinh nhân tạo tầm trung (MEO) chuyển động theo quỹ đạo tròn cách bề mặt Trái Đất một khoảng $2000km$, tâm quỹ đạo vệ tinh trùng với tâm O của Trái Đất. Vệ tinh phát tính hiệu vô tuyến theo đường thẳng đến một vị trí trên mặt đất. Hỏi vị trí xa nhất trên Trái Đất có thể nhận tín hiệu từ vệ tinh này cách vệ tinh một khoảng là bao nhiêu kilômet? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của kilômet). Biết rằng Trái Đất được xem như một hình cầu có bán kính $6400km$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5441



Ta có: $CO = CE + EO = 2000 + 6400 = 8400km$

vì CA là tiếp tuyến của (O) nên $CA \perp OA$ suy ra ΔCOA vuông tại A.

Xét ΔCOA vuông tại A

$CO^2 = CA^2 + OA^2$

$CA^2 = CO^2 - OA^2$

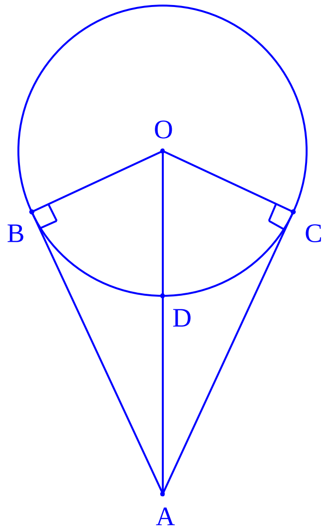
$\Rightarrow CA = \sqrt{CO^2 - OA^2}$

$CA = \sqrt{8400^2 - 6400^2}$

$CA \approx 5441km$

Vậy vị trí xa nhất trên Trái Đất có thể nhận tín hiệu của vệ tinh cách vệ tinh khoảng $5441km$

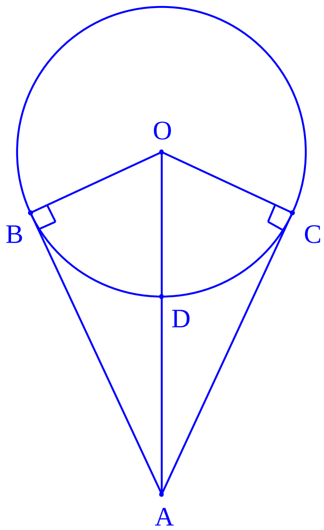
Câu 222. Khí cầu là một túi đựng không khí nóng, thường có khối lượng riêng nhỏ hơn không khí xung quanh và nhờ vào lực đẩy Ác-si-mét có thể bay lên cao. Giả sử có thể xem khinh khí cầu là một khối cầu và các dây nối sẽ tiếp xúc với khối cầu này. Hãy tính chiều dài của các dây nối để khoảng cách từ buồng lái đến điểm thấp nhất của khí cầu là $6m$. Biết rằng bán kính của khối cầu này là $8m$. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của mét.



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $11,5$



Ta có: $OB = OC = OD = 8m$

Do đó $OA = OD + DA = 6 + 8 = 14m$

vì AB là tiếp tuyến của (O) nên $AB \perp OB$ suy ra ΔABO vuông tại B.

Xét ΔABO vuông tại B

$OA^2 = AB^2 + OB^2$

$AB^2 = OA^2 - OB^2$

$\Rightarrow AB = \sqrt{OA^2 - OB^2}$

$AB = \sqrt{14^2 - 8^2}$

$AB \approx 11,5m$

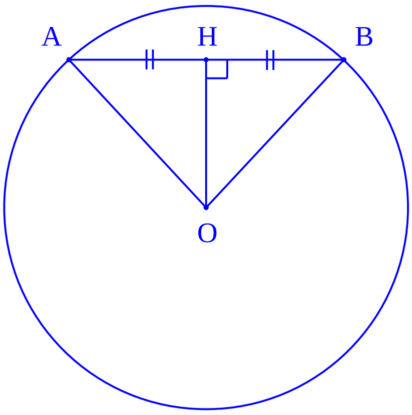
Vậy chiều dài của các dây nối thỏa yêu cầu bài toán là $11,5m$.

Câu 223. Hồ Kingsley ở hạt Clay của Florida (Mỹ) có hình dạng là hình tròn có đường kính $3,2km$. Người ta muốn xây dựng một cây cầu bắc qua hồ Kingsley sao cho khoảng cách từ cây cầu đến tâm của hồ là $1000m$. Hãy tính chiều dài của cây cầu đó (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của kilômet).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $2,5$



Ta có: $OA = OB = \dfrac{3,2}{2} = 1,6km$

Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $OH \perp AB$

Do đó: $OH = 1000m = 1km$

Xét ΔAHO vuông tại H

$OA^2 = AH^2 + OH^2$

$AH^2 = OA^2 - OH^2$

$\Rightarrow AH = \sqrt{OA^2 - OH^2}$

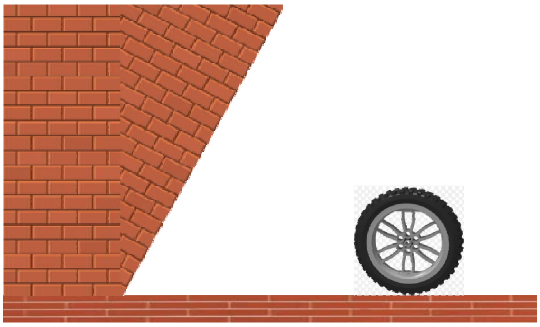
$AH = \sqrt{(1,6)^2 - 1^2}$

$AH \approx 1,25km$

Ta có: $AB = 2AH \approx 2,5km$

Vậy chiều dài của cây cầu là khoảng $2,5km$.

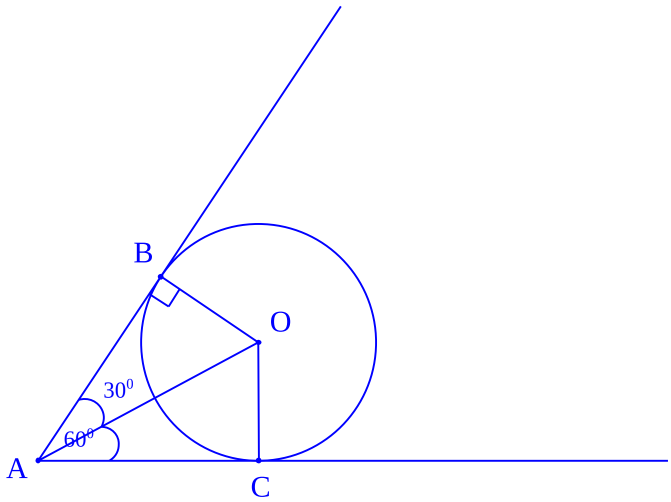
Câu 224. Một bánh xe có dạng hình tròn bán kính $25cm$ lăn đến bức tường hợp với mặt đất một góc 60°. Khoảng cách ngắn nhất từ tâm bánh xe đến góc tường bằng bao nhiêu centimet?



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 50



Khi bánh xe chạm tới bức tường thì không thể di chuyển vào thêm được nữa. Điều này có nghĩa khoảng cách của tâm bánh xe đến góc tường ngắn nhất là khi bánh xe tiếp xúc với bức tường và mặt đất.

Ta có:

$OB = OC = 25cm$

$\widehat{BAC} = 60^{\circ}$

$\widehat{OAB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 30^{\circ}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

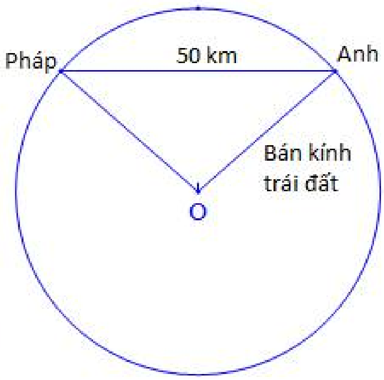
Xét ΔOAB vuông tại B

$\sin\widehat{BAO} = \frac{OB}{OA}$

$OA = \frac{OB}{\sin\widehat{BAO}} = \frac{25}{\sin 30^{\circ}} = 50cm$

Vậy khoảng cách ngắn nhất từ tâm bánh xe đến góc tường là $50cm$.

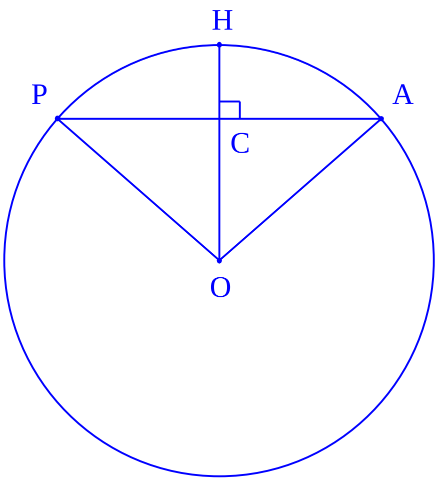
Câu 225. Đường hầm vượt eo biển Măng-sơ nối hai nước Anh và Pháp có chiều dài khoảng $50km$ (trong đó có $38km$ chạy xuyên dưới đáy biển). Giả sử rằng vị trí hai đầu đường hầm thuộc Anh và Pháp nằm trên cùng một kinh tuyến ở bề mặt Trái Đất (Trái Đất được xem như một hình cầu có bán kính $6400km$). Hãy tính độ sâu nhất của đường hầm so với bề mặt Trái Đất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của mét).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $48,8$



Ta có: $OA = OP = 6400km$; $AP = 50km$

Kẻ $OH \perp AP$ tại C, suy ra C là trung điểm của AP

Do đó $AC = PC = \dfrac{AP}{2} = \dfrac{50}{2} = 25km$

Xét ΔOCP vuông tại C

$OC^2 = OP^2 - PC^2$

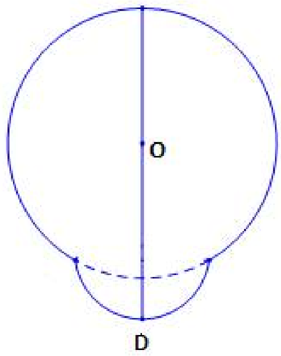
$\Rightarrow OC = \sqrt{OP^2 - PC^2}$

$OC = \sqrt{6400^2 - 25^2}$

Ta có: $CH = OH - OC = 6400 - \sqrt{6400^2 - 25^2} \approx 0,04883km \approx 48,8m$

Vậy độ sâu nhất của đường hầm so với bề mặt Trái Đất là $48,8m$

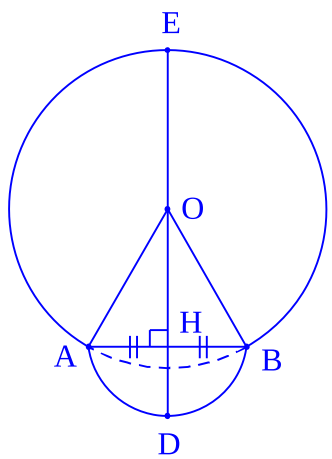
Câu 226. Một quả cầu gỗ có bán kính là $R = 10cm$ được đặt trên một cái đế bằng gỗ có dạng là một nửa mặt cầu bán kính bằng $\dfrac{R}{2}$. Tính khoảng cách từ mặt đất đến điểm cao nhất của mặt cầu gỗ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimét).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $23,7$



Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $OH \perp AB$

Ta có AB là đường kính của nửa mặt cầu cái đế nên $AB = 2.\dfrac{R}{2} = R = 10cm$

ΔOAB có $OA = OB = AB = R$, do đó ΔOAB đều, suy ra $\widehat{OAB} = 60^{\circ}$ hay $\widehat{OAH} = 60^{\circ}$

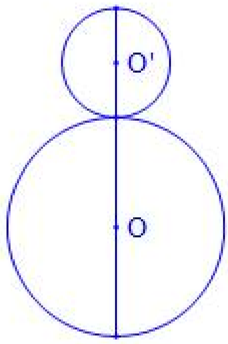
Xét ΔOHA vuông tại H

$$\cos\widehat{OAH} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow OH = OA.\cos\widehat{OAH} = R.\cos 60^{0} = R.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ta có: $ED = OE + OH + HD = R + \dfrac{R\sqrt{3}}{2} + \dfrac{R}{2} = 10 + \dfrac{10\sqrt{3}}{2} + \dfrac{10}{2} \approx 23,7cm$

Vậy khoảng cách từ mặt đất đến điểm cao nhất của mặt cầu gỗ là $23,7cm$

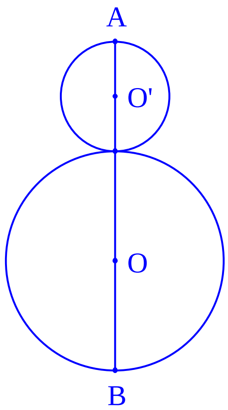
Câu 227. Ở các nước xứ lạnh, vào mùa Đông thường có tuyết rơi dày đặc khắp các con đường, trẻ em tại đây rất thích đắp hình dạng của người tuyết. Có thể xem phần thân dưới và thân trên của người tuyết là hai hình cầu tiếp xúc nhau. Để đắp được một người tuyết cao $1,8m$ với đường kính của phần thân dưới phải gấp đôi đường kính của phần thân trên người tuyết thì bán kính quả cầu tuyết phần thân dưới bằng bao nhiêu centimet?



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 60



Ta có: $1,8m = 180cm$

Gọi $R(cm)$ là bán kính của đường tròn nhỏ

Đường kính của đường tròn nhỏ là $2R(cm)$)

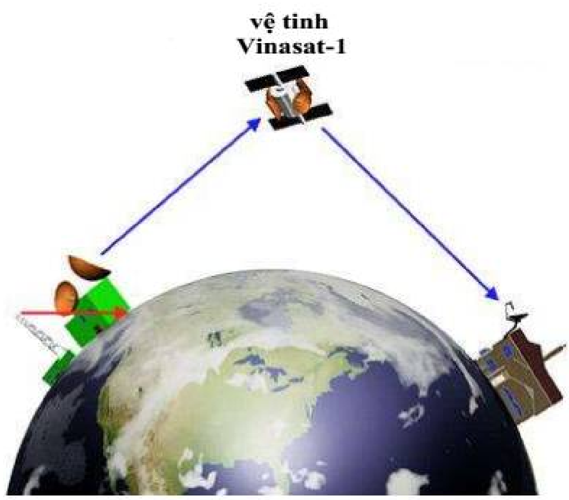
Đường kính của đường tròn lớn là: $2.2R = 4R(cm)$

vì (O) tiếp xúc với (O') nên $2R + 4R = 180 \Rightarrow R = 30(cm)$

Vậy để đắp người tuyết có chiều cao là $1,8m$ thì ta cần đắp quả cầu tuyết phần thân dưới có bán kính là $2R = 60(cm)$.

Câu 228. Vinasat-1 là vệ tinh viễn thông địa tĩnh đầu tiên của Việt Nam được phóng vào vũ trụ lúc 22 giờ 17 phút ngày 18 tháng 4 năm 2008 (giờ UTC). Dự án vệ tinh Vinasat-1 đã khởi động từ năm 1998 với tổng mức đầu tư là khoảng hơn 300 triệu USD. Việt Nam đã tiến hành đàm phán với 27 quốc gia và vùng lãnh thổ để có được vị trí 132 độ Đông trên quỹ đạo địa tĩnh.
Hãy tìm khoảng cách từ vệ tinh Vinasat-1 đến mặt đất. Biết rằng khi vệ tinh phát tín hiệu vô tuyến đến một điểm xa nhất trên mặt đất thì từ lúc phát tín hiệu đến mặt đất cho đến lúc vệ tinh thu lại được tín hiệu phản hồi mất khoảng thời gian là $0,3$ giây, biết vận tốc sóng vô tuyến là $3.10^8 m/s$. Trái đất được xem

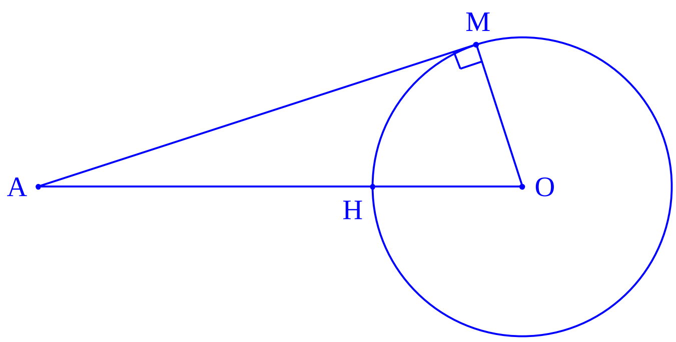
như một hình cầu có bán kính khoảng 6400km (ghi kết quả gần đúng chính xác đến hàng đơn vị của kilômét).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 39053



Do thời gian từ lúc truyền tín hiệu đến lúc nhận lại tín hiệu là $0,3$ giây, nên thời gian tín hiệu truyền từ A đến M là: $\dfrac{0,3}{2} = 0,15$ giây

Độ dài đoạn AM cũng là quãng đường tín hiệu truyền đi được trong $0,15$ giây

$AM = v.t = 3.10^8.0,15 = 45000km$

Vị trí xa nhất trên trái đất có thể nhận tín hiệu từ vệ tinh là vô số điểm M , với AM là tiếp tuyến kẻ từ M đến đường tròn (O)

Xét tam giác vuông AMO, áp dụng định lý Pythagore ta có:

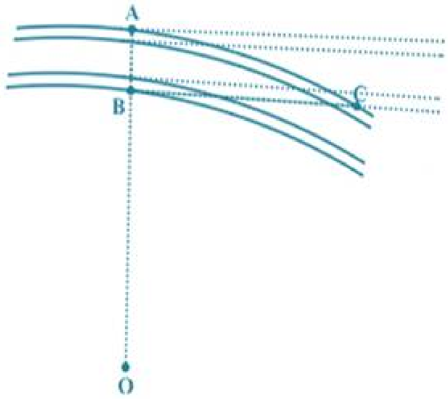
$OA = \sqrt{OM^2 + AM^2} = \sqrt{6400^2 + 45000^2} \approx 45453km$

Khoảng cách từ vệ tinh Vinasat-1 đến mặt đất là độ dài đoạn AH :

$AH = OA - OH = 45453 - 6400 \approx 39053km$

Câu 229. Để giúp xe lửa chuyển từ một đường ray từ hướng này sang một đường ray theo hướng khác, người ta làm xen giữa một đoạn đường ray hình vòng cung (hình vẽ). Biết chiều rộng của đường ray là

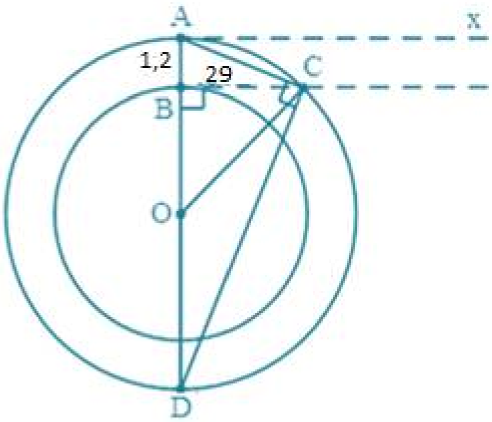
$AB = 1,2m$ và đoạn $BC = 29m$. Tính bán kính $OA = R$ của đoạn đường ray hình vòng cung (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 351



Thanh ray trùng với BC tiếp xúc với đường tròn $(O;OB)$ tại B nên là tiếp tuyến của đường tròn $(O;OB)$, do đó $BC \perp OB$

OA cắt đường tròn $(O;OA)$ tại điểm D, do đó $AD = 2R$

ΔACD nội tiếp đường tròn $(O;OA)$ có đường kính AD nên là tam giác vuông tại C.

Ta có ΔACB đồng dạng ΔCDB nên $CB^2 = AB.BD$

suy ra $CB^2 = AB.BD$

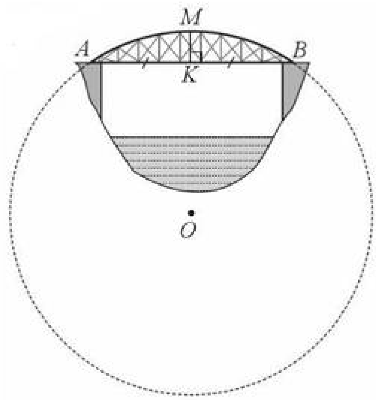
$CB^2 = AB.(AD - AB)$

$29^2 = 1,2(2R - 1,2)$

$R = \dfrac{29^2 + 1,2^2}{1,2.2}$

$R \approx 351m$

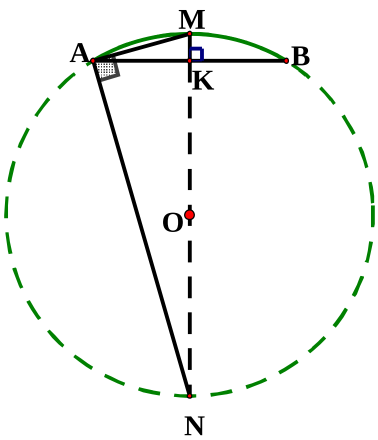
Câu 230. Một chiếc cầu được thiết kế như hình bên dưới có độ dài $AB = 50m$, chiều cao $MK = 4m$. Tính bán kính của đường tròn chứa cung AMB (MK đi qua tâm của đường tròn chứa cung AMB và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 80



Gọi đường tròn $(O;R)$ là đường tròn chứa cung AMB

Do MK là chiều cao nên $MK \perp AB$ tại K

Gọi MN là đường kính của đường tròn (O)

Ta có $MN \perp AB$, suy ra K là trung điểm AB

Độ dài nửa chiếc cầu là $AK = KB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{50}{2} = 25m$

Xét tam giác vuông ΔAMK có:

$AM^2 = AK^2 + MK^2$ (Pythagore)

$AM^2 = 25^2 + 4^2 = 641$

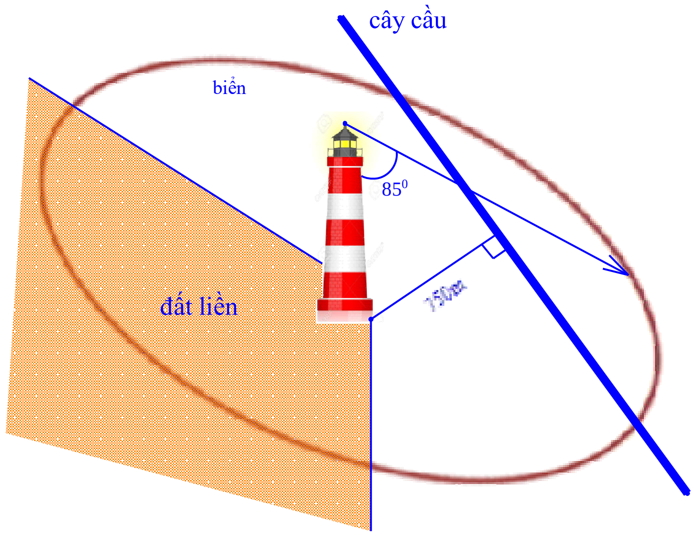
Ta có ΔMKA đồng dạng ΔMAN nên:

$AM^2 = MK.MN$

$MN = \dfrac{AM^2}{MK} = \dfrac{641}{4}$

Vậy bán kính đường tròn chứa cung tròn của vòm cầu là $\frac{641}{4}:2 \approx 80m$.

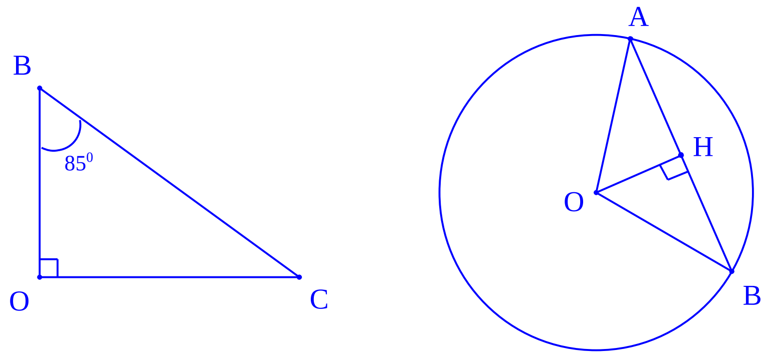
Câu 231. Một ngọn đèn hải đăng cao $100m$ đặt tại bờ biển có góc nâng của đèn không quá 85° so với phương thẳng đứng. Biết rằng ánh sáng của ngọn đèn hải đăng phát ra xem như một đường thẳng và đèn có thể xoay tròn xung quanh ngọn hải đăng. Một cây cầu bắc qua biển cách ngọn đèn hải đăng $750m$. Khi ngọn đèn hải đăng xoay tròn với góc nâng 85° thì chiếu sáng được một đoạn của chiếc cầu, hãy tính độ dài đoạn cầu được chiếu sáng đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1725



Xét ΔOBC vuông tại O

$\tan \widehat{OBC} = \frac{OC}{OB}$

$OC = OB.\tan \widehat{OBC}$

$OC = 100.\tan 85^0$

Xét ΔOHD vuông tại H, theo định lý Pythagore ta có:

$OD^2 = OH^2 + HD^2$

$HD^2 = OD^2 - OH^2$

$\Rightarrow HD = \sqrt{OD^2 - OH^2}$

$HD = \sqrt{\left(100.\tan 85^0\right)^2 - 750^2}$

$\Rightarrow AD = 2HD = 2.\sqrt{\left(100.\tan 85^0\right)^2 - 750^2} \approx 1725m$

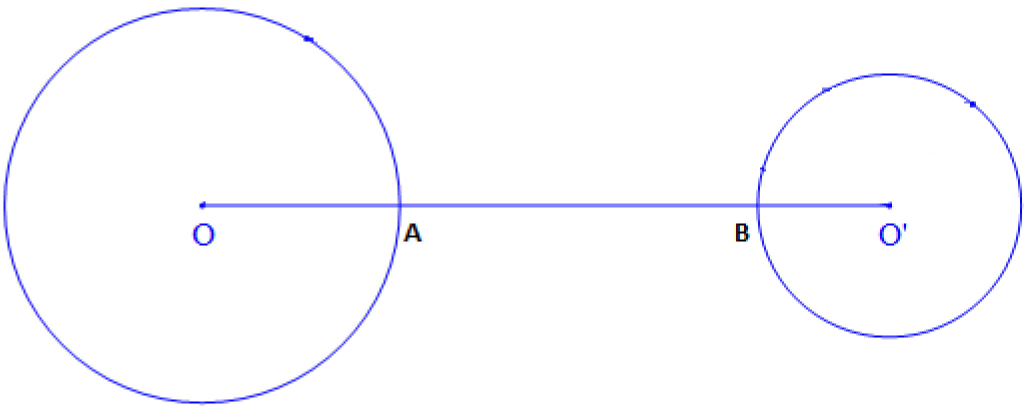
Vậy độ dài đoạn cầu được chiếu sáng là khoảng $1725m$.

Câu 232. Hai hòn đảo xem như hình tròn có khoảng cách từ tâm hòn đảo này đến tâm hòn đảo kia là khoảng $1500m$. Biết rằng đảo lớn có đường kính khoảng $1000m$, còn đảo nhỏ có bán kính khoảng $300m$. Người ta cần xây dựng một cây cầu bắc từ đảo này sang đảo kia sao cho chiều dài cây cầu là ngắn nhất. Hãy tính chiều dài cây cầu này.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 850



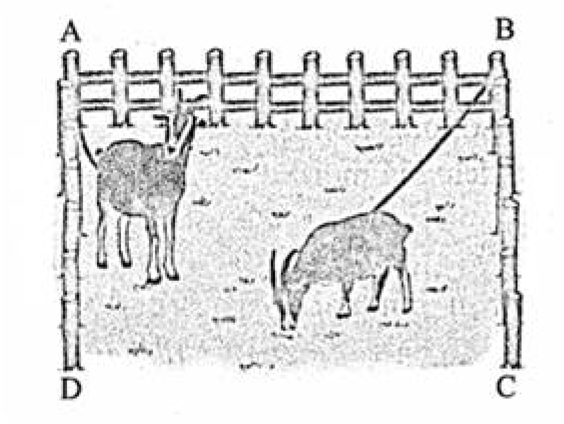
Chiều dài cây cầu ngắn nhất khi đặt cầu trên đoạn nối tâm của hai đảo chính là đoạn AB

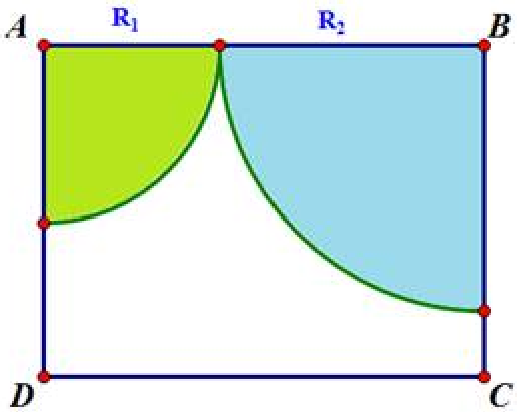
$$AB = OO' - \left(OA + BO'\right) = 1500 - \left(\frac{1000}{2} + \frac{300}{2}\right) = 850m$$

Vậy ta nên đặt cầu trên đoạn nối tâm của hai đảo thì cây cầu sẽ có chiều dài ngắn nhất là $850m$.

Câu 233. Một vườn có hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 40m$, $AD = 30m$. Người ta muốn buộc hai con dê ở hai góc vườn A, B để hai con dê ăn cỏ. Biết dây thừng cột dê ở A dài $15m$ và dây thừng cột dê ở B

dài $25m$. Diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn bằng bao nhiêu mét vuông? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).





Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 668

Diện tích cỏ hai con dê có thể ăn là dạng hai hình quạt có số đo cung cùng bằng 90°.

Dây thừng cột dê ở A dài $15m$ dây thừng cột dê ở B dài $25m$

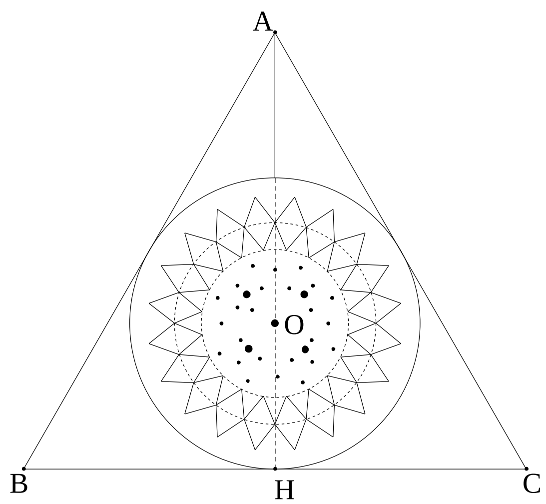
Suy ra $R_1 = 15\,m,\ R_2 = 25\,m$

Diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi R_1^2.90}{360} + \frac{\pi R_2^2.90}{360} = \frac{\pi.15^2.90}{360} + \frac{\pi.25^2.90}{360} = 212,5\pi \approx 668\left(m^2\right).$$

Vậy diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn là $668\left(m^2\right)$

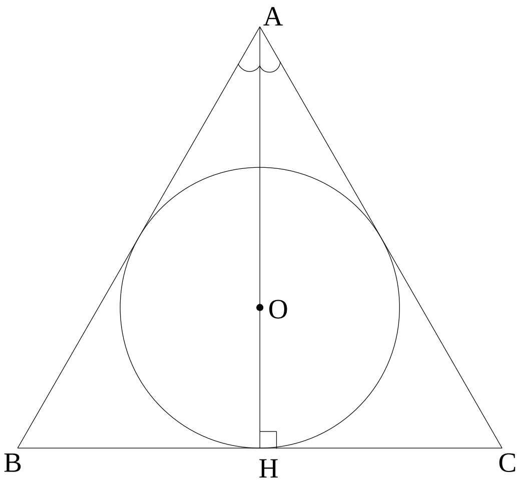
Câu 234. Đài phun nước ở Công viên Hồ Khánh Hội, TP HCM vừa khánh thành vào ngày 31/08/2019. Đài phun nước có dạng đường tròn (gọi là đường tròn tâm O) và được thiết kế theo hình dáng những cánh hoa đan xen nhau, bên dưới là hệ thống phun nước với nhiều độ cao khác nhau kết hợp với hệ thống chiếu sáng và âm nhạc cùng các mảng cây xanh tạo không gian đô thị vui tươi, sinh động. Bạn Minh Hiền vẽ tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (O) và tính được diện tích tam giác đều là $1300\,\text{m}^2$. Tính chu vi của đường tròn (O).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $99,4$



Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, suy ra O là giao điểm 3 đường phân giác.

Mà ΔABC đều nên AH là đường phân giác cũng là đường cao, đường trung tuyến., do đó O là trọng tâm ΔABC và $AH = 3.OH = 3.R$ và $\widehat{HAC} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = 30^0$; $BC = 2.HC$

Xét ΔHAC vuông tại H, ta có

$$HC = AH.\tan 30° = 3R.\frac{\sqrt{3}}{3} = R.\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = AH.HC = 3R.R\sqrt{3} = 3\sqrt{3}R^2$$

Do đó:

$$1300 = 3\sqrt{3}.R^2$$

$$R = \sqrt{\frac{1300}{3\sqrt{3}}}$$

Chu vi đường tròn (O) là $C = 2.\pi.R = 2.\pi.\sqrt{\dfrac{1300}{3\sqrt{3}}} \approx 99,4(m)$ (m)

Vậy chu vi đường tròn (O) là $99,4(m)$

Câu 235. Thầy Thanh muốn làm một cửa sổ dạng vòm (như hình vẽ) gồm phần hình chữ nhật phía dưới và nửa hình tròn phía trên. Phần hình chữ nhật có chiều dài của cạnh đứng là $1m$, chiều dài cạnh ngang là $1.2m$. Biết giá làm mỗi mét vuông cửa là 1.000000 đồng. Hãy tính số tiền mà thầy Thanh cần bỏ ra làm cửa sổ vòm nói trên (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của triệu đồng)

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $1,8$

Diện tích cửa phần hình chữ nhật là: $1.1,2 = 1,2(m^2)$

Diện tích cửa phần nửa hình tròn là: $\frac{1}{2}.\pi.0,6^2 = 0,18\pi(m^2)$

Tổng diện tích của cửa sổ là: $1,2 + 0,18\pi(m^2)$

Giá thành cửa sổ là: $1.000000.(1,2 + 0,18\pi) \approx 1,8$ (triệu đồng)

Câu 236. Máy kéo nông nghiệp có hai bánh sau to hơn hai bánh trước. Khi bơm căng, bánh xe sau có đường kính là $1,672m$ và bánh xe trước có đường kính là $0,88m$. Hỏi khi bánh xe sau lăn được 10 vòng thì bánh xe trước lăn được mấy vòng?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 19

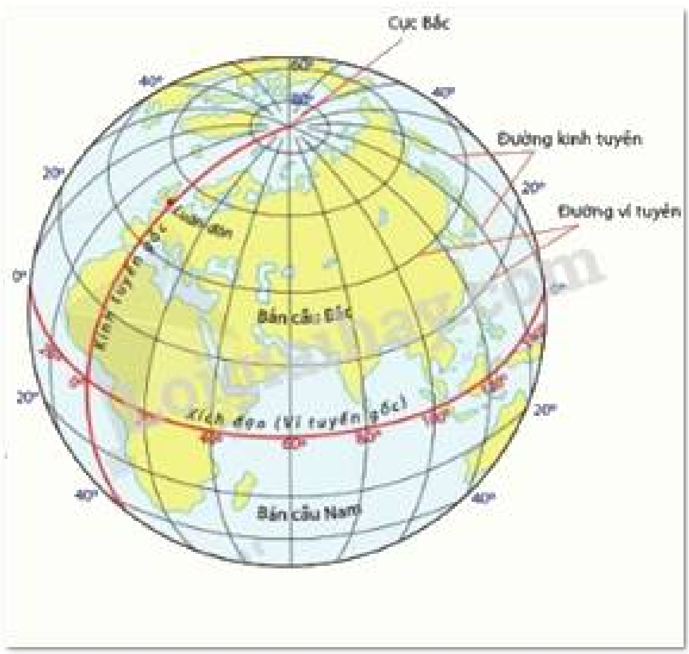
Chu vi bánh xe sau : $\pi \times 1,672(m)$

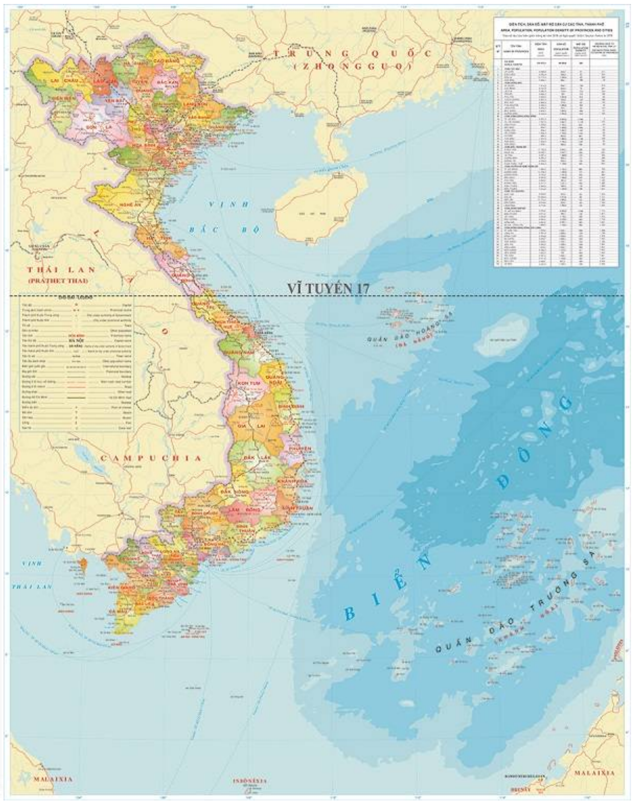
Chu vi bánh xe trước : $\pi \times 0,88(m)$

Khi bánh xe sau lăn được 10 vòng thì quãng đường đi được là $\pi \times 1,672 \times 10 = \pi \times 16,72(m)$

Khi đó số vòng lăn của bánh xe trước là $\dfrac{\pi \times 16,72}{\pi \times 0,88} = 19$ (vòng)

Câu 237. Hiệp định Genève 1954 về chấm dứt chiến tranh ở Đông Dương đã chọn vĩ tuyến $17°$ Bắc, dọc sông Bến Hải – tỉnh Quảng Trị làm khu vực phi quân sự, phân định giới tuyến Bắc – Nam tạm thời cho Việt Nam. Và dòng sông Bến Hải chạy dọc vĩ tuyến 17 này đã thành nơi chia cắt đất nước trong suốt hơn 20 năm chiến tranh Việt Nam. Tính độ dài cung kinh tuyến từ vĩ tuyến 17 đến xích đạo. Biết bán kính trái đất là 6400 km. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của kilômét)





Trả lời: ………………..

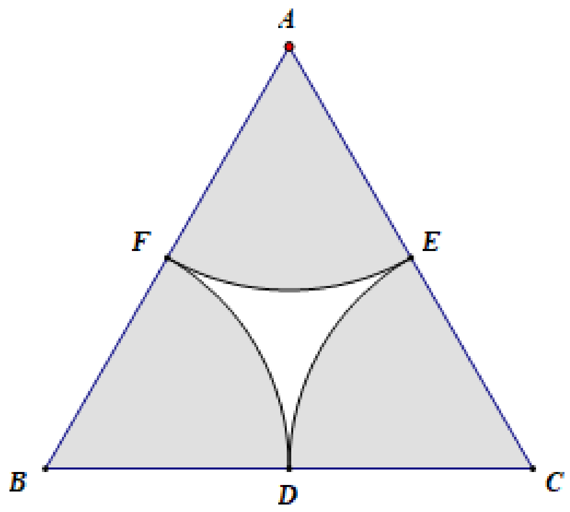
Lời giải

Đáp án: 1899

Độ dài của cung kinh tuyến từ vĩ tuyến 17 đến xích đạo là:

$$l = \frac{\pi Rn}{180} = \frac{\pi.6400.17}{180} = \frac{5440\pi}{9} \approx 1899\ (km)$$

Câu 238. Một tấm poster hình tam giác ABC đều có mỗi cạnh $50cm$. Ba cung tròn $DE,\ EF,\ FD$ thuộc ba đường tròn bán kính $25cm$ có tâm lần lượt là ba điểm $A,\ B,\ C$ (như hình vẽ). Tính diện tích phần còn lại (không tô màu) của tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimét vuông).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 101

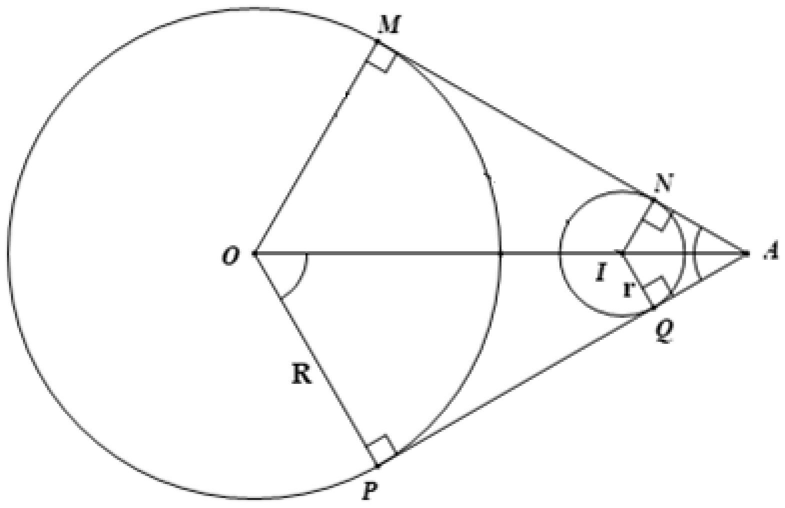
Tổng diện tích ba hình quạt tròn bằng diện tích nửa hình tròn bán kính $25cm$.

Diện tích 3 hình quạt tròn là $\left(\pi.25^2\right):2\left(cm^2\right)$

Diện tích tam giác đều ABC cạnh $50cm$ là $\left(50^2.\sqrt{3}\right):4\left(cm^2\right)$

Diện tích phần còn lại là: $\left(50^2.\sqrt{3}\right):4-\left(\pi.25^2\right):2\approx 101\left(cm^2\right)$.

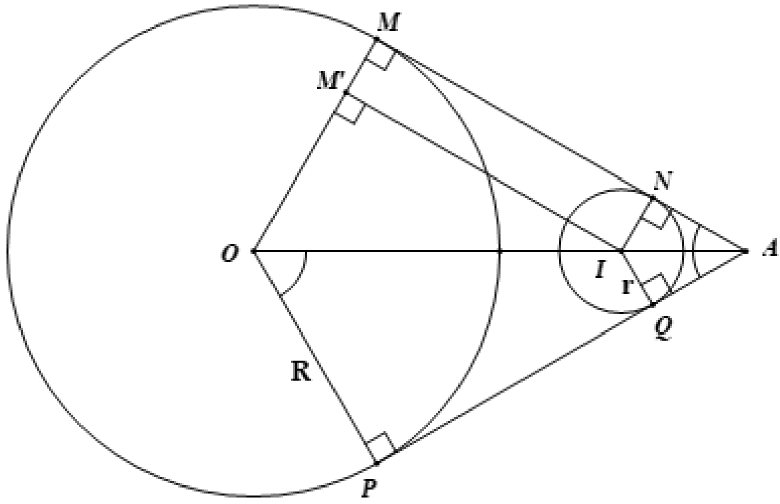
Câu 239. Hai ròng rọc có tâm O bán kính R và tâm I bán kính r. Hai tiếp tuyến chung MN và PQ cắt nhau tại A tạo thành góc $60°$ (như hình vẽ). Biết $r=20cm$ và $R=4r$, Tính độ dài dây cua – roa mắc qua hai ròng rọc trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimét).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 585



Gọi AM, AP là 2 tiếp tuyến chung của (O) và (I) suy ra OA là phân giác của $\widehat{MAP} \Rightarrow \widehat{MAO} = 60^\circ : 2 = 30^\circ$.

Ta có ΔAMO và ΔANI là tam giác nửa đều $\Rightarrow OI = 8r - 2r = 6r$.

Kẻ $IM' \perp OM$ suy ra tứ giác $MM'IN$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MN = M'I$.

Theo định lý Pythagore trong tam giác vuông $OM'I$:

$M'I = \sqrt{IM^2 - OM^2} = 3r\sqrt{3}$

Ta có $\widehat{NIQ} = 120^\circ = \widehat{MOP}$

Số đo cung lớn $\overset{\frown}{MP} = 240^\circ$.

Độ dài cung nhỏ $\overset{\frown}{NQ}$ là $l_1 = \dfrac{2\pi r}{3}$.

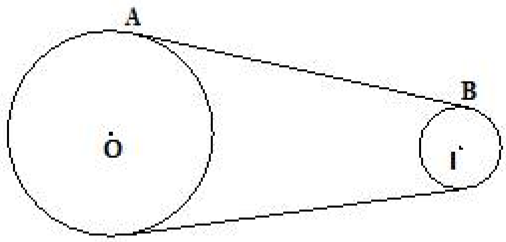
Độ dài cung lớn $\overset{\frown}{MP}$ là: $l_2 = \dfrac{16\pi r}{3}$.

Độ dài hai đoạn MN và PQ của ròng rọc : $2MN = 2.3r\sqrt{3} = 6r\sqrt{3}$.

Vậy độ dài của dây cua-roa là :

$2MN + l_1 + l_2 = 6r\sqrt{3} + \dfrac{2\pi r}{3} + \dfrac{16\pi r}{3} = 6r\left(\pi + \sqrt{3}\right) = 6.20\left(\pi + \sqrt{3}\right) \approx 585\,(cm)$.

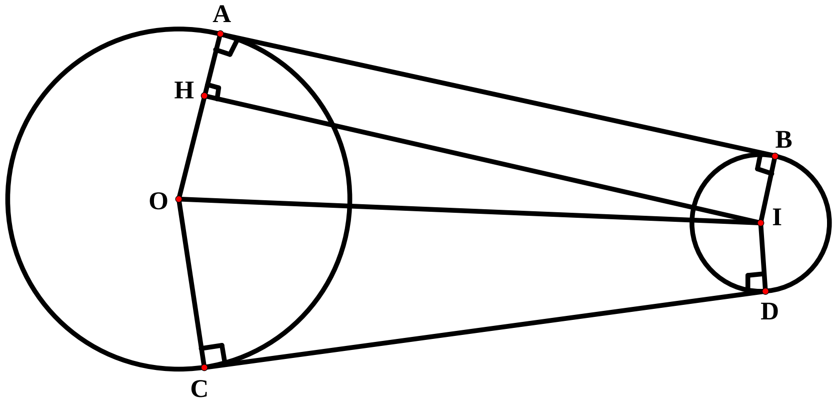
Câu 240. Một dây curoa bao quay 2 pu-ly như hình vẽ. Trong đó AB là tiếp tuyến chung của hai bánh xe. Gọi O và I lần lượt là tâm của pu-ly lớn và pu-ly nhỏ. Khoảng cách của hai tâm pu-ly là $60cm$. Bán kính của pu-ly lớn là $15cm$, bán kính pu-ly nhỏ là $7cm$ Tính chiều dài dây curoa (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimét)



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 190



Kẻ $IH \perp OA$ suy ra tứ giác $ABIH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AB = HI; AH = IB = 7cm$.

$$HI = \sqrt{OI^2 - OH^2} = \sqrt{OI^2 - (OA - AH)^2} = \sqrt{60^2 - (15-7)^2} = 4\sqrt{221}$$

$$\tan \widehat{HOI} = \frac{IH}{OH} = \frac{4\sqrt{221}}{8} \Rightarrow \widehat{HOI} = 82^0 20' \Rightarrow \widehat{AOI} = 82^0 20'$$

Mà $\widehat{AOC} = 2\widehat{AOI}$ nên $\widehat{AOC} = 2.82^0 20' = 164^0 40'$

Suy ra $\widehat{BOD} = 164^0 40'$

Độ dài cung lớn AC: $l_1 = 2\pi.15 - \dfrac{\pi.15.164^0 40'}{180^0} = \dfrac{293\pi}{18}$

Độ dài cung nhỏ BD: $l_2 = \dfrac{\pi.7.164^0 40'}{180^0} \approx 20{,}118$

Độ dài dây curoa:

$$l_1 + l_2 + 2.AB = \frac{293}{18}\pi + 20{,}118 + 2.4\sqrt{221} \approx 190\,(cm)$$

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

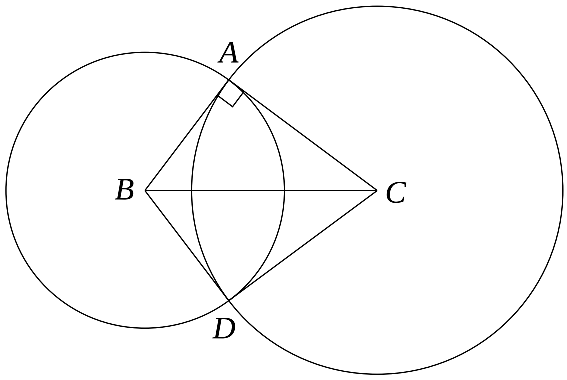
Câu 241. Cho ΔABC vuông tại A và $\widehat{ABC}=55^\circ$, vẽ đường tròn $(B;\ BA)$ và đường tròn $(C;\ CA)$ chúng cắt nhau tại D (D khác A).

a) Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn (B).

b) Tính số đo cung nhỏ AD của đường tròn $(C;CA)$.

c) Giả sử $BA=15cm$. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi cung nhỏ AD của đường tròn $(B;BA)$.

Lời giải



a) Xét hai tam giác ABC và DBC, ta có:

BC cạnh chung

$BA=BD$ (bán kính của đường tròn (B))

$CA=CD$ (bán kính của đường tròn (C))

Suy ra $\Delta ABC=\Delta DBC$ $(c-c-c)$

Do đó $\widehat{BDC}=\widehat{BAC}=90^0$ (hai góc tương ứng)

Nên DC là tiếp tuyến của (B).

b) Ta có:

$\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=90^\circ$ (2 góc phụ nhau)

$55^\circ+\widehat{ACB}=90^\circ$

$\widehat{ACB}=35^\circ$

Vì B là giao của hai tiếp tuyến tại A và D của đường tròn (C) nên BC là phân giác góc ACD hay

$\widehat{ACD}=2\widehat{ACB}=2.35^\circ=70^\circ$.

Do đó số đo cung nhỏ AD của đường tròn (C) là : $sđ\,\overset{\frown}{AD}=\widehat{ACD}=70^\circ$ (góc ở tâm bằng số đo cung bị chắn)

c) ta có $\widehat{ABC}=55^\circ$ nên $\widehat{ABD}=110^\circ$

Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung nhỏ AD của đường tròn $(B; BA)$ là:

$$S=\frac{n}{360}.\pi R^2=\frac{110}{360}.\pi .15^2=\frac{275\pi}{4}cm^2.$$

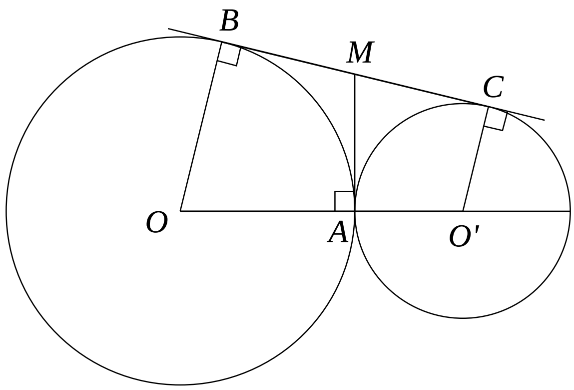
Câu 242. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A và cùng tiếp xúc với đường thẳng d tại B và C (khác A), trong đó $B\in(O)$ và $C\in(O')$. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC tại M.

a) Giả sử $\widehat{AMB}=100^\circ$. Tính số đo cung nhỏ AB.

b) Chứng minh rằng đường thẳng MA tiếp xúc với (O')

c) Chứng minh rằng ΔABC vuông.

Lời giải



a) Xét tứ giác $AMBO$ có:

$\widehat{AOB}+\widehat{OBM}+\widehat{OAM}+\widehat{AMB}=360^\circ$

$\widehat{AOB}+90^\circ+90^\circ+100^\circ=360^\circ$

$\widehat{AOB}=80^\circ$

Do đó số đo cung nhỏ AB là : $sđ\,\overset{\frown}{AB}=\widehat{AOB}=80^\circ$ (góc ở tâm bằng số đo cung bị chắn)

b) Vì MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A

Nên $MA\perp OA\Rightarrow MA\perp AO'$

Như vậy MA là một tiếp tuyến của đường tròn (O').

c) Vì d tiếp xúc với (O), (O') tại hai điểm B, C nên d là tiếp tuyến $\Rightarrow MB=MA=MC$

ΔABC có AM là trung tuyến mà $AM=\frac{BC}{2}$ nên ΔABC vuông tại A.

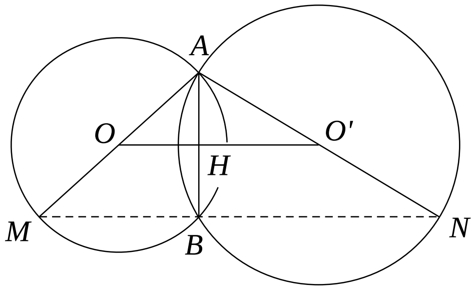
Câu 243. Cho hai đường tròn $(O;\ R)$ và $(O';\ r)$ cắt nhau tại A và B. Gọi M là điểm đối xứng với A qua O, N là điểm đối xứng với A qua O'.

a) Chứng minh rằng ba điểm M, B, N thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng OO' là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

c) Chứng minh rằng đường thẳng MN tiếp xúc với đường tròn đường kính AB.

Lời giải



a) Vì M đối xứng với A qua O nên AM là đường kính đường tròn $(O;\ R)$. Do đó $\widehat{ABM}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vì N đối xứng với A qua O' nên AN là đường kính đường tròn $(O';\ r)$. Do đó $\widehat{ABN}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Do $\widehat{MBN}=\widehat{ABM}+\widehat{ABN}=180^0$ nên ban điểm $M,\ B,\ N$ thẳng hàng.

b) Gọi H là giao điểm của OO' và AB.

Ta có OO' là đường trung bình tam giác AMN (Vì $OA=OM; O'A=O'N$)

Suy ra $OO'//MN$ và H là trung điểm AB

do đó $OO'\perp AB$ (Vì $MN\perp AB$) hay $OH\perp AB$

vậy OO' là trung trực của AB

c) Vì OO' là trung trực của AB và H là trung điểm AB

Khi đó HB là khoảng cách từ tâm H đến đường thẳng MN.

Vậy MN tiếp xúc với đường tròn đường kính AB.

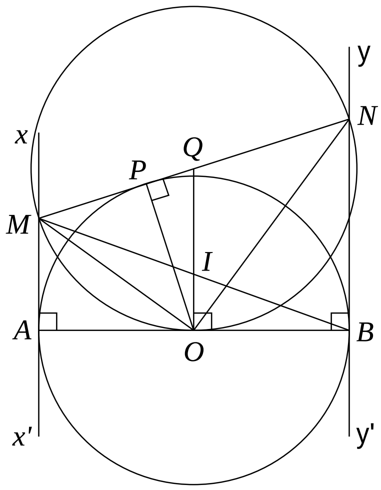
Câu 244. Cho đường tròn (O) đường kính AB, tiếp tuyến xx' tại A và tiếp tuyến yy' tại B của (O). Một tiếp tuyến thứ ba của (O) tại điểm P (P khác A và B) cắt xx' tại M và cắt yy' tại N.

a) Chứng minh rằng $MN=MA+NB$

b) Đường thẳng đi qua O và vuông góc với AB cắt MN tại Q. Chứng minh rằng Q là trung điểm của MN.

c) Chứng minh rằng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính MN.

Lời giải



a) Vì M là giao của hai tiếp tuyến tại A và P của đường tròn (O) nên $MA = MP$.

Vì M là giao của hai tiếp tuyến tại A và P của đường tròn (O) nên $NP = NB$.

Ta có: $MN = MP + PN = MA + NB$

b) Gọi MB cắt OQ tại I.

Ta có $MA \,//\, QO \,//\, BN$ (vì MA, QO, NB cùng vuông góc với AB)

• Xét tam giác AMB, ta có:

$MA \,//\, OI$ (vì $MA \,//\, QO$)

O trung điểm AB

Suy ra là OI đường trung bình tam giác AMB

Do đó I là trung điểm MB

• Xét tam giác MNB, ta có:

$NB \,//\, QI$ (vì $NB \,//\, QO$)

I là trung điểm MB

Suy ra là QI đường trung bình tam giác MNB

Do đó Q là trung điểm MN

c) Vì M là giao của hai tiếp tuyến tại A và P của đường tròn (O) nên $\widehat{AOM} = \widehat{POM}$.

Vì M là giao của hai tiếp tuyến tại A và P của đường tròn (O) nên $\widehat{BON} = \widehat{QON}$.

Ta có:

$\widehat{AOM} + \widehat{POM} + \widehat{BON} + \widehat{QON} = 180^o$

$2\widehat{POM} + 2\widehat{QON} = 180^o$

$\widehat{POM} + \widehat{QON} = 90^o$

$\widehat{MON} = 90^o$

Tam giác MON vuông tại O và có OQ là đường trung tuyến nên $QO = QM = QN$

Do đó QO là bán kính đường tròn $(Q;\ QM)$

Và QO là khoảng cách từ tâm Q đến AB

Vậy AB tiếp xúc với đường tròn đường kính MN.

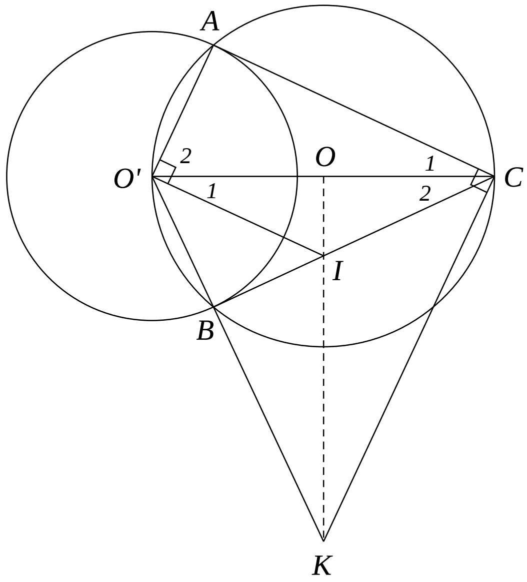
Câu 245. Cho đường tròn (O) và đường tròn (O') cắt nhau tại A và B. Trong đó O' nằm trên đường tròn (O). Kẻ đường kính $O'OC$ của đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng $CA,\ CB$ là hai tiếp tuyến của (O').

b) Giả sử $\widehat{AO'C} = 50^o$ và $OA = 10cm$, tính diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung AB của đường tròn (O').

c) Đường vuông góc với AO' tại O' cắt CB tại I, đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng $O'B$ tại K. Chứng minh rằng O, I, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{O'AC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) nên $CA \perp AO'$, do đó CA là tiếp tuyến của đường tròn (O')

Ta có $\widehat{O'BC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) nên $CB \perp AO'$, do đó CB là tiếp tuyến của đường tròn (O')

b) Vì C là giao của hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O') nên $O'C$ là phân giác $\widehat{AO'B}$. Do đó $\widehat{AO'B} = 2\widehat{AO'C} = 2.50^\circ = 100^\circ$

Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung AB là: $S = \dfrac{n}{360}.\pi R^2 = \dfrac{100}{360}.\pi.10^2 = \dfrac{250\pi}{9}\left(cm^2\right)$.

c) Ta có $O'I \mathbin{//} AC$ ($O'I$, AC cùng vuông góc $O'A$)

suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{O'_1}$

mà $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ nên $\widehat{O'_1} = \widehat{C_2}$

Hay $\Delta IO'C$ cân tại $I \Rightarrow I$ nằm trên đường trung trực của $O'C$

Ta lại có $O'A \mathbin{//} KC$ ($O'A, KC$ cùng vuông góc AC)

suy ra $\widehat{O'_2} = \widehat{O'CK}$

mà $\widehat{O'_2} = \widehat{BO'C}$ nên $\widehat{O'CK} = \widehat{BO'C}$

Hay $\Delta KO'C$ cân tại $K \Rightarrow K$ nằm trên đường trung trực của $O'C$ và O là trung điểm của $O'C$

Vậy O, I, K thẳng hàng.

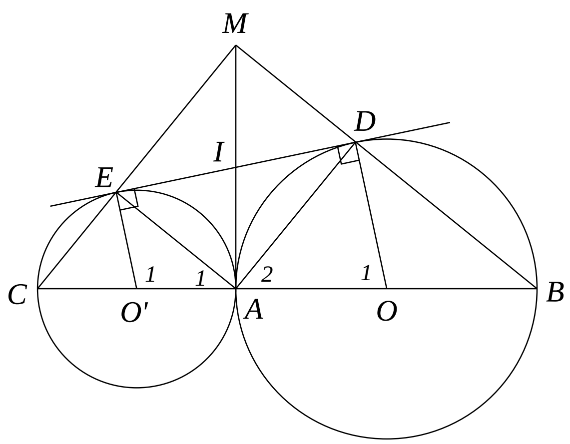
Câu 246. Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ các đường kính AOB và $AO'C$. Đường thẳng DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn với $D \in (O)$ và $E \in (O')$. Gọi M là giao điểm của BD và CE.

a) Chứng minh tam giác ADE vuông.

b) Tứ giác $ADME$ là hình gì?

c) Chứng minh MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Lời giải



a) Ta có $O'E \parallel OD$ ($O'E, OD$ cùng vuông góc ED)

suy ra $\widehat{O'_1} + \widehat{O_1} = 180^0$ (trong cùng phía)

Tam giác $AO'E$ cân tại O' nên $\widehat{A_1} = \dfrac{180^0 - \widehat{O'_1}}{2}$

Và tam giác AOD cân tại O nên $\widehat{A_2} = \dfrac{180^0 - \widehat{O_1}}{2}$

Khi đó $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^0$ hay $\widehat{DAE} = 90^0$ suy ra tam giác ADE vuông tại A.

b) Ta có $\widehat{AEC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O')) nên $\widehat{AEM} = 90^0$ (hai góc kề bù)

Tương tự $\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) nên $\widehat{ADM} = 90^0$ (hai góc kề bù)

$\widehat{DAE} = 90^0$ (câu a)

Do đó tứ giác $ADME$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

c) Hình chữ nhật $ADME$ có hai đường chéo MA và DE cắt nhau tại $I \Rightarrow IA = ID = IM = IE$

Ta có $\widehat{IAO'} = \widehat{IAE} + \widehat{A_1} = \widehat{IEA} + \widehat{AEO} = \widehat{IEO'} = 90^0$ nên MA là tiếp tuyến của (O') và (O)

Câu 247. Cho đường tròn $(O;\ R)$ đường kính AB. Trên OA lấy điểm E. Gọi I là trung điểm của AE, qua điểm I vẽ dây cung $CD \perp AB$, vẽ đường tròn (O') đường kính EB cắt BC tại F.

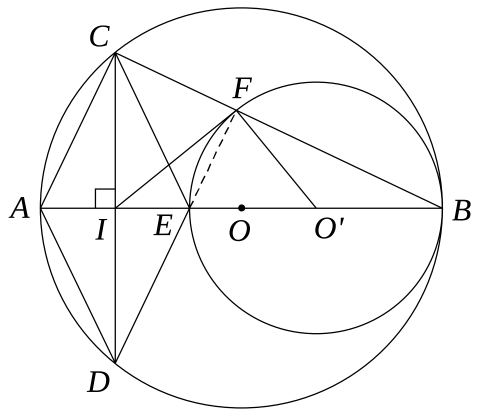
a) Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc tại B.

b) Tứ giác $ACED$ là hình gì?

c) Chứng minh ba điểm $D,\ E,\ F$ thẳng hàng.

d) Chứng minh IF là tiếp tuyến của (O')

Lời giải



a) Ta có $OO' = OB - O'B$ nên (O) và (O') tiếp xúc tại B.

b) Ta có AO là trung trực của CD nên $EC = ED,\ AC = AD$

ΔCAE có CI vừa là đường cao vừa là trung tuyến $\Rightarrow \Delta CAE$ cân tại $C \Rightarrow CA = CE$

Khi đó $CA = CE = DE = DA$.

Vậy $ACED$ là hình thoi.

c) Ta có ΔABC vuông tại C nên $AC \perp BC$ và $EF \perp BC$

Mà $DE // AC \Rightarrow DE \perp BC$.

Vậy $D,\ E,\ F$ thẳng hàng.

d) ΔCFD vuông tại F có FI là trung tuyến nên $IF = ID \Rightarrow \widehat{IDF} = \widehat{IFD}$.

$\Delta O'EF$ cân tại $O' \Rightarrow \widehat{O'FE} = \widehat{O'EF}$. Khi đó $\widehat{IFO'} = \widehat{IFE} + \widehat{EFO'} = \widehat{IDE} + \widehat{FEO'} = 90^0$

Vậy IF là tiếp tuyến của (O').

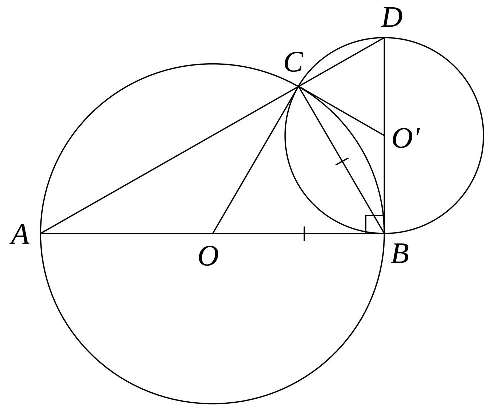
Câu 248. Cho đường tròn $(O;\ R)$ đường kính AB. Trên đường tròn này lấy điểm C sao cho $BC = R$. Từ B vẽ tiếp tuyến với đường tròn, tiếp tuyến này cắt đường thẳng AC tại D.

a) Tính $AC,\ BD$ theo R.

b) Vẽ đường tròn (O') đường kính BD. Chứng minh $O'C$ là tiếp tuyến của (O).

c) Giả sử $R = 5cm$. Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ BC và dây BC của đường tròn $(O;\ R)$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimet vuông).

Lời giải



a) ΔABC có CO là trung tuyến mà $CO = \dfrac{AB}{2}$ nên ΔABC vuông tại C.

Ta có $OA = OB = BC = R$ nên ΔBOC đều $\Rightarrow \widehat{ABC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{CAB} = 30^0$

Khi đó $AC = AB.\sin\widehat{ABC} = 2R.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

Ta có $\widehat{CBD} = \widehat{ABD} - \widehat{ABC} = 90^0 - 60^0 = 30^0$

Khi đó $\cos\widehat{CBD} = \dfrac{BC}{BD} \Rightarrow BD = \dfrac{BC}{\cos\widehat{CBD}} = \dfrac{R}{\cos 30^0} = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

b) Ta có $\widehat{BCD} = 90^0$ (câu a) nên C thuộc đường tròn (O') đường kính BD, do đó $O'C = O'B = O'D$

Xét $\Delta COO'$ và $\Delta BOO'$, có:

$O'C = O'B$

$OC = OB = R$

OO' cạnh chung

Suy ra $\Delta COO' = \Delta BOO'(c-c-c)$ nên $\widehat{OCO'} = \widehat{OBO'} = 90^0$

Do đó $O'C$ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) Ta có $OA = OB = BC = R$ nên ΔBOC đều $\Rightarrow \widehat{BOC} = 60^0$

Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung BC là: $S_1 = \dfrac{n}{360}.\pi R^2 = \dfrac{60}{360}.\pi.5^2 = \dfrac{25\pi}{6}cm^2$.

Diện tích ΔBOC đều cạnh R là $S_{\Delta BOC} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}cm^2$

Diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ BC và dây BC là

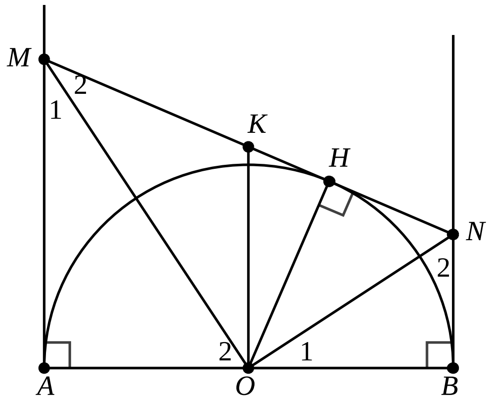
$S_2 = S_1 - S_{\Delta BOC} = \dfrac{25\pi}{6} - \dfrac{25\sqrt{3}}{4} \approx 2,3\,cm^2$.

Câu 249. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Vẽ các tia tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn. Lấy điểm M di động trên Ax, điểm N di động trên tia Oy sao cho $AM.BN = R^2$.

a) Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN luôn tiếp xúc với đường thẳng AB.

Lời giải



a) Vẽ $OH \perp MN, H \in MN$.

Vì $AM.BN = R^2 = AO.BO$ nên $\dfrac{AM}{BO} = \dfrac{AO}{BN}$.

Xét ΔAOM và ΔBNO có: $\widehat{MAO} = \widehat{NBO} = 90°$; $\dfrac{AM}{BO} = \dfrac{AO}{BN}$ nên $\Delta AOM \backsim \Delta BNO$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{O_1}; \widehat{O_2} = \widehat{N_2}$.

Do đó $\widehat{MON} = 90°$

Ta có: $\dfrac{AM}{BO} = \dfrac{OM}{ON}$ suy ra $\dfrac{AM}{OM} = \dfrac{OA}{ON}$ và $\widehat{MAO} = \widehat{MON} = 90°$ nên $\Delta AOM \backsim \Delta ONM$ (c.g.c) suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$

$\Delta AOM = \Delta HOM$ (cạnh huyền, góc nhọn) suy ra $AO = OH$, hay $OH = R$

do đó MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Gọi K là trung điểm của MN.

Tam giác MON vuông tại O có OK là đường trung tuyến suy ra $KM = KN = KO$ và $\widehat{MOK} = \widehat{M_2}$

Đường tròn $(K; KO)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN.

Ta có $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (chứng minh trên)

lại có $\widehat{M_1} + \widehat{O_2} = 90°$; $\widehat{MOK} = \widehat{M_2}$ nên $\widehat{MOK} + \widehat{O_2} = 90°$ hay $KO \perp AB$.

Suy ra OK là tiếp tuyến của đường tròn (K).

Vậy đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác OMN luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định là đường thẳng AB.

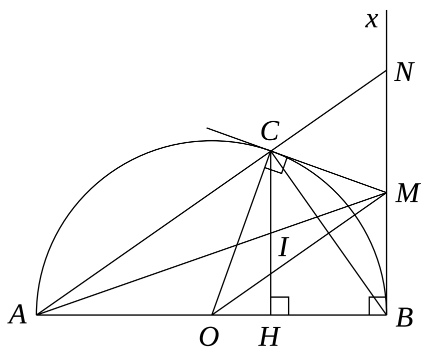
Câu 250. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, tiếp tuyến Bx. Qua điểm C trên nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Bx tại M. Tia AC cắt Bx tại N.

a) Chứng minh rằng $OM \perp BC$.

b) Chứng minh M là trung điểm của BN

c) Kẻ CH vuông góc với AB, AM cắt CH tại I. Chứng minh I là trung điểm của CH.

Lời giải



a) Vì M là giao của hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) nên OM là phân giác $\widehat{BOC}$

Tam giác BOC cân tại O ($OB = OC$ bán kính) và OM là phân giác $\widehat{BOC}$ nên OM là đường trung trực của đoạn thẳng BC

b) Ta có OM // AN (cùng $\perp BC$)

ΔABN có:

$OA = OB$

OM // AN

Nên OM là đường trung bình của ΔABN hay M là trung điểm BN

c) Ta có CH // BN (cùng $\perp AB$), theo định lí Thalès ta có:

$$\frac{IH}{BM} = \frac{AI}{AM} = \frac{CI}{MN}$$

mà $MN = BM$

nên $IH = CI$ hay I là trung điểm của CH.

Câu 251. Cho nửa đường tròn $(O;\ R)$, đường kính AB. Vẽ hai tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn đó. Trên tia Ax lấy điểm M sao cho $AM > R$. Từ điểm M kẻ tiếp tuyến MC với (O) (C là tiếp điểm). Tia MC cắt By tại D.

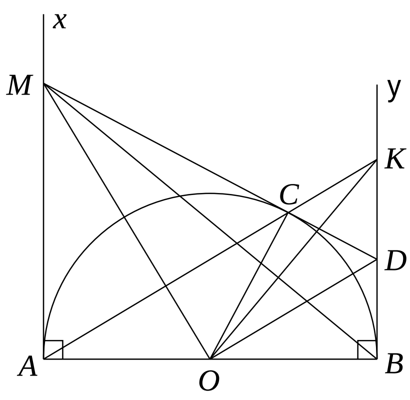
a) Chứng minh $MD = MA + BD$

b) Chứng minh ΔMOD vuông.

c) Cho $AM = 2R = 10cm$. Tính BD và chu vi tứ giác $ABDM$.

d) Tia AC cắt tia By tại K. Chứng minh $OK \perp BM$.

Lời giải



a) Vì M là giao của hai tiếp tuyến tại A và C của đường tròn (O) nên $MC = MA$

và D là giao của hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) nên $DC = DB$

Do đó $MD = MC + CD = MA + BD$

b) Vì M là giao của hai tiếp tuyến tại A và C của đường tròn (O) nên OM là phân giác $\widehat{AOC}$ hay $\widehat{AOM} = \widehat{COM}$

và D là giao của hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) nên OD là phân giác $\widehat{BOC}$ hay $\widehat{COD} = \widehat{BOD}$

Ta có:

$$\widehat{AOM} + \widehat{COM} + \widehat{COD} + \widehat{BOD} = 180^0$$
$$2\left(\widehat{MOC} + \widehat{COD}\right) = 180^0$$
$$2\widehat{MOD} = 180^0$$
$$\widehat{MOD} = 90^0$$

c) $AM = 2R = 10cm$, suy ra $R = 5cm$

Ta có $\widehat{MOD} = 90^0$ nên $\widehat{AOM} + \widehat{BOD} = 90^0$

mà $\widehat{AOM} + \widehat{AMO} = 90^0$ (tam giác OAM vuông tại A)

Do đó $\widehat{AMO} = \widehat{BOD}$

Xét ΔMAO và ΔOBD, có:

$\widehat{AMO} = \widehat{BOD}$

$\widehat{MAO} = \widehat{DBO} = 90^0$

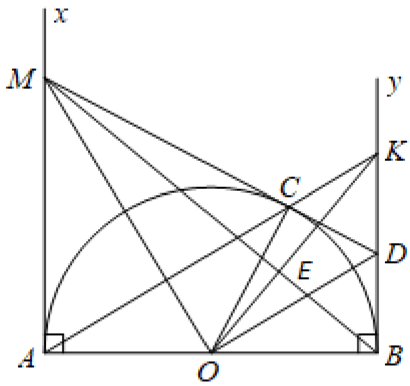
Suy ra $\Delta MAO \backsim \Delta OBD$ $(g-g)$

Do đó $\dfrac{MA}{OB} = \dfrac{AO}{BD}$

Hay $BD = \dfrac{OA.OB}{AM} = \dfrac{R^2}{2R} = \dfrac{R}{2}$

Khi đó chu vi của tứ giác $ABDM$ là $AB + BD + DM + AM = 2R + \dfrac{R}{2} + \left(\dfrac{R}{2} + 2R + 2R\right) = 7R = 7.5 = 35cm$

c)



Gọi $E = BM \cap OK$

Từ $\Delta MAO \backsim \Delta OBD$.

Suy ra $\frac{MA}{OB} = \frac{AO}{BD} = \frac{2AO}{2BD} = \frac{AB}{BK}$

Do đó $\Delta MAB \backsim \Delta OBK$ $(c-g-c)$

Nên $\widehat{ABM} = \widehat{BKO}$

Ta có $\widehat{ABM} + \widehat{MBK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BKO} + \widehat{MBK} = 90^0$

Xét tam giác BEK có $\widehat{BKO} + \widehat{MBK} = 90^0$ nên $\widehat{BEK} = 90^0$ hay $BM \perp OK$

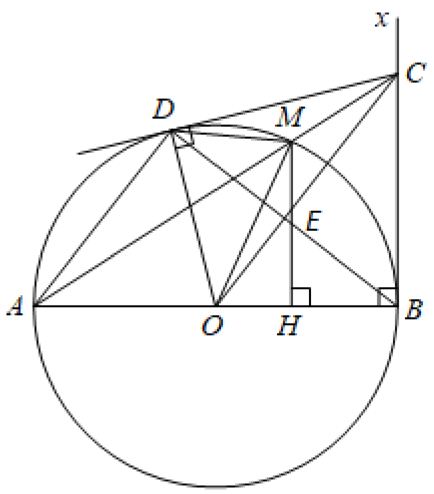
Câu 252. Cho đường tròn $(O;\ R)$ đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Bx của (O). Lấy điểm $M \in (O)$ (M khác A và B) sao cho AM cắt tiếp tuyến Bx tại C và $MA > MB$. Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD với (O) (với D là tiếp điểm).

a) Chứng minh $OC \perp BD$

b) Giả sử $\widehat{OBD} = 30^0$ và $R = 4cm$. Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ BD và dây BD.

c) Kẻ MH vuông góc với AB tại H. Tìm vị trí của M để chu vi ΔOMH đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Vì C là giao của hai tiếp tuyến tại B và D của đường tròn (O) nên OC là phân giác $\widehat{BOD}$

Ta lại có tam giác BOD cân tại O (vì $OB = OD = R$)

Do đó OC là trung trực của BD, suy ra $OC \perp BD$

b) Gọi $E = OC \cap BD$, khi đó $OE \perp BD$ hay ΔOED vuông tại E

$OE = OB.\sin 30^0 = 4.\frac{1}{2} = 2cm$

$BE = OB.\cos 30^0 = 4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}cm$

$BD = 2EB = 4\sqrt{3}cm$

Diện tích ΔBOD là $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}OE.BD = \frac{1}{2}.2.4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}cm^2$

Diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung nhỏ BD là: $S_1 = \frac{n}{360}.\pi R^2 = \frac{120}{360}.\pi.4^2 = \frac{16\pi}{3}cm^2$.

Diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ BD và dây BD là

$S_2 = S_1 - S_{\Delta AOB} = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3} = \frac{16\pi - 12\sqrt{3}}{3}cm^2$.

c) Chu vi $\Delta OMH = OM + MH + OH = R + MH + OH$

Ta có $(MH+OH)^2 \le 2(MH^2+OH^2) \Rightarrow (MH+OH)^2 \le 2.OM^2$

$\Rightarrow MH + OH \le R\sqrt{2}$

Khi đó chu vi $\Delta OMH \le R + R\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})R$

Dấu "=" xảy ra khi $MH = OH$ hay $\widehat{MOH} = 45^0$

$\Rightarrow M$ nằm chính giữa cung AB.

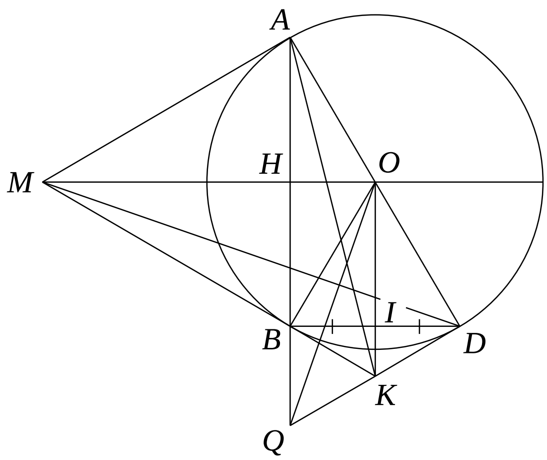
Câu 253. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O;\ R)$. Gọi MA, MB là hai tiếp tuyến với đường tròn (O) (A và B là hai tiếp điểm). Kẻ đường kính AD của (O). Gọi H là giao điểm của OM và AB, I là trung điểm của BD.

a) Chứng minh $OHBI$ là hình chữ nhật.

b) Cho biết OI cắt MB tại K. Chứng minh KD là tiếp tuyến (O).

c) Đường thẳng qua O và vuông góc với MD cắt tia AB tại Q. Chứng minh K là trung điểm của DQ.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{ABD}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đườn tròn) (1)

ΔOBD cân tại O (vì $OB=OD=R$) và OI là đường trung tuyến nên OI là đường trung trực hay $OI\perp BD$, suy ra $\widehat{OIB}=90^0$ (2)

Vì M là giao của hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) nên $MA=MB$ và MO là phân giác $\widehat{AMB}$, do đó $OM\perp AB$ hay $MH\perp AB$, suy ra $\widehat{OHB}=90^0$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $OHBI$ là hình chữ nhật.

b) Xét ΔOBK và ΔODK, có:

OK cạnh chung

$OB=OD$ (vì $OB=OD=R$)

$\widehat{KOB}=\widehat{KOD}$ (OK là phân giác $\widehat{BOD}$)

Suy ra $\Delta OBK=\Delta ODK$ $(c-g-c)$

Do đó $\widehat{ODK}=\widehat{OBK}=90^0$

Vậy KD là tiếp tuyến của (O)

c) Chỉ ra $\Delta KDO\backsim\Delta KOM$ $(g-g)\Rightarrow\dfrac{KD}{KO}=\dfrac{DO}{MO}$ (1)

Gọi AB cắt DK tại Q'. Chứng minh $OK//AQ'\Rightarrow DK=KQ'$ thay vào (1) ta được $\dfrac{KQ'}{KO}=\dfrac{DO}{OM}$

Chứng minh $\widehat{OKQ'}=\widehat{DOK}+\widehat{ODK}$ (góc ngoài tam giác) $=\widehat{DOK}+90^0=\widehat{DOK}+\widehat{KOM}=\widehat{DOM}$

$\Rightarrow\Delta OKQ'\backsim\Delta MOD$ $(c-g-c)\Rightarrow\widehat{KOQ'}=\widehat{OMD}\Rightarrow\widehat{KOQ'}+\widehat{Q'OM}=\widehat{OMD}+\widehat{Q'OM}=90^0$

$\Rightarrow Q$ trùng $Q'\Rightarrow K$ là trung điểm của DQ

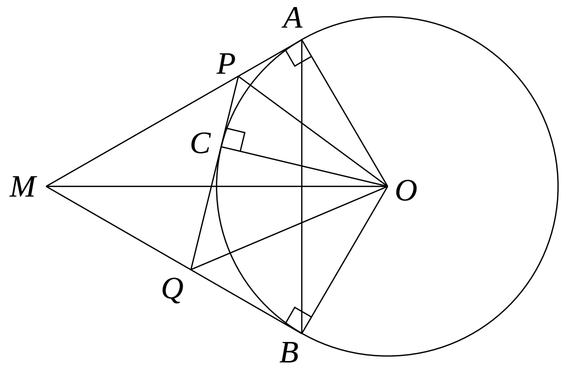
Câu 254. Cho đường tròn $(O;\ 3cm)$ và điểm M nằm bên ngoài đường tròn. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là hai tiếp điểm) sao cho $\widehat{AMB}=60^0$.

a) ΔAMB là tam giác gì?

b) Qua điểm C trên cung nhỏ AB, kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt $MA,\ MB$ lần lượt tại P và Q. Tính $\widehat{POQ}$.

c) Tính chu vi ΔMPQ.

Lời giải



a) Vì M là giao của hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) nên $MA = MB$, suy ra ΔMAB cân tại M

Ta lại có $\widehat{AMB} = 60^0$

Do đó ΔAMB đều.

b) Xét tứ giác $OAMB$, ta có:

$\widehat{AOB} + \widehat{AMB} + \widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 360^0$

$\widehat{AOB} + 60^0 + 90^0 + 90^0 = 360^0$

$\widehat{AOB} = 120^0$

Vì P là giao của hai tiếp tuyến tại A và C của đường tròn (O) nên OP là phân giác $\widehat{AOC}$, do đó $\widehat{AOP} = \widehat{COP}$.

Ta lại có Q là giao của hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) nên OQ là phân giác $\widehat{BOC}$, do đó $\widehat{BOQ} = \widehat{COQ}$.

$\widehat{AOP} + \widehat{COP} + \widehat{BOQ} + \widehat{COQ} = \widehat{AOB}$

$2\widehat{COP} + 2\widehat{COQ} = 120^0$

$2\widehat{POQ} = 120^0$

$\widehat{POQ} = 60^0$

c) Vì P là giao của hai tiếp tuyến tại A và C của đường tròn (O) nên $PC = PA$

Ta lại có Q là giao của hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) nên $QC = QB$

Ta có $MA = AO.\tan\widehat{AOM} = 3.\tan 60^0 = 3\sqrt{3}\,cm$

Chu vi ΔMPQ bằng $MP + MQ + PQ = MP + MQ + (PC + QC) = MA + MB = 2MA = 6\sqrt{3}\,cm$

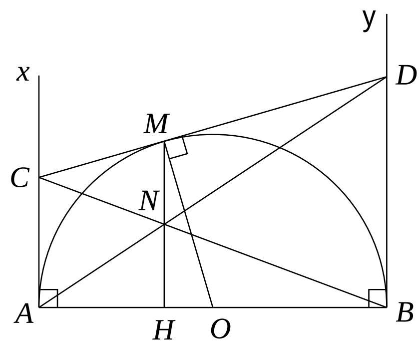
Câu 255. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, về cùng một phía vẽ các tiếp tuyến $Ax,\ By$. Qua điểm M trên nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax và By lần lượt tại C và D. Gọi N là giao điểm của AD và BC, H là giao điểm của MN và AB.

a) Chứng minh $CD = AC + BD$.

a) Chứng minh $MN \perp AB$.

b) Chứng minh $MN = NH$.

Lời giải



a) Ta có C là giao của hai tiếp tuyến tại A và M của đường tròn (O) nên $CA = CM$

Ta lại có D là giao của hai tiếp tuyến tại B và M của đường tròn (O) nên $DM = DB$

Do đó $CD = MC + MD = AC + BD$

b) Ta có $CA = CM$, $DM = DB$

Vì $AC // BD$ (cùng vuông góc với AB)

Nên $\dfrac{CN}{NB} = \dfrac{CA}{BD} = \dfrac{CM}{DM}$

Do đó $MN // BD$ (Định lí thalès đảo)

Suy ra $MN \perp AB$.

c) Theo Định lí thalès, ta có: $\dfrac{MN}{BD} = \dfrac{CN}{CB}$ và $\dfrac{NH}{BD} = \dfrac{AN}{AD}$

mà $\dfrac{CN}{CB} = \dfrac{AN}{AD}$

Suy ra $\dfrac{MN}{BD} = \dfrac{NH}{BD}$

Nên $MN = NH$

Câu 256. Cho đường tròn $(O;\ R)$, đường kính AB. Qua A và B vẽ lần lượt hai tiếp tuyến (d) và (d') với đường tròn (O). Một đường thẳng đi qua O cắt (d) ở M và cắt (d') ở P. Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với MP và cắt (d') tại N. Kẻ $OI \perp MN$ tại I.

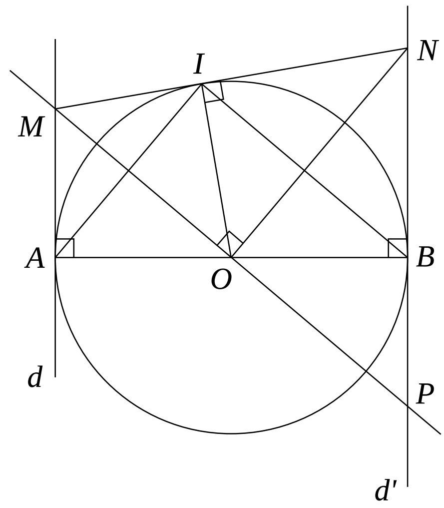
a) Chứng minh $OM = OP$ và ΔNMP cân.

b) Chứng minh ΔNMP cân.

c) Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $AMNB$ nhỏ nhất.

Lời giải



a) Xét ΔOAM và ΔOBP, ta có:

$\widehat{OAM} = \widehat{OBP} = 90^0$ (vì MA và MB là tiếp tuyến của đường tròn (O))

$\widehat{AOM} = \widehat{BOP}$ (đối đỉnh)

Do đó $\Delta OAM = \Delta OBP\ (g-c-g)$

Suy ra $OM = OP$

b) Ta có: $OM = OP$ nên NO là trung tuyến

$NO \perp MP$ (giả thiết)

Do đó ΔNMP có NO vừa là đường cao vừa là trung tuyến

Nên ΔNMP cân tại N

c) ΔNMP cân tại N và có NO vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên NO là tia phân giác $\widehat{MNP}$ hay $\widehat{ONI} = \widehat{ONB}$

Xét ΔONI và ΔONB, ta có:

$\widehat{OIN} = \widehat{OBN} = 90^0$ (giả thiết)

$\widehat{ONI} = \widehat{ONB}$

Do đó $\Delta ONI = \Delta ONB$ *(cạnh huyền – góc nhọn)*

Suy ra $OI = OB = R$

Khi đó MN là tiếp tuyến của đường tròn (O)

d) Tứ giác $AMNB$ là hình thang nên có diện tích là

$$S = \frac{1}{2}(AM + BN).AB = \frac{(MI + IN)AB}{2} = \frac{MN.2R}{2} = R.MN$$

Để S nhỏ nhất thì MN nhỏ nhất hay $MN \perp AM \Rightarrow MN = AB$. Khi đó $AMNB$ là hình chữ nhật

Lại có $AM + BN = MN = AB = 2R \Rightarrow 2AM = 2R \Rightarrow AM = R$

Vậy M nằm trên đường thẳng (d) sao cho $AM = R$.

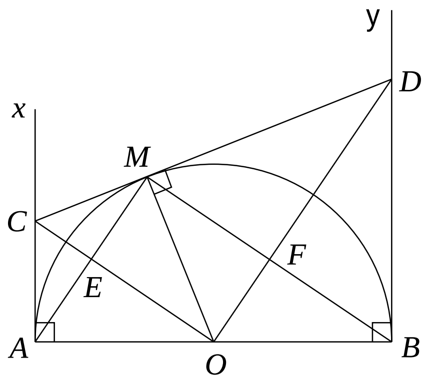
Câu 257. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Vẽ hai tiếp tuyến Ax và By về cùng phía với nửa đường tròn. Từ điểm M tùy ý thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) vẽ tiếp tuyến tại M cắt Ax và By lần lượt tại C và D. Gọi E là giao điểm của CO và AM, F là giao điểm của DO và BM.

a) Chứng minh $\widehat{CMA}$ và $\widehat{CMA}$ là hai góc phụ nhau.

b) Chứng minh tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật.

c) Chứng minh $AC.BD$ không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

mà $\widehat{CMA} + \widehat{AMB} + \widehat{BMD} = 180^0$

$\widehat{CMA} + 90^0 + \widehat{BMD} = 180^0$

$\widehat{CMA} + \widehat{BMD} = 90^0$

b) $\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Chứng minh $OE \perp AM \Rightarrow \widehat{MEO} = 90^0$

Chứng minh $OF \perp BM \Rightarrow \widehat{MFO} = 90^0$

và $AM \perp BM$

Suy ra tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật.

c) tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật nên $\widehat{EMF} = 90^0$ hay $\widehat{CMD} = 90^0$

Xét ΔOMC và ΔDMO, ta có

$\widehat{OMC} = \widehat{DMO} = 90^0$

$\widehat{MCO} = \widehat{MOD}$ (cùng phụ $\widehat{COM}$)

do đó $\Delta OMC \backsim \Delta DMO \ (g-g)$

$\dfrac{OM}{DM} = \dfrac{CM}{OM} \Rightarrow OM^2 = DM.CM = DB.AC = R^2$

Câu 258. Cho đường tròn $(O;\ 4\,cm)$ đường kính AB. Lấy điểm H thuộc OA sao cho $OH = 1\,cm$. Kẻ dây cung DC vuông góc với AB tại H. Tiếp tuyến tại A của đường (O) cắt BC tại E.

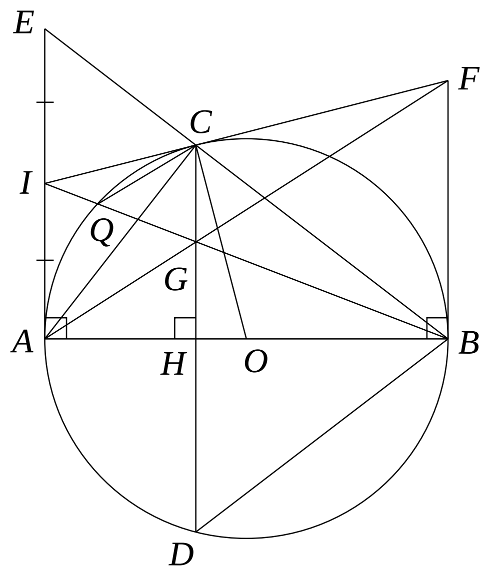
b) Chứng minh ΔABC vuông và ΔCBD cân .

a) Chứng minh $\dfrac{EC}{DH}=\dfrac{EA}{DB}$.

c) Gọi I là trung điểm của EA, IB cắt (O) tại Q. Chứng minh CI là tiếp tuyến của (O)

d) Tiếp tuyến tại B của (O) cắt IC tại F. Chứng minh ba đường thẳng $IB,\ HC$ và AF đồng quy.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ACB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên ΔABC vuông tại C.

Tam giác COD cân tại O ($OC=OD=R$) và $DC\perp OH$ nên OH là trung trực của DC suy ra BH là trung trực của CD, do đó $BC=BD$ nên ΔBCD cân tại B.

b) Ta có $\widehat{HBD}=\widehat{HBC}$ (BH là đường trung trực của tam giác cân ΔBCD)

mà $\widehat{HBC}=\widehat{EAC}$ (cùng phụ $\widehat{CAB}$)

nên $\widehat{HBD}=\widehat{EAC}$

xét ΔACE và ΔBHD, có:

$\widehat{HBD}=\widehat{EAC}$

$\widehat{ACE}=\widehat{BHD}=90^0$

nên $\Delta ACE \backsim \Delta BHD$ $(g-g)$

suy ra $\dfrac{CE}{HD}=\dfrac{EA}{BD}$

c) Ta có ΔCAE vuông tại C có CI là trung tuyến nên $CI=AI$

$\Rightarrow I$ nằm trên đường trung trực của AC

Chứng minh $\Delta IAO=\Delta ICO$ $(c-c-c)\Rightarrow \widehat{ICO}=\widehat{IAO}=90^0$, hay IC là tiếp tuyến (O).

d) Gọi G là giao của IB với HC. Chứng minh $CF=BF$

Chứng minh $CG//BF\Rightarrow \dfrac{IC}{CF}=\dfrac{IG}{GB}\Rightarrow \dfrac{IA}{BF}=\dfrac{IG}{GB}$ và $AI//BF\Rightarrow \widehat{AIG}=\widehat{GBF}$

Suy ra $\Delta AIG \backsim \Delta BGF$ $(c-g-c) \Rightarrow \widehat{IGA} = \widehat{BGF} \Rightarrow A,\ G,\ F$ thẳng hàng hay $IB,\ HC,\ AF$ đồng quy.

Câu 259. Cho đường tròn $(O;\ R)$, đường kính $AB = 2R$. Trên đường tròn (O) lấy điểm M $(MA < MB)$. Tiếp tuyến tại M cắt hai tiếp tuyến tại A và B lần lượt là C và D. Vẽ đường thẳng BM cắt tia AC tại E và vẽ $MH \perp AB$.

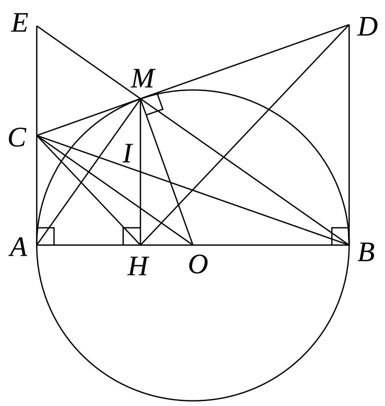
a) Chứng minh $CD = AC + BD$

b) Chứng minh $OC\ //\ MB$ và $ME.MB = AH.AB$.

c) Chứng minh $ME.MB = AH.AB$.

d) Chứng minh HM là tia phân giác của $\widehat{CHD}$.

Lời giải



a) Ta có C là giao của hai tiếp tuyến tại A và M của đường tròn (O) nên $CA = CM$

và D là giao của hai tiếp tuyến tại B và M của đường tròn (O) nên $DM = DB$

do đó $CD = CM + MD = AC + DB$

b) Chứng minh $OC \perp AM$

Chứng minh $BM \perp AM$

Suy ra $OC\ //\ MB$

c) Chứng minh $\Delta AME \backsim \Delta BMA$ $(g-g)$, suy ra $ME.MB = AM^2$

Chứng minh $\Delta AMH \backsim \Delta ABM$ $(g-g)$, suy ra $AH.AB = AM^2$

Do đó $ME.MB = AH.AB$.

d) Ta có $AE\ //\ BD$

nên $\dfrac{MC}{MD} = \dfrac{ME}{MB} = \dfrac{CE}{BD}$ (Định lí Thalès)

mà $MC = CA,\ MD = BD$

Do đó $\dfrac{CA}{BD} = \dfrac{ME}{MB}$.

Chứng minh $\dfrac{ME}{MB} = \dfrac{AH}{HB} \Rightarrow \dfrac{CA}{BD} = \dfrac{AH}{HB} \Rightarrow \Delta CAH \backsim \Delta DBH$ $(c-g-c) \Rightarrow \dfrac{CA}{BD} = \dfrac{CH}{HD}$

Mà $\dfrac{CA}{BD}=\dfrac{CM}{MD}\Rightarrow\dfrac{CH}{HD}=\dfrac{CM}{MD}\Rightarrow HM$ là phân giác $\widehat{CHD}$.

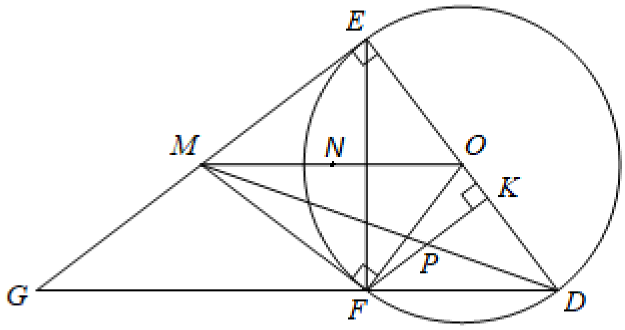
Câu 260. Cho đường tròn $(O;\ R)$. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến ME và MF đến đường tròn ($E,\ F$ là các tiếp điểm).

a) Chứng minh OM là đường trung trực của đoạn thẳng EF.

b) Chứng minh M,E,O,F cùng thuộc một đường tròn.

c) Kẻ đường kính ED của $(O;\ R)$. Hạ $FK\perp ED$. Gọi P là giao điểm của MD và FK. Chứng minh P là trung điểm của FK.

Lời giải



a) Ta có M là giao của hai tiếp tuyến tại E và F của đường tròn (O) nên OM là phân giác $\widehat{EOF}$

mà ΔEOF cân tại O ($OE=OF=R$)

nên OM là đường trung trực của đoạn thẳng EF.

b) Gọi N là trung điểm MO.

Tam giác OEM vuông tại E, có EN là đường trung tuyến nên $EN=\dfrac{1}{2}MO$ (1)

Tam giác OFM vuông tại F, có FN là đường trung tuyến nên $FN=\dfrac{1}{2}MO$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EN=FN=MN=ON$ nên M,E,O,F cùng thuộc đường tròn tâm N là trung điểm MO.

c) Gọi $G=ME\cap DF$

Chứng minh $EF\perp MO$ và $EF\perp GD\Rightarrow MO//GD\Rightarrow ME=MG$

Chứng minh $FK//GE\Rightarrow\dfrac{PK}{ME}=\dfrac{DP}{DM}=\dfrac{PF}{MG}\Rightarrow PK=PF$

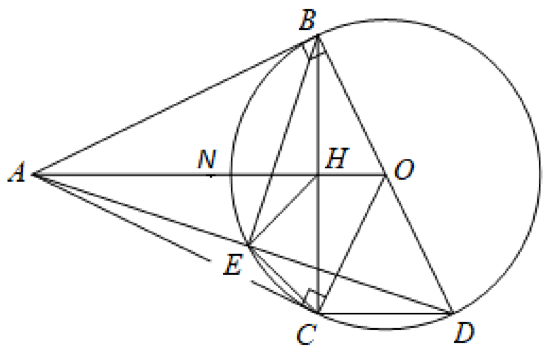
Câu 261. Cho đường tròn $(O;\ R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (O) ($B,\ C$ là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

a) Chứng minh $OH\perp BC$.

b) Chứng minh A,B,C,O cùng thuộc một đường tròn.

c) Lấy D đối xứng với B qua O. Gọi E là giao điểm của AD với đường tròn (O) (E không trùng với D). Chứng minh $DE.BA = BD.BE$

Lời giải



a) Ta có A là giao của hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) nên OA là phân giác $\widehat{BOC}$

mà ΔBOC cân tại O ($OB = OC = R$)

nên $OA \perp BC$

Hay $OH \perp BC$

b) Gọi N là trung điểm AO.

Tam giác ABO vuông tại B, có BN là đường trung tuyến nên $BN = \frac{1}{2}AO$ (1)

Tam giác ACO vuông tại C, có CN là đường trung tuyến nên $CN = \frac{1}{2}AO$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BN = CN = AN = ON$ nên A, B, C, O cùng thuộc đường tròn tâm N là trung điểm AO.

c) Ta có BD là đường kính nên $\widehat{BED} = 90^0$

Xét ΔDEB và ΔBEA, có:

$\widehat{BEA} = \widehat{BED} = 90^0$

$\widehat{ABE} = \widehat{BDE}$ (cùng phụ $\widehat{EBD}$)

Nên $\Delta DEB \backsim \Delta BEA$ $(g-g)$

Suy ra $\frac{DE}{BE} = \frac{BD}{AB}$

Hay $DE.AB = BD.BE$

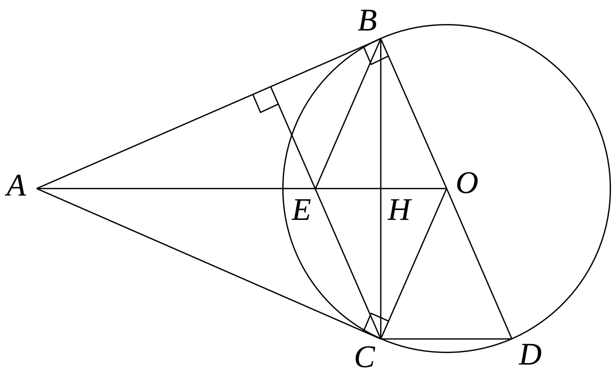
Câu 262. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB và AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ đường kính BD của (O). Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AB, cắt OA tại E.

a) Chứng minh $BC \perp OA$ tại H.

b) Chứng minh $\widehat{OCD} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$.

c) Tứ giác $OBEC$ là hình gì? Vì sao?

Lời giải



a) Ta có A là giao của hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) nên OA là phân giác $\widehat{BOC}$

mà ΔBOC cân tại O ($OB = OC = R$)

nên OA là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

Do đó $BC \perp OA$

b) Ta có $OA \perp BC$

$CD \perp BC$ ($\widehat{BCD} = 90^0$ vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $OA \mathbin{//} CD$

Nên $\widehat{ODC} = \widehat{BOA}$ (đồng vị)

Mà $\widehat{BOA} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC}$ (OA là phân giác $\widehat{BOC}$)

Do đó $\widehat{ODC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC}$

Ta lại có $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$ (ΔCOD cân tại O)

Suy ra $\widehat{OCD} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC}$

c) Ta có $CE \perp AB$ và $AE \perp BC$ nên E là trực tâm của ΔABC $\Rightarrow BE \perp AC$

mà $OC \perp AC$ (tính chất tiếp tuyến)

nên $BE // OC$

Ta lại có $OB // CE$ (cùng vuông góc với AB)

Do đó $OBEC$ là hình bình hành

Mặt khác $OB = OC$

Nên $OBEC$ là hình thoi.

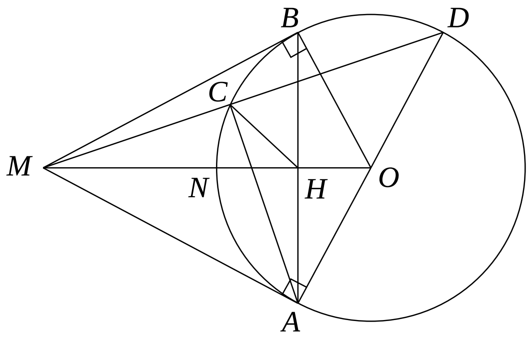
Câu 263. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O;\ R)$. Từ M kẻ các tiếp tuyến $MA,\ MB$ tới đường tròn ($A,\ B$ là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của MO với AB.

a) Chứng minh $HA = HB$.

b) Nếu $OM = 2R$. Tính MA theo R và số đo $\widehat{AMB}$.

c) Kẻ đường kính AD của đường tròn (O), MD cắt (O) tại điểm thức hai là C. Chứng minh rằng $\widehat{MHC} = \widehat{ADC}$.

Lời giải



a) Ta có M là giao của hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) nên OM là phân giác $\widehat{AOB}$

mà ΔAOB cân tại O ($OA = OB = R$)

nên OM là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

hay OH là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Do đó $HA = HB$

b) Gọi MO cắt (O) tại N.

Vì $OM = 2R$ mà $ON = R \Rightarrow MN = R$

Tam giác OBM vuông tại , có BN là đường trung tuyến nên $BN = \dfrac{1}{2}OM = R$

Do đó $BN = OB = ON = R$, suy ra ΔBON là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{AOM} = 60^0 \Rightarrow \widehat{AMB} = 30^0$.

$$AM = MO.\sin\widehat{MOA} = 2R.\sin 60^0 = 2R.\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$

c) Chứng minh $\Delta MHA \backsim \Delta MAO\ (g-g) \Rightarrow AM^2 = MH.MO$

Chứng minh $\Delta MCA \backsim \Delta MAD\ (g-g) \Rightarrow AM^2 = MC.MD$.

Từ đó suy ra $MH.MO = MC.MD \Rightarrow \Delta MHC \backsim \Delta MDO\ (c-g-c) \Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO}$.

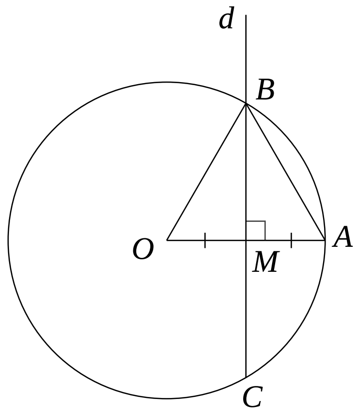
Câu 264. Cho đường tròn $(O;\ 3cm)$. Điểm $A \in (O)$. Đường thẳng d vuông góc với OA tại trung điểm của OA cắt đường tròn (O) tại B và C.

a) Chứng minh rằng ΔOAB là tam giác đều.

b) Tính độ dài đoạn BC.

c) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ AB và dây AB

Lời giải



a) ΔOAB có $OA = OB$ *(cùng bằng bán kính)* nên cân tại O

Gọi đường thẳng d cắt OA tại M.

ΔOAB có BM vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên ΔOAB cân tại $B \Rightarrow OB = AB$.

Do đó ΔOAB có $OA = OB = AB$ nên là tam giác đều.

b) Ta có $OM = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{3}{2}cm$.

Áp dụng Pythagore ta có: $BM^2 = OB^2 - OM^2 = 3^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{27}{4} \Rightarrow BM = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}cm \Rightarrow BC = 3\sqrt{3}\,cm$

c) Học sinh tự làm

Câu 265. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm C thuộc đường tròn (C khác $A,\ B$). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác $B,\ C$). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt BE tại F. Gọi I là trung điểm của DF.

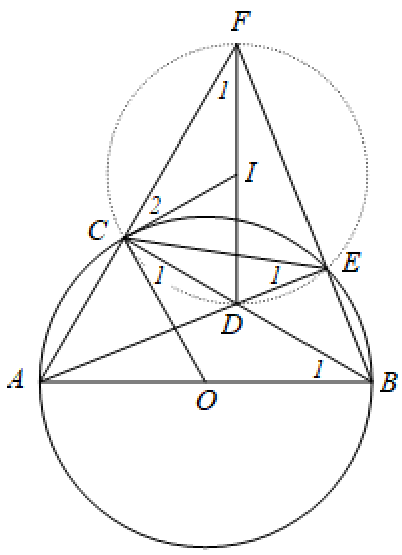
a) Chứng minh bốn điểm $F,\ C,\ D,\ E$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $DA.DE = DB.DC$.

c) Chứng minh $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$.

d) Chứng minh rằng CI là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



a) Chứng minh bốn điểm F, C, D, E cùng thuộc đường tròn tâm I, bán kính là trung điểm của DF.

b) Chứng minh $\Delta CDA \backsim \Delta EDB\ (g-g) \Rightarrow \dfrac{DA}{DB}=\dfrac{DC}{DE} \Rightarrow DA.DE = DB.DC$

c) $\widehat{F_1}=\widehat{E_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{CD}$)

$\widehat{E_1}=\widehat{B_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{AC}$)

$\widehat{B_1}=\widehat{C_1}$ (vì ΔOBC cân tại O).

Suy ra $\widehat{F_1}=\widehat{C_1}$

d) $\widehat{F_1}=\widehat{C_2}$ (vì ΔICF cân tại I)

Suy ra $\widehat{C_1}=\widehat{C_2}$.

Khi đó $\widehat{OCI}=\widehat{DCF}=90^0$.

Nên CI là tiếp tuyến của (O).

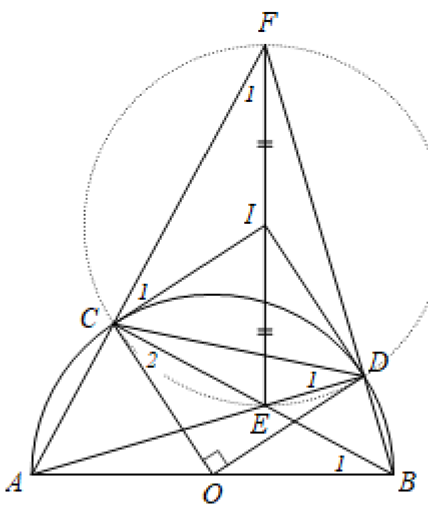
Câu 266. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. C là một điểm bất kì trên nửa đường tròn sao cho C khác A và $AC<CB$. Điểm D thuộc cung nhỏ BC sao cho $\widehat{COD}=90^0$. Gọi E là giao điểm của AD và BC, F là giao điểm của AC và BD. Gọi I là trung điểm của EF.

a) Chứng minh C, E, D, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $FC.FA = FD.FB$.

c) Chứng minh IC là tiếp tuyến của (O).

Lời giải



a) $\widehat{ACB}=90^0$, $\widehat{ADB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{BCF}=90^0$, $\widehat{ADF}=90^0$.

Gọi I là trung điểm của EF

ΔECF vuông tại $C \Rightarrow CI = EI = FI$ (1)

ΔDEF vuông tại $D \Rightarrow DI = DE = DF$ (2)

Từ (1), $(2) \Rightarrow CI = EI = FI = DI$

Nên $C,\ E,\ D,\ F$ cùng thuộc $(I;\ IC)$

b) Chứng minh $\Delta FDA \backsim \Delta FCB$ $(g-g) \Rightarrow \dfrac{FD}{FC} = \dfrac{FA}{FB} \Rightarrow FC.FA = FD.FB$

c) ΔICF cân tại $I \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{F_1}$, mà $\widehat{F_1} = \widehat{D_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CE}$)

$\widehat{D_1} = \widehat{B_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$). Suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{F_1} = \widehat{D_1} = \widehat{B_1}$

ΔOBC cân tại $O \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_2}$.

Suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$.

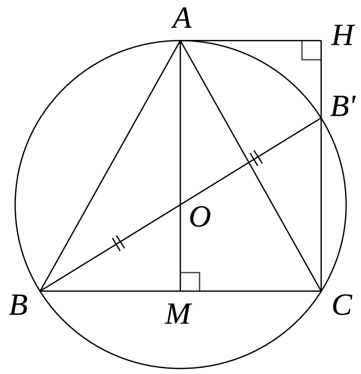
Khi đó $\widehat{OCI} = \widehat{ECF} = 90^0$.

Câu 267. Cho đường tròn (O) và ba điểm $A,\ B,\ C$ thuộc đường tròn đó sao cho ΔABC cân tại A.

a) Giả sử $BC = 6\,cm$, đường cao AM của ΔABC bằng $4\,cm$. Tính AB.

b) Gọi B' là điểm đối xứng với B qua O. Vẽ $AH \perp CB'$ tại H. Tứ giác $AHCM$ là hình gì?

Lời giải



a) ΔABC cân tại A, nên đường cao AM cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow BM = CM = \dfrac{BC}{2} = 3\,cm$.

Áp dụng định lý Pythagore ta có : $AB^2 = AM^2 + BM^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow AB = 5\,cm$

b) $\Delta BCB'$ có $OB = OB'$ nên OC là đường trung tuyến, mà $OC = \dfrac{BB'}{2}$

Nên $\Delta BB'C$ vuông tại C.

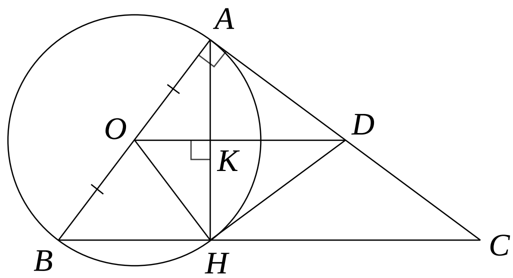
Tứ giác $AHCM$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Câu 268. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 6\,cm,\ AC = 8\,cm$. Vẽ đường tròn (O) đường kính AB cắt BC tại H.

a) Tính AH và CH.

b) Kẻ $OK \perp AH$ tại K, tia OK cắt AC tại D. Chứng minh rằng $DH \perp OH$

Lời giải



a) Áp dụng định lý Pythagore ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow BC = 10\,cm$

ΔABH có $OA = OB \Rightarrow HO$ là trung tuyến, mà $OH = \dfrac{AB}{2} = OA = OB$ nên ΔAHB vuông tại H

Lại có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC = \dfrac{1}{2}AB.AC \Rightarrow AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{6.8}{10} = \dfrac{24}{5}\,cm$.

Chứng minh $\Delta CHA \backsim \Delta CAB\ (g-g) \Rightarrow \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CH}{CA} \Rightarrow CH = \dfrac{CA^2}{CB} = \dfrac{8^2}{10} = \dfrac{32}{5}\,cm$

b) Chứng minh $\Delta AOD = \Delta BOD\ (c-c-c) \Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{OHD} = 90^0$

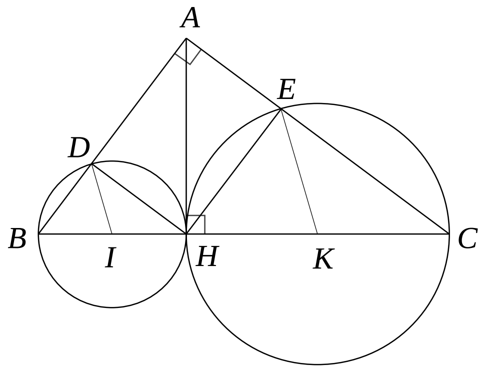
Câu 269. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn (I) đường kính BH cắt AB tại D, vẽ đường tròn (K) đường kính HC cắt AC tại E.

a) Chứng minh $ADHE$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh rằng $AD.AB = AE.AC$

c) Giả sử $AB = 3\,cm,\ BC = 5\,cm$. Tính DE và diện tích tứ giác $DEKI$.

Lời giải



a) Chứng minh ΔBDH vuông tại $D \Rightarrow HD \perp AB$

Chứng minh ΔHEC vuông tại $E \Rightarrow HE \perp AC$

Tứ giác $ADHE$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $\Delta ADH \backsim \Delta AHB\ (g-g) \Rightarrow \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AD}{AH} \Rightarrow AH^2 = AB.AD\ (1)$

Chứng minh $\Delta AEH \backsim \Delta AHC\ (g-g) \Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AE}{AH} \Rightarrow AH^2 = AE.AC\ (2)$

Từ $(1),\ (2) \Rightarrow AD.AB = AE.AC\left(= AH^2\right)$.

c) Áp dụng Pythagore tính được $AC = 4\,cm$.

Tính $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC=\dfrac{1}{2}AB.AC\Rightarrow AH=\dfrac{AB.AC}{BC}=\dfrac{2.4}{5}=\dfrac{8}{5}cm=DE$.

Tính diện tích $\Delta ABC=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{3.4}{2}=6\,cm^2$.

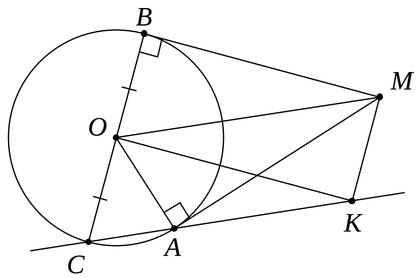
Chỉ ra $S_{DBI}=S_{DHI}$, $S_{DAE}=S_{DHE}$, $S_{EHK}=S_{ECK}$ nên $S_{DEKI}=\dfrac{1}{2}S_{ABC}=\dfrac{6}{2}=3\,cm^2$

Câu 270. Cho $(O;R)$. Từ điểm M ở ngoài đường tròn vẽ tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn. Đường trung trực của đường kính BC cắt đường thẳng AC tại K.

a) Chứng minh $\widehat{OCA}=\widehat{BOM}$

b) Tính độ dài đoạn thẳng MK theo R.

Lời giải



a) Xét đường tròn $(O;R)$ có MA, MB là tiếp tuyến

Suy ra $\widehat{BOM}=\widehat{AOM}=\dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) (1)

ΔOAC có $OA=OC$ suy ra $\widehat{OAC}=\widehat{OCA}$ (tính chất tam giác cân)

$\widehat{AOB}=\widehat{OCA}+\widehat{OAC}$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

Nên $\widehat{OAC}=\widehat{OCA}=\dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OCA}=\widehat{BOM}$

b) $\widehat{OCA}$, $\widehat{BOM}$ ở vị trí đồng vị

Nên $CK\,//\,OM$ suy ra $\widehat{MOK}=\widehat{CKO}$ (so le trong).

Chứng minh $\Delta OAM=\Delta OCK$ (c.g.c) suy ra $CK=OM$ (hai cạnh tương ứng).

Chứng minh $\Delta KMO=\Delta OCK$ (c.g.c) suy ra $\widehat{COK}=\widehat{OKM}$ (hai góc tương ứng).

Mà $\widehat{COK}=90^\circ$ (KO là trung trực của BC) suy ra $\widehat{OKM}=90^\circ$.

Tứ giác $OBMK$ có:

+ $\widehat{MBO}=90^\circ$ (MB là tiếp tuyến của $(O;R)$).

+ $\widehat{BOK}=90^\circ$ (KO là trung trực của BC).

+ $\widehat{OKM}=90^\circ$ (cm trên).

Do đó $OBMK$ là hình chữ nhật suy ra $MK=OB=R$.