

# BÀI 1. HÀM SỐ $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ )

## A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### Kiến thức cần nhớ

- Hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) xác định với mọi giá trị của  $x$  thuộc  $\mathbb{R}$
- Đồ thị hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ )
  - Đồ thị của hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) là một đường cong đi qua gốc tọa độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó được gọi là một parabol với đỉnh O.
    - Nếu  $a > 0$  thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.
    - Nếu  $a < 0$  thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.
  - Cách vẽ đồ thị hàm số:  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ )**
    - Bước 1:** Lập bảng giá trị để tìm ra giá trị của  $y$  tương ứng với một số giá trị cụ thể của  $x$
    - Bước 2:** Căn cứ vào bảng giá trị, vẽ một số điểm cụ thể thuộc đồ thị của hàm số đó.
    - Bước 3:** Vẽ Parabol đi qua gốc tọa độ và các điểm đã xác định ở bước 2, ta nhận được đồ thị hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ).

## B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM. Xong rồi đó. Gõ lại những công thức toán,

### I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

**Câu 1:** Đồ thị hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) là đường gì ?

- A. Là một đường thẳng  
B. Là một đường tròn  
C. Là một đường cong  
D. Là một đường chéo

**Câu 2:** Kết luận nào sau đây là **sai** khi nói về đồ thị hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ).

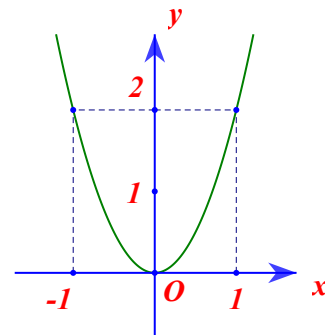
- A. Đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.  
B. Với  $a < 0$  thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành và  $O(0;0)$  là điểm cao nhất của đồ thị.  
C. Với  $a > 0$  thì đồ thị nằm phía trên trục hoành và  $O(0;0)$  là điểm cao nhất của đồ thị.  
D. Với  $a > 0$  thì đồ thị nằm phía trên trục hoành và  $O(0;0)$  là điểm thấp nhất của đồ thị.

**Câu 3:** Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số  $y = 3x^2$  ?

- A. (1;3)                      B. (3;12)                      C. (2;-4).                      D. (-1;-3)

**Câu 4:** Đồ thị của hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?

- A.  $y = 4x^2$ .                      B.  $y = \frac{1}{2}x^2$ .  
C.  $y = \frac{1}{4}x^2$                       D.  $y = 2x^2$



**Câu 5:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hàm số  $y = (m + 2)x^2$  có đồ thị đi qua điểm  $(-1; 3)$ . Khi đó giá trị của  $m$  tương ứng là

- A.  $m = -1$ .                      B.  $m = 1$                       C.  $m = 0$ .                      D.  $m = 2$

**II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU.**

**Câu 6:** Đường thẳng nào sau đây không cắt parabol  $y = x^2$ ?

- A.  $y = 2x + 1$ .                      B.  $y = 2x$                       C.  $y = 2x - 3$ .                      D.  $y = 2x + 3$

**Câu 7:** Tọa độ giao điểm của đường thẳng (d)  $y = x - 2$  và parabol  $y = -x^2$  là

- A.  $(1; -1)$  và  $(2; -4)$ .                      B.  $(1; 1)$  và  $(-2; 4)$ .  
C.  $(-1; -1)$  và  $(2; -4)$ .                      D.  $(1; -1)$  và  $(-2; -4)$ .

**Câu 8:** Đồ thị hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) đi qua hai điểm  $A(-2; 4)$  và  $B(4; b)$ . Giá trị  $b - 5a$  là:

- A. 11.                      B. 16                      C. 1.                      D. 15

**Câu 9:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, biết điểm có hoành độ bằng 1 là một điểm chung của parabol  $y = 2x^2$  và đường thẳng  $y = (m - 1)x - 2$ , với  $m$  là tham số. Khi đó giá trị của  $m$ .

- A.  $m = 1$                       B.  $m = 5$                       C.  $m = 2$                       D.  $m = 3$

**Bài 10.** Hàm số  $y = (m + 2)x^2$  đạt giá trị nhỏ nhất khi

- A.  $m < -2$                       B.  $m \leq -2$                       C.  $m > -2$                       D.  $m \geq -2$

**III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG**

**Câu 11:** Cho hàm số  $y = x^2$  có đồ thị là (P). Đường thẳng đi qua 2 điểm thuộc (P) có hoành độ bằng -1 và 2 là:

- A.  $y = -x + 2$                       B.  $y = x + 2$                       C.  $y = -x - 2$                       D.  $y = x - 2$

**Câu 12:** Cho hàm số  $y = -2x^2$  có đồ thị là (P). Tọa độ các điểm thuộc (P) có tung độ bằng -6 là:

- A.  $(\sqrt{3}; -6); (-\sqrt{3}; -6)$                       B.  $(-6; \sqrt{3}); (-6; -\sqrt{3})$   
C.  $(\sqrt{3}; -6)$ .                      D.  $(-72; -6)$

**Câu 13:** Hàm số  $y = (m^2 + 3m - 3)x^2; (m^2 + 3m - 3 \neq 0)$ . Tổng các giá trị của  $m$  biết đồ thị của hàm số đi qua điểm  $A(-1; 1)$ .

- A. 1                      B. -1                      C. -3                      D. 3

**Câu 14:** Cho parabol (P):  $y = \frac{1}{2}x^2$  cắt đường thẳng (d):  $y = x + \frac{3}{2}$  tại hai điểm phân biệt A và B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

- A.  $4\sqrt{2}$                       B.  $5\sqrt{3}$ .                      C. 4                      D.  $2\sqrt{2}$



**Dạng 2. Tính giá trị của hàm số  $y = f(x) = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) tại  $x = x_0$  và bài toán liên quan.**

**Phương pháp giải:**

- Giá trị hàm số  $y = f(x) = ax^2$  tại  $x = x_0$  là  $y_0 = f(x_0) = ax_0^2$ ;
- Tìm điểm thuộc đồ thị hàm số  $y = f(x) = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) để thỏa mãn một điều kiện cho trước:
  - Gọi điểm  $M(x_M; y_M)$  thuộc đồ thị hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) nên  $M(x_M; ax_M^2)$
  - Từ điều kiện bài cho, thiết lập quan hệ giữa  $y_M$  và  $x_M$ , từ đó tìm được  $x_M$  hoặc  $y_M$ , suy ra tọa độ điểm  $M$ .

**Bài 6.** Cho hàm số  $y = f(x) = 4x^2$ . Hãy tính  $f(1)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(0)$

**Bài 7.** Cho Parabol ( $P$ ):  $y = \frac{1}{3}x^2$ . Xác định giá trị  $m$  để các điểm sau đây thuộc Parabol ( $P$ )

a)  $A(3; m)$

b)  $B(-m; 3)$

**Bài 8.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{-1}{2}x^2$  có đồ thị ( $C$ ). Trong các điểm  $A(2; -2)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C(-1; -\frac{1}{2})$ , điểm nào thuộc đồ thị ( $C$ ), điểm nào không thuộc? Vì sao?

**Bài 9.** Cho hàm số  $y = 4x^2$  có đồ thị là Parabol ( $P$ ).

a) Xác định tọa độ của điểm  $A$ . Biết điểm  $A$  nằm trên ( $P$ ) có hoành độ bằng  $-\frac{1}{2}$ .

b) Xác định tọa độ của điểm  $B$ . Biết điểm  $B$  nằm trên ( $P$ ) có tung độ bằng 4.

**Bài 10.** Tìm  $m$  để điểm  $M(m; 2m)$  thuộc đồ thị hàm số  $y = f(x) = -2x^2$

**Bài 11.** Cho hàm số  $y = f(x) = 3x^2$

a) Tìm giá trị của hàm số khi  $x$  nhận các giá trị lần lượt là  $-3$ ;  $2\sqrt{2}$ ;  $3 - 2\sqrt{2}$

b) Tìm các giá trị của  $a$ , biết rằng  $f(a) = 12 + 6\sqrt{3}$

c) Tìm  $b$  biết rằng  $f(b) \geq 6b + 12$ .

**Dạng 3. Xác định hệ số  $a$  của hàm số  $y = f(x) = ax^2$  ( $a \neq 0$ ).**

**Phương pháp giải:**

Nếu biết đồ thị hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) đi qua điểm  $(x_0; y_0)$  thì có :

$$y_0 = ax_0^2 \Rightarrow a = \frac{y_0}{x_0^2} \text{ (với } x_0 \neq 0 \text{)}$$

**Bài 12:** Xác định hệ số  $a$  của hàm số  $y = ax^2$  ( $P$ ). Biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm  $A(10; 30)$ .

**Bài 13.** Cho hàm số  $y = (k+2)x^2$  có đồ thị cắt đường thẳng  $y - 2x + 3 = 0$  tại điểm  $M(1; m)$ . Hãy xác định  $k$  và  $m$ .

**Bài 14.** Cho Parabol  $(P): y = ax^2 (a \neq 0)$ . Biết  $A\left(\frac{1}{a}; y_A\right)$  và  $B(3; y_B)$  là hai điểm thuộc  $(P)$  thỏa mãn tam giác  $AOB$  vuông tại  $O$ . Tìm giá trị của  $a$

**Bài 15.** Cho hàm số  $y = ax^2$  có đồ thị hàm số  $(P)$ .

- Xác định  $a$  biết  $(P)$  đi qua điểm  $A(1; -2)$
- Vẽ đồ thị  $(P)$ .
- Tìm điểm thuộc  $(P)$  có hoành độ bằng 2.

#### Dạng 4. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

**Phương pháp giải:**

Xét hàm số  $y = ax^2 (a \neq 0)$ . Ta có:

- Nếu  $a > 0$  thì hàm số nghịch biến khi  $x < 0$  và đồng biến khi  $x > 0$
- Nếu  $a < 0$  thì hàm số nghịch biến khi  $x > 0$  và đồng biến khi  $x < 0$

**Bài 16.** Cho hàm số  $y = (3m + 2)x^2 \left(m \neq \frac{-2}{3}\right)$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số:

- Đồng biến với mọi  $x < 0$
- Nghịch biến với mọi  $x < 0$
- Đạt giá trị nhỏ nhất là 0.
- Đạt giá trị lớn nhất là 0.

**Bài 17.** Cho hàm số  $y = (3m - 4)x^2 \left(m \neq \frac{4}{3}\right)$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số:

- Nghịch biến với mọi  $x > 0$
- Đồng biến với mọi  $x > 0$
- Đạt giá trị lớn nhất là 0
- Đạt giá trị nhỏ nhất là 0

**Bài 18.** Cho hàm số  $y = (-m^2 - 2m - 3)x^2$

- Chứng minh rằng với mọi tham số  $m$ , hàm số luôn nghịch biến với mọi  $x > 0$  và đồng biến với mọi  $x < 0$
- Tìm các giá trị của tham số  $m$  để khi  $x = \frac{1}{2}$  hoặc  $x = -\frac{1}{2}$  thì  $y = \frac{-11}{4}$

**Bài 19.** Cho hàm số  $y = (\sqrt{2m - 3} - 2)x^2$  với  $m \geq \frac{3}{2}; m \neq \frac{7}{2}$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số đồng biến với mọi  $x > 0$  và nghịch biến với mọi  $x < 0$

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	C	C	A	D	B	C	D	A	B	C
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	B	A	C	A	C	D				

**Câu 9:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , biết điểm có hoành độ bằng 1 là một điểm chung của parabol  $y = 2x^2$  và đường thẳng  $y = (m-1)x - 2$ , với  $m$  là tham số. Khi đó giá trị của  $m$ .

- A.  $m = 1$                       B.  $m = 5$                       C.  $m = 2$                       D.  $m = 3$

Lời giải

Chọn B

Điểm có hoành độ bằng 1 là một điểm chung của parabol  $y = 2x^2$  và đường thẳng  $y = (m-1)x - 2$  thì có tung độ là  $y = 2.1^2 = 2 \Rightarrow (1; 2)$  là điểm chung của parabol và đường thẳng.

$$y = (m-1)x - 2$$

$$(1; 2) \text{ thuộc đường thẳng nên } 2 = (m-1).1 - 2$$

$$m = 5$$

Vậy  $m = 5$  là giá trị cần tìm.

**Câu 11:** Cho hàm số  $y = x^2$  có đồ thị là (P). Đường thẳng đi qua 2 điểm thuộc (P) có hoành độ bằng -1 và 2 là:

- A.  $y = -x + 2$                       B.  $y = x + 2$                       C.  $y = -x - 2$                       D.  $y = x - 2$

Lời giải

Chọn B

Điểm thuộc (P) có hoành độ bằng -1 thì tung độ là  $y = (-1)^2 = 1 \Rightarrow$  điểm đó là  $(-1; 1)$ .

Điểm thuộc (P) có hoành độ bằng 2 thì tung độ là  $y = 2^2 = 4 \Rightarrow$  điểm đó là  $(2; 4)$ .

Đường thẳng cần tìm có dạng  $y = ax + b$  (d)

$$\begin{cases} (-1; 1) \in (d) \\ (2; 4) \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -a + b \\ 4 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng cần tìm là  $y = x + 2$ .

**Câu 12:** Cho hàm số  $y = -2x^2$  có đồ thị là (P). Tọa độ các điểm thuộc (P) có tung độ bằng -6 là:

- A.  $(\sqrt{3}; -6); (-\sqrt{3}; -6)$                       B.  $(-6; \sqrt{3}); (-6; -\sqrt{3})$   
 C.  $(\sqrt{3}; -6)$ .                      D.  $(-72; -6)$

Lời giải

**Chọn A**

Điểm thuộc (P) có tung độ bằng -6 thì hoành độ  $x$  thỏa mãn phương trình  $-6 = -2x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là  $(\sqrt{3}; -6); (-\sqrt{3}; -6)$

**Câu 13:** Hàm số  $y = (m^2 + 3m - 3)x^2; (m^2 + 3m - 3 \neq 0)$ . Tổng các giá trị của  $m$  biết đồ thị của hàm số đi qua điểm  $A(-1;1)$ .

A. 1

B. -1

**C. -3**

D. 3

**Lời giải**

**Chọn C**

Đồ thị hàm số  $y = (m^2 + 3m - 3)x^2$  với  $(m^2 + 3m - 3 \neq 0)$  đi qua điểm

$$A(-1;1) \Leftrightarrow 1 = (m^2 + 3m - 3)(-1)^2 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}$$

Khi đó tổng các giá trị của  $m$  là  $-4 + 1 = -3$ .

**Câu 14:** Cho parabol (P):  $y = \frac{1}{2}x^2$  cắt đường thẳng (d):  $y = x + \frac{3}{2}$  tại hai điểm phân biệt A và B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

**A.  $4\sqrt{2}$**

B.  $5\sqrt{3}$ .

C. 4

D.  $2\sqrt{2}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d):  $y = x + \frac{3}{2}$  và parabol (P):  $y = \frac{1}{2}x^2$  là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 &= x + \frac{3}{2} \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ x^2 - 3x + x - 3 &= 0 \\ x(x-3) + (x-3) &= 0 \\ &= (x-3)(x+1) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+1=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow y = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow A\left(-1; \frac{1}{2}\right);$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow B\left(3; \frac{9}{2}\right)$$



+Bước 1: Lập bảng giá trị (nên lấy ít nhất 5 giá trị).

+ Bước 2: Đồ thị hàm số  $y = ax^2$  có dạng parabol nằm phía trên trục hoành nếu  $a > 0$  và nằm phía dưới trục hoành nếu  $a < 0$ , đồng thời đi qua các điểm thuộc bảng giá trị.

+ Bước 3: Vẽ đồ thị.

**Bài 1.** Tìm  $m$  để các hàm số sau là hàm số bậc hai:

a)  $y = (m - 1)x^2$     b)  $y = (m^2 - 1)x^2$     c)  $y = \sqrt{\frac{m-1}{m+2}}x^2$     d)  $y = m\sqrt{m+5}x^2$

**Lời giải**

a) Hàm số đã cho là hàm số bậc hai khi  $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ .

b) Hàm số đã cho là hàm số bậc hai khi:  $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m^2 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

**Bài 2.** Tìm  $m$  để các hàm số sau là hàm số bậc hai:

a)  $y = \sqrt{\frac{m-1}{m+2}}x^2$     b)  $y = m\sqrt{m+5}x^2$

**Lời giải**

a) Hàm số đã cho là hàm số bậc hai khi  $\begin{cases} \frac{m-1}{m+2} > 0 \\ m+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases}$

b) Hàm số đã cho là hàm số bậc hai khi  $\begin{cases} m+5 > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -5 \\ m \neq 0 \end{cases}$

**Bài 3.** Tìm  $m$  để các hàm số sau là hàm số bậc hai:

a)  $y = \frac{m-2}{m}x^2$     b)  $y = \frac{m^2-9}{\sqrt{m-2}}x^2$

**Lời giải**

Hàm số đã cho là hàm số bậc hai khi  $\begin{cases} \frac{m-2}{m} \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq 0 \end{cases}$

Hàm số đã cho là hàm số bậc hai khi  $\begin{cases} \frac{m^2-9}{\sqrt{m-2}} \neq 0 \\ m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m > 2 \end{cases}$

**Bài 4.** Vẽ đồ thị các hàm số sau: a)  $y = 2x^2$

b)  $y = -\frac{1}{4}x^2$

**Lời giải**

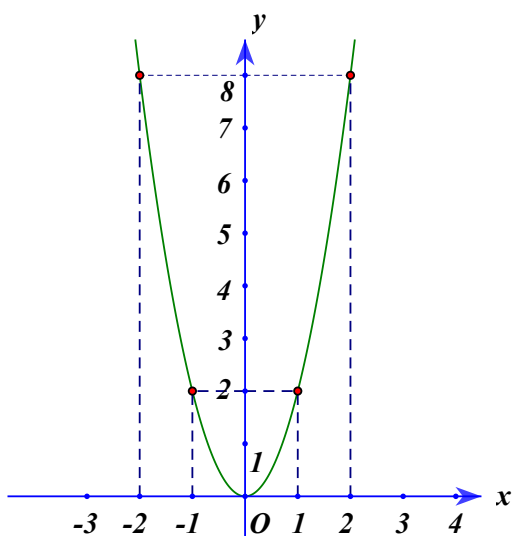
a) Ta có bảng giá trị (Đồ thị: xem hình a):

$x$	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

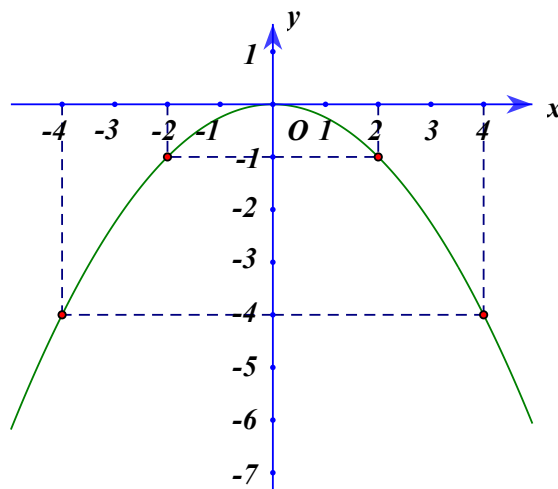
b) Ta có bảng giá trị (Đồ thị: xem hình b):

$x$	-4	-2	0	2	4
-----	----	----	---	---	---

$y = -\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	0	-1	-4
-----------------------	----	----	---	----	----



Hình a)



Hình b)

**Bài 5.** Cho parabol  $(P): y = \frac{x^2}{2}$  và đường thẳng  $(d): y = x + 4$ .

- Vẽ  $(P)$  và  $(d)$  trên cùng hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$ .

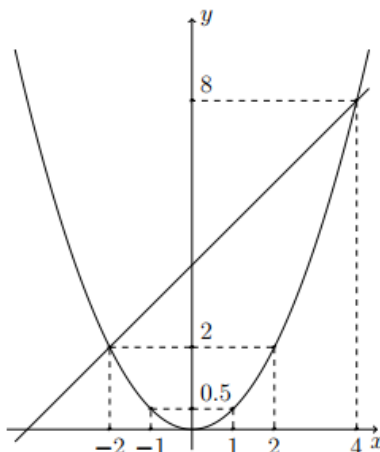
**Lời giải**

1. Vẽ đường thẳng  $(d)$ : Cho  $x = -2 \Rightarrow y = 2$ . Cho  $x = 4 \Rightarrow y = 8$ .

Vẽ parabol  $(P)$ : Bảng giá trị

$x$	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{x^2}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Vẽ đồ thị



2. Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x^2}{2} = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Với  $x = -2 \Rightarrow y = 2$ .

Với  $x = 4 \Rightarrow y = 8$ .

Vậy  $(d)$  và  $(P)$  có hai điểm chung có tọa độ là  $(-2; 2)$  và  $(4; 8)$ .

**Dạng 2. Tính giá trị của hàm số  $y = f(x) = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) tại  $x = x_0$  và bài toán liên quan.**

**Phương pháp giải:**

Giá trị hàm số  $y = f(x) = ax^2$  tại  $x = x_0$  là  $y_0 = f(x_0) = ax_0^2$ ;

Tìm điểm thuộc đồ thị hàm số  $y = f(x) = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) để thỏa mãn một điều kiện cho trước:

- Gọi điểm  $M(x_M; y_M)$  thuộc đồ thị hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) nên  $M(x_M; ax_M^2)$
- Từ điều kiện bài cho, thiết lập quan hệ giữa  $y_M$  và  $x_M$ , từ đó tìm được  $x_M$  hoặc  $y_M$ , suy ra tọa độ điểm  $M$ .

**Bài 6.** Cho hàm số  $y = f(x) = 4x^2$ . Hãy tính  $f(1)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(0)$

**☞ Lời giải**

Ta có:  $f(1) = 4.1^2 = 4$ .

$$f(-1) = 4.(-1)^2 = 4.$$

$$f(2) = 4.2^2 = 16.$$

$$f(-2) = 4.(-2)^2 = 16.$$

$$f(0) = 4.0^2 = 0.$$

**Bài 7.** Cho Parabol  $(P)$ :  $y = \frac{1}{3}x^2$ . Xác định giá trị  $m$  để các điểm sau đây thuộc Parabol  $(P)$

a)  $A(3; m)$ .      b)  $B(-m; 3)$

**☞ Lời giải**

a) Để  $A \in (P)$  thì tọa độ điểm  $A$  thỏa mãn phương trình  $(P) \Rightarrow m = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \Leftrightarrow m = 3$ .

b) Để  $B \in (P)$  thì tọa độ điểm  $B$  thỏa mãn phương trình  $(P) \Rightarrow 3 = \frac{1}{3}(-m)^2 \Leftrightarrow 9 = m^2 \Leftrightarrow m = \pm 3$ .

**Bài 8.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{-1}{2}x^2$  có đồ thị  $(C)$ . Trong các điểm  $A(2; -2)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ , điểm nào thuộc đồ thị  $(C)$ , điểm nào không thuộc? Vì sao?

**☞ Lời giải**

Điểm  $A$  thuộc đồ thị  $(C)$  vì  $f(x_A) = \frac{-1}{2}.2^2 = -2 = y_A$ .

Điểm  $B$  thuộc đồ thị  $(C)$  vì  $f(x_B) = \frac{-1}{2}.1^2 = -\frac{1}{2} \neq y_B$ .

Điểm  $C$  thuộc đồ thị  $(C)$  vì  $f(x_C) = \frac{-1}{2}.(-1)^2 = -\frac{1}{2} = y_C$ .

! Điểm  $M(x_0; y_0)$  thuộc đồ thị hàm số  $(C)$ :  $y = f(x)$  khi và chỉ khi tọa độ điểm  $M$  thỏa mãn  $y_0 = f(x_0)$

**Bài 9.** Cho hàm số  $y = 4x^2$  có đồ thị là Parabol  $(P)$ .

a) Xác định tọa độ của điểm  $A$ . Biết điểm  $A$  nằm trên  $(P)$  có hoành độ bằng  $-\frac{1}{2}$ .

b) Xác định tọa độ của điểm  $B$ . Biết điểm  $B$  nằm trên  $(P)$  có tung độ bằng 4.

**Lời giải**

a) Gọi tọa độ điểm là  $A\left(-\frac{1}{2}; y_A\right)$ . Vì  $A$  nằm trên  $(P) \Rightarrow y_A = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$  Vậy:  $A\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ .

b) Gọi tọa độ điểm là  $B(x_B; 4)$ . Vì  $B$  nằm trên  $(P) \Rightarrow 4 = 4 \cdot (x_B)^2 \Leftrightarrow x_B^2 = 1 \Leftrightarrow x_B = \pm 1$   
 Vậy  $B(-1; 4)$  hoặc  $B(1; 4)$ .

**Bài 10.** Tìm  $m$  để điểm  $M(m; 2m)$  thuộc đồ thị hàm số  $y = f(x) = -2x^2$ .

**Lời giải**

Điểm  $M$  thuộc đồ thị hàm số  $y = f(x) = -2x^2$  khi và chỉ khi

$$-2m^2 = 2m \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

Vậy với  $m = 0$  hoặc  $m = -1$  thì điểm  $M$  thuộc đồ thị của hàm số  $y = f(x) = -2x^2$ .

**Bài 11.** Cho hàm số  $y = f(x) = 3x^2$

a. Tìm giá trị của hàm số khi  $x$  nhận các giá trị lần lượt là  $-3; 2\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}$

b. Tìm các giá trị của  $a$ , biết rằng  $f(a) = 12 + 6\sqrt{3}$

c. Tìm  $b$  biết rằng  $f(b) \geq 6b + 12$

**Lời giải**

a) Ta có:  $f(-3) = 27; f(2\sqrt{2}) = 24; f(3 - 2\sqrt{2}) = 39 - 12\sqrt{3}$

b) Ta có:  $f(a) = 12 + 6\sqrt{3} \Leftrightarrow 3a^2 = 12 + 6\sqrt{3} \Leftrightarrow a = \pm(\sqrt{3} + 1)$

c) Ta có:  $f(b) \geq 6b + 12 \Leftrightarrow 3b^2 \geq 6b + 12 \Leftrightarrow 3b^2 - 6b - 12 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 1 + \sqrt{5} \\ b \leq 1 - \sqrt{5} \end{cases}$

**Dạng 3.** Xác định hệ số  $a$  của hàm số  $y = f(x) = ax^2 (a \neq 0)$ .

**Phương pháp giải:**

Nếu biết đồ thị hàm số  $y = ax^2 (a \neq 0)$  đi qua điểm  $(x_0; y_0)$  thì có:

$$y_0 = ax_0^2 \Rightarrow a = \frac{y_0}{x_0^2} \text{ (với } x_0 \neq 0 \text{)}$$

**Bài 12.** Xác định hệ số  $a$  của hàm số  $y = ax^2 (P)$ . Biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm  $A(10; 30)$ .

**Lời giải**

Vì  $A \in (P) \Rightarrow y_A = ax_A^2 \Rightarrow a = \frac{30}{10^2} = \frac{3}{10} = 0,3$

**Bài 13.** Cho hàm số  $y = (k + 2)x^2$  có đồ thị cắt đường thẳng  $y - 2x + 3 = 0$  tại điểm  $M(1; m)$ . Hãy xác định  $k$  và  $m$ .

**Lời giải**

Gọi  $(P): y = (k + 2)x^2$  và  $(d): y - 2x + 3 = 0$

Vì  $M \in (d) \Rightarrow m = 2.1 - 3 \Leftrightarrow m = -1$ . Vì  $M \in (P) \Rightarrow -1 = (k + 2).1^2 \Rightarrow k = -3$ .

**Bài 14.** Cho Parabol  $(P) : y = ax^2 (a \neq 0)$ . Biết  $A\left(\frac{1}{a}; y_A\right)$  và  $B(3; y_B)$  là hai điểm thuộc  $(P)$  thỏa mãn tam giác  $AOB$  vuông tại  $O$ . Tìm giá trị của  $a$

**Lời giải**

Ta có  $A\left(\frac{1}{a}; y_A\right)$  thuộc  $(P)$  nên  $y_A = \frac{1}{a}$  hay  $A\left(\frac{1}{a}; \frac{1}{a}\right)$ ,  $B(3; y_B)$  thuộc  $(P)$  nên  $y_B = 9a$  hay  $B(3; 9a)$

.Đường thẳng  $OA$  có dạng  $y = k_1x$  có hệ số góc  $k_1 = 1$ .

Đường thẳng  $OB$  có dạng  $y = k_2x$  có hệ số góc  $k_2 = 3a$ .

Vì tam giác  $AOB$  vuông tại  $O$ , nên  $OA \perp OB \Rightarrow k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow 3a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$

Vậy  $a = -1/3$  là giá trị cần tìm.

**Bài 15.** Cho hàm số  $y = ax^2$  có đồ thị hàm số  $(P)$ .

1. Xác định  $a$  biết  $(P)$  đi qua điểm  $A(1; -2)$ .
2. Vẽ đồ thị  $(P)$ .
3. Tìm điểm thuộc  $(P)$  có hoành độ bằng 2.

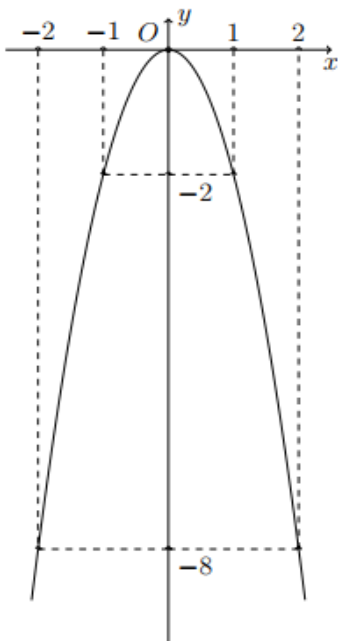
**Lời giải**

1.  $(P)$  đi qua điểm  $A(1; -2)$  khi và chỉ khi  $-2 = a.1^2 \Leftrightarrow a = -2$ .

2. Bảng giá trị

$x$	-2	-1	0	1	-2
$y = -2x^2$	-8	-2	0	2	-8

Vẽ đồ thị.



**Dạng 4. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số**

**Phương pháp giải:**

Xét hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ). Ta có:

- Nếu  $a > 0$  thì hàm số nghịch biến khi  $x < 0$  và đồng biến khi  $x > 0$
- Nếu  $a < 0$  thì hàm số nghịch biến khi  $x > 0$  và đồng biến khi  $x < 0$

**Bài 16.** Cho hàm số  $y = (3m + 2)x^2$  ( $m \neq \frac{-2}{3}$ ). Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số:

- a. Đồng biến với mọi  $x < 0$
- b. Nghịch biến với mọi  $x < 0$
- c. Đạt giá trị nhỏ nhất là 0.
- d. Đạt giá trị lớn nhất là 0.

**Lời giải**

- a) Ta có:  $3m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{-2}{3}$ . Vậy  $m < \frac{-2}{3}$  là giá trị cần tìm.
- b) Ta có:  $3m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-2}{3}$ . Vậy  $m > \frac{-2}{3}$  là giá trị cần tìm.
- c) Ta có:  $3m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-2}{3}$ . Vậy  $m > \frac{-2}{3}$  là giá trị cần tìm.
- d) Ta có:  $3m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{-2}{3}$ . Vậy  $m < \frac{-2}{3}$  là giá trị cần tìm.

**Bài 17.** Cho hàm số  $y = (3m - 4)x^2$  ( $m \neq \frac{4}{3}$ ). Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số:

- a. Nghịch biến với mọi  $x > 0$
- b. Đồng biến với mọi  $x > 0$
- c. Đạt giá trị lớn nhất là 0
- d. Đạt giá trị nhỏ nhất là 0

**Lời giải**

- a) Ta có:  $3m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{4}{3}$ . Vậy  $m < \frac{4}{3}$  là giá trị cần tìm.
- b) Ta có:  $3m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{4}{3}$ . Vậy  $m > \frac{4}{3}$  là giá trị cần tìm.
- c) Ta có:  $3m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{4}{3}$ . Vậy  $m < \frac{4}{3}$  là giá trị cần tìm.
- d) Ta có:  $3m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{4}{3}$ . Vậy  $m > \frac{4}{3}$  là giá trị cần tìm.

**Bài 18.** Cho hàm số  $y = (-m^2 - 2m - 3)x^2$

- a) Chứng minh rằng với mọi tham số  $m$ , hàm số luôn nghịch biến với mọi  $x > 0$  và đồng biến với mọi  $x < 0$
- b) Tìm các giá trị của tham số  $m$  để khi  $x = \frac{1}{2}$  hoặc  $x = -\frac{1}{2}$  thì  $y = \frac{-11}{4}$

**Lời giải**

- a) Ta có:  $a = -m^2 - 2m - 3 = -(m + 1)^2 - 2 < 0 \forall m \Rightarrow$  đpcm.
- b) Ta có:  $(-m^2 - 2m - 3) \frac{1}{4} = \frac{-11}{4} \Leftrightarrow m \in \{-4; 2\}$

**Bài 19.** Cho hàm số  $y = (\sqrt{2m - 3} - 2)x^2$  với  $m \geq \frac{3}{2}; m \neq \frac{7}{2}$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số đồng biến với mọi  $x > 0$  và nghịch biến với mọi  $x < 0$

**Lời giải**

Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2m - 3} - 2 > 0 \\ 2m - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{7}{2}$ . Vậy  $m > \frac{7}{2}$  là giá trị cần tìm.



## BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### Kiến thức cần nhớ

##### 1. Phương trình bậc hai một ẩn

Phương trình bậc hai một ẩn (còn gọi là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng  $ax^2 + bx + c$  trong đó  $x$  là ẩn;  $a, b, c$  là những số cho trước gọi là các hệ số và  $a \neq 0$ .

##### 2. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai.

Cho phương trình  $ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) và biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Nếu  $\Delta > 0$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Nếu  $\Delta = 0$  thì phương trình có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ;

- Nếu  $\Delta < 0$  thì phương trình vô nghiệm.

#### Chú ý.

+ Nếu phương trình  $ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) có  $a$  và  $c$  trái dấu, tức là  $ac < 0$ , thì  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  Khi đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

+ Trong phương trình  $ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ), khi  $b = 2b'$  thì  $\Delta = 4(b'^2 - ac)$

Đặt  $\Delta' = 4(b'^2 - ac)$ , ta được  $\Delta = 4\Delta'$ .

Khi đó, ta có công thức nghiệm thu gọn như sau:

- Nếu  $\Delta' > 0$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

- Nếu  $\Delta' = 0$  thì phương trình có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$ ;

- Nếu  $\Delta' < 0$  thì phương trình vô nghiệm.

##### 3. Giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai.

**Bước 1:** Lập phương trình:

- Chọn ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

**Bước 2:** Giải phương trình nói trên.

**Bước 3:** Kiểm tra các nghiệm tìm được ở Bước 2 có thoả mãn điều kiện của ẩn hay không, rồi trả lời bài toán.

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT**

**Câu 1:** Phương trình nào dưới đây là phương trình bậc hai một ẩn?

- A.  $3x^2 - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ .      B.  $2x^2 - 2022 = 0$ .      C.  $3x + \frac{1}{x} - 5 = 0$ .      D.  $4x - 1 = 0$ .

**Câu 2:** Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.  $x^2 - 3 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0$  trong đó:  $a = 1; b = -4; c = -3$ .  
 B.  $\sqrt{2}x = 4x^2 + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$  trong đó:  $a = 4; b = -\sqrt{2}; c = 1$ .  
 C.  $-x^2 + 2 = 4x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$  trong đó:  $a = 1; b = -4; c = 5$ .  
 D.  $\sqrt{5}x^2 - m = 1 \Leftrightarrow \sqrt{5}x^2 - m - 1 = 0$  trong đó:  $a = \sqrt{5}; b = 0; c = -m - 1$ .

**Câu 3:** Có bao nhiêu phương trình trong các phương trình dưới đây là phương trình bậc hai một ẩn?

$$\sqrt{2}x^2 + 1 = 0; 3y^2 - 2021 = 0; x - \sqrt{x} + 4 = 0; 2y^2 + 2x + 3 = 0.$$

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.

**Câu 4:** Cho phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Phương trình đã cho có nghiệm khi

- A.  $\Delta < 0$ .      B.  $\Delta = 0$ .      C.  $\Delta \geq 0$ .      D.  $\Delta > 0$ .

**Câu 5:** Không dùng công thức nghiệm, tìm số nghiệm của phương trình  $4x^2 + 9 = 0$ ?

- A. vô nghiệm.      B. 1.      C. 2.      D. 3.

**Câu 6:** Giả sử  $x_1; x_2$  là hai nghiệm của phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  có  $\Delta' > 0$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Phương trình có hai nghiệm  $x_1 = -\frac{b' + \sqrt{\Delta'}}{2a}; x_2 = -\frac{b' - \sqrt{\Delta'}}{2a}$ .  
 B. Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1 = -\frac{b' + \sqrt{\Delta'}}{2a}; x_2 = -\frac{b' - \sqrt{\Delta'}}{2a}$ .  
 C. Phương trình có hai nghiệm  $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ .  
 D. Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ .

**Câu 7:** Hai xe khởi hành cùng một lúc, xe thứ nhất đến sớm hơn xe thứ hai 3 giờ. Nếu gọi thời gian đi của xe thứ nhất là  $x$  giờ thì thời gian của xe thứ hai là

- A.  $(x - 3)$  giờ.      B.  $3x$  giờ.      C.  $(3 - x)$  giờ.      D.  $(x + 3)$  giờ.

**Câu 8:** Số thứ nhất gấp 6 lần số thứ hai. Nếu gọi số thứ nhất là  $x$  thì số thứ hai là

- A.  $6x$ .      B.  $\frac{6}{x}$ .      C.  $\frac{x}{6}$ .      D.  $x + 6$ .

**II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU**

**Câu 9:** Nghiệm của phương trình  $2x^2 = 8$  là

- A.  $x = 4$ .      B.  $x = 2$ .      C.  $x = 2$  và  $x = -2$ .      D.  $x = 2$  và  $x = 4$ .

**Câu 10:** Phương trình nào sau đây nhận  $x = 1$  và  $x = -3$  làm nghiệm?

- A.  $2x^2 + 6x = 0$ .      B.  $x^2 - 2x + 1 = 0$ .      C.  $x^2 + 2x - 3 = 0$ .      D.  $\sqrt{3}x^2 + x - 3 = 0$ .

**Câu 11:** Cho hai phương trình sau đây:  $x^2 - 6x + 8 = 0$  (1);  $x^2 + 2x - 3 = 0$  (2). Câu trả lời đúng là

- A. Phương trình (1) có nghiệm kép, phương trình (2) vô nghiệm.
- B. Phương trình (1) vô nghiệm, phương trình (2) có nghiệm kép.
- C. Cả hai phương trình (1),(2) đều có nghiệm bằng 0.
- D. Cả hai phương trình (1),(2) đều có hai nghiệm phân biệt.

**Câu 12:** Phương trình  $x^2 - 7x + 12 = 0$  có tổng hai nghiệm là

- A. -4.
- B. 7.
- C. -3.
- D. -7.

**Câu 13:** Biệt thức  $\Delta'$  và số nghiệm của phương trình  $5x^2 - 6x + 1 = 0$  là

- A.  $\Delta' = 16$  và phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- B.  $\Delta' = 4$  và phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- C.  $\Delta' = 16$  và phương trình có nghiệm kép.
- D.  $\Delta' = 4$  và phương trình có nghiệm kép.

**Câu 14:** Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng  $\frac{2}{3}$  chiều dài, diện tích hình chữ nhật đó là  $5400 \text{ cm}^2$ , diện tích hình chữ nhật là  $5400 \text{ cm}^2$ . Chu vi hình chữ nhật là

- A. 300 cm.
- B. 250 cm.
- C. 350 cm.
- D. 400 cm.

### III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

**Câu 15:** Phương trình  $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 4.

**Câu 16:** Để phương trình  $2x^2 + ax - 3a^2 = 0$  có một nghiệm bằng  $-2$  thì các giá trị của  $a$  là

- A. -2.
- B.  $\frac{4}{3}$ .
- C. 2 hoặc  $\frac{4}{3}$ .
- D. -2 hoặc  $\frac{4}{3}$ .

**Câu 17:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$  vô nghiệm.

- A.  $m < -2$ .
- B.  $m > -2$ .
- C.  $m \leq -2$ .
- D.  $m \geq -2$ .

**Câu 18:** Một công nhân dự định làm 70 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng do áp dụng kỹ thuật nên đã tăng năng suất thêm 5 sản phẩm mỗi giờ. Do đó, không những hoàn thành kế hoạch trước thời hạn 40 phút mà còn làm thêm được 10 sản phẩm so với dự định. Tính năng suất dự định.

- A. 15 sản phẩm/giờ.
- B. 20 sản phẩm/giờ.
- C. 25 sản phẩm/giờ.
- D. 30 sản phẩm/giờ.

### III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

**Câu 19:** Tích các nghiệm của phương trình  $(x+2)(x+3)(x+5)(x+6) = 504$  là

- A. 2.
- B. -2.
- C. -9.
- D. 9.

**Câu 20:** Một thửa ruộng hình tam giác có diện tích  $180 \text{ m}^2$ . Tính chiều dài cạnh đáy thửa ruộng, biết rằng nếu tăng cạnh đáy lên 4 m và chiều cao tương ứng giảm đi 1 m thì diện tích không đổi.

- A. 35 m.
- B. 36 m.
- C. 37 m.
- D. 38 m.

## C. CÁC DẠNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Dạng 1. Nhận dạng và tìm hệ số của phương trình bậc hai một ẩn****Phương pháp giải**

- ❖ *Đưa phương trình đã cho về dạng  $ax^2 + bx + c = 0$ , từ đó đưa ra kết luận về dạng phương trình và các hệ số.*
- *Lưu ý: Phương trình bậc hai có hệ số  $a$  khác 0.*

**Bài 1.** Đưa các phương trình sau về dạng  $ax^2 + bx + c = 0$  và chỉ rõ các hệ số  $a, b, c$ .

a)  $3 - x^2 = 0$       b)  $x^2 - x = 3x + 1$       c)  $3x^2 - 4x = \sqrt{2}x + 2$       d)  $(x-1)^2 = 3(x+1)$ .

**Bài 2.** Đưa các phương trình sau về dạng  $ax^2 + bx + c = 0$  và chỉ rõ các hệ số  $a, b, c$ .

a)  $3x - x^2 = 0$       b)  $x^2 - 3x = 2x - 3$       c)  $3x^2 - 4x = \sqrt{2}x^2 - 2$ .

**Bài 3.** Đưa các phương trình sau về dạng  $ax^2 + bx + c = 0$  và tính tổng  $T = a + b + c$

a)  $25 - 4x^2 = 0$       b)  $x^2 - 4x = -5x + 2$       c)  $(x-1)^2 - 3x + 4 = 0$ .

**Bài 4.** Đưa các phương trình sau về dạng  $ax^2 + bx + c = 0$  và tính tổng  $T = a - b + c$

a)  $x^2 - 2x = 5$       b)  $x(x-5) - 6 = 0$       c)  $(x-2)^2 + 6 = 0$ .

**Bài 5.** Tìm  $m$  để phương trình sau là phương trình bậc hai một ẩn:

a)  $(m-1)x^2 - 3x + 4 = 0$       b)  $(2m+3)x^2 - mx + 7 = 0$

**Dạng 2. Giải các phương trình bậc hai****Phương pháp giải**

- ❖ *Với phương trình bậc hai khuyết  $b, c$ : Phân tích thành nhân tử để giải phương trình*
- ❖ *Với phương trình bậc hai đủ: Dùng công thức nghiệm, công thức nghiệm thu gọn để giải pt*

**Bài 6.** Giải các phương trình sau:

a)  $(x+1)^2 = 4$       b)  $x^2 - 2x = 0$       c)  $-3x^2 + 12 = 0$       d)  $4x^2 + 8x - 5 = 0$

**Bài 7.** Xác định các hệ số  $a, b, c$ ; tính biệt thức  $\Delta$ , từ đó áp dụng công thức nghiệm để giải các phương trình sau:

a)  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .      b)  $-2x^2 + x + 1 = 0$ .  
c)  $x^2 - 4x + 4 = 0$ .      d)  $x^2 - x + 4 = 0$ .

**Bài 8.** Xác định các hệ số  $a, b', c$ , tính biệt thức  $\Delta'$ , từ đó áp dụng công thức nghiệm thu gọn để giải các phương trình sau

a)  $x^2 - 6x + 5 = 0$       b)  $-3x^2 - 4x + 2 = 0$ .  
c)  $x^2 - 2\sqrt{3}x - 4 = 0$       d)  $x^2 - \sqrt{20}x + 5 = 0$ .

**Bài 9.** Chứng tỏ rằng khi một phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có các hệ số  $a$  và  $c$  trái dấu thì phương trình đó luôn có nghiệm. Áp dụng: Giải thích vì sao các phương trình sau đây có nghiệm

a)  $3x^2 + 2x - 5 = 0$ .

b)  $-x^2 + 3x + \sqrt{2} - 1 = 0$ .

c)  $5x^2 + 2x - m^2 - 1 = \sqrt{2}x + 2$ .

d)  $\sqrt{2}mx^2 + x - m = 0$  ( $m \neq 0$ ).

**Bài 10.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để phương trình sau có nghiệm là các giá trị  $x$  ghi trong ngoặc.

a)  $x^2 - 4x + m^2 = 0$

b)  $x^2 - (m+3)x + 2m + 1 = 0$

c)  $x^2 - mx + 4m + 7 = 0$ .

d)  $x^2 + (4-m)x + 3m + 5 = 0$

**Dạng 3. Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình có nghiệm, vô nghiệm, có nghiệm kép.**

**Phương pháp giải:**

Với phương trình :  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )

$$\Delta = b^2 - 4ac; \Delta' = b'^2 - ac$$

+ Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta(\Delta') > 0$

+ Phương trình có nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta(\Delta') \geq 0$

+ Phương trình có nghiệm kép  $\Leftrightarrow \Delta(\Delta') = 0$

+ Phương trình vô nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta(\Delta') < 0$

➤ **Chú ý:** Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có 1 nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0; b \neq 0 \\ a \neq 0; \Delta = 0 \end{cases}$

**Bài 11.** Tìm các giá trị của  $m$  để các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt :

a)  $x^2 - 3mx + m^2 - 1 = 0$

b)  $2x^2 + 4x - m = 0$

**Bài 12.** Tìm các giá trị của  $m$  để các phương trình sau có nghiệm kép.

a)  $(m+7)x^2 - 2(m-9)x - 7m + 15 = 0$

b)  $15x^2 - 90x + m = 0$

**Bài 13.** Tìm các giá trị của  $m$  để các phương trình sau vô nghiệm

a)  $3x^2 - 2x + m = 0$

b)  $x^2 + mx + 3 = 0$

**Bài 14.** Tìm  $m$  để phương trình sau có nghiệm

a)  $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 1 = 0$

b)  $x^2 - 2mx + 8 = 0$

**Bài 15.** Chứng tỏ rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số  $m$

a)  $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$  (1)

b)  $x^2 - 2x - m^2 - 2 = 0$  (3)

c)  $x^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$  (2)

d)  $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$  (4) (Với  $a, b, c$  là tham số)

**Dạng 4. Giải bài toán bằng cách lập phương trình****Phương pháp giải:****Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình**

- **Bước 1. Lập phương trình**
  - ✓ Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số;
  - ✓ Biểu diễn các dữ kiện chưa biết qua ẩn số;
  - ✓ Lập phương trình biểu thị tương quan giữa ẩn số và các dữ kiện đã biết;
- **Bước 2. Giải phương trình;**
- **Bước 3. Đối chiếu nghiệm của phương trình với điều kiện của ẩn số (nếu có) và với đề bài để đưa ra kết luận.**

**Bài 16.** Cho tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 15 cm. Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 3cm. Tìm độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

**Bài 17.** Trên một vùng biển được xem như bằng phẳng và không có chướng ngại vật. Vào lúc 6 giờ có một tàu cá đi thẳng qua tọa độ X theo hướng Từ Nam đến Bắc với vận tốc không đổi. Đến 7 giờ một tàu du lịch cũng đi thẳng qua tọa độ X theo hướng từ Đông sang Tây với vận tốc lớn hơn vận tốc tàu cá 12 km/h. Đến 8 giờ khoảng cách giữa hai tàu là 60 km. Tính vận tốc của mỗi tàu, biết hai phương Bắc – Nam và Đông – Tây vuông góc nhau.

**Bài 18.** Bác An đi xe máy từ nhà đến nơi làm việc cách nhau 60 km với vận tốc dự định trước. Sau khi đi được  $\frac{1}{3}$  quãng đường, do điều kiện thời tiết không thuận lợi nên trên quãng đường còn lại bác An phải đi với vận tốc ít hơn so với vận tốc dự định ban đầu 10 km/h. Tính vận tốc dự định của bác An khi đi từ nhà đến nơi làm việc, biết bác An đến nơi làm việc muộn hơn dự định 20 phút.

**Bài 19.** Cho một số có hai chữ số. Tổng hai chữ số của chúng bằng 9. Tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 58. Tìm số đã cho.

**Bài 20.** Nhằm phục vụ khán giả cổ vũ giải bóng đá, một xưởng may đặt ra kế hoạch may 1200 chiếc áo cổ động viên (cùng một mẫu) trong thời gian dự định. Trong 3 ngày đầu họ thực hiện may đúng kế hoạch đề ra. Vì muốn hoàn thành kế hoạch sớm 9 ngày nên trong những ngày còn lại họ phải may vượt mức dự định mỗi ngày 20 chiếc áo. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày xưởng đó cần may bao nhiêu chiếc áo?

**Bài 21.** Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 12 giờ, nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của đội thứ hai ít hơn đội thứ nhất là 7 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì thời gian để mỗi đội hoàn thành công việc là bao nhiêu?

**Bài 22.** Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 24 tấn hàng. Khi sắp khởi hành thì đoàn xe được điều thêm 6 chiếc xe nữa nên mỗi xe lúc đó phải chở ít hơn 2 tấn hàng so với dự định. Tính số xe thực tế tham gia vận chuyển (biết khối lượng hàng mỗi xe chở là như nhau).

**D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	B	C	C	C	A	D	D	C	C	C
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	D	B	B	A	C	D	A	A	C	B

**Câu 1:** Phương trình nào dưới đây là phương trình bậc hai một ẩn?

- A.  $3x^2 - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ .    **B.  $2x^2 - 2022 = 0$ .**    C.  $3x + \frac{1}{x} - 5 = 0$ .    D.  $4x - 1 = 0$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Vì chỉ có đáp án B có dạng  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) với  $a = 2, b = 0, c = -2022$  là phương trình bậc hai một ẩn.

**Câu 2:** Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.  $x^2 - 3 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0$  trong đó:  $a = 1; b = -4; c = -3$ .  
 B.  $\sqrt{2}x = 4x^2 + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$  trong đó:  $a = 4; b = -\sqrt{2}; c = 1$ .  
**C.  $-x^2 + 2 = 4x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$  trong đó:  $a = 1; b = -4; c = 5$ .**  
 D.  $\sqrt{5}x^2 - m = 1 \Leftrightarrow \sqrt{5}x^2 - m - 1 = 0$  trong đó:  $a = \sqrt{5}; b = 0; c = -m - 1$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Câu C sai vì  $-x^2 + 2 = 4x - 3 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0$ .

**Câu 3:** Có bao nhiêu phương trình trong các phương trình dưới đây là phương trình bậc hai một ẩn?

$$\sqrt{2}x^2 + 1 = 0; \quad 3y^2 - 2021 = 0; \quad x - \sqrt{x} + 4 = 0; \quad 2y^2 + 2x + 3 = 0.$$

- A. 0.    B. 1.    **C. 2.**    D. 3.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình bậc hai một ẩn là các phương trình:  $\sqrt{2}x^2 + 1 = 0; 3y^2 - 2021 = 0$ , vậy có hai phương trình bậc hai một ẩn.

**Câu 4:** Cho phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Phương trình đã

cho có nghiệm khi

- A.  $\Delta < 0$ .    B.  $\Delta = 0$ .    **C.  $\Delta \geq 0$ .**    D.  $\Delta > 0$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét phương trình bậc hai một ẩn  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) và biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac$

- TH1: Nếu  $\Delta < 0$  thì phương trình vô nghiệm.
- TH2: Nếu  $\Delta = 0$  thì phương trình có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ .
- TH3: Nếu  $\Delta > 0$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

**Câu 5:** Không dùng công thức nghiệm, tìm số nghiệm của phương trình  $4x^2 + 9 = 0$ ?

- A.** vô nghiệm.                      **B.** 1.                      **C.** 2.                      **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $4x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = -9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-9}{4} < 0$  (vô lí).

**Câu 6:** Giả sử  $x_1; x_2$  là hai nghiệm của phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  có  $\Delta' > 0$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Phương trình có hai nghiệm  $x_1 = -\frac{b' + \sqrt{\Delta'}}{2a}; x_2 = -\frac{b' - \sqrt{\Delta'}}{2a}$ .
- B.** Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1 = -\frac{b' + \sqrt{\Delta'}}{2a}; x_2 = -\frac{b' - \sqrt{\Delta'}}{2a}$ .
- C.** Phương trình có hai nghiệm  $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ .
- D.** Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ .

**Lời giải**

**Theo công thức nghiệm thu gọn ta chọn D**

**Câu 7:** Hai xe khởi hành cùng một lúc, xe thứ nhất đến sớm hơn xe thứ hai 3 giờ. Nếu gọi thời gian đi của xe thứ nhất là  $x$  giờ thì thời gian của xe thứ hai là

- A.**  $(x - 3)$  giờ.                      **B.**  $3x$  giờ.                      **C.**  $(3 - x)$  giờ.                      **D.**  $(x + 3)$  giờ.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Vì hai xe khởi hành cùng một lúc, xe thứ nhất đến sớm hơn xe thứ hai 3 giờ nên thời gian xe thứ hai đi nhiều hơn xe thứ nhất 3 giờ.

Nếu thời gian đi của xe thứ nhất là  $x$  giờ thì thời gian đi của xe thứ hai là  $x + 3$  giờ.

**Câu 8:** Số thứ nhất gấp 6 lần số thứ hai. Nếu gọi số thứ nhất là  $x$  thì số thứ hai là

A.  $6x$ .

B.  $\frac{6}{x}$ .

C.  $\frac{x}{6}$ .

D.  $x+6$ .

Lời giải

Chọn C.

Vì số thứ nhất gấp 6 lần số thứ hai nên số thứ hai bằng  $\frac{1}{6}$  lần số thứ nhất.

Vậy số thứ nhất là  $x$  thì số thứ hai là  $\frac{x}{6}$ .

**Câu 9:** Nghiệm của phương trình  $2x^2 = 8$  là

A.  $x = 4$ .

B.  $x = 2$ .

C.  $x = 2$  và  $x = -2$ .

D.  $x = 2$  và  $x = 4$ .

Lời giải

Chọn C

$$2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{2} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4} \\ x = -\sqrt{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:  $x = 2$  và  $x = -2$ .

**Câu 10:** Phương trình nào sau đây nhận  $x = 1$  và  $x = -3$  làm nghiệm?

A.  $2x^2 + 6x = 0$ .

B.  $x^2 - 2x + 1 = 0$ .

C.  $x^2 + 2x - 3 = 0$ .

D.  $\sqrt{3}x^2 + x - 3 = 0$ .

Lời giải

Chọn C

Phương trình nhận  $x = 1$  và  $x = -3$  làm nghiệm có dạng:  $(x-1)(x+3) = 0$  (\*)

Phương trình (\*)  $\Leftrightarrow x^2 + 3x - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ .

**Câu 11:** Cho hai phương trình sau đây:  $x^2 - 6x + 8 = 0$  (1);  $x^2 + 2x - 3 = 0$  (2). Câu trả lời

đúng là

A. Phương trình (1) có nghiệm kép, phương trình (2) vô nghiệm.

B. Phương trình (1) vô nghiệm, phương trình (2) có nghiệm kép.

C. Cả hai phương trình (1), (2) đều có nghiệm bằng 0.

D. Cả hai phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

Chọn D

Phương trình  $x^2 - 6x + 8 = 0$  có  $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 > 0$  nên phương trình có hai

nghiệm phân biệt  $x_1 = \frac{6-2}{2} = 2; x_2 = \frac{6+2}{2} = 4$ .

Phương trình  $x^2 + 2x - 3 = 0$  có  $\Delta = 2^2 - 4.1.(-3) = 16 > 0$  nên phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1 = \frac{-2-4}{2.1} = 2; x_2 = \frac{-2+4}{2.1} = 1$ .

**Câu 12:** Phương trình  $x^2 - 7x + 12 = 0$  có tổng hai nghiệm là

- A. -4.                      **B. 7.**                      C. -3.                      D. -7.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình  $x^2 - 7x + 12 = 0$  có  $\Delta = (-7)^2 - 4.1.12 = 49 - 48 = 1 > 0$  nên phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1 = \frac{7-1}{2} = 3; x_2 = \frac{7+1}{2} = 4$ .

Do đó tổng hai nghiệm của phương trình là  $3 + 4 = 7$ .

**Câu 13:** Biệt thức  $\Delta'$  và số nghiệm của phương trình  $5x^2 - 6x + 1 = 0$  là

- A.  $\Delta' = 16$  và phương trình có hai nghiệm phân biệt.  
**B.  $\Delta' = 4$  và phương trình có hai nghiệm phân biệt.**  
 C.  $\Delta' = 16$  và phương trình có nghiệm kép.  
 D.  $\Delta' = 4$  và phương trình có nghiệm kép.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $\Delta' = 3^2 - 5.1 = 4 > 0 \Rightarrow$  Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

**Câu 14:** Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng  $\frac{2}{3}$  chiều dài, diện tích hình chữ nhật đó là  $5400 \text{ cm}^2$ , diện

tích hình chữ nhật là  $5400 \text{ cm}^2$ . Chu vi hình chữ nhật là

- A. 300 cm.**                      B. 250 cm.                      C. 350 cm.                      D. 400 cm.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Gọi chiều dài hình chữ nhật là  $x$  (cm,  $x > 0$ ). Khi đó, chiều rộng hình chữ nhật là  $\frac{2}{3}x$  (cm).

Theo đầu bài, ta có phương trình

$$x \cdot \frac{2}{3}x = 5400 \Leftrightarrow x^2 = 8100$$

Giải ra ta được  $x = 90$  vì ( $x > 0$ ). Vậy chiều dài hình chữ nhật là 90 cm, chiều rộng hình chữ nhật là 60 cm. Do đó, chu vi hình chữ nhật là 300 cm.

**Câu 15:** Phương trình  $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.                      B. 1.                      **C. 2.**                      D. 4.

## Lời giải

## Chọn C

Đặt  $x^2 = t (t \geq 0)$  ta được phương trình:  $t^2 - 6t - 7 = 0$

$$\text{Phương trình: } t^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t+1=0 \\ t-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1(L) \\ t=7 \end{cases}$$

Với  $t=7$  ta có  $x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

**Câu 16:** Để phương trình  $2x^2 + ax - 3a^2 = 0$  có một nghiệm bằng  $-2$  thì các giá trị của  $a$  là .

- A.  $-2$ .                      B.  $\frac{4}{3}$ .                      C. 2 hoặc  $\frac{4}{3}$ .                      **D.  $-2$  hoặc  $\frac{4}{3}$ .**

## Lời giải

## Chọn D

Thay  $x = -2$  vào phương trình  $2x^2 + ax - 3a^2 = 0$  ta có  $8 - 2a - 3a^2 = 0$ .

Giải phương trình  $8 - 2a - 3a^2 = 0$  ta tìm được  $a = -2$  hoặc  $a = \frac{4}{3}$ .

**Câu 17:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$  vô nghiệm.

- A.  $m < -2$ .**                      B.  $m > -2$ .                      C.  $m \leq -2$ .                      D.  $m \geq -2$ .

## Lời giải

## Chọn A

Phương trình  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$  vô nghiệm khi  $\Delta' < 0$

$$\Leftrightarrow [-(m+1)]^2 - (m^2 - 3) < 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - m^2 + 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2m < -4$$

$$\Leftrightarrow m < -2.$$

**Câu 18:** Một công nhân dự định làm 70 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng do áp dụng kỹ thuật nên đã tăng năng suất thêm 5 sản phẩm mỗi giờ. Do đó, không những hoàn thành kế hoạch trước thời hạn 40 phút mà còn làm thêm được 10 sản phẩm so với dự định. Tính năng suất dự định.

- A. 15 sản phẩm/giờ.**                      B. 20 sản phẩm/giờ.                      C. 25 sản phẩm/giờ.                      D. 30 sản phẩm/giờ.

## Lời giải

## Chọn A.

Gọi năng suất dự định là  $x$  (sản phẩm/giờ,  $x \in \mathbb{N}^*$ );

Thời gian dự định làm 70 sản phẩm là  $\frac{70}{x}$  giờ.

Thời gian thực tế làm 80 sản phẩm với năng suất  $x+5$  (sản phẩm/giờ) là  $\frac{80}{x+5}$  giờ.

Theo đề bài, công nhân hoàn thành trước kế hoạch 40 phút ( $=\frac{2}{3}$  giờ).

Ta có phương trình:

$$\frac{70}{x} - \frac{80}{x+5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 + 20x - 525 = 0.$$

$\Delta = 20^2 - 4 \cdot (-525) = 2500 > 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = 15$  (nhận);  $x_2 = -35$  (loại).

Vậy năng suất dự định là 15 sản phẩm/giờ.

**Câu 19:** Tích các nghiệm của phương trình  $(x+2)(x+3)(x+5)(x+6) = 504$  là

A. 2.

B. -2.

C. -9.

D. 9.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình:

$$(x+2)(x+3)(x+5)(x+6) = 504$$

$$\Leftrightarrow [(x+2)(x+6)][(x+3)(x+5)] = 504$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 8x + 12)(x^2 + 8x + 15) = 504 \quad (*)$$

Đặt  $t = x^2 + 8x$ ,

Phương trình (\*) trở thành:

$$(t+12)(t+15) = 420 \Leftrightarrow t^2 + 27t + 180 = 504$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 27t - 324 = 0 \Leftrightarrow (t-9)(t+36) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = -32 \end{cases}$$

+) Với  $t = 9$  ta có:

$$x^2 + 8x = 9 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -9 \end{cases}$$

+) Với  $t = -32$  ta có:

$$x^2 + 8x = -32 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 8x + 16) + 16 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 + 16 = 0 \quad (**)$$

Vì  $(x+4)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , nên phương trình (\*\*) vô nghiệm.

Suy ra tập nghiệm của phương trình là:  $S = \{1; -9\}$

Vậy tích các nghiệm của phương trình đã cho là:  $1 \cdot (-9) = -9$ .

**Câu 20:** Một thửa ruộng hình tam giác có diện tích  $180 \text{ m}^2$ . Tính chiều dài cạnh đáy thửa ruộng, biết rằng nếu tăng cạnh đáy lên 4 m và chiều cao tương ứng giảm đi 1 m thì diện tích không đổi.

A. 35 m.

**B. 36 m.**

C. 37 m.

D. 38 m.

**Lời giải****Chọn B**Gọi độ dài cạnh đáy là:  $x(m), x > 0$ .Chiều cao của thửa ruộng là:  $\frac{360}{x}(m)$ .

Vì nếu tăng cạnh đáy lên 4 m, và chiều cao tương ứng giảm đi 4m thì diện tích không đổi nên ta có phương trình:

$$\frac{1}{2} \cdot (x+4) \cdot \left(\frac{36}{x}-1\right) = 180 \Leftrightarrow (x+4) \cdot \left(\frac{36}{x}-1\right) = 360$$

$$\Leftrightarrow 360 - x + \frac{1440}{x} - 4 = 360 \Leftrightarrow -x + \frac{1440}{x} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 4x + 1440 = 0 \Leftrightarrow -(x-36)(x+40) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-36=0 \\ x+40=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=36 \\ x=-40 (L) \end{cases}$$

Vậy chiều dài cạnh đáy của thửa ruộng đó là: 36m.

**E. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TỰ LUẬN****Bài 1.** Đưa các phương trình sau về dạng  $ax^2 + bx + c = 0$  và chỉ rõ các hệ số  $a, b, c$ .

a)  $3 - x^2 = 0$ . **ĐS:**  $-x^2 + 3 = 0$ , với  $a = -1, b = 0, c = 3$ .

b)  $x^2 - x = 3x + 1$ . **ĐS:**  $x^2 - 4x - 1 = 0$ , với  $a = 1, b = -4, c = -1$ .

c)  $3x^2 - 4x = \sqrt{2}x + 2$ . **ĐS:**  $3x^2 - (4 + \sqrt{2})x - 2 = 0$ , với  $a = 3, b = -4 - \sqrt{2}, c = -2$ .

d)  $(x-1)^2 = 3(x+1)$ . **ĐS:**  $x^2 - 5x - 2 = 0$ , với  $a = 1, b = -5, c = -2$ .

**Bài 2.** Đưa các phương trình sau về dạng  $ax^2 + bx + c = 0$  và chỉ rõ các hệ số  $a, b, c$ .

a)  $3x - x^2 = 0$ . **ĐS:**  $-x^2 + 3x = 0$ , với  $a = -1, b = 3, c = 0$ .

b)  $x^2 - 3x = 2x - 3$ . **ĐS:**  $x^2 - 5x + 3 = 0$ , với  $a = 1, b = -5, c = 3$ .

c)  $3x^2 - 4x = \sqrt{2}x^2 - 2$ . **ĐS:**  $(3 - \sqrt{2})x^2 - 4x + 2 = 0$ , với  $a = 3 - \sqrt{2}, b = -4, c = 2$ .

**Bài 3.** Đưa các phương trình sau về dạng  $ax^2 + bx + c = 0$  và tính tổng  $T = a + b + c$ 

a)  $25 - 4x^2 = 0$ . **ĐS:**  $-4x^2 + 25 = 0$  và  $T = 21$ .

b)  $x^2 - 4x = -5x + 2$ . **ĐS:**  $x^2 + x - 2 = 0$  và  $T = 0$ .

c)  $(x-1)^2 - 3x + 4 = 0$ . **ĐS:**  $x^2 - 5x + 5 = 0$  và  $T = 1$ .

**Bài 4.** Đưa các phương trình sau về dạng  $ax^2 + bx + c = 0$  và tính tổng  $T = a - b + c$ 

a)  $x^2 - 2x = 5$ . **ĐS:**  $x^2 - 2x - 5 = 0$  và  $T = -3$ .

b)  $x(x-5)-6=0$ .

ĐS:  $x^2-5x-6=0$  và  $T=0$ .

c)  $(x-2)^2+6=0$ .

ĐS:  $x^2-4x+10=0$  và  $T=15$

**Bài 5.** Tìm m để phương trình sau là phương trình bậc hai một ẩn:

a)  $(m-1)x^2-3x+4=0$

b)  $(2m+3)x^2-mx+7=0$

**Lời giải:**

a) Phương trình đã cho là phương trình bậc hai một ẩn khi  $m-1 \neq 0$  nên  $m \neq 1$

b) Phương trình đã cho là phương trình bậc hai một ẩn khi  $2m+3 \neq 0$  nên  $m \neq -\frac{3}{2}$

**Bài 6.** Giải các phương trình sau:

a)  $(x+1)^2=4$       b)  $x^2-2x=0$       c)  $-3x^2+12=0$       d)  $4x^2+8x-5=0$

**Lời giải.**

a) Ta có PT  $(x+1)^2=4 \Leftrightarrow x+1=\pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3. \end{cases}$

b) Biến đổi  $x^2-2x=0$  thành  $x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$  hoặc  $x-2=0$ , từ đó tìm được  $x=0; x=2$ .

c) Biến đổi  $-3x^2+12=0$  thành  $-3(x+2)(x-2)=0$  hoặc đưa về  $x^2=4$ , từ đó tìm được  $x=-2; x=2$ .

d) Biến đổi PT  $4x^2+8x-5=0$  thành  $x^2+2x=\frac{5}{4} \Leftrightarrow (x+1)^2=\frac{9}{4}$ , từ đó tìm được  $x=\frac{1}{2}; x=-\frac{5}{2}$ .

**Bài 7.** Xác định các hệ số  $a, b, c$ ; tính biệt thức  $\Delta$ , từ đó áp dụng công thức nghiệm để giải các phương trình sau:

a)  $x^2-3x+2=0$ .

b)  $-2x^2+x+1=0$ .

c)  $x^2-4x+4=0$ .

d)  $x^2-x+4=0$ .

**Lời giải.**

a) Ta có  $a=1, b=-3, c=2; \Delta=b^2-4ac=1$ , từ đó tìm được  $x_1=1; x_2=2$ .

b) Ta có  $a=-2, b=1, c=1; \Delta=b^2-4ac=9$ , từ đó tìm được  $x_1=1; x_2=\frac{-1}{2}$ .

c) Ta có  $a=1, b=-4, c=4; \Delta=b^2-4ac=0$ , từ đó tìm được  $x_1=x_2=2$ .

d) Ta có  $a=1, b=-1, c=4; \Delta=b^2-4ac=-15 < 0, \Rightarrow$  PT vô nghiệm.

**Bài 8.** Xác định các hệ số  $a, b', c$ , tính biệt thức  $\Delta'$ , từ đó áp dụng công thức nghiệm thu gọn để giải các phương trình sau

a)  $x^2-6x+5=0$ .

ĐS:  $\{1; 5\}$ .

b)  $-3x^2 - 4x + 2 = 0$ .

ĐS:  $\left\{ \frac{-4 + \sqrt{10}}{3}; \frac{-4 - \sqrt{10}}{3} \right\}$ .

c)  $x^2 - 2\sqrt{3}x - 4 = 0$ .

ĐS:  $\{\sqrt{3} - \sqrt{7}; \sqrt{3} + \sqrt{7}\}$ .

d)  $x^2 - \sqrt{20}x + 5 = 0$ .

ĐS:  $\{\sqrt{5}\}$ .

**Bài 9.** Chứng tỏ rằng khi một phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có các hệ số  $a$  và  $c$  trái dấu thì phương trình đó luôn có nghiệm. Áp dụng: Giải thích vì sao các phương trình sau đây có nghiệm

a)  $3x^2 + 2x - 5 = 0$ .

b)  $-x^2 + 3x + \sqrt{2} - 1 = 0$ .

c)  $5x^2 + 2x - m^2 - 1 = \sqrt{2}x + 2$ .

d)  $\sqrt{2}mx^2 + x - m = 0 (m \neq 0)$ .

**Lời giải.**

Do  $a \cdot c < 0 \Rightarrow -a \cdot c > 0$ . Ta có  $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 + 4(-ac) > 0 \Rightarrow$  Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

**Áp dụng:**

a) Do  $a \cdot c = 3(-5) = -15 < 0$

b) Do  $a \cdot c = -1(\sqrt{2} - 1) = 1 - \sqrt{2} < 0$ .

c) Do  $a \cdot c = 5(-m^2 - 3) < 0$

d) Do  $a \cdot c = -\sqrt{2} \cdot m^2 < 0$ .

**Bài 10.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để phương trình sau có nghiệm là các giá trị  $x$  ghi trong ngoặc.

a)  $x^2 - 4x + m^2 = 0 \quad m + 7 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -7 \quad (x = 1)$

b)  $x^2 - (m + 3)x + 2m + 1 = 0 \quad (x = 3)$

c)  $x^2 - mx + 4m + 7 = 0 \quad (x = 5)$ .

d)  $x^2 + (4 - m)x + 3m + 5 = 0 \quad (x = 2)$

**Lời giải:**

a) Thay  $x = 1$  vào phương trình ta được:  $1 - 4 + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 3 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$

b) Thay  $x = 3$  vào phương trình ta được:  $9 - (m + 3) + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -7$

c) Thay  $x = 5$  vào phương trình ta được:  $25 - 5m + 4m + 7 = 0 \Leftrightarrow m = -32$

d) Thay  $x = 2$  vào phương trình ta được:  $4 + (4 - m)2 + 3m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -17$

**Bài 11.** Tìm các giá trị của  $m$  để các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt :

a)  $x^2 - 3mx + m^2 - 1 = 0$

b)  $2x^2 + 4x - m = 0$

**Lời giải:**

a) Ta có :  $\Delta = (-3m)^2 - 4.(m^2 - 1) = 9m^2 - 4m^2 + 4 = 5m^2 + 4 > 0 \forall m$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$

b) Ta có :  $\Delta = 4^2 - 4.2.(-m) = 16 + 8m$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt nên  $\Delta = 16 + 8m > 0 \Leftrightarrow m > -2$

Vậy với  $m > -2$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

**Bài 12.** Tìm các giá trị của  $m$  để các phương trình sau có nghiệm kép.

a)  $(m+7)x^2 - 2(m-9)x - 7m + 15 = 0$     b)  $15x^2 - 90x + m = 0$

**Lời giải:**

a) ĐK để phương trình :  $(m+7)x^2 - 2(m-9)x - 7m + 15 = 0$  là phương trình bậc hai thì :

$$m+7 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -7$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \Delta' &= (m-9)^2 + (m+7)(7m-15) \\ &= m^2 - 18m + 81 + 7m^2 - 15m + 49m - 105 \\ &= 8m^2 + 16m - 24 = 8(m^2 + 2m - 3) \end{aligned}$$

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 8(m^2 + 2m - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(m+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$$

(thỏa mãn)

Vậy với  $m = 1$  hoặc  $m = -3$  thì phương trình có nghiệm kép

b) Ta có :

$$\Delta' = 45^2 - 15m = 2025 - 15m$$

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 2025 - 15m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 135$$

Vậy với  $m = 135$  thì phương trình có nghiệm kép

**Bài 13.** Tìm các giá trị của  $m$  để các phương trình sau vô nghiệm

b)  $3x^2 - 2x + m = 0$                       b)  $x^2 + mx + 3 = 0$

**Lời giải:**

a) Để phương trình vô nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta < 0$

Ta có :  $\Delta' = 1 - 3m$  ;  $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - 3m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{3}$

Vậy với  $m > \frac{1}{3}$  thì phương trình vô nghiệm

c) Để phương trình vô nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta < 0$

Ta có:  $\Delta = m^2 - 4.3 = m^2 - 12$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 < 12 \Rightarrow -\sqrt{12} < m < \sqrt{12}$$

Vậy với  $-\sqrt{12} < m < \sqrt{12}$  thì phương trình vô nghiệm

**Bài 14.** Tìm m để phương trình sau có nghiệm

a)  $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 1 = 0$                       b)  $x^2 - 2mx + 8 = 0$

**Lời giải:**

a) Phương trình có nghiệm :  $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

Ta có :  $\Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 1) = -2m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

b) Phương trình có nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

Ta có :  $\Delta' = m^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2\sqrt{2} \\ m \leq -2\sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$  Vậy với  $\begin{cases} m \geq 2\sqrt{2} \\ m \leq -2\sqrt{2} \end{cases}$  thì phương trình có nghiệm

**Bài 15.** Chứng tỏ rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m

a)  $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$  (1)                      b)  $x^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$  (2)

c)  $x^2 - 2x - m^2 - 2 = 0$  (3)

d)  $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$  (4) Với a,b,c là tham số

**Lời giải:**

a) Phương trình (1) có  $\Delta' = m^2 - 4m + 8 = (m-2)^2 + 4 > 0$  với mọi m nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Ta có:  $\Delta' = (m+1)^2 - (m-4) = m^2 + 2m + 1 - m + 4 = m^2 + m + 5$

$$\Delta' = m^2 + 2m \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{19}{4} = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0 \text{ với mọi m.}$$

Vậy phương trình (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt

c) Xét  $a.c = -m^2 - 2 < 0 \forall m$  nên phương trình (3) luôn có 2 nghiệm phân biệt

d) Biến đổi phương trình về dạng:  $x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca = 0$

Ta có:

$$\begin{aligned} \Delta' &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - ab - bc - ac \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc \\ &= \frac{1}{2} \left[ (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 \right] \geq 0 \forall a, b, c \end{aligned}$$

Vậy phương trình (4) luôn có nghiệm .

**Bài 16.** Cho tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 15 cm. Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 3cm. Tìm độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

**Lời giải.**

Gọi độ dài cạnh góc vuông nhỏ là  $x$  (cm) với  $0 < x < 15$ .

Vì hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 3cm nên độ dài cạnh góc vuông còn lại là  $x + 3$ (cm)

Vì tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 15 cm nên theo định lý Py – ta go ta có phương trình :  $x^2 + (x + 3)^2 = 15^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 6x + 9 = 225$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 216 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 108 = 0$$

$$\text{Ta có : } \Delta = 3^2 - 4 \cdot (-108) = 441 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 21$$

Phương trình trên có hai nghiệm :  $x_1 = \frac{-3+21}{2} = 9$  (thỏa mãn),  $x_2 = \frac{-3-21}{2} = -12$  (loại)

**Bài 17.** Trên một vùng biển được xem như bằng phẳng và không có chướng ngại vật. Vào lúc 6 giờ có một tàu cá đi thẳng qua tọa độ X theo hướng Từ Nam đến Bắc với vận tốc không đổi. Đến 7 giờ một tàu du lịch cũng đi thẳng qua tọa độ X theo hướng từ Đông sang Tây với vận tốc lớn hơn vận tốc tàu cá 12 km/h. Đến 8 giờ khoảng cách giữa hai tàu là 60 km. Tính vận tốc của mỗi tàu, biết hai phương Bắc – Nam và Đông –Tây vuông góc nhau.

**Lời giải:**

Gọi vận tốc của tàu cá là:  $x$  (km/h),  $x > 0$

Thì vận tốc của tàu du lịch là:  $x + 12$  (km/h)

Đến 8 giờ thì hai tàu cách nhau khoảng  $AB = 60$  km

Quãng đường tàu cá đã đi là:  $XA = (8 - 6)x = 2x$  (km)

Quãng đường tàu cá đã đi là:  $XB = (8 - 7)(x + 12) = x + 12$  (km)

Do hai phương Bắc – Nam và Đông –Tây vuông góc nhau nên theo định lý Pytago, ta có:

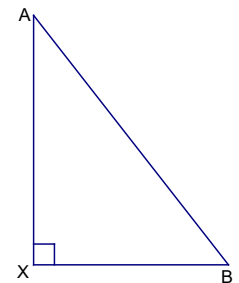
$$XA^2 + XB^2 = AB^2$$

$$\Leftrightarrow (2x)^2 + (x + 12)^2 = 60^2 \Leftrightarrow 5x^2 + 24x - 3456 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -28,8 \text{ (loại)} \quad x_2 = 24 \text{ (nhận)}$$

Vậy vận tốc của tàu cá và tàu du lịch lần lượt là: 24 km/h và 36 km/h

**Bài 18.** Bác An đi xe máy từ nhà đến nơi làm việc cách nhau 60 km với vận tốc dự định trước. Sau khi đi được  $\frac{1}{3}$  quãng đường, do điều kiện thời tiết không thuận lợi nên trên quãng đường còn lại bác An phải đi với vận tốc ít hơn so với vận tốc dự định ban đầu 10 km/h. Tính vận tốc dự định của bác An khi đi từ nhà đến nơi làm việc, biết bác An đến nơi làm việc muộn hơn dự định 20 phút.



**Lời giải:** Đổi 20 phút =  $\frac{1}{3}$  (giờ).

Gọi vận tốc dự định của bác An đi từ nhà đến nơi làm việc là  $x$  (km/h,  $x > 10$ );

Thời gian bác An dự định để đi từ nhà đến nơi làm việc là  $\frac{60}{x}$  (giờ).

Thời gian bác An đi trong  $\frac{1}{3}$  quãng đường đầu là  $\frac{20}{x}$  (giờ).

Thời gian bác An đi  $\frac{2}{3}$  quãng đường còn lại là  $\frac{40}{x-10}$  (giờ).

Theo bài ra ta có phương trình:  $\frac{20}{x} + \frac{40}{x-10} = \frac{60}{x} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{40}{x-10} = \frac{40}{x} + \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 1200 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ x = -30 \end{cases}$$

Ta thấy  $x = -30$  không thỏa mãn nên vận tốc dự định của bác An khi đi từ nhà đến nơi làm việc là 40 km/h.

**Bài 19.** Cho một số có hai chữ số. Tổng hai chữ số của chúng bằng 9. Tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 58. Tìm số đã cho.

**Lời giải:**

Gọi chữ số hàng chục là  $x$ , ( $x \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \leq 9$ ).

Khi đó chữ số hàng đơn vị là  $9 - x$ .

Tích của hai chữ số đó nhỏ hơn số đã cho là 58 đơn vị nên ta có phương trình:

$$x(9 - x) + 58 = 10x + (9 - x).$$

Giải phương trình này ta được  $x = -7$  (không thỏa đk) và  $x = 7$  (thỏa đk).

Vậy số cần tìm là 72.

**Bài 20.** Nhằm phục vụ khán giả cổ vũ giải bóng đá, một xưởng may đặt ra kế hoạch may 1200 chiếc áo cổ động viên (cùng một mẫu) trong thời gian dự định. Trong 3 ngày đầu họ thực hiện may đúng kế hoạch đề ra. Vì muốn hoàn thành kế hoạch sớm 9 ngày nên trong những ngày còn lại họ phải may vượt mức dự định mỗi ngày 20 chiếc áo. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày xưởng đó cần may bao nhiêu chiếc áo?

**Lời giải:**

Gọi số áo xưởng đó phải may mỗi ngày theo kế hoạch là  $x$  (chiếc/ngày),  $x \in \mathbb{N}^*$

Thời gian dự định may xong 1200 chiếc áo là  $\frac{1200}{x}$  (ngày)

Số áo xưởng may trong 3 ngày đầu là  $3x$  (chiếc)

Số áo xưởng cần phải may trong những ngày còn lại là:  $1200 - 3x$  (chiếc)

Những ngày còn lại, mỗi ngày xưởng phải may số áo là:  $x + 20$  (chiếc)

Số ngày còn lại để may xong  $(1200 - 3x)$  chiếc áo là:  $\frac{1200 - 3x}{x + 20}$  (ngày)

Vì thực tế xưởng hoàn thành sớm 9 ngày so với kế hoạch nên ta có phương trình:

$$\frac{1200}{x} = 3 + \frac{1200 - 3x}{x + 20} + 9$$

Giải phương trình được :  $x_1 = 40$  (thỏa mãn) ;  $x_2 = \frac{-200}{3}$  (loại)

**Bài 21.** Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 12 giờ, nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của đội thứ hai ít hơn đội thứ nhất là 7 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì thời gian để mỗi đội hoàn thành công việc là bao nhiêu?

**Lời giải:**

Gọi thời gian đội một làm một mình hoàn thành công việc là :  $x$  (giờ). ĐK:  $x > 12$ .

Thời gian đội hai làm một mình xong công việc là:  $x - 7$  (giờ)

Trong 1 giờ: + Đội một làm được:  $\frac{1}{x}$  (CV)

+ Đội hai làm được:  $\frac{1}{x-7}$  (CV)

+ Cả hai đội làm được:  $\frac{1}{12}$  (CV)

Ta có phương trình:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-7} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow x^2 - 31x + 84 = 0$

Giải phương trình ta được nghiệm:  $x_1 = 28$  (TM);  $x_2 = 3$  (KTM)

**Bài 22.** Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 24 tấn hàng. Khi sắp khởi hành thì đoàn xe được điều thêm 6 chiếc xe nữa nên mỗi xe lúc đó phải chở ít hơn 2 tấn hàng so với dự định. Tính số xe thực tế tham gia vận chuyển (biết khối lượng hàng mỗi xe chở là như nhau).

Gọi số chiếc xe theo dự định của đoàn xe là  $x$  (chiếc)

ĐK:  $x \in \mathbb{N}^*$

Số chiếc xe thực tế chuyên chở là  $x + 6$  (chiếc)

Theo dự định mỗi xe phải chở số tấn hàng là  $\frac{24}{x}$  (tấn)

Thực tế mỗi xe phải chở số tấn hàng là  $\frac{24}{x+6}$  (tấn)

Do thực tế mỗi xe chở ít hơn dự định là 2 tấn nên ta có phương trình:

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x+6} = 2$$

$$\Rightarrow 24(x+6) - 24x = 2(x^2 + 6x) \Leftrightarrow x^2 + 6x - 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -12 \end{cases}$$

Ta thấy  $x = -12$  không thỏa mãn

Vậy thực tế đoàn xe có  $6 + 6 = 12$  chiếc xe.

# BÀI 3. ĐỊNH LÝ VIÈTE

## A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### Kiến thức cần nhớ

#### 1.1. Hệ thức Vi-ét

Phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Đảo lại nếu hai số  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $\begin{cases} S = x_1 + x_2 \\ P = x_1 x_2 \end{cases}$  thì  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình

$x^2 - Sx + P = 0$  (điều kiện  $S^2 - 4P \geq 0$ ).

#### 1.2. Nhẩm nghiệm của một phương trình bậc hai.

Xét phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )

- Nếu  $a + b + c = 0$  thì phương trình có hai nghiệm là  $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$

- Nếu  $a - b + c = 0$  thì phương trình có hai nghiệm là  $x_1 = -1, x_2 = \frac{-c}{a}$

#### 1.3. Tìm hai số biết tổng và tích.

Nếu hai số có tổng bằng  $S$  và tích bằng  $P$  thì hai số đó là nghiệm của phương trình  $x^2 - Sx + P = 0$ . Điều kiện để có hai số đó là  $\Delta = S^2 - 4P \geq 0$

*Chú ý.* Trước khi sử dụng định lý Viet, chúng ta cần kiểm tra điều kiện phương trình có nghiệm, nghĩa là  $\Delta \geq 0$ .

## B. CÂU TẬP TRẮC NGHIỆM

### I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

**Câu 1.** Hãy chọn đáp án đúng. Nếu phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có hai nghiệm  $x_1; x_2$  thì.

A.  $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

B.  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

C.  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{a}{c} \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$

**Câu 2.** Hai số  $x_1, x_2$  có tổng là  $S$  và tích là  $P$  (Điều kiện  $S^2 - 4P \geq 0$ ). Thì  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình?

A.  $x^2 + Sx + P = 0$

B.  $x^2 - Sx + P = 0$

C.  $x^2 + Sx - P = 0$

D.  $x^2 - Sx - P = 0$



A. 5

B. -5

C.  $\frac{13}{3}$ 

D. -1

**Câu 14.** Phương trình nào dưới đây có hai nghiệm  $3 + \sqrt{2}$  và  $3 - \sqrt{2}$ ?

A.  $x^2 - 6x + 7 = 0$

B.  $x^2 + 6x + 7 = 0$

C.  $x^2 - 7x + 6 = 0$

D.  $x^2 + 7x - 6 = 0$

### III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

**Câu 15.** Gọi  $x_1; x_2$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - 5x + 2 = 0$ . Không giải phương trình tính giá trị của biểu thức  $A = x_1^2 + x_2^2$ .

A. 20.

B. 21.

C. 22.

D. 22.

**Câu 16.** Gọi  $x_1; x_2$  là nghiệm của phương trình  $-2x^2 - 6x - 1 = 0$ . Không giải phương trình tính giá trị của biểu thức  $N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3}$

A. 6.

B. 2.

C. 5.

D. 4.

**Câu 17.** Tập hợp các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 2x + m - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1 x_2| = 1$  là

A.  $\{2\}$ .B.  $\{0; 2\}$ .C.  $\{0\}$ .D.  $m < 2$ .

**Câu 18.** Giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 2mx - 1 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1 + x_2| = 1$  là

A.  $m = \frac{1}{2}$ .

B.  $m = \frac{-1}{2}$ .

C.  $m = \frac{\pm 1}{2}$ .

D.  $m = 2$ .

### III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

**Câu 19.** Giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 2mx - 1 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) thỏa mãn  $|x_1| - |x_2 + 2021| = -2022$  là

A.  $m = \frac{1}{2}$ .

B.  $m = \frac{-1}{2}$ .

C.  $m = \frac{\pm 1}{2}$ .

D.  $m = 2$ .

**Câu 20.** Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình  $x^2 - 5x + m + 4 = 0$  có hai nghiệm  $x_1; x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 = 23$ .

A.  $m = -2$ .B.  $m = -1$ .C.  $m = -3$ .D.  $m = -4$ .

## C. CÁC DẠNG TỰ LUẬN

**Dạng 1. Giải phương trình bậc hai bằng cách nhẩm nghiệm**

Phương pháp giải:

- Nếu  $a + b + c = 0$  thì phương trình có hai nghiệm là:  $x_1 = 1$  ;  $x_2 = \frac{c}{a}$
- Nếu  $a + b + c = 0$  thì phương trình có hai nghiệm là:  $x_1 = -1$  ;  $x_2 = -\frac{c}{a}$

**Bài 1.** Nhẩm nghiệm các phương trình sau:

- |                         |                        |
|-------------------------|------------------------|
| a) $x^2 - 3x + 2 = 0$   | b) $x^2 - 3x - 4 = 0$  |
| c) $2x^2 + 7x + 5 = 0$  | d) $6x^2 - 5x - 1 = 0$ |
| e) $3x^2 + 7x - 10 = 0$ | f) $3x^2 + 4x + 1 = 0$ |

**Bài 2.** Nhẩm nghiệm các phương trình sau:

- |  |  |
|--|--|
| a) $x^2 + \sqrt{2}x - 1 + \sqrt{2} = 0$                  | b) $\sqrt{3}x^2 - x + 1 - \sqrt{3} = 0$                |
| c) $\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{3} = 0$ | d) $(\sqrt{2} + 1)x^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1 = 0$ |

**Bài 3.** Cho phương trình  $x^2 - mx + m - 1 = 0$ . Chứng minh phương trình luôn có một nghiệm không phụ thuộc vào  $m$ . Tìm nghiệm còn lại.**Bài 4.** Cho phương trình  $-x^2 + mx + m + 1 = 0$ . Chứng minh phương trình luôn có một nghiệm không phụ thuộc vào  $m$ . Tìm nghiệm còn lại.**Bài 5.** Cho phương trình  $x^2 - (\sqrt{2}m + 2)x + \sqrt{2}m + 1 = 0$ . Chứng minh phương trình luôn có một nghiệm không phụ thuộc vào  $m$ . Tìm nghiệm còn lại.**Dạng 2. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức đối xứng giữa các nghiệm**

Phương pháp giải

- **Bước 1:** Chứng tỏ phương trình luôn có nghiệm
- **Bước 2:** Áp dụng hệ thức Viète tính  $x_1 + x_2$  và  $x_1 x_2$
- **Bước 3:** Biến đổi biểu thức đối xứng giữa các nghiệm của đề bài theo tổng  $x_1 + x_2$  và  $x_1 x_2$  rồi áp dụng bước 2.

Một số hằng đẳng thức thường vận dụng:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$          | 2) $A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB$         |
| 3) $(A - B)^2 = (A + B)^2 - 4AB$         | 4) $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 + B^2 - AB)$ |
| 5) $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + B^2 + AB)$ | 6) $ A  =  -A $                          |
| 7) $ A ^2 = A^2$                         | 8) $ A \pm B ^2 = (A \pm B)^2$           |

**Bài 6.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 + 5x - 2 = 0$ . Không giải phương trình, tính các giá trị của các biểu thức sau:

a)  $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

b)  $B = x_1^2 + x_2^2$

c)  $C = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

d)  $D = x_1^3 + x_2^3$

e)  $E = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$

f)  $F = |x_1 - x_2|$

**Bài 7.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 3x - 7 = 0$ . Không giải phương trình, hãy tính các giá trị của các biểu thức sau:

a)  $M = x_1^4 + x_2^4$

b)  $N = (3x_1 + x_2)(3x_2 + x_1)$

**Bài 8.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $3x^2 + 5x - 6 = 0$ . Không giải phương trình, tính các giá trị của các biểu thức sau:

a)  $P = \frac{x_1 + 2}{x_1} + \frac{x_2 + 2}{x_2}$

b)  $Q = \frac{x_2}{x_1 - 1} + \frac{x_1}{x_2 - 1}$

**Bài 9.** Cho phương trình  $x^2 - 12x + 4 = 0$  có hai nghiệm dương phân biệt  $x_1, x_2$ . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$ .

**Bài 10.** Cho phương trình  $x^2 + 3x - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức  $Q = \frac{3|x_1 - x_2|}{x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2}$ .

### Dạng 3. Tìm hai số biết tổng và tích. Lập phương trình bậc hai nhận hai số cho trước làm nghiệm

#### Phương pháp giải

Nếu hai số  $u, v$  có  $u + v = S$  và  $uv = P$  thì  $u, v$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - Sx + P = 0$

Điều kiện để có hai số là:  $S^2 - 4P \geq 0$

**Bài 11.** Tìm hai số  $u$  và  $v$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $u + v = 5$  và  $uv = -14$

b)  $u + v = 5$  và  $uv = -24$

c)  $u + v = -6$  và  $uv = -16$

d)  $u + v = 1$  và  $uv = \frac{1}{4}$

**Bài 12.** Tìm hai số  $a$  và  $b$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $a - b = 5$  và  $ab = 36$

b)  $a + b = 9$  và  $a^2 + b^2 = 41$

c)  $a^2 + b^2 = 61$  và  $ab = 30$

**Bài 13.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $2 + \sqrt{3}$  và  $2 - \sqrt{3}$ .

**Bài 14.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\sqrt{2} - 1$  và  $\sqrt{2} + 1$ .

**Bài 15.** Cho phương trình  $x^2 - 4x + 2 = 0$  có hai nghiệm là  $x_1$  và  $x_2$ . Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\frac{1}{x_1}$  và  $\frac{1}{x_2}$ .

**Bài 16.** Cho phương trình  $x^2 - 3x + 1 = 0$  có hai nghiệm là  $x_1$  và  $x_2$ . Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  và  $x_1^2 + x_2^2$ .

**Bài 17.** Cho phương trình  $x^2 + 5x - m = 0$  ( $m$  là tham số) có hai nghiệm là  $x_1$  và  $x_2$ . Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\frac{x_1}{x_2 + 1}$  và  $\frac{x_2}{x_1 + 1}$ .

**Dạng 4. Lập hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình không phụ thuộc vào tham số (độc lập với tham số)**

**Phương pháp giải**

- **Bước 1:** Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm
- **Bước 2:** Áp dụng hệ thức Viète tính  $x_1 + x_2$  và  $x_1 x_2$
- **Bước 3:** Khử tham số từ hệ thức Viète ta được hệ thức cần lập

**Bài 18.** Cho phương trình  $x^2 + (m+1)x + m - 2 = 0$  ( $m$  là tham số). Giả sử  $x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình, hãy lập hệ liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào  $m$ .

**Bài 19.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$ . Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình không phụ thuộc vào giá trị của  $m$ .

**Bài 20.** Cho phương trình  $x^2 - (m-1)x + 2m - 3 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào  $m$ .

**Bài 21.** Cho phương trình bậc hai:  $x^2 - 2mx - m^2 - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Hãy tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình mà không phụ thuộc vào  $m$ .

**Bài 22.** Cho phương trình  $x^2 + 2(m-1)x + m^2 + 2 = 0$  ( $m$  là tham số). Hãy tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình mà không phụ thuộc vào  $m$ .

**Bài 23.** Cho phương trình  $(m-1)x^2 - 2(m-4)x + m - 5 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình không phụ thuộc  $m$

**Dạng 5. Tìm giá trị của tham số để phương trình có nghiệm thỏa mãn hệ thức đối xứng giữa hai nghiệm**

**Phương pháp giải**

- **Bước 1:** Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm
- **Bước 2:** Áp dụng hệ thức Viète tính  $x_1 + x_2$ ;  $x_1 x_2$
- **Bước 3:** Biến đổi hệ thức đề bài cho về dạng chỉ chứa tổng và tích các nghiệm rồi thay hệ thức Viète vào để tìm giá trị của tham số

**Bài 24.** Cho phương trình  $x^2 - 4x + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn:  $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 25$

- Bài 25.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 4 = 0$ . Tìm giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1(x_1 - 3) + x_2(x_2 - 3) = 6$
- Bài 26.** Cho phương trình  $x^2 - 4x + m - 2 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 2$
- Bài 27.** Cho phương trình  $x^2 - 2x + m + 3 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn hệ thức  $x_1^3 + x_2^3 = 8$
- Bài 28.** Cho phương trình  $x^2 - 5x + m = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1 - x_2| = 3$ .
- Bài 29.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 3 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1| + |x_2| = 10$ .
- Bài 30.** Cho phương trình  $x^2 - mx + m - 4 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn:  $(5x_1 - 1)(5x_2 - 1) < 0$ .
- Bài 31.** Cho phương trình  $x^2 + mx + m - 2 = 0$  ( $m$  là tham số). Giả sử phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ , chứng minh rằng:  $P = x_1^2 + x_2^2 \geq 3$ .
- Bài 32.** Cho phương trình  $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  sao cho biểu thức  $P = 2|x_2 - x_1|$  đạt giá trị nhỏ nhất.
- Bài 33.** Cho phương trình  $x^2 + 5x + m + 2 = 0$  ( $m$  là tham số). Giả sử phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$ , chứng minh rằng  $P = (x_1 - x_2)^2 + 8x_1x_2 \leq 50$ .
- Bài 34.** Cho phương trình  $x^2 - 2mx + m^2 - m + 3 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  và biểu thức  $P = x_1x_2 - x_1 - x_2$  đạt giá trị nhỏ nhất.
- Bài 35.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  và biểu thức  $P = (m+1)(x_1 + x_2) - x_1x_2 - 2m^2 - 1$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Dạng 6. Tìm giá trị của tham số để phương trình có nghiệm thỏa mãn hệ thức không đối xứng giữa hai nghiệm**

**Phương pháp giải**

- **Bước 1:** Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm
- **Bước 2:**
  - Áp dụng hệ thức Viète tính:  $x_1 + x_2$ ;  $x_1x_2$
  - Sử dụng  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  suy ra:

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_1^2 = -bx_1 - c \\ ax_2^2 = -bx_2 - c \end{cases}$$

- **Bước 3:** Từ hệ thức Viète và điều kiện  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình thay thế một cách hợp lý vào hệ thức đề bài cho để tìm giá trị của tham số

- Bài 36.** Cho phương trình  $x^2 - 4x - m^2 - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  phân biệt thỏa mãn  $x_2 = -5x_1$ .
- Bài 37.** Cho phương trình  $x^2 + 2x + 2m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn:  $x_1 - 2x_2 = 7$ .
- Bài 38.** Cho phương trình  $x^2 - 2x - 2m^2 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm giá trị của  $m$  để hai nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình thỏa hệ thức  $x_1^2 = 4x_2^2$ .
- Bài 39.** Cho phương trình  $x^2 - (2m+1)x + m^2 - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn:  $(x_1^2 - 2mx_1 + m^2)(x_2 + 1) = 1$
- Bài 40.** Cho phương trình  $x^2 - x + m + 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm phân biệt của phương trình, tìm các giá trị của  $m$  sao cho  $x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2 = 7$ .
- Bài 41.** Cho phương trình  $x^2 - 6x + m + 3 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  phân biệt thỏa mãn  $x_2 = x_1^2$ .
- Bài 42.** Cho phương trình  $x^2 + 4x + 4m - m^2 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  phân biệt thỏa mãn  $x_1 = x_2^2 - 6$ .

### Dạng 7. Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai

#### Phương pháp giải

Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ).

$$\text{Đặt: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Ta có:

➤ Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi:  $P < 0$  (hoặc  $ac < 0$ )

➤ Phương trình có hai nghiệm cùng dấu khi:  $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

➤ Phương trình có hai nghiệm cùng dương khi:  $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

➤ Phương trình có hai nghiệm cùng âm khi:  $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$

- Bài 43.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-7)x + m^2 - 4 = 0$  ( $m$  là tham số). Xác định  $m$  để phương trình
- Có hai nghiệm trái dấu.
  - Có hai nghiệm cùng dấu.
- Bài 44.** Cho phương trình  $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình
- Có hai nghiệm khác dấu
  - Có hai nghiệm phân biệt đều âm
  - Có hai nghiệm phân biệt đều dương
- Bài 45.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$  (với  $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm cùng dấu. Khi đó hai nghiệm mang dấu gì?
- Bài 46.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 3 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  trái dấu.
- Bài 47.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x - m = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau.
- Bài 48.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m+3)x + 4m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm dương.
- Bài 49.** Cho phương trình  $(m+1)x^2 - 3mx + 4m = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

**Dạng 8. So sánh các nghiệm của phương trình với một số cho trước**

**Phương pháp giải**

Giả sử  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ). Khi đó:

$$\text{➤ } x_1, x_2 \text{ cùng nhỏ hơn } \alpha \text{ khi: } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 2\alpha \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$\text{➤ } x_1, x_2 \text{ cùng lớn hơn } \alpha \text{ khi: } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 2\alpha \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$\text{➤ } x_1 < \alpha < x_2 \text{ khi: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \end{cases}$$

- Bài 50.** Cho Cho phương trình  $x^2 + 2(m-1)x - (m+1) = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình
- Có một nghiệm nhỏ hơn 1, một nghiệm lớn hơn 1.
  - Có hai nghiệm nhỏ hơn 2.

- Bài 51.** Cho phương trình  $2x^2 + (m^2 - 3)x - 4 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 < 1 < x_2$
- Bài 52.** Cho phương trình  $x^2 + mx + 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có ít nhất một nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2.
- Bài 53.** Cho phương trình  $x^2 + mx + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có ít nhất một nghiệm nhỏ hơn hoặc bằng  $-2$
- Bài 54.** Cho phương trình  $x^2 + (m + 2)x - m - 4 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 < 0 \leq x_2$ .
- Bài 55.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 5 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 < -1 < x_2$
- Bài 56.** Cho phương trình  $x^2 - (m + 3)x + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn  $x_1 < -\frac{3}{2} < x_2$

**C. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT CÂU TẬP TRẮC NGHIỆM PHẦN VẬN DỤNG**

<b>Câu</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>Đáp án</b>	<b>B</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>A</b>	<b>A</b>	<b>A</b>	<b>A</b>	<b>A</b>	<b>A</b>	<b>B</b>
<b>Câu</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>
<b>Đáp án</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>A</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>C</b>

**Câu 15.** Gọi  $x_1; x_2$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - 5x + 2 = 0$ . Không giải phương trình tính giá trị của biểu thức  $A = x_1^2 + x_2^2$ .

- A. 20.                      B. 21.                      C. 22.                      D. 22.

**Đáp án :** Phương trình  $x^2 - 5x + 2 = 0$  có  $\Delta = (-5)^2 - 4.1.2 = 17 > 0$  nên phương trình có hai nghiệm  $x_1; x_2$

Theo hệ thức Vi-et ta có 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases}$$

Ta có  $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5^2 - 2.2 = 21$

**Câu 16.** Gọi  $x_1; x_2$  là nghiệm của phương trình  $-2x^2 - 6x - 1 = 0$ . Không giải phương trình tính giá trị của biểu thức  $N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3}$

- A. 6.                      B. 2.                      C. 5.                      D. 4.

**Đáp án:** Phương trình  $-2x^2 - 6x - 1 = 0$  có  $\Delta = (-6)^2 - 4.(-2).(-1) = 28 > 0$  nên phương trình có hai nghiệm  $x_1; x_2$

Theo hệ thức Vi-et ta có 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có  $N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3} = \frac{x_1 + x_2 + 6}{x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9} = \frac{-3 + 6}{\frac{1}{2} + 3.(-3) + 9} = 6$

**Câu 17.** Tập hợp các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 2x + m - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1x_2| = 1$  là

A.  $\{2\}$ .

B.  $\{0; 2\}$ .

C.  $\{0\}$ .

D.  $m < 2$ .

**Đáp án:** Phương trình  $x^2 - 2x + m - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt khi  $\Delta' = 2 - m > 0 \Rightarrow m < 2$  Khi đó:

$$|x_1 x_2| = 1 \Rightarrow |m - 1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow m = 0 (t/m)$$

$$\text{Ta có } N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3} = \frac{x_1 + x_2 + 6}{x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9} = \frac{-3 + 6}{\frac{1}{2} + 3 \cdot (-3) + 9} = 6$$

**Câu 18.** Giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 2mx - 1 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1 + x_2| = 1$  là

A.  $m = \frac{1}{2}$ .

B.  $m = \frac{-1}{2}$ .

C.  $m = \frac{\pm 1}{2}$ .

D.  $m = 2$ .

**Đáp án:** Phương trình  $x^2 - 2mx - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$  Khi đó:

$$|x_1 + x_2| = 1 \Rightarrow |2m| = 1 \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

**Câu 19.** Giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 2mx - 1 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) thỏa mãn  $|x_1| - |x_2 + 2021| = -2022$  là

A.  $m = \frac{1}{2}$ .

B.  $m = \frac{-1}{2}$ .

C.  $m = \frac{\pm 1}{2}$ .

D.  $m = 2$ .

**Đáp án:** Phương trình  $x^2 - 2mx - 1 = 0$  vì  $ac = -1 < 0$  nên pt có hai nghiệm phân biệt trái dấu với mọi  $m$  mà  $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 < 0 < x_2$

$$\text{Khi đó: } |x_1| - |x_2 + 2021| = -2022 \Rightarrow x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

**Câu 20.** Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình  $x^2 - 5x + m + 4 = 0$  có hai nghiệm  $x_1; x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 = 23$ .

A.  $m = -2$ .

B.  $m = -1$ .

C.  $m = -3$ .

D.  $m = -4$ .

**Đáp án.** Phương trình  $x^2 - 5x + m + 4 = 0$  có  $a = 1 \neq 0$  và  $\Delta = 25 - 4(m + 4) = 9 - 4m$

Phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  khi  $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{9}{4}$

Theo hệ thức Vi-ét ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = m + 4 \end{cases}$

$$\text{Xét } x_1^2 + x_2^2 = 23 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 23 \Leftrightarrow 25 - 2m - 8 = 23 \Leftrightarrow m = -3 (TM)$$

### E. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Dạng 1. Giải phương trình bậc hai bằng cách nhẩm nghiệm**

**Bài tập 1.** Nhẩm nghiệm các phương trình sau:

a)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

b)  $x^2 - 3x - 4 = 0$

c)  $2x^2 + 7x + 5 = 0$

d)  $6x^2 - 5x - 1 = 0$

e)  $3x^2 + 7x - 10 = 0$

f)  $3x^2 + 4x + 1 = 0$

**Đáp số:**

a)  $\{1; 2\}$

b)  $\{-1; 4\}$

c)  $\left\{-1; -\frac{5}{2}\right\}$

d)  $\left\{1; -\frac{1}{6}\right\}$

e)  $\left\{1; -\frac{10}{3}\right\}$

f)  $\left\{-1; -\frac{1}{3}\right\}$

**Bài tập 2.** Nhằm nghiệm các phương trình sau:

a)  $x^2 + \sqrt{2}x - 1 + \sqrt{2} = 0$

b)  $\sqrt{3}x^2 - x + 1 - \sqrt{3} = 0$

c)  $\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{3} = 0$

d)  $(\sqrt{2} + 1)x^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1 = 0$

**Đáp số:**

a)  $\{1; -1 + \sqrt{2}\}$

b)  $\left\{1; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right\}$

c)  $\left\{-1; \frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$

d)  $\{1; 3 - 2\sqrt{2}\}$

**Bài tập 3.** Cho phương trình  $x^2 - mx + m - 1 = 0$ . Chứng minh phương trình luôn có một nghiệm không phụ thuộc vào  $m$ . Tìm nghiệm còn lại.

**Lời giải**

Nhận thấy phương trình có:  $a + b + c = 1 + (-m) + (m - 1) = 0$

Vậy phương trình luôn có một nghiệm  $x_1 = 1$  không phụ thuộc vào  $m$  và nghiệm còn lại là  $x_2 = m - 1$

**Bài tập 4.** Cho phương trình  $-x^2 + mx + m + 1 = 0$ . Chứng minh phương trình luôn có một nghiệm không phụ thuộc vào  $m$ . Tìm nghiệm còn lại.

**Lời giải**

Nhận thấy phương trình có:  $a - b + c = -1 - m + (m + 1) = 0$

Vậy phương trình luôn có một nghiệm  $x_1 = -1$  không phụ thuộc vào  $m$  và nghiệm còn lại là  $x_2 = m + 1$

**Bài tập 5.** Cho phương trình  $x^2 - (\sqrt{2}m + 2)x + \sqrt{2}m + 1 = 0$ . Chứng minh phương trình luôn có một nghiệm không phụ thuộc vào  $m$ . Tìm nghiệm còn lại.

**Lời giải**

Nhận thấy phương trình có:  $a + b + c = 1 + (-\sqrt{2}m - 2) + (\sqrt{2}m + 1) = 0$

Vậy phương trình luôn có một nghiệm  $x_1 = 1$  không phụ thuộc vào  $m$  và nghiệm còn lại là  $x_2 = \sqrt{2}m + 1$

**Dạng 2.** Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức đối xứng giữa các nghiệm

**Bài tập 6.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình:  $x^2 + 5x - 2 = 0$ . Không giải phương trình, tính các giá trị của các biểu thức sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} & \text{b) } B = x_1^2 + x_2^2 & \text{c) } C = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \\ \text{d) } D = x_1^3 + x_2^3 & \text{e) } E = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} & \text{f) } F = |x_1 - x_2| \end{array}$$

### Lời giải

Nhận thấy  $ac = -2 < 0$  nên phương trình luôn có hai nghiệm khác dấu.

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{a) } A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{b) } B = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-5)^2 - 2 \cdot (-2) = 29$$

$$\text{c) } C = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{29}{(-2)^2} = \frac{29}{4}$$

$$\text{d) } D = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) = (-5)(29 + 2) = -155$$

$$\text{e) } E = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 x_2)^3} = \frac{-155}{(-2)^3} = \frac{155}{8}$$

$$\text{f) } F = |x_1 - x_2| \geq 0$$

$$F^2 = |x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (-5)^2 - 4(-2) = 33$$

Suy ra:  $F = \sqrt{33}$  (vì  $F \geq 0$ )

**Bài tập 7.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình:  $x^2 - 3x - 7 = 0$ . Không giải phương trình, hãy tính các giá trị của các biểu thức sau:

$$\text{a) } M = x_1^4 + x_2^4 \qquad \text{b) } N = (3x_1 + x_2)(3x_2 + x_1)$$

### Lời giải

Nhận thấy  $ac = -7 < 0$  nên phương trình luôn có hai nghiệm khác dấu.

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = -7 \end{cases}$$

$$\text{a) } M = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \left[ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \right]^2 - 2(x_1 x_2)^2$$

$$= [3^2 - 2(-7)]^2 - 2(-7)^2 = 71$$

$$\begin{aligned} \text{b) } N &= (3x_1 + x_2)(3x_2 + x_1) = 9x_1x_2 + 3x_1^2 + 3x_2^2 + x_1x_2 = 3[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] + 10x_1x_2 \\ &= 3(x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 = 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot (-7) = 1 \end{aligned}$$

**Bài tập 8.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình:  $3x^2 + 5x - 6 = 0$ . Không giải phương trình, tính các giá trị của các biểu thức sau:

$$\text{a) } P = \frac{x_1 + 2}{x_1} + \frac{x_2 + 2}{x_2}$$

$$\text{b) } Q = \frac{x_2}{x_1 - 1} + \frac{x_1}{x_2 - 1}$$

### Lời giải

Nhận thấy  $ac = -6 < 0$  nên phương trình luôn có hai nghiệm khác dấu.

$$\text{Theo định lí Viète, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{5}{3} \\ x_1x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \frac{x_1 + 2}{x_1} + \frac{x_2 + 2}{x_2} = \frac{x_2(x_1 + 2) + x_1(x_2 + 2)}{x_1x_2} = \frac{x_1x_2 + 2x_2 + x_1x_2 + 2x_1}{x_1x_2} = \frac{2(x_1 + x_2) + 2x_1x_2}{x_1x_2} \\ &= \frac{2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 2 \cdot (-2)}{-2} = \frac{-\frac{10}{3} - 4}{-2} = \frac{-\frac{22}{3}}{-2} = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } Q &= \frac{x_2}{x_1 - 1} + \frac{x_1}{x_2 - 1} = \frac{x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = \frac{x_1^2 - x_1 + x_2^2 - x_2}{x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - (x_1 + x_2)}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1} \\ &= \frac{\left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \cdot (-2) - \left(-\frac{5}{3}\right)}{-2 - \left(-\frac{5}{3}\right) + 1} = \frac{\frac{25}{9} + 4 + \frac{5}{3}}{-1 + \frac{5}{3}} = \frac{\frac{76}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{38}{3} \end{aligned}$$

**Bài tập 9.** Cho phương trình  $x^2 - 12x + 4 = 0$  có hai nghiệm dương phân biệt  $x_1, x_2$ . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$ .

### Lời giải

Vì  $\Delta' = (-6)^2 - 1 \cdot 4 = 32 > 0$  nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

$$\text{Theo định lí Viète, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 12 > 0 \\ x_1x_2 = 4 > 0 \end{cases} \text{ do đó phương trình có hai nghiệm dương.}$$

$$\text{Ta có: } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 12^2 - 2 \cdot 4 = 136$$

$$(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = 12 + 2\sqrt{4} = 16$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{16} = 4 \text{ (vì } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0)$$

$$\text{Vậy: } P = \frac{136}{4} = 34$$

**Bài tập 10.** Cho phương trình  $x^2 + 3x - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ . Không giải phương trình, hãy

$$\text{tính giá trị của biểu thức } Q = \frac{3|x_1 - x_2|}{x_1^2x_2 + x_1x_2^2}$$

### Lời giải

Nhận thấy  $ac = -1 < 0$  nên phương trình luôn có hai nghiệm khác dấu.

$$\text{Theo định lí Viète, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } |x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (-3)^2 - 4 \cdot (-1) = 13$$

$$\text{Suy ra } |x_1 - x_2| = \sqrt{13}$$

$$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = -1 \cdot (-3) = 3$$

$$\text{Vậy } Q = \frac{3\sqrt{13}}{3} = \sqrt{13}$$

**Dạng 3. Tìm hai số biết tổng và tích. Lập phương trình bậc hai nhận hai số cho trước làm nghiệm**

**Bài tập 11.** Tìm hai số  $u$  và  $v$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $u + v = 5$  và  $uv = -14$

b)  $u + v = 5$  và  $uv = -24$

c)  $u + v = -6$  và  $uv = -16$

d)  $u + v = 1$  và  $uv = \frac{1}{4}$

### Lời giải

a) Vì  $u + v = 5$  và  $uv = -14$  nên  $u, v$  là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

Giải phương trình ta được:  $x_1 = -2; x_2 = 7$

$$\text{Vậy } (u; v) = (-2; 7) \text{ hoặc } (u; v) = (7; -2)$$

b) Vì  $u + v = 5$  và  $uv = -24$  nên  $u, v$  là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$

Giải phương trình ta được:  $x_1 = -3; x_2 = 8$

$$\text{Vậy } (u; v) = (-3; 8) \text{ hoặc } (u; v) = (8; -3)$$

c) Vì  $u + v = -6$  và  $uv = -16$  nên  $u, v$  là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

Giải phương trình ta được:  $x_1 = 2; x_2 = -8$

Vậy  $(u; v) = (2; -8)$  hoặc  $(u; v) = (-8; 2)$

d) Vì  $u + v = 1$  và  $uv = \frac{1}{4}$  nên  $u, v$  là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

Giải phương trình ta được:  $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

Vậy  $u = v = \frac{1}{2}$

**Bài tập 12.** Tìm hai số  $a$  và  $b$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $a - b = 5$  và  $ab = 36$

b)  $a + b = 9$  và  $a^2 + b^2 = 41$

c)  $a^2 + b^2 = 61$  và  $ab = 30$

### Lời giải

a) Ta có  $a - b = 5$  hay  $a + (-b) = 5$

$$ab = 36 \text{ hay } a(-b) = -36$$

Do đó  $a$  và  $-b$  là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 5x - 36 = 0$$

Giải phương trình ta được:  $x_1 = 9; x_2 = -4$

Suy ra  $(a; -b) = (9; -4)$  hoặc  $(a; -b) = (-4; 9)$

Vậy  $(a; b) = (9; 4)$  hoặc  $(a; b) = (-4; -9)$

b) Ta có  $a + b = 9$  và  $a^2 + b^2 = 41$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 9^2 - 2ab = 81 - 2ab$$

$$\text{Suy ra } 81 - 2ab = 41 \text{ hay } ab = 20$$

Vì  $a + b = 9$  và  $ab = 20$  nên  $a$  và  $b$  là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

Giải phương trình ta được:  $x_1 = 5; x_2 = 4$

Vậy  $(a; b) = (5; 4)$  hoặc  $(a; b) = (4; 5)$

c) Ta có:  $a^2 + b^2 = 61$  và  $ab = 30$

$$\text{Mà} \quad a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a+b)^2 - 2 \cdot 30 = (a+b)^2 - 60$$

$$\text{Suy ra} \quad (a+b)^2 - 60 = 61$$

$$(a+b)^2 = 121$$

$$a+b = \pm 11$$

$$\text{+) TH1: } a+b = 11$$

Vì  $a+b = 11$  và  $ab = 30$  nên  $a$  và  $b$  là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 11x + 30 = 0$$

Giải phương trình ta được:  $x_1 = 6; x_2 = 5$

Suy ra:  $(a; b) = (6; 5)$  hoặc  $(a; b) = (5; 6)$

$(a; b) = (-6; -5)$  và  $(a; b) = (-5; -6)$  TH2:

Vì  $a+b = -11$  và  $ab = 30$  nên  $a$  và  $b$  là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2 + 11x + 30 = 0$$

Giải phương trình ta được:  $x_1 = -6; x_2 = -5$

Suy ra: hoặc  $(a; b) = (-5; -6)$

Vậy  $(a; b) \in \{(-6; -5); (-5; -6); (6; 5); (5; 6)\}$

**Bài tập 13.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $2 + \sqrt{3}$  và  $2 - \sqrt{3}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $S = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$  và  $P = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$

Mặt khác:  $S^2 - 4P = 4^2 - 4 \cdot 1 = 12 > 0$

Vậy phương trình bậc hai nhận hai số  $2 + \sqrt{3}$  và  $2 - \sqrt{3}$  làm nghiệm là:  $x^2 - 4x + 1 = 0$ .

**Bài tập 14.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\sqrt{2} - 1$  và  $\sqrt{2} + 1$ .

**Lời giải**

Ta có:  $S = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2}$  và  $P = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$

Mặt khác:  $S^2 - 4P = (2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 = 4 > 0$

Vậy phương trình bậc hai nhận hai số  $\sqrt{2} - 1$  và  $\sqrt{2} + 1$  làm nghiệm là:  $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ .

**Bài tập 15.** Cho phương trình  $x^2 - 4x + 2 = 0$  có hai nghiệm là  $x_1$  và  $x_2$ . Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\frac{1}{x_1}$  và  $\frac{1}{x_2}$ .

### Lời giải

Xét phương trình:  $x^2 - 4x + 2 = 0$

Vì  $\Delta' = (-2)^2 - 1 \cdot 2 = 2 > 0$  nên phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$ .

Theo định lí Viète ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}$$

Ta có:  $S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{4}{2} = 2$  và  $P = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{2}$

Mặt khác:  $S^2 - 4P = 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 > 0$

Vậy phương trình bậc hai nhận hai số  $\frac{1}{x_1}$  và  $\frac{1}{x_2}$  làm nghiệm là:  $2x^2 - 4x + 1 = 0$ .

**Bài tập 16.** Cho phương trình  $x^2 - 3x + 1 = 0$  có hai nghiệm là  $x_1$  và  $x_2$ . Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  và  $x_1^2 + x_2^2$ .

### Lời giải

Xét phương trình:  $x^2 - 3x + 1 = 0$

Vì  $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5 > 0$  nên phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$ .

Theo định lí Viète ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

Ta có:  $S = \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) + (x_1^2 + x_2^2) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{3}{1} + 3^2 - 2 \cdot 1 = 10$

và  $P = \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) \cdot (x_1^2 + x_2^2) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] = \frac{3}{1} \cdot (3^2 - 2 \cdot 1) = 21$

Mặt khác:  $S^2 - 4P = 10^2 - 4 \cdot 21 = 16 > 0$

Vậy phương trình bậc hai nhận hai số  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  và  $x_1^2 + x_2^2$  làm nghiệm là:  $x^2 - 10x + 21 = 0$ .

**Bài tập 17.** Cho phương trình  $x^2 + 5x - m = 0$  ( $m$  là tham số) có hai nghiệm là  $x_1$  và  $x_2$ . Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\frac{x_1}{x_2 + 1}$  và  $\frac{x_2}{x_1 + 1}$ .

### Lời giải

Xét phương trình:  $x^2 + 5x - m = 0$

Có:  $\Delta = 5^2 - 4.1.(-m) = 25 + 4m$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$  khi  $\Delta \geq 0$  hay  $25 + 4m \geq 0 \Rightarrow m \geq -\frac{25}{4}$  (1)

Theo định lí Viète ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= \frac{x_1}{x_2 + 1} + \frac{x_2}{x_1 + 1} = \frac{x_1(x_1 + 1) + x_2(x_2 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{x_1^2 + x_1 + x_2^2 + x_2}{x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1} \\ &= \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + x_1 + x_2}{x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1} = \frac{(-5)^2 - 2.(-m) - 5}{-m - 5 + 1} = \frac{20 + 2m}{-m - 4} = -\frac{20 + 2m}{m + 4} \end{aligned}$$

$$\text{và } P = \frac{x_1}{x_2 + 1} \cdot \frac{x_2}{x_1 + 1} = \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1} = \frac{-m}{-m - 5 + 1} = \frac{m}{m + 4}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } S^2 - 4P &= \left(-\frac{20 + 2m}{m + 4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{m}{m + 4} = \frac{(20 + 2m)^2 - 4m(m + 4)}{(m + 4)^2} \\ &= \frac{400 + 80m + 4m^2 - 4m^2 - 16m}{(m + 4)^2} = \frac{74m + 400}{(m + 4)^2} \end{aligned}$$

Điều kiện để có phương trình bậc hai nhận hai số  $\frac{x_1}{x_2 + 1}$  và  $\frac{x_2}{x_1 + 1}$  làm nghiệm là:

$$\begin{cases} m + 4 \neq 0 \\ S^2 - 4P \geq 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} m \neq -4 \\ 74m + 400 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq -4 \\ m \geq -\frac{200}{37} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Kết hợp (1) và (2) ta được: } \begin{cases} m \neq -4 \\ m \geq -\frac{200}{37} \end{cases}$$

Vậy phương trình bậc hai nhận hai số  $\frac{x_1}{x_2 + 1}$  và  $\frac{x_2}{x_1 + 1}$  làm nghiệm là:

$$x^2 + \frac{20 + 2m}{m + 4}x + \frac{m}{m + 4} = 0 \text{ hay } (m + 4)x^2 + 2(10 + m)x + m = 0 \text{ (với } m \geq -\frac{200}{37} \text{ và } m \neq -4)$$

**Dạng 4. Lập hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình không phụ thuộc vào tham số (độc lập với tham số)**

**Bài tập 18.** Cho phương trình  $x^2 + (m+1)x + m - 2 = 0$  ( $m$  là tham số). Giả sử  $x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình, hãy lập hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào  $m$ .

**Lời giải**

Vì  $\Delta = (m+1)^2 - 4.1.(m-2) = m^2 - 2m + 9 = (m-1)^2 + 8 > 0$  với mọi  $m$ .

Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m - 1 & (1) \\ x_1 x_2 = m - 2 & (2) \end{cases}$$

Cộng vế với vế (1) và (2), ta được:  $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = -3$

Vậy hệ thức cần lập là:  $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = -3$

**Cách khác:** Từ (1) suy ra:  $m = -1 - x_1 - x_2$ . Thay vào (2) ta được:

$$x_1 x_2 = (-1 - x_1 - x_2) - 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_1 x_2 = -3$$

**Bài tập 19.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$ . Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình không phụ thuộc vào giá trị của  $m$ .

**Lời giải**

Vì  $\Delta' = m^2 - m + 4 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$  với mọi  $m$ .

Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

Áp dụng hệ định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 & (1) \\ x_1 x_2 = -m - 3 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra:  $m = x_1 x_2 + 3$ , thay vào (1) ta được:

$$x_1 + x_2 = 2(x_1 x_2 + 3) - 2 \text{ hay } x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 = 4$$

Vậy hệ thức cần lập là:  $x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 = 4$

**Bài tập 20.** Cho phương trình:  $x^2 - (m-1)x + 2m - 3 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào  $m$ .

**Lời giải**

Ta có  $\Delta = m^2 - 10m + 13$

Phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  khi

$$\Delta \geq 0 \text{ hay } m^2 - 10m + 13 \geq 0 \Rightarrow (m-5)^2 \geq 8 \Rightarrow m-5 \geq 2\sqrt{2} \text{ hoặc } m-5 \leq -2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow m \geq 5 + 2\sqrt{2} \text{ hoặc } m \leq 5 - 2\sqrt{2}$$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 1 & (1) \\ x_1 x_2 = 2m - 3 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra:  $m = x_1 + x_2 + 1$ , thay vào (2) ta được:

$$x_1 x_2 = 2(x_1 + x_2 + 1) - 3 \text{ hay } x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = -1$$

Vậy hệ thức cần lập là:  $x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = -1$

**Bài tập 21.** Cho phương trình:  $x^2 - 2mx - m^2 - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Hãy tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình mà không phụ thuộc vào  $m$ .

### Lời giải

Ta có  $\Delta' = 2m^2 + 1 > 0$  với mọi  $m$ .

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m & (1) \\ x_1 x_2 = -m^2 - 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra:  $m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , thay vào (2) ta được:

$$x_1 x_2 = -\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - 1 \text{ hay } (x_1 + x_2)^2 + 4x_1 x_2 = -4$$

Vậy hệ thức cần lập là:  $(x_1 + x_2)^2 + 4x_1 x_2 = -4$

**Bài tập 22.** Cho phương trình:  $x^2 + 2(m-1)x + m^2 + 2 = 0$  ( $m$  là tham số). Hãy tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình mà không phụ thuộc vào  $m$ .

### Lời giải

Ta có  $\Delta' = -2m - 1$

Phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  khi  $\Delta' \geq 0$  hay  $-2m - 1 \geq 0 \Rightarrow m \leq -\frac{1}{2}$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m + 2 & (1) \\ x_1 x_2 = m^2 + 2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra:  $m = \frac{2 - x_1 - x_2}{2}$ , thay vào (2) ta được:

$$x_1x_2 = \left(\frac{2-x_1-x_2}{2}\right)^2 + 2 \text{ hay } 4x_1x_2 - (2-x_1-x_2)^2 = 8$$

Vậy hệ thức cần lập là:  $4x_1x_2 - (2-x_1-x_2)^2 = 8$

**Bài tập 23.** Cho phương trình  $(m-1)x^2 - 2(m-4)x + m - 5 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình không phụ thuộc  $m$

**Lời giải**

Điều kiện:  $m \neq 1$

Với  $m \neq 1$ , thì phương trình là phương trình bậc hai. Ta có  $\Delta' = -2m + 11$

Phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  khi  $\Delta' \geq 0$  hay  $-2m + 11 \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{11}{2}$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m-8}{m-1} = 2 - \frac{6}{m-1} & (1) \\ x_1x_2 = \frac{m-5}{m-1} = 1 - \frac{4}{m-1} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra:  $2(x_1 + x_2) = 2 - \frac{12}{m-1} \quad (3)$

Từ (2) suy ra:  $3x_1x_2 = 3 - \frac{12}{m-1} \quad (4)$

Trừ vế với vế (3) và (4) ta được:  $2(x_1 + x_2) - 3x_1x_2 = -1$

Vậy hệ thức cần lập là:  $2(x_1 + x_2) - 3x_1x_2 = -1$  với  $m \leq \frac{11}{2}$  và  $m \neq 1$

**Dạng 5. Tìm giá trị của tham số để phương trình có nghiệm thỏa mãn hệ thức đối xứng giữa hai nghiệm**

**Bài tập 24.** Cho phương trình  $x^2 - 4x + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn:  $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 25$

**Lời giải**

Ta có:  $\Delta' = (-2)^2 - 1.(m-1) = 5 - m$

Phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  khi:  $\Delta' \geq 0$  hay  $5 - m \geq 0 \Rightarrow m \leq 5$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 & (1) \\ x_1x_2 = m - 1 & (2) \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có:  $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 25$  hay  $(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 25 \quad (3)$

Thay (1), (2) vào (3), ta được:  $-3m = 6 \Rightarrow m = -2$  (thỏa mãn)

Vậy  $m = -2$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 25.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 4 = 0$ . Tìm giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1(x_1 - 3) + x_2(x_2 - 3) = 6$

### Lời giải

Ta có:  $\Delta' = -2m + 5$

Phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  khi:  $\Delta' \geq 0$  hay  $-2m + 5 \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{5}{2}$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 & (1) \\ x_1 x_2 = m^2 - 4 & (2) \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có:  $x_1(x_1 - 3) + x_2(x_2 - 3) = 6$

$$x_1^2 - 3x_1 + x_2^2 - 3x_2 = 6$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) = 6 \quad (3)$$

Thay (1), (2) vào (3), ta được:

$$(2m - 2)^2 - 2(m^2 - 4) - 3(2m - 2) = 6$$

$$4m^2 - 8m + 4 - 2m^2 + 8 - 6m + 6 = 6$$

$$2m^2 - 14m + 12 = 0$$

$$m^2 - 7m + 6 = 0$$

$$\Rightarrow m_1 = 1 \text{ (thỏa mãn)}; m_2 = 6 \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy  $m = 1$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 26.** Cho phương trình  $x^2 - 4x + m - 2 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 2$

### Lời giải

Ta có:  $\Delta' = 6 - m$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  khi:  $\Delta' > 0$  hay  $6 - m > 0 \Rightarrow m < 6$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 & (1) \\ x_1 x_2 = m - 2 & (2) \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có:  $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 2$

$$x_1^2 - 4x_1 + 4 + x_2^2 - 4x_2 + 4 - 2 = 0$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) + 6 = 2 \quad (3)$$

Thay (1), (2) vào (3), ta được:

$$4^2 - 2(m-2) - 4 \cdot 4 + 6 = 0$$

$$-2m + 10 = 0$$

$$m = 5 \text{ (thoả mãn)}$$

Vậy  $m = 5$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 27.** Cho phương trình  $x^2 - 2x + m + 3 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn hệ thức  $x_1^3 + x_2^3 = 8$

### Lời giải

Ta có:  $\Delta' = -m - 2$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  khi:  $\Delta' > 0$  hay  $-m - 2 > 0 \Rightarrow m < -2$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (1) \\ x_1x_2 = m + 3 & (2) \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có:  $x_1^3 + x_2^3 = 8$

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = 8$$

$$(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] = 8 \quad (3)$$

Thay (1), (2) vào (3), ta được:

$$2[2^2 - 3(m+3)] = 8$$

$$4 - 3m - 9 = 4$$

$$-3m = 9$$

$$m = -3 \text{ (thoả mãn)}$$

Vậy  $m = -3$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 28.** Cho phương trình  $x^2 - 5x + m = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1 - x_2| = 3$ .

### Lời giải

**Bài tập 29.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 3 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1| + |x_2| = 10$ .

### Lời giải

Ta có:  $\Delta' = 2m - 2$

Phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  khi:  $\Delta' \geq 0$  hay  $2m - 2 \geq 0 \Rightarrow m \geq 1$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 & (1) \\ x_1 x_2 = m^2 + 3 & (2) \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có:  $|x_1| + |x_2| = 10$

$$\left(|x_1| + |x_2|\right)^2 = 10^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = 100$$

Vì  $x_1 x_2 = m^2 + 3 > 0$  với mọi  $m$  nên  $|x_1 x_2| = x_1 x_2$ , do đó ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = 100$$

$$(x_1 + x_2)^2 = 100 \quad (3)$$

Thay (1) vào (3), ta được:

$$(2m + 2)^2 = 100$$

$$2m + 2 = 10 \text{ hoặc } 2m + 2 = -10$$

$$2m = 8 \text{ hoặc } 2m = -12$$

$$m = 4 \text{ (thoả mãn) hoặc } m = -6 \text{ (không thoả mãn)}$$

Vậy  $m = 4$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 30.** Cho phương trình  $x^2 - mx + m - 4 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thoả mãn:  $(5x_1 - 1)(5x_2 - 1) < 0$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\Delta = m^2 - 4m + 16 = (m - 2)^2 + 12 > 0$  với mọi  $m$ .

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m & (1) \\ x_1 x_2 = m - 4 & (2) \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có:  $(5x_1 - 1)(5x_2 - 1) < 0$

$$25x_1 x_2 - 5x_1 - 5x_2 + 1 < 0$$

$$25x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 1 < 0 \quad (3)$$

Thay (1), (2) vào (3), ta được:

$$25m - 5(m - 4) + 1 < 0$$

$$25m - 5m + 20 + 1 < 0$$

$$20m < -21$$

$$m < -\frac{21}{20}$$

Vậy  $m < -\frac{21}{20}$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 31.** Cho phương trình  $x^2 + mx + m - 2 = 0$  ( $m$  là tham số). Giả sử phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ , chứng minh rằng:  $P = x_1^2 + x_2^2 \geq 3$ .

### Lời giải

Ta có:  $\Delta = m^2 - 4m + 8 = (m - 2)^2 + 4 > 0$  với mọi  $m$ .

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m - 2 \end{cases}$$

Ta có:  $P = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$

Suy ra:  $P = m^2 - 2(m - 2) = m^2 - 2m + 4 = (m - 1)^2 + 3 \geq 3$  với mọi  $m$ .

Vậy  $P \geq 3$ .

**Bài tập 32.** Cho phương trình  $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  sao cho biểu thức  $P = 2|x_2 - x_1|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

### Lời giải

Ta có:  $\Delta = 4m - 3$

Phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  khi  $\Delta \geq 0$  hay  $4m - 3 \geq 0 \Rightarrow m \geq \frac{3}{4}$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 x_2 = m^2 + 1 \end{cases}$$

Ta có:  $P = 2|x_2 - x_1|$

Suy ra:  $P^2 = 4(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2) = 4(x_1 + x_2)^2 - 16x_1 x_2$

$$P^2 = 4(2m + 1)^2 - 16(m^2 + 1) = 16m - 12$$

Vì  $m \geq \frac{3}{4}$  nên  $P^2 \geq 16 \cdot \frac{3}{4} - 12 = 0$  suy ra  $P \geq 0$  (vì  $P = 2|x_2 - x_1| \geq 0$ )

Dấu “=” xảy ra khi  $m = \frac{3}{4}$  (thỏa mãn)

Do đó  $\text{Min } P = 0$  khi  $m = \frac{3}{4}$ .

Vậy  $m = \frac{3}{4}$  là giá trị cần tìm

**\* Chú ý:**

- Việc xét bình phương của biểu thức  $P$  sẽ là một giá trị tuyệt đối và đồng thời có thể viết  $P^2$  theo tổng và tích của  $x_1, x_2$ .

- Biểu thức  $P^2$  phụ thuộc vào  $m$  là một đa thức bậc nhất, do đó để tìm GTNN của  $P^2$  ta cần dựa vào điều kiện  $m$  của  $\Delta \geq 0$  để đánh giá.

**Bài tập 33.** Cho phương trình  $x^2 + 5x + m + 2 = 0$  ( $m$  là tham số). Giả sử phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$ , chứng minh rằng  $P = (x_1 - x_2)^2 + 8x_1x_2 \leq 50$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\Delta = 17 - 4m$

Phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  khi  $\Delta \geq 0$  hay  $17 - 4m \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{17}{4}$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1x_2 = m + 2 \end{cases}$$

Ta có:  $P = (x_1 - x_2)^2 + 8x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2$

Suy ra:  $P = (-5)^2 + 4(m + 2) = 4m + 33$

Vì  $m \leq \frac{17}{4}$  nên  $P \leq 4 \cdot \frac{17}{4} + 33 = 50$

Vậy  $P \leq 50$

**Bài tập 34.** Cho phương trình  $x^2 - 2mx + m^2 - m + 3 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  và biểu thức  $P = x_1x_2 - x_1 - x_2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

Ta có:  $\Delta = 4m - 12$

Phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  khi  $\Delta \geq 0$  hay  $4m - 12 \geq 0 \Rightarrow m \geq 3$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - m + 3 \end{cases}$$

Ta có:  $P = x_1 x_2 - x_1 - x_2 = x_1 x_2 - (x_1 + x_2)$

Suy ra:  $P = m^2 - 3m + 3 = m(m - 3) + 3$

Vì  $m \geq 3 \Rightarrow m - 3 \geq 0$  nên  $P \geq 3$

Dấu “=” xảy ra khi  $m = 3$  (thoả mãn)

Do đó  $\text{Min } P = 3$  khi  $m = 3$ .

Vậy  $m = 3$  là giá trị cần tìm

**\* Chú ý:**

- Học sinh có thể mắc sai lầm như sau:

$$P = m^2 - 3m + 3 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \text{ suy ra } \text{Min } P = \frac{3}{4} \text{ khi } m = \frac{3}{2} \text{ (loại vì } m \geq 3)$$

Do đó không có giá trị nào của  $m$  thoả mãn bài toán.

- Khi biểu thức phụ thuộc vào  $m$  là một đa thức bậc hai mà khi đưa biểu thức về dạng  $\pm(pm + q)^2 + r$  lại cho GTNN (GTLN) ứng với giá trị  $m$  không thoả mãn điều kiện  $\Delta \geq 0$  thì ta cần xuất phát từ điều kiện  $m$  của  $\Delta \geq 0$  để tìm GTNN (GTLN).

**Bài tập 35.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m + 1)x + 2m^2 + 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  và biểu thức  $P = (m + 1)(x_1 + x_2) - x_1 x_2 - 2m^2 - 1$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

Ta có:  $\Delta = 8m - 4m^2 = 4m(2 - m)$

Phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  khi  $\Delta \geq 0$  hay  $m(2 - m) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq m \leq 2$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m + 1) \\ x_1 x_2 = 2m^2 + 1 \end{cases}$$

Ta có:  $P = (m + 1)(x_1 + x_2) - x_1 x_2 - 2m^2 - 1$

Suy ra:  $P = 2(m + 1)(m + 1) - (2m^2 + 1) - 2m^2 - 1 = -2m^2 + 4m = 2 - 2(m - 1)^2$

Đặt  $t = m - 1$ , do  $0 \leq m \leq 2$  nên  $-1 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1$

Suy ra  $P = 2 - 2t^2 \geq 0$ . Dấu “=” xảy ra khi  $t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$

$$\Rightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn) hoặc } m = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Do đó Min  $P = 0$  khi  $m = 0$  hoặc  $m = 2$ .

Vậy  $m \in \{0; 2\}$  là giá trị cần tìm.

**Dạng 6. Tìm giá trị của tham số để phương trình có nghiệm thỏa mãn hệ thức không đối xứng giữa hai nghiệm**

**Bài tập 36.** Cho phương trình  $x^2 - 4x - m^2 - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  phân biệt thỏa mãn  $x_2 = -5x_1$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\Delta' = m^2 + 5 > 0$  với mọi  $m$ .

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

$$\text{Theo định lí Viète, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 & (1) \\ x_1 x_2 = -m^2 - 1 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Theo bài ra, ta có: } x_2 = -5x_1 \quad (3)$$

$$\text{Thế (3) vào (1) ta được: } x_1 - 5x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = -1, \text{ suy ra } x_2 = 6$$

$$\text{Thay } x_1 = -1, x_2 = 6 \text{ vào (2), ta được: } -6 = -m^2 - 1 \Rightarrow m^2 = 5 \Rightarrow m = \pm\sqrt{5}$$

Vậy  $m = \pm\sqrt{5}$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 37.** Cho phương trình  $x^2 + 2x + 2m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn:  $x_1 - 2x_2 = 7$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \Delta' = 2 - 2m$$

Phương trình có nghiệm  $x_1, x_2$  khi:  $\Delta' \geq 0$  hay  $2 - 2m \geq 0 \Rightarrow m \leq 1$

$$\text{Theo định lí Viète, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 & (1) \\ x_1 x_2 = 2m - 1 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Theo bài ra, ta có: } x_1 - 2x_2 = 7 \Rightarrow x_1 = 7 + 2x_2 \quad (3)$$

$$\text{Thế (3) vào (1) ta được: } 7 + 2x_2 + x_2 = -2 \Rightarrow x_2 = -3, \text{ suy ra } x_1 = 1$$

$$\text{Thay } x_1 = 1, x_2 = -3 \text{ vào (2), ta được: } 2m - 1 = -3 \Rightarrow m = -1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy  $m = -1$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 38.** Cho phương trình:  $x^2 - 2x - 2m^2 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm giá trị của  $m$  để hai nghiệm  $x_1; x_2$  của phương trình thỏa hệ thức  $x_1^2 = 4x_2^2$ .

### Lời giải

Ta có:  $\Delta' = 2m + 1$

Phương trình có nghiệm  $x_1, x_2$  khi:  $\Delta' \geq 0$  hay  $2m + 1 \geq 0 \Rightarrow m \geq -\frac{1}{2}$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (1) \\ x_1 x_2 = -2m^2 & (2) \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có:  $x_1^2 = 4x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm 2x_2$

+) TH1:  $x_1 = 2x_2$ , thay vào (1) ta được  $3x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}$  suy ra  $x_1 = \frac{4}{3}$

Thay  $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$  vào (2), ta được:  $-2m^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow m^2 = -\frac{4}{9}$  (phương trình vô nghiệm)

+) TH2:  $x_1 = -2x_2$ , thay vào (1) ta được  $-x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = -2$  suy ra  $x_1 = 4$

Thay  $x_1 = 4, x_2 = -2$  vào (2), ta được:  $-2m^2 = -8 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$

Vì  $m \geq -\frac{1}{2}$  suy ra  $m = 2$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 39.** Cho phương trình  $x^2 - (2m + 1)x + m^2 - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1; x_2$  thỏa mãn:  $(x_1^2 - 2mx_1 + m^2)(x_2 + 1) = 1$

### Lời giải

Ta có:  $\Delta = 4m + 5$

Phương trình có nghiệm  $x_1, x_2$  khi:  $\Delta \geq 0$  hay  $4m + 5 \geq 0 \Rightarrow m \geq -\frac{5}{4}$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 & (1) \\ x_1 x_2 = m^2 - 1 & (2) \end{cases}$$

Vì  $x_1$  là nghiệm của phương trình, nên ta có:

$$x_1^2 - (2m + 1)x_1 + m^2 - 1 = 0 \text{ hay } x_1^2 - 2mx_1 + m^2 = x_1 + 1 \quad (3)$$

Theo bài ra, ta có:  $(x_1^2 - 2mx_1 + m^2)(x_2 + 1) = 1 \quad (4)$

Thay (3) vào (4) ta được:  $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1$

$$x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 1$$

$$x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 0 \quad (5)$$

Thay (1), (2) vào (5) ta được:  $m^2 - 1 + 2m + 1 = 0$

$$m^2 + 2m = 0$$

$$m(m + 2) = 0$$

$$m = 0 \text{ hoặc } m = -2$$

Vì  $m \geq -\frac{5}{4}$  suy ra  $m = 0$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 40.** Cho phương trình  $x^2 - x + m + 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm phân biệt của phương trình, tìm các giá trị của  $m$  sao cho  $x_1^2 + x_1 x_2 + 3x_2 = 7$ .

### Lời giải

Ta có:  $\Delta = -4m - 3$

Phương trình có nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  khi:  $\Delta > 0$  hay  $-4m - 3 > 0 \Rightarrow m < -\frac{3}{4}$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 & (1) \\ x_1 x_2 = m + 1 & (2) \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có:  $x_1^2 + x_1 x_2 + 3x_2 = 7 \quad (3)$

Từ (1) suy ra:  $x_2 = 1 - x_1$ , thế vào (3) ta được:

$$x_1^2 + x_1(1 - x_1) + 3(1 - x_1) = 7$$

$$x_1^2 + x_1 - x_1^2 + 3 - 3x_1 = 7$$

$$-2x_1 = 4$$

$$x_1 = -2$$

Suy ra  $x_2 = 3$

Thay  $x_1 = -2, x_2 = 3$  vào (2) ta được:  $m + 1 = -6 \Rightarrow m = -7$  (thỏa mãn)

Vậy  $m = -7$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 41.** Cho phương trình  $x^2 - 6x + m + 3 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  phân biệt thỏa mãn  $x_2 = x_1^2$ .

### Lời giải

Ta có:  $\Delta' = 6 - m$

Phương trình có nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  khi:  $\Delta' > 0$  hay  $6 - m > 0 \Rightarrow m < 6$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 & (1) \\ x_1 x_2 = m + 3 & (2) \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có: 
$$x_2 = x_1^2 \quad (3)$$

Thay (3) vào (1), ta được: 
$$\begin{aligned} x_1^2 + x_1 - 6 &= 0 \\ (x_1 + 3)(x_1 - 2) &= 0 \\ x_1 &= -3 \text{ hoặc } x_1 = 2 \end{aligned}$$

+) TH1:  $x_1 = -3$  thì  $x_2 = 9$

Thay  $x_1 = -3, x_2 = 9$  vào (2) ta được:  $m + 3 = -27 \Rightarrow m = -30$  (thỏa mãn)

+) TH2:  $x_1 = 2$  thì  $x_2 = 4$

Thay  $x_1 = 2, x_2 = 4$  vào (2) ta được:  $m + 3 = 8 \Rightarrow m = 5$  (thỏa mãn)

Vậy  $m \in \{-30; 5\}$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 42.** Cho phương trình  $x^2 + 4x + 4m - m^2 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  phân biệt thỏa mãn  $x_1 = x_2^2 - 6$ .

### Lời giải

Ta có:  $\Delta' = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$

Phương trình có nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  khi:  $\Delta' > 0$  hay  $(m - 2)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 2$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 & (1) \\ x_1 x_2 = 4m - m^2 & (2) \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có: 
$$x_1 = x_2^2 - 6 \quad (3)$$

Thay (3) vào (1), ta được: 
$$\begin{aligned} x_2^2 + x_2 - 2 &= 0 \\ (x_2 + 2)(x_2 - 1) &= 0 \\ x_2 &= -2 \text{ hoặc } x_2 = 1 \end{aligned}$$

+) TH1:  $x_2 = -2$  thì  $x_1 = -2$ . Loại vì  $x_1, x_2$  phân biệt.

+) TH2:  $x_2 = 1$  thì  $x_1 = -5$

Thay  $x_1 = -5, x_2 = 1$  vào (2) ta được:  $m^2 - 4m - 5 = 0$

$$(m - 5)(m + 1) = 0$$

$$m = 5 \text{ (thỏa mãn) hoặc } m = -1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy  $m \in \{-1; 5\}$  là giá trị cần tìm.

### Dạng 7. Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai

**Bài tập 43.** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m-7)x + m^2 - 4 = 0$  ( $m$  là tham số). Xác định  $m$  để phương trình:

- Có hai nghiệm trái dấu.
- Có hai nghiệm cùng dấu.

#### Lời giải

Vì  $a = 1 \neq 0$ , nên phương trình là phương trình bậc hai.

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi:  $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P < 0 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} -14m + 53 > 0 \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } -14m + 53 > 0 \Rightarrow m < \frac{53}{14} \quad (1a)$$

$$m^2 - 4 < 0 \Rightarrow m^2 < 4 \Rightarrow -2 < m < 2 \quad (2a)$$

Kết hợp (1a) và (2a), ta được:  $-2 < m < 2$

Vậy  $-2 < m < \frac{53}{14}$  là giá trị cần tìm.

b) Có hai nghiệm cùng dấu khi:  $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} -14m + 53 \geq 0 \\ m^2 - 4 > 0 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } -14m + 53 \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{53}{14} \quad (1b)$$

$$m^2 - 4 > 0 \Rightarrow m^2 > 4 \Rightarrow m > 2 \text{ hoặc } m < -2 \quad (2b)$$

Kết hợp (1b) và (2b), ta được:  $m < -2$  hoặc  $2 < m \leq \frac{53}{14}$

Vậy  $m < -2$  hoặc  $2 < m \leq \frac{53}{14}$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 44.** Cho phương trình  $2x^2 + (2m-1)x + m-1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình:

- Có hai nghiệm khác dấu
- Có hai nghiệm phân biệt đều âm
- Có hai nghiệm phân biệt đều dương

#### Lời giải

Vì  $a = 2 \neq 0$ , nên phương trình là phương trình bậc hai.

a) Phương trình có hai nghiệm khác dấu khi:  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} 4m^2 - 12m + 9 > 0 \\ m - 1 < 0 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } 4m^2 - 12m + 9 > 0 \Rightarrow (2m - 3)^2 > 0 \Rightarrow m \neq \frac{3}{2} \quad (1a)$$

$$m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1 \quad (2a)$$

Kết hợp (1a) và (2a), ta được:  $m < 1$

Vậy  $m < 1$  là giá trị cần tìm.

b) Có hai nghiệm phân biệt đều âm khi:  $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} 4m^2 - 12m + 9 \geq 0 \\ -2m + 1 < 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } 4m^2 - 12m + 9 \geq 0 \Rightarrow (2m - 3)^2 \geq 0 \text{ (đúng với mọi } m \text{)} \quad (1b)$$

$$-2m + 1 < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2} \quad (2b)$$

$$m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (3b)$$

Kết hợp (1b), (2b) và (3b), ta được:  $m > 1$

Vậy  $m > 1$  là giá trị cần tìm.

c) Có hai nghiệm phân biệt đều dương khi:  $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} 4m^2 - 12m + 9 \geq 0 \\ -2m + 1 > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } 4m^2 - 12m + 9 \geq 0 \Rightarrow (2m - 3)^2 \geq 0 \text{ (đúng với mọi } m \text{)} \quad (1c)$$

$$-2m + 1 > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2} \quad (2c)$$

$$m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (3c)$$

Kết hợp (1c), (2c) và (3c), ta được:  $m \in \emptyset$

Vậy không có giá trị của  $m$  thỏa mãn đề bài..

**Bài tập 45.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$  (với  $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm cùng dấu. Khi đó hai nghiệm mang dấu gì?

**Lời giải**

Vì  $a = 1 \neq 0$ , nên phương trình có hai nghiệm cùng dấu khi:  $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} m^2 - 4m + 6 > 0 \\ 2m - 5 > 0 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } m^2 - 4m + 6 > 0 \Rightarrow (m - 2)^2 + 2 > 0. \text{ Đúng với mọi } m \quad (1)$$

$$2m - 5 > 0 \Rightarrow m > \frac{5}{2} \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta được:  $m > \frac{5}{2}$

Khi đó, ta có:  $x_1 + x_2 = 2m - 2 > 2 \cdot \frac{5}{2} - 2 = 3 > 0$ , nên hai nghiệm cùng dương.

Vậy  $m > \frac{5}{2}$  là giá trị cần tìm và khi đó hai nghiệm cùng dương.

**Bài tập 46.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 3 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  trái dấu.

**Lời giải**

Vì  $a = 1 \neq 0$ , nên phương trình có hai nghiệm cùng dấu khi:  $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P < 0 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} m^2 - 4m + 4 \geq 0 \\ 2m - 3 < 0 \end{cases}$

Ta có:  $m^2 - 4m + 4 \geq 0 \Rightarrow (m - 2)^2 \geq 0$ . Đúng với mọi  $m$  (1)

$$2m - 3 < 0 \Rightarrow m < \frac{3}{2} \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta được:  $m < \frac{3}{2}$

Vậy  $m < \frac{3}{2}$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 47.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x - m = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau.

**Lời giải**

Ta có:  $\Delta' = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$  với mọi  $m$ .

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .

Theo định lí Viète, ta có:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 & (1) \\ x_1 x_2 = -m & (2) \end{cases}$

Vì  $x_1, x_2$  trái dấu nhau, nên  $x_1 x_2 = -m < 0 \Rightarrow m > 0$

Phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  bằng nhau về giá trị tuyệt đối, nên:

$$|x_1| = |x_2|$$

$$|x_1|^2 = |x_2|^2$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

Do  $x_1, x_2$  trái dấu nhau nên  $x_1 - x_2 \neq 0$  suy ra  $x_1 + x_2 = 0$  hay  $2m - 2 = 0 \Rightarrow m = 1$  (thỏa mãn  $m > 0$ )

Vậy  $m = 1$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 48.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m+3)x + 4m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm dương.

**Lời giải**

Vì  $a = 1 \neq 0$ , nên phương trình có hai nghiệm dương khi: 
$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} m^2 - 2m + 10 \geq 0 \\ 2m + 6 > 0 \\ 4m - 1 > 0 \end{cases}$$

Ta có:  $m^2 - 2m + 10 \geq 0 \Rightarrow (m-1)^2 + 9 \geq 0$ . Đúng với mọi  $m$  (1)

$$2m + 6 > 0 \Rightarrow m > -3 \quad (2)$$

$$4m - 1 > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{4} \quad (3)$$

Kết hợp (1), (2) và (3) ta được:  $m > \frac{1}{4}$

Vậy  $m > \frac{1}{4}$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 49.** Cho phương trình  $(m+1)x^2 - 3mx + 4m = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

**Lời giải**

Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi: 
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ 9m^2 - 4m(m+1) > 0 \\ \frac{3m}{m+1} > 0 \\ \frac{4m}{m+1} > 0 \end{cases}$$

Ta có: +)  $m+1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$  (1)

$$+) 9m^2 - 4m(m+1) > 0$$

$$5m^2 - 4m > 0$$

$$m(5m-4) > 0$$

$$m > \frac{4}{5} \text{ hoặc } m < 0 \quad (2)$$

$$+) \frac{3m}{m+1} > 0 \Rightarrow m > 0 \text{ hoặc } m < -1 \quad (3)$$

$$+) \frac{4m}{m+1} > 0 \Rightarrow m > 0 \text{ hoặc } m < -1 \quad (4)$$

Kết hợp (1), (2), (3) và (4) ta được:  $m > \frac{4}{5}$  hoặc  $m < -1$

Vậy  $m > \frac{4}{5}$  hoặc  $m < -1$  là giá trị cần tìm.

### Dạng 8. So sánh các nghiệm của phương trình với một số cho trước

**Bài tập 50.** Cho phương trình  $x^2 + 2(m-1)x - (m+1) = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình

- Có một nghiệm nhỏ hơn 1, một nghiệm lớn hơn 1.
- Có hai nghiệm nhỏ hơn 2.

#### Lời giải

Ta có:  $\Delta' = m^2 - m + 2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$  với mọi  $m$ .

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m + 2 \\ x_1 x_2 = -m - 1 \end{cases}$$

a) Vì phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 1, một nghiệm lớn hơn 1 nên:

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Rightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \Rightarrow -m - 1 + 2m - 2 < 0 \Rightarrow m < 3$$

Vậy  $m < 3$  là giá trị cần tìm.

b) Vì phương trình có hai nghiệm nhỏ hơn 2 nên:

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \Rightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \Rightarrow -m - 1 + 4m - 4 + 4 > 0 \Rightarrow 3m > 1 \Rightarrow m > \frac{1}{3}$$

Vậy  $m > \frac{1}{3}$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 51.** Cho phương trình  $2x^2 + (m^2 - 3)x - 4 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 < 1 < x_2$

#### Lời giải

Ta có:  $\Delta = (m^2 - 3)^2 + 32 > 0$  với mọi  $m$ .

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - m^2 \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$$

Vì  $x_1 < 1 < x_2$  nên  $x_1 - 1 < 0$  và  $x_2 - 1 > 0 \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Rightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0$

Suy ra  $-4 - 3 + m^2 + 1 < 0 \Rightarrow m^2 < 6 \Rightarrow -\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$

Vậy  $-\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 52.** Cho phương trình  $x^2 + mx + 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có ít nhất một nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2.

**Lời giải**

Ta có:  $\Delta = m^2 - 4$ .

Phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  khi  $\Delta \geq 0$  hay  $m^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow m \geq 2$  hoặc  $m \leq -2$

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

Vì phương trình có ít nhất một nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2, nên ta xét các trường hợp sau:

+) TH1:  $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m \geq 4 \\ 1 + 2m + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset$$

+) TH2:  $x_1 \geq 2, x_2 < 2$  (hoặc  $x_1 < 2, x_2 \geq 2$ )

$$\Rightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) \leq 0 \Rightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \leq 0$$

$$\text{hay } 1 + 2m + 4 \leq 0 \Rightarrow 2m \leq -5 \Rightarrow m \leq -\frac{5}{2}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện } m \geq 2 \text{ hoặc } m \leq -2, \text{ ta được: } m \leq -\frac{5}{2} \quad (2)$$

Vậy  $m \leq -\frac{5}{2}$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 53.** Cho phương trình  $x^2 + mx + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có ít nhất một nghiệm nhỏ hơn hoặc bằng  $-2$

**Lời giải**

Ta có:  $\Delta = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \geq 0$  với mọi  $m$ .

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$$

Vì phương trình có ít nhất một nghiệm nhỏ hơn hoặc bằng  $-2$ , nên ta xét các trường hợp sau:

+) TH1:  $x_1 \leq -2, x_2 \leq -2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq -4 \\ (x_1 + 2)(x_2 + 2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq -4 \\ x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m \leq -4 \\ m - 1 - 2m + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq 3 \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset$$

+) TH2:  $x_1 \leq -2, x_2 > -2$  (hoặc  $x_1 > -2, x_2 \leq -2$ )

$$\Rightarrow (x_1 + 2)(x_2 + 2) \leq 0 \Rightarrow x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 \leq 0 \text{ hay } m - 1 - 2m + 4 \leq 0 \Rightarrow m \geq 3$$

Vậy  $m \geq 3$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 54.** Cho phương trình  $x^2 + (m+2)x - m - 4 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 < 0 \leq x_2$ .

### Lời giải

Ta có:  $\Delta = m^2 + 8m + 20 = (m+4)^2 + 4 > 0$  với mọi  $m$ .

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m - 2 \\ x_1 x_2 = -m - 4 \end{cases}$$

Vì  $x_1 < 0 \leq x_2$ , nên ta xét các trường hợp sau:

+) TH1:  $x_1 < 0, x_2 = 0 \Rightarrow m = -4 \Rightarrow x_1 = 2$  (không thỏa mãn)

+) TH2:  $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow x_1 x_2 < 0 \Rightarrow -m - 4 < 0 \Rightarrow m > -4$

Vậy  $m > -4$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 55.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 < -1 < x_2$

### Lời giải

Ta có:  $\Delta' = m^2 - 4m + 6 = (m-2)^2 + 2 > 0$  với mọi  $m$ .

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m - 2 \\ x_1 x_2 = -m - 4 \end{cases}$$

Vì  $x_1 < -1 < x_2$ , nên  $x_1 + 1 < 0$  và  $x_2 + 1 > 0 \Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) < 0 \Rightarrow x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 < 0$

Suy ra  $-m - 4 - m - 2 + 1 < 0 \Rightarrow -2m = 5 \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$ .

Vậy  $m = -\frac{5}{2}$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 56.** Cho phương trình  $x^2 - (m+3)x + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt thoả mãn  $x_1 < -\frac{3}{2} < x_2$

### Lời giải

Ta có:  $\Delta = m^2 + 2m + 13 = (m+1)^2 + 12 > 0$  với mọi  $m$ .

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

Theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 3 \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$$

Vì  $x_1 < -\frac{3}{2} < x_2$  nên  $x_1 + \frac{3}{2} < 0$  và  $x_2 + \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \left(x_1 + \frac{3}{2}\right)\left(x_2 + \frac{3}{2}\right) < 0 \Rightarrow x_1 x_2 + \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + \frac{9}{4} < 0$

Suy ra  $m - 1 + \frac{3}{2}(m + 3) + \frac{9}{4} < 0 \Rightarrow 4m - 4 + 6m + 18 + 9 < 0 \Rightarrow 10m < -23 \Rightarrow m < -2,3$ .

Vậy  $m < -2,3$  là giá trị cần tìm.

# ÔN TẬP CHƯƠNG VII

## A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### Kiến thức cần nhớ

#### A. Hàm số $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ )

##### 1. Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ )

- Lập bảng ghi một số cặp giá trị tương ứng của  $x$  và  $y$ .
- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , biểu diễn các cặp điểm  $(x; y)$  trong bảng giá trị trên và nối chúng lại để được một đường cong là đồ thị của hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ).

##### 2. Tính chất

Đồ thị của hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) là một đường cong, gọi là đường parabol, có các tính chất sau:

- Có đỉnh là gốc tọa độ  $O$ ,
- Có trục đối xứng là  $Oy$ ;
- Nằm phía trên trục hoành nếu  $a > 0$  và nằm phía dưới trục hoành nếu  $a < 0$ .

#### B. Phương trình bậc hai một ẩn.

##### 1. Định nghĩa phương trình bậc hai một ẩn.

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng  $ax^2 + bx + c = 0$  trong đó  $x$  là ẩn,  $a, b, c$  là những số cho trước gọi là hệ số và  $a \neq 0$ .

##### 2. Cách giải phương trình bậc hai một ẩn có dạng đặc biệt

Cách giải phương trình bậc hai một ẩn dạng khuyết

Giải một phương trình bậc hai là tìm tất cả các nghiệm của nó. Một số phương trình bậc hai dạng  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$  mà khuyết số hạng bậc nhất (tức là  $b = 0$ ) hoặc khuyết số hạng tự do (tức là  $c = 0$ ), bằng phương pháp đặc nhân tử chung đưa về dạng tích hoặc dùng hằng đẳng thức để đưa về trái về một bình phương.

Nếu  $A.B = 0$  thì  $A = 0$  hoặc  $B = 0$ .

Nếu  $A^2 = B$  ( $B \geq 0$ ) thì  $A = \sqrt{B}$  hoặc  $A = -\sqrt{B}$ .

##### 3. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai một ẩn:  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )

Tính biệt thức:  $\Delta = b^2 - 4ac$

Nếu  $\Delta > 0$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Nếu  $\Delta < 0$  thì phương trình có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ .

Nếu  $\Delta < 0$  thì phương trình vô nghiệm.

**C. Định lí Viète**

**1. Định lí Viète:**

Nếu  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

**2. Áp dụng định lí Viète để tính nhanh nghiệm:**

Xét phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )

+ Nếu  $a + b + c = 0$  thì phương trình có một nghiệm là  $x_1 = 1$ , còn nghiệm kia là  $x_2 = \frac{c}{a}$ .

+ Nếu  $a - b + c = 0$  thì phương trình có một nghiệm là  $x_1 = -1$ , còn nghiệm kia là  $x_2 = -\frac{c}{a}$ .

**3. Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng:**

Nếu hai số có tổng bằng  $S$  và tích bằng  $P$  thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - Sx + P = 0$ . Điều kiện để có hai số đó là  $S^2 - 4P \geq 0$ .

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT**

**Câu 1:** Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số  $y = \frac{1}{2}x^2$ .

A. (1;2)

B. (2;1)

C. (-1;2)

D.  $(-1; \frac{1}{2})$

**Câu 2:** Hình 6.11 là hai đường parabol trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .

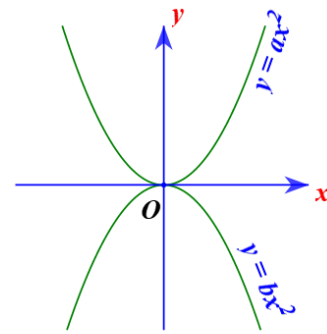
Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $a < 0 < b$ .

B.  $a < b < 0$ .

C.  $a > b > 0$ .

D.  $a > 0 > b$ .



Hình 6.11

**Câu 3:** Các nghiệm của phương trình  $x^2 + 7x + 12 = 0$  là:

A.  $x_1 = 3; x_2 = 4$ .

B.  $x_1 = -3; x_2 = -4$ .

C.  $x_1 = 3; x_2 = -4$ .

D.  $x_1 = -3; x_2 = 4$ .

**Câu 4:** Phương trình bậc hai có hai nghiệm  $x_1 = 13$  và  $x_2 = 25$  là:

A.  $x^2 - 13x + 25 = 0$ .

B.  $x^2 - 25x + 13 = 0$ .

C.  $x^2 - 38x + 325 = 0$ .

D.  $x^2 + 38x + 325 = 0$ .

**Câu 5:** Cho phương trình :  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ). Nếu  $b^2 - 4ac = 0$  thì phương trình có nghiệm là

A.  $x_1 = x_2 = -\frac{a}{2b}$

B.  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}$

C.  $x_1 = x_2 = -\frac{c}{a}$

D.  $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}$

**Câu 6:** Xét phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Phương trình vô nghiệm khi

- A.  $\Delta < 0$ .                      B.  $\Delta = 0$ .                      C.  $\Delta \geq 0$ .                      D.  $\Delta \leq 0$ .

**Câu 7:** Nếu hai số  $x, y$  có tổng  $x + y = S$  và  $xy = P$ , thì  $x, y$  là hai nghiệm của phương trình:

- A.  $X^2 + SX - P = 0$ .                      B.  $X^2 - SX + P = 0$ .  
C.  $ax^2 + bx + c = 0$ .                      D.  $X^2 - SX - P = 0$ .

**Câu 8:** Phương trình  $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$  có một nghiệm là :

- A.  $-1$ .                      B.  $-\frac{1}{2}$ .                      C.  $\frac{1}{2}$ .                      D.  $2$ .

## II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

**Câu 9:** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 5x + 6 = 0$ . Khi đó, giá trị của biểu thức  $A = x_1^2 + x_2^2$  là

- A. 13.                      B. 19.                      C. 25.                      D. 5.

**Câu 10:** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $x^2 - (3m+1)x + m - 5 = 0$  có 1 nghiệm  $x = -1$

- A.  $m = 1$ .                      B.  $m = -\frac{5}{2}$ .                      C.  $m = \frac{5}{2}$ .                      D.  $m = \frac{3}{4}$ .

**Câu 11:** Phương trình  $x^2 - 2x + m - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt khi

- A.  $m > -2$ .                      B.  $m < -2$ .                      C.  $m < 2$ .                      D.  $m > 2$ .

**Câu 12:** Tính  $\Delta'$  của phương trình  $2x^2 + 2\sqrt{11}x + 3 = 0$ .

- A.  $\Delta' = 5$ .                      B.  $\Delta' = 38$ .                      C.  $\Delta' = \sqrt{5}$ .                      D.  $\Delta' = 20$ .

**Câu 13:** Phương trình  $mx^2 + 2(m+1)x - 1 = 0$  có hai nghiệm trái dấu khi

- A.  $m > 0$ .                      B.  $m < 0$ .                      C.  $m = 0$ .                      D.  $m \neq 0$ .

**Câu 14:** Tìm nghiệm của phương trình  $2x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$ .

- A.  $x_1 = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}; x_2 = \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$ .                      B.  $x_1 = \sqrt{5} + \sqrt{3}; x_2 = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ .  
C.  $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .                      D.  $x_1 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}; x_2 = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$ .

## III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

**Câu 15:** Cho phương trình  $x^2 - 4mx + 4m^2 - 2 = 0$  (1) có hai nghiệm phân biệt là  $x_1, x_2$ . Tính

$$P = x_1^2 + 4mx_2 - 12m^2 - 6.$$

- A.  $-4$ .                      B.  $3$ .                      C.  $-6$ .                      D.  $5$ .

**Câu 16:** Tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$  vô nghiệm là

- A.  $m < -2$ .                      B.  $m > -2$ .                      C.  $m \leq -2$ .                      D.  $m \geq -2$ .

**Câu 17:** Các giá trị của  $m$  để phương trình  $x^2 + 2mx + 4 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 3$  là

- A.  $m = \pm\sqrt{5}$ .                      B.  $m = \sqrt{5}$ .                      C.  $m = \pm\sqrt{3}$ .                      D.  $m = -\sqrt{3}$ .

**Câu 18:** Tổng tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình  $mx^2 - 2(m-1)x - 3(m-2) = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 + 3x_2 = 1$  là

- A.  $\frac{20}{7}$ .                      B.  $\frac{7}{8}$ .                      C.  $-\frac{8}{7}$ .                      D.  $\frac{8}{7}$ .

**IV – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO**

**Câu 19:** Cho các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn điều kiện  $x + y + z = 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 9xy + 10yz + 11zx$  là

- A.  $\frac{495}{148}$ .                      B. 3.                      C.  $\frac{37}{8}$ .                      D. 2.

**Câu 20:** Nghiệm nguyên dương của phương trình:  $x^2 - 4xy + 5y^2 = 169$  là

- A.  $(x; y) \in \{(29;12);(19;12);(22;5)\}$ .                      B.  $(x; y) \in \{(29;12);(19;12);(22;5)\}$ .  
 C.  $(x; y) \in \{(29;12);(19;12);(22;5)\}$ .                      D.  $(x; y) \in \{(29;12);(19;12);(22;5)\}$ .

**CÁC DẠNG TỰ LUẬN**

**Dạng 1. Đồ thị hàm số  $y = ax^2 (a \neq 0)$ . Sự tương giao giữa parabol và đường thẳng.**

**Phương pháp giải**

- Để vẽ đồ thị hàm số  $y = ax^2 (a \neq 0)$ , ta làm các bước sau

**Bước 1:** Lập bảng giá trị (nên lấy ít nhất 5 giá trị).

**Bước 2:** Đồ thị hàm số bậc nhất có dạng parabol nằm phía trên trục hoành nếu  $a > 0$  và nằm phía dưới trục hoành nếu  $a < 0$ , đồng thời đi qua các điểm thuộc bảng giá trị.

**Bước 3:** Vẽ đồ thị.

- Để tìm tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$ , ta tiến hành làm các bước như sau:

**Bước 1:** Tìm phương trình hoành độ giao điểm.  $ax^2 = mx + n$  (1)

**Bước 2:** Tìm số giao điểm.

Nếu (1) vô nghiệm thì  $(d)$  không cắt  $(P)$ .

Nếu (1) có 2 nghiệm phân biệt thì  $(d)$  cắt  $(P)$  tại 2 điểm phân biệt.

Nếu (1) có nghiệm kép nghiệm thì  $(d)$  tiếp xúc  $(P)$  tại 1 điểm.

**Bước 3:** Nếu phương trình (1) có nghiệm  $x_i$  thì suy ra tung độ giao điểm là  $y_i = ax_i^2$  hoặc  $y_i = mx_i + n$ .

**Bài 1.** Cho hàm số  $y = ax^2$  có đồ thị hàm số  $(P)$ .

a) Xác định  $a$  biết  $(P)$  đi qua điểm  $A(1; -2)$ .

b) Vẽ đồ thị  $(P)$ .

**Bài 2.** Cho parabol  $(P): y = \frac{x^2}{2}$  và đường thẳng  $(d): y = x + 4$ .



**Bài 10.** Cho Parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = -x + 2$ .

- Vẽ đồ thị  $(P)$  và  $(d)$  trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Xác định tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$ .
- Xác định  $m$  để đường thẳng  $(d'): y = mx - 4$  tiếp xúc với  $(P)$ .

**Dạng 3. Sử dụng Viète để tính giá trị của biểu thức đối của  $x_1, x_2$ .**

**Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện (T) cho trước**

**Phương pháp giải:**

① **Biểu thức đối xứng giữa các nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  của phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  là biểu thức có giá trị không thay đổi khi ta hoán vị  $x_1$  và  $x_2$ . Ta có thể biểu thị được các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  theo  $S$  và  $P$ , ví dụ như:**

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$ .
- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P}$  với  $x_1, x_2 \neq 0$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$  với  $x_1, x_2 \neq 0$
- $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{S^2 - P}{P^2}$ .

② **Tìm  $m$  để phương trình bậc hai thỏa mãn điều kiện (T) cho trước:**

**Bước 1 - Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm  $x_1, x_2$ :**  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta (\Delta') \geq 0 \end{cases} (*)$

**Bước 2 - Áp dụng định lý Vi-ét ta được:**  $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = f(m) \\ P = x_1x_2 = g(m) \end{cases} (I)$

**Bước 3 - Từ ĐK (T) đã cho và hệ thức Viète tìm ra tham số  $m$ . Đối chiếu  $m$  với điều kiện (\*) và kết luận.**

**Bài 11.** Cho phương trình  $x^2 - 5x + 2 = 0$ . Không giải phương trình, gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của biểu thức

- $A = x_1^2 + x_2^2$ .
- $B = |x_1 - x_2|$ .
- $C = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$ .

**Bài 12.** Giải phương trình  $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$  (1) (với  $m$  là tham số).

- Giải phương trình với  $m = -3$ .
- Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình (1) có các nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 = 10$

**Bài 13.** Cho phương trình  $x^2 - 5x + m = 0$  ( $m$  là tham số).

- Giải phương trình trên khi  $m = 6$ .
- Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1 - x_2| = 3$ .

**Bài 14.** Cho phương trình:  $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$

- a) Giải phương trình (1) khi  $m = 3$
- b) Tìm  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1; x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + (2m+1)x_2 = 2x_1x_2 + 7$

**Bài 15.** Cho phương trình:  $x^2 - (2m+3)x - 2m - 4 = 0$  (1)

- a) Giải phương trình khi  $m = 2$ .
- b) Tìm  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  sao cho  $|x_1 - x_2| = 5$

**Dạng 4. Tìm cực trị của biểu thức nghiệm**

**Phương pháp giải**

1. **Tìm ĐK để PT có nghiệm**
2. **Viết biểu thức đã cho về dạng biểu thức một ẩn là tham số  $m$  theo các cách sau:**
  - + **Biến đổi biểu thức theo tổng và tích của  $x_1, x_2$  rồi sử dụng hệ thống Vi-et**
  - + **Tính cụ thể  $x_1, x_2$  theo  $m$  rồi thay vào biểu thức**
3. **Viết biểu thức phụ thuộc vào  $m$  theo một trong các dạng sau**

\*  $km^2 + c$  ( $k, c$  cùng dấu)                      \*  $[f(m)]^2 + c$                       \*  $-[f(m)]^2 + c$

**Bài 16.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0$  (ẩn  $x$ ).

- a) Giải phương trình khi  $m = 1$ .
- b) Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2$  nhỏ nhất

**Bài 17.** Cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = 3x - m$

- a) Tìm  $m$  để  $(d)$  và  $(P)$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$ .
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = (x_1^2 + 3x_2)^2 + 14m$

**Bài 18.** Cho parabol  $(P): y = -x^2$  và đường thẳng  $(d): y = (3 - 2m)x - 4$ .

- a) Chứng minh rằng  $(P)$  luôn cắt  $(d)$  tại hai điểm phân biệt với mọi  $m$ .
- b) Gọi  $x_1, x_2$  là hoành độ hai giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$K = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2) - 2x_1 - 2x_2.$$

**Bài 19.** Cho đường thẳng  $(d): y = mx - m + 1$  và parabol  $(P): y = x^2$  với  $m$  là tham số.

- a) Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d)$  tiếp xúc với parabol  $(P)$ . Tìm tọa độ tiếp điểm.
- b) Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1; x_2$  sao cho biểu thức  $M = x_1 \cdot x_2 - 6\sqrt{x_1 + x_2} + 5$  có giá trị nhỏ nhất.

**Bài 20.** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $d: y = (2m+5)x - 2m - 1$  và  $(P): y = x^2$ .

- a) Chứng minh với mọi  $m$ , đường thẳng  $d$  luôn cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi  $x_1, x_2$  là hoành độ các giao điểm của  $d$  và  $(P)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \left| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right|.$$

**Dạng 5. Giải bài toán bằng cách lập phương trình: Toán số học, phần trăm**

**Phương pháp giải**

- **Biểu diễn:**

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b \quad (a, b \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9)$$

$$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c \quad (a, b, c \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9)$$

**Bài 21.** Tìm hai số tự nhiên liên tiếp có tổng các bình phương của nó là 85.

**Bài 22.** Tìm hai số biết rằng tổng của chúng bằng 17 đơn vị. Nếu số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ 2 tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị.

**Bài 23.** Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 5 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số mới là nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó

**Bài 24.** Cho một số có hai chữ số. Tìm số đó, biết rằng tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần. Nếu thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho.

**Bài 25.** Năm nay tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi Phương. Phương tính rằng 13 năm nữa thì tuổi mẹ gấp 2 lần tuổi Phương. Hỏi năm nay Phương bao nhiêu tuổi?

**Dạng 6. Giải bài toán bằng cách lập phương trình:  
Năng suất công việc – khối lượng công việc – phần trăm**

**Phương pháp giải**

- **Khối lượng công việc = Năng suất  $\times$  Thời gian.**
- **Năng suất = Khối lượng công việc  $\div$  Thời gian**
- **Thời gian = Khối lượng công việc  $\div$  Năng suất**

**Bài 26.** Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 30 tấn hàng. Khi sắp khởi hành thì được bổ sung thêm 2 xe nên mỗi xe chở ít hơn 0,5 tấn hàng. Hỏi lúc đầu đoàn xe có bao nhiêu chiếc xe?

**Bài 27.** Một tổ công nhân dự định làm xong 240 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng khi thực hiện, nhờ cải tiến kĩ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 10 sản phẩm so với dự định. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi khi thực hiện, mỗi ngày tổ đã làm được bao nhiêu sản phẩm?

**Bài 28.** Hưởng ứng phong trào “*Vì biển đảo Trường Sa*” một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở ít hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu, biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau?

**Bài 29.** Một tổ máy trộn bê tông phải sản xuất  $450m^3$  cho một đập thủy lợi trong một thời gian quy định. Nhờ tăng năng suất mỗi ngày  $4,5m^3$  nên 4 ngày trước thời hạn quy định tổ đã sản xuất được 96% công việc. Hỏi thời gian quy định là bao nhiêu ngày.

**Bài 30.** Nhân dịp kỉ niệm 30-4 và 1-5 năm 2020 một siêu thị điện máy Xanh đã giảm giá nhiều mặt hàng để kích cầu mua sắm. Giá niêm yết một tivi và một máy giặt có tổng số tiền là 25,4 triệu đồng, nhưng trong đợt này giá một tủ lạnh giảm 40% giá bán và giá một máy giặt giảm 25% giá bán nên bác Hai đã mua một tivi và một máy giặt trên với tổng số tiền là 16,77 triệu đồng. Hỏi giá mỗi món đồ khi chưa giảm giá là bao nhiêu tiền?

**Dạng 7. Giải bài toán bằng cách lập phương trình: Toán chuyển động**

**Phương pháp giải**

- Sử dụng công thức  $S = V.t$ ; trong đó  $S$  là quãng đường,  $V$  là vận tốc,  $t$  là thời gian.

$$\text{Suy ra } V = \frac{S}{t}; t = \frac{S}{V}.$$

- Nếu chuyển động dòng chảy thì

$$V_{\text{xuôi dòng}} = V_{\text{riêng}} + V_{\text{dòng nước}}$$

$$V_{\text{ngược dòng}} = V_{\text{riêng}} - V_{\text{dòng nước}}$$

**Bài 31.** Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 36 km. Khi đi từ B trở về A, người đó tăng vận tốc thêm 3 km/h, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B.

**Bài 32.** Khoảng cách giữa hai bên sông A và B là 48 km. Một canô đi từ bên A đến bên B, rồi quay lại bên A. Thời gian cả đi và về là 5 giờ (không tính thời gian nghỉ). Tính vận tốc của canô trong nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

**Bài 33.** Một xe ô tô đi từ A đến B cách nhau 180 km. Sau khi đi được 2 giờ, ô tô dừng lại để đổ xăng và nghỉ ngơi mất 15 phút rồi tiếp tục đi với vận tốc tăng thêm 20 km/h và đến B đúng giờ đã định. Tìm vận tốc ban đầu của xe ô tô.

**Bài 34.** Một ca nô xuôi dòng từ bên sông A đến bên sông B cách nhau 24 km; cùng lúc đó, cũng từ A về B một bè nửa trôi với vận tốc dòng nước là 4 km/h. Khi đến B ca nô quay lại ngay và gặp bè nửa tại địa điểm C cách A là 8 km. Tính vận tốc thực của ca nô.

**Bài 35.** Cho quãng đường từ địa điểm A tới địa điểm B dài 90 km. Lúc 6 giờ một xe máy đi từ A để tới B. Lúc 6 giờ 30 phút cùng ngày, một ô tô cũng đi từ A để tới B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy 15 km/h (Hai xe chạy trên cùng một con đường đã cho). Hai xe nói trên đều đến B cùng lúc. Tính vận tốc mỗi xe.

**Dạng 8. Giải bài toán bằng cách lập phương trình: Dạng toán có nội dung hình học****Phương pháp giải***Áp dụng các công thức sau:*

- **Định lý Pi-ta-go:**  $\triangle ABC$  vuông tại  $A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ .
- **Diện tích hình chữ nhật:**  $S = a \cdot b$ ; với  $a$  là chiều dài,  $b$  là chiều rộng.
- **Diện tích hình thang:**  $S = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$  hoặc  $S = m \cdot h$ . Trong đó  $a, b$  là độ dài hai đáy;  $h$  là chiều cao;  $m$  là độ dài đường trung bình.

**Bài 36.** Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 3m và diện tích bằng  $270m^2$ . Tìm chiều dài, chiều rộng của khu vườn.

**Bài 37.** Cạnh huyền của một tam giác vuông bằng 13cm. Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 7cm. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

**Bài 38.** Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là  $100m^2$ . Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2m và giảm chiều dài thửa ruộng đi 5m thì diện tích thửa ruộng tăng thêm  $5m^2$ .

**Bài 39.** Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280m. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn thuộc đất của vườn rộng 2m, diện tích đất còn lại để trồng trọt là  $4256m^2$ . Tính các kích thước của vườn.

**Bài 40.** Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13m và chiều dài lớn hơn chiều rộng 7m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

**Dạng 9. Giải bài toán bằng cách lập phương trình: Toán làm chung, làm riêng****Phương pháp giải**

- *Ta thường xem khối lượng công việc là một đơn vị.*
- *Năng suất 1 + Năng suất 2 = Tổng năng suất.*

**Bài 41.** Hai công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 6 giờ 40 phút. Nếu họ làm riêng thì công nhân thứ nhất hoàn thành công việc đó ít hơn công nhân thứ hai là 3 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi công nhân phải làm trong bao lâu thì xong việc?

**Bài 42.** Hai vòi cùng chảy vào một bể thì đầy sau 7 giờ 12 phút. Nếu mỗi vòi chảy riêng mà đầy bể thì tổng thời gian là 30 giờ. Mỗi vòi chảy riêng thì đầy bể trong thời gian là bao lâu?

**Bài 43.** Nếu mở hai vòi nước chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút bể đầy nước. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu thì đầy bể.

**Bài 44.** Hai đội xây dựng cùng làm chung một việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Họ cùng làm chung với nhau được 8 ngày thì đội 1 được điều đi làm việc khác, đội 2 tiếp tục làm. Do cải tiến kỹ thuật,

năng suất tăng gấp đôi nên đội 2 làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì bao nhiêu ngày sẽ làm xong công việc nói trên (với năng suất bình thường)?

**Bài 45.** Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành sau 6 ngày. Nếu làm một mình xong công việc thì đội một cần ít thời gian hơn đội hai là 5 ngày. Hỏi mỗi đội làm một mình xong công việc trong bao lâu ?

**Dạng 10. Giải bài toán bằng cách lập phương trình : Các dạng khác.**

**Phương pháp giải**

- **Bước 1. Lập phương trình**
  - ✓ Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số;
  - ✓ Biểu diễn các dữ kiện chưa biết qua ẩn số;
  - ✓ Lập phương trình biểu thị tương quan giữa ẩn số và các dữ kiện đã biết;
- **Bước 2. Giải phương trình;**
- **Bước 3. Đối chiếu nghiệm của phương trình với điều kiện của ẩn số (nếu có) và với đề bài để đưa ra kết luận.**

**Bài 46.** Hưởng ứng phong trào thi đua “Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực”, lớp 9A trường THCS Hoa Hồng dự định trồng 300 cây xanh. Đến ngày lao động, có 5 bạn được Liên Đội triệu tập tham gia chiến dịch an toàn giao thông nên mỗi bạn còn lại phải trồng thêm 2 cây mới đảm bảo kế hoạch đặt ra. Hỏi lớp 9A có bao nhiêu học sinh?

**Bài 47.** Một phòng họp có 90 người họp được sắp xếp ngồi đều trên các dãy ghế. Nếu ta bớt đi 5 dãy ghế thì mỗi dãy ghế còn lại phải xếp thêm 3 người mới đủ chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế và mỗi dãy ghế được xếp bao nhiêu người?

**Bài 48.** Nhân ngày quốc tế thiếu nhi, 13 học sinh (nam và nữ) tham gia gói 80 phần quà cho các em thiếu nhi. Biết tổng số quà mà học sinh nam gói được bằng tổng số quà mà học sinh nữ gói được. Số quà mỗi bạn nam gói nhiều hơn số quà mà mỗi bạn nữ gói là 3 phần. Tính số học sinh nam và nữ.

**Bài 49.** Hai trường A và B có 420 học sinh thi đỗ vào lớp 10 đạt tỷ lệ 84%. Riêng trường A tỷ lệ đỗ là 80%. Riêng trường B tỷ lệ đỗ là 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.

**Bài 50.** Hưởng ứng phong trào “Vi biển đảo Trường Sa” một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở ít hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu, biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau?

**D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	D	B	C	D	A	B	B	A	B
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	C	A	A	D	A	A	A	D	A	A

**Câu 1:** Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số  $y = \frac{1}{2}x^2$ .

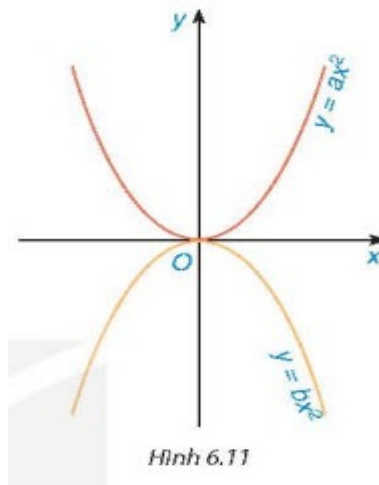
A. (1;2).

B. (2;1).

C. (-1;2).

**D.**  $(-1; \frac{1}{2})$ .

**Câu 2:** Hình 6.11 là hai đường parabol trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?



A.  $a < 0 < b$ .

B.  $a < b < 0$ .

C.  $a > b > 0$ .

**D.**  $a > 0 > b$ .

**Câu 3:** Các nghiệm của phương trình  $x^2 + 7x + 12 = 0$  là:

A.  $x_1 = 3; x_2 = 4$ .

**B.**  $x_1 = -3; x_2 = -4$ .

C.  $x_1 = 3; x_2 = -4$ .

D.  $x_1 = -3; x_2 = 4$ .

**Câu 4:** Phương trình bậc hai có hai nghiệm  $x_1 = 13$  và  $x_2 = 25$  là:

A.  $x^2 - 13x + 25 = 0$ .

B.  $x^2 - 25x + 13 = 0$ .

**C.**  $x^2 - 38x + 325 = 0$ .

D.  $x^2 + 38x + 325 = 0$ .

**Câu 5:** Cho phương trình:  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ . Nếu  $b^2 - 4ac = 0$  thì phương trình có nghiệm là

A.  $x_1 = x_2 = -\frac{a}{2b}$ .

**B.**  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}$ .

C.  $x_1 = x_2 = -\frac{c}{a}$ .

D.  $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}$ .

Câu 6: Xét phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Phương trình vô nghiệm khi

A.  $\Delta < 0$ .

B.  $\Delta = 0$ .

C.  $\Delta \geq 0$ .

D.  $\Delta \leq 0$ .

Câu 7: Nếu hai số  $x, y$  có tổng  $x + y = S$  và  $xy = P$ , thì  $x, y$  là hai nghiệm của phương trình:

A.  $X^2 + SX - P = 0$ .

B.  $X^2 - SX + P = 0$ .

C.  $ax^2 + bx + c = 0$ .

D.  $X^2 - SX - P = 0$ .

Câu 8: Phương trình  $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$  có một nghiệm là :

A.  $-1$ .

B.  $-\frac{1}{2}$ .

C.  $\frac{1}{2}$ .

D.  $2$ .

## II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 9: Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 5x + 6 = 0$ . Khi đó, giá trị của biểu thức  $A = x_1^2 + x_2^2$  là

A. 13.

B. 19.

C. 25.

D. 5.

Lời giải

**Chọn A**

Phương trình  $x^2 - 5x + 6 = 0$  có:  $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$ .

Do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5+1}{2} = 3; \quad x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5-1}{2} = 2.$$

$$A = x_1^2 + x_2^2 = 13$$

Câu 10: Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $x^2 - (3m+1)x + m - 5 = 0$  có 1 nghiệm  $x = -1$

A.  $m = 1$ .

B.  $m = -\frac{5}{2}$ .

C.  $m = \frac{5}{2}$ .

D.  $m = \frac{3}{4}$ .

Lời giải

**Chọn B**

Phương trình  $x^2 - (3m+1)x + m - 5 = 0$  có 1 nghiệm  $x = -1$  khi

$$1^2 - 3m - 1 + m - 5 = 0 \Rightarrow m = \frac{-5}{2}$$

Câu 11: Phương trình  $x^2 - 2x + m - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt khi

A.  $m > -2$ .

B.  $m < -2$ .

C.  $m < 2$ .

D.  $m > 2$ .

Lời giải

**Chọn C**

Phương trình  $x^2 - 2x + m - 1 = 0$  có  $\Delta = (-2)^2 - 4.1.(m-1) = -4m + 8$ .

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi  $\Delta > 0 \Leftrightarrow -4m + 8 > 0 \Leftrightarrow m < 2$ .

**Câu 12:** Tính  $\Delta'$  của phương trình  $2x^2 + 2\sqrt{11}x + 3 = 0$ .

**A.**  $\Delta' = 5$ .

**B.**  $\Delta' = 38$ .

**C.**  $\Delta' = \sqrt{5}$ .

**D.**  $\Delta' = 20$ .

**Lời giải****Chọn A**

Ta có:  $\Delta' = (\sqrt{11})^2 - 2.3 = 11 - 6 = 5$ .

**Câu 13:** Phương trình  $mx^2 + 2(m+1)x - 1 = 0$  có hai nghiệm trái dấu khi

**A.**  $m > 0$ .

**B.**  $m < 0$ .

**C.**  $m = 0$ .

**D.**  $m \neq 0$ .

**Lời giải****Chọn A**

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi  $P < 0 \Leftrightarrow -m < 0$  hay  $m > 0$ .

**Câu 14:** Tìm nghiệm của phương trình  $2x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$ .

**A.**  $x_1 = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}; x_2 = \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$ .

**B.**  $x_1 = \sqrt{5} + \sqrt{3}; x_2 = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ .

**C.**  $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**D.**  $x_1 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}; x_2 = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải****Chọn D**

$\Delta' = (\sqrt{5})^2 - 2.1 = 5 - 2 = 3 > 0$ .

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:  $x_1 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}; x_2 = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$ .

**III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG**

**Câu 15:** Cho phương trình  $x^2 - 4mx + 4m^2 - 2 = 0$  (1) có hai nghiệm phân biệt là  $x_1, x_2$ . Tính

$P = x_1^2 + 4mx_2 - 12m^2 - 6$ .

**A.**  $-4$ .

**B.**  $3$ .

**C.**  $-6$ .

**D.**  $5$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $\Delta' = (2m)^2 - (4m^2 - 2) = 2 > 0, \forall m$ .

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

Khi đó, theo định lý Viet:  $x_1 + x_2 = 4m$  và

$$P = x_1^2 + 4mx_2 - 12m^2 - 6 = (x_1^2 - 4mx_1 + 4m^2 - 2) + 4m(x_1 + x_2) - 16m^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow P = 0 + 4m \cdot 4m - 4 - 16m^2 \Leftrightarrow P = -4.$$

**Câu 16:** Tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$  vô nghiệm là

**A.**  $m < -2$ .

**B.**  $m > -2$ .

**C.**  $m \leq -2$ .

**D.**  $m \geq -2$ .

**Lời giải****Chọn A**

Phương trình  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$  vô nghiệm khi  $\Delta' < 0$

$$\Leftrightarrow [-(m+1)]^2 - (m^2 - 3) < 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - m^2 + 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2m < -4$$

$$\Leftrightarrow m < -2.$$

**Câu 17:** Các giá trị của  $m$  để phương trình  $x^2 + 2mx + 4 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 3$  là

**A.**  $m = \pm\sqrt{5}$ .

**B.**  $m = \sqrt{5}$ .

**C.**  $m = \pm\sqrt{3}$ .

**D.**  $m = -\sqrt{3}$ .

**Lời giải****Chọn A**

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  là  $\Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq 4 \Leftrightarrow |m| \geq 2 \quad (1).$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$ .

$$\text{Đẳng thức } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 3 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 3x_1x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3x_1x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 5x_1x_2 \quad (2).$$

Theo Định lý Vi-ét ta có  $x_1 + x_2 = -2m, x_1x_2 = 4$ , do đó (2)  $\Leftrightarrow 4m^2 = 20 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{5}$  (thỏa mãn (1)).

Vậy  $m = \pm\sqrt{5}$  là giá trị cần tìm.

**Câu 18:** Tổng tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình  $mx^2 - 2(m-1)x - 3(m-2) = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 + 3x_2 = 1$  là

- A.  $\frac{20}{7}$ .                      B.  $\frac{7}{8}$ .                      C.  $-\frac{8}{7}$ .                      D.  $\frac{8}{7}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình  $mx^2 - 2(m-1)x - 3(m-2) = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-1)^2 + 3m(m-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4m^2 - 8m + 1 \geq 0 \end{cases} \quad (1).$$

Với  $m$  thỏa mãn (1) thì ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} & (2) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-3(m-2)}{m} & (3) \end{cases}$$

Mặt khác,  $x_1 + 3x_2 = 1$  (4)

Từ (2) và (4) suy ra:  $x_1 = \frac{5m-6}{2m}; x_2 = \frac{-m+2}{2m}$ .

Thay vào (3) ta được:  $\frac{5m-6}{2m} \cdot \frac{-m+2}{2m} = \frac{-3(m-2)}{m} \Leftrightarrow 7m^2 - 8m - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(\text{Tmdk}(1)) \\ m = -\frac{6}{7}(\text{Tmdk}(1)) \end{cases}$$

Vậy tổng tất cả các giá trị của  $m$  là  $\frac{8}{7}$ .

**IV – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO**

**Câu 19:** Cho các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn điều kiện  $x + y + z = 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 9xy + 10yz + 11zx$  là

- A.  $\frac{495}{148}$ .                      B. 3.                      C.  $\frac{37}{8}$ .                      D. 2.

**Lời giải**

**Chọn A**

Thay  $z = 1 - x - y$  vào  $P$  ta có

$$P = 9xy + z(10y + 11x) = 9xy + (1 - x - y)(10y + 11x) = -11x^2 + (11 - 12y)x - 10y^2 + 10y$$

$$\text{Hay } 11x^2 + (12y - 11)x + 10y^2 - 10y + P = 0 \quad (*)$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm điều kiện là } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (12y - 11)^2 - 4 \cdot 11(10y^2 - 10y + P) \geq 0$$

$$\text{Hay } -296y^2 + 176y + 121 - 44P \geq 0$$

$$\Leftrightarrow P \leq -\frac{74}{11} \left( y^2 - \frac{22}{37}y - \frac{121}{296} \right) = -\frac{74}{11} \left( y - \frac{11}{37} \right)^2 + \frac{495}{148} \leq \frac{495}{148}.$$

$$P = \frac{495}{148} \text{ khi và chỉ khi } y = \frac{11}{37}.$$

$$\text{Khi đó phương trình } (*) \text{ có nghiệm kép } x = \frac{11 - 12y}{2 \cdot 11} = \frac{11 - 12 \cdot \frac{11}{37}}{2 \cdot 11} = \frac{25}{74}.$$

$$\text{Suy ra } z = 1 - x - y = 1 - \frac{25}{74} - \frac{11}{37} = \frac{27}{74}.$$

$$\text{Do đó giá trị lớn nhất của } P \text{ là } \frac{495}{148} \text{ đạt được khi } x = \frac{25}{74}; y = \frac{11}{37}; z = \frac{27}{74}.$$

**Câu 20:** Nghiệm nguyên dương của phương trình:  $x^2 - 4xy + 5y^2 = 169$  là

**A.**  $(x; y) \in \{(29; 12); (19; 12); (22; 5)\}.$       **B.**  $(x; y) \in \{(29; 12); (19; 12); (22; 5)\}.$

**C.**  $(x; y) \in \{(29; 12); (19; 12); (22; 5)\}.$       **D.**  $(x; y) \in \{(29; 12); (19; 12); (22; 5)\}.$

**Lời giải**

**Chọn A**

Coi phương trình  $x^2 - 4xy + 5y^2 = 169$  là phương trình bậc hai đối với ẩn  $x$ :

$$x^2 - 4xy + 5y^2 - 169 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \Delta'_x = (-2y)^2 - (5y^2 - 169) = 169 - y^2$$

$$\text{Để phương trình (1) có nghiệm thì: } \Delta'_x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 69 - y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -13 \leq y \leq 13$$

$$\Rightarrow 1 \leq y \leq 13 \quad (\text{do } y \text{ nguyên dương})$$

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên dương thì  $\Delta'_x$  là số chính phương, hay:

$$\begin{cases} 169 - y^2 = k^2 \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 1 \leq y \leq 13 \quad (y \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Ta có:  $169 - y^2 = k^2$

$$\Leftrightarrow k^2 + y^2 = 169$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2 = 25 \\ y^2 = 144 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k^2 = 144 \\ y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ y = 5 \end{cases} \text{ (do } y \text{ nguyên dương)}$$

Với  $y = 12$  phương trình  $x^2 - 48x + 551 = 0$  có hai nghiệm là:  $x_1 = 29$  (chọn);  $x_2 = 19$  (chọn).

Với  $y = 5$  phương trình  $x^2 - 20x - 44 = 0$  có hai nghiệm là:  $x_1 = 22$  (chọn);  $x_2 = -2$  (loại).

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là:  $(x; y) \in \{(29; 12); (19; 12); (22; 5)\}$ .

## E. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1:

**Bài 1.** Cho hàm số  $y = ax^2$  có đồ thị hàm số  $(P)$ .

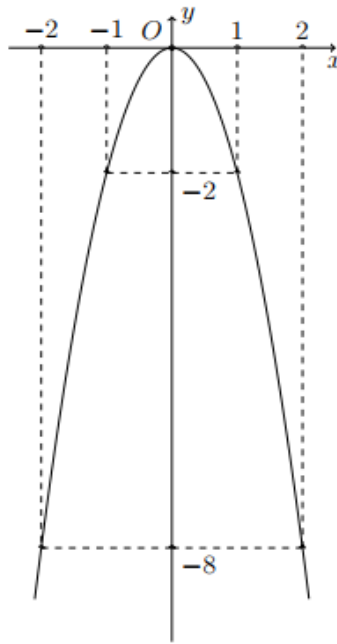
- Xác định  $a$  biết  $(P)$  đi qua điểm  $A(1; -2)$ .
- Vẽ đồ thị  $(P)$ .

### Lời giải

- $(P)$  đi qua điểm  $A(1; -2)$  khi và chỉ khi  $-2 = a.1^2 \Leftrightarrow a = -2$ .
- Bảng giá trị

$x$	-2	-1	0	1	-2
$y = -2x^2$	-8	-2	0	2	-8

Vẽ đồ thị.



**Bài 2.** Cho parabol  $(P): y = \frac{x^2}{2}$  và đường thẳng  $(d): y = x + 4$ .

- a. Vẽ  $(P)$  và  $(d)$  trên cùng hệ trục tọa độ.
- b. Tìm tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$ .

**Lời giải**

a. Vẽ đường thẳng  $(d)$

Cho  $x = 0 \Rightarrow y = 4$ . Ta được  $(0; 4)$  thuộc ĐTHS  $y = x + 4$

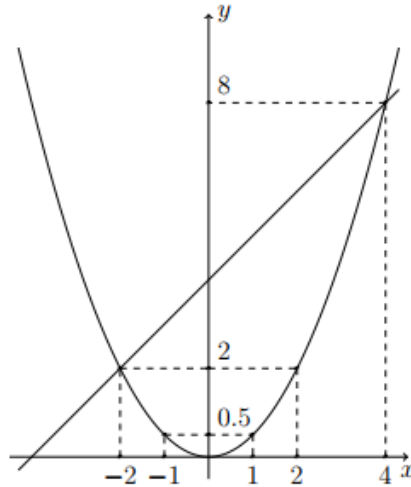
Cho  $y = 0 \Rightarrow x = -4$ . Ta được  $(-4; 0)$  thuộc ĐTHS  $y = x + 4$

Vẽ parabol  $(P)$  :

Bảng giá trị

$x$	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{x^2}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Vẽ đồ thị



b. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng  $(d)$  và  $(P)$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} &= x + 4 \\ x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $x = -2 \Rightarrow y = 2$ .

Với  $x = 4 \Rightarrow y = 8$ .

Vậy tọa độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  là  $(-2; 2)$  và  $(4; 8)$

**Bài 3.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho Parabol  $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ .

Hai điểm  $A$  và  $B$  thuộc  $(P)$  có hoành độ lần lượt là  $2; -1$ . Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm  $A$  và  $B$ .

### Lời giải

Vì điểm  $A$  thuộc  $(P)$  có hoành độ là  $2$  nên tung độ của  $A$  là  $y = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$ . Ta có  $A(2; 2)$

Vì điểm  $B$  thuộc  $(P)$  có hoành độ là  $-1$  nên tung độ của  $B$  là  $y = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = \frac{1}{2}$ . Ta có  $B(-1; \frac{1}{2})$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm  $A, B$  có dạng  $y = ax + b (a \neq 0) (d)$

Vì  $A(2; 2)$  thuộc đường thẳng  $(d)$  nên ta có  $2a + b = 2 (1)$

Vì  $B(-1; \frac{1}{2})$  thuộc đường thẳng  $(d)$  nên ta có  $-a + b = \frac{1}{2} (2)$

Từ (1), (2) ta có  $a = \frac{1}{2} (t/m), b = 1$ . Phương trình đường thẳng cần tìm là  $y = \frac{1}{2}x + 1$

**Bài 4.** Cho Parabol  $(P): y = x^2$  và hàm số  $(d): y = x + 2$ .

a, Xác định tọa độ giao điểm  $A$  và  $B$  của  $(P)$  và  $(d)$ .

b, Tính diện tích  $OAB$  với  $O$  là gốc tọa độ.

**Lời giải**

a. Xét phương trình hoành độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  ta có

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 (a = 1, b = -1, c = -2) (1)$$

Giải PT (1) ta được  $x_1 = -1; x_2 = 2$

Với  $x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 1$

$x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 4$

Vậy tọa độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  là  $A(-1;1)$  và  $B(2;4)$

b. Gọi  $M, N$  lần lượt là hình chiếu của  $A, B$  trên trục  $Ox$

Ta có  $M(-1;1), N(2;4)$

Ta có  $S_{AOB} = S_{AMNB} - S_{AMO} - S_{BNO}$

$$S_{AOB} = \frac{(AM + BN).MN}{2} - \frac{AM.MO}{2} - \frac{BN.NO}{2}$$

$$S_{AOB} = \frac{(1+4).3}{2} - \frac{1.1}{2} - \frac{2.4}{2}$$

$$S_{AOB} = 3(dvdt)$$

**Bài 5.** Cho hai hàm số  $y = \frac{1}{2}x^2$  và đồ thị hàm số  $(P)$  và  $y = x + 4$  có đồ thị  $(d)$

a) Vẽ đồ thị  $(P)$

b) Gọi  $A, B$  là các giao điểm của hai đồ thị  $(P)$  và  $(d)$  Biết rằng đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét, tìm tất cả các điểm  $M$  trên tia  $Ox$  sao cho diện tích tam giác  $MAB$  bằng  $30 \text{ cm}^2$ .

**Lời giải**

Vẽ parabol  $(P)$  :

Bảng giá trị

$x$	-2	-1	0	1	-2
$y = \frac{x^2}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Vẽ đồ thị

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$  là:

$$\frac{1}{2}x^2 = x + 4$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Delta' = (-1)^2 - (-8) = 9 > 0$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:  $x = 4; x = -2$

Với  $x = -2$  ta có  $y = 2 \Rightarrow A(-2; 2)$

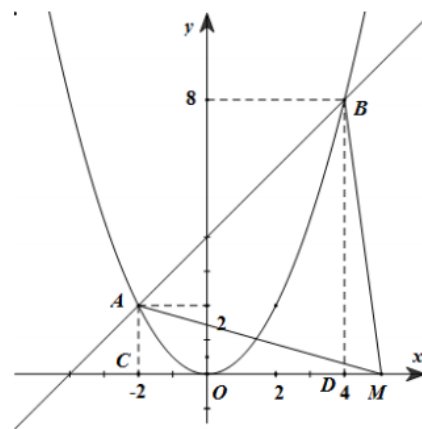
Với  $x = 4$  ta có  $y = 8 \Rightarrow B(4; 8)$

Gọi  $M(m; 0)$  thuộc tia

Gọi  $C, D$  lần lượt là hình chiếu của  $A, B$  trên trục  $Ox$

Ta có  $C(-2; 0), D(4; 0)$

Xét hai trường hợp:



*Trường hợp 1:*  $M$  thuộc đoạn  $OD$ : Ta có  $S_{AMB} = S_{ABDC} - S_{ACM} - S_{BDM}$

Có  $ABDC$  là hình thang,  $AC = 2cm, BD = 8cm, CD = 6cm$

$$\Rightarrow S_{ABDC} = \frac{(2+8) \cdot 6}{2} = 30 (\text{cm}^2)$$

Suy ra  $S_{AMB} < 30 \text{ cm}^2$  (loại)

*Trường hợp 2:*  $M$  thuộc tia  $Dx$  ( $M \neq D$ )  $\Rightarrow m > 4$

Ta có:  $S_{AMB} = S_{ABDC} - S_{ACM} + S_{BDM}$

Có  $S_{ABDC} = 30 \text{ cm}^2, MC = m + 2(\text{cm}), MD = m - 4(\text{cm})$

Suy ra

$$S_{ACM} = \frac{1}{2} AC \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (m + 2) = m + 2 (\text{cm}^2)$$

$$S_{BDM} = \frac{1}{2} BD \cdot DM = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (m - 4) = 4(m - 4) (\text{cm}^2)$$

$$\Rightarrow S_{AMB} = 30 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow S_{ACM} = S_{BDM} \Leftrightarrow m + 2 = 4(m - 4) \Leftrightarrow m = 6$$

$m = 6$  (thỏa mãn). Vậy  $M(6; 0)$  là điểm cần tìm.

**Dạng 2:**

**Bài 6.** Giải phương trình:

a,  $2x^2 - 3x - 2 = 0$ .

b,  $x^2 - x - 2 = 0$ .

c,  $4x^2 - 12x + 9 = 0$

**Lời giải**

a,

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 (a = 2, b = -3, c = -2)$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25 > 0$$

Phương trình có hai nghiệm  $x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = 4$

b,  $x^2 - x - 2 = 0 (a = 1, b = -1, c = -2)$

Ta có  $a - b + c = 1 - (-1) - 2 = 0$

Nên phương trình có hai nghiệm  $x_1 = -1; x_2 = 2$

$$c, 4x^2 - 12x + 9 = 0 (a = 4, b = -12, c = 9)$$

$$\Delta' = (-6)^2 - 4.9 = 0$$

Phương trình có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$

**Bài 7.** Giải phương trình:

$$a, 4x^4 - 5x^2 - 9 = 0.$$

$$b, x^4 + 3x^2 - 4 = 0.$$

$$c, x^4 + 2x^2 - 8 = 0$$

**Lời giải**

$$a, 4x^4 - 5x^2 - 9 = 0.$$

$$\text{Đặt } x^2 = t (t \geq 0)$$

$$\text{Ta có phương trình } 4t^2 - 5t - 9 = 0 (a = 4, b = -5, c = -9)$$

$$\text{Vì } a - b + c = 4 - (-5) - 9 = 0$$

Nên phương trình có hai nghiệm  $t_1 = -1 (KTM); t_2 = \frac{9}{4} (TM)$

$$\text{Với } t = \frac{9}{4} \text{ Ta có } x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{2}; x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy phương trình có hai nghiệm } x = \frac{3}{2}; x = -\frac{3}{2}$$

$$b, x^4 + 3x^2 - 4 = 0.$$

$$\text{Đặt } x^2 = t (t \geq 0)$$

$$\text{Ta có phương trình } t^2 + 3t - 4 = 0 (a = 1, b = 3, c = -4)$$

$$\text{Vì } a + b + c = 1 + 3 + (-4) = 0$$

Nên phương trình có hai nghiệm  $t_1 = 1 (TM); t_2 = -4 (KTM)$

$$\text{Với } t = 1 \text{ Ta có } x^2 = 1 \Rightarrow x = 1; x = -1$$

Vậy phương trình có hai nghiệm  $x = 1; x = -1$

$$c, x^4 + 2x^2 - 8 = 0$$

$$\text{Đặt } x^2 = t (t \geq 0)$$

$$\text{Ta có phương trình } t^2 + 2t - 8 = 0 (a = 1, b = 2, c = -8)$$

$$\Delta = (2)^2 - 4.1.(-8) = 36 > 0$$

Nên phương trình có hai nghiệm  $t_1 = 2 (TM); t_2 = -4 (KTM)$

$$\text{Với } t = 2 \text{ Ta có } x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}; x = -\sqrt{2}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm  $x = \sqrt{2}; x = -\sqrt{2}$

**Bài 8.** : Giải phương trình:

a,  $5x^2 + 2x = 0$ .

b,  $x^2 - 2x = 0$ .

**Lời giải**

a,  $5x^2 + 2x = 0$ .

$$x(5x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm  $x = 0; x = -\frac{2}{5}$

b,  $x^2 - 2x = 0$ .

$$x(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm  $x = 0; x = 2$

**Bài 9.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x - 2m + 1 = 0(1)$  với  $m$  là tham số.

a) Giải phương trình (1) với  $m = -2$

b) Tìm  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

**Lời giải**

a) Giải phương trình (1) với  $m = -2$

Thay  $m = -2$  vào phương trình  $x^2 - 2(m-1)x - 2m + 1 = 0(1)$

ta được:  $x^2 + 6x + 5 = 0$

Giải pt tìm được  $x_1 = -1; x_2 = -5$

b) Tìm  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Xét pt  $x^2 - 2(m-1)x - 2m + 1 = 0(1)$

Có  $a = 1, b = -2(m-1) \Rightarrow b' = -(m-1); c = -2m + 1$

Tính  $\Delta' = [-(m-1)]^2 - 1 \cdot (-2m + 1) = m^2$

Để pt(1) có hai nghiệm phân biệt thì  $\Delta' > 0 \Rightarrow m^2 > 0 \Rightarrow m \neq 0$

**Bài 10.** Cho Parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = -x + 2$ .

a, Xác định tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$ .

b, Xác định  $m$  để đường thẳng  $(d'): y = mx - 4$  tiếp xúc với  $(P)$ .

**Lời giải**

a, Xét phương trình hoành độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  ta có

$$\begin{aligned}x^2 &= -x + 2 \\x^2 + x - 2 &= 0 (a = 1, b = 1, c = -2)(1)\end{aligned}$$

Giải PT (1) ta được  $x_1 = 1; x_2 = -2$

Với  $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1$

$$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 4$$

Vậy tọa độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  là  $(1;1)$  và  $(-2;4)$

b, Xét phương trình hoành độ giao điểm của  $(d')$  và  $(P)$  ta có

$$\begin{aligned}x^2 &= mx - 4 \\x^2 - mx + 4 &= 0 (a = 1, b = -m, c = -4)(1)\end{aligned}$$

$$\text{Tính } \Delta = [-m]^2 - 4.1.4 = m^2 - 16$$

Để đường thẳng  $(d')$ :  $y = mx - 4$  tiếp xúc với  $(P)$ .

Thì phương trình (1) có hai nghiệm kép

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -4 \end{cases}$$

Vậy  $m = 4; m = -4$  là giá trị cần tìm

**Dạng 3:**

**Bài 11.** Cho phương trình  $x^2 - 5x + 2 = 0$ . Không giải phương trình, gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của biểu thức

a)  $A = x_1^2 + x_2^2$ .

b)  $B = |x_1 - x_2|$ .

c)  $C = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$ .

**Lời giải**

Vì phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$ , nên theo Định lý Vi-et ta có  $x_1 + x_2 = 5(1)$  và  $x_1 \cdot x_2 = 2(2)$

a) Ta có

$$A = x_1^2 + x_2^2$$

$$A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Thay (1)(2) vào biểu thức, ta có

$$A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$A = 5^2 - 2.2 = 21$$

Vậy giá trị của biểu thức là 21

$$b) B = |x_1 - x_2| \Rightarrow B^2 = |x_1 - x_2|^2 \Rightarrow B^2 = (x_1 - x_2)^2$$

$$B^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$B^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

Thay (1)(2) vào biểu thức, ta có

$$B^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$B^2 = 5^2 - 4.2 = 17$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{17}$$

Vậy giá trị của biểu thức là  $\sqrt{17}$

$$c) C = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$$

$$C = \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1x_2)^3} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)}{(x_1x_2)^3}$$

Thay (1)(2) vào biểu thức, ta có

$$C = \frac{5^3 - 3.2.5}{2^3} = \frac{125 - 30}{8} = \frac{95}{8}$$

Vậy giá trị của biểu thức là  $\frac{95}{8}$

**Bài 12.** Giải phương trình  $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$  (1) (với  $m$  là tham số).

a. Giải phương trình với  $m = -3$ .

b. Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình (1) có các nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 = 10$

### Lời giải

a. Thay  $m = -3$  vào phương trình (1) Ta có

$$x^2 + 8x = 0$$

$$x(x+8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases}$$

Vậy với  $m = -3$  thì phương trình có nghiệm  $x = 0, x = -8$

b.  $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$  (1)

$$\Delta' = [-(m-1)]^2 - (-m-3)$$

$$\Delta' = m^2 - m + 4$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thì  $\Delta' \geq 0$  hay  $m^2 - m + 4 \geq 0$  (\*)

Theo hệ thức Vi-et, ta có  $x_1 + x_2 = 2(m-1)$  (2) và  $x_1 \cdot x_2 = -m-3$  (3)

Theo bài ra  $x_1^2 + x_2^2 = 10$

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$  Thay (2)(3) vào phương trình, ta có

$$[2(m-1)]^2 - 2(-m-3) = 10$$

$$4m^2 - 6m = 0$$

$$2m \cdot (2m - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Thay  $m = 0, m = \frac{3}{2}$  vào bất đẳng thức (\*) ta luôn được khẳng định đúng

Vậy  $m = 0, m = \frac{3}{2}$  là giá trị cần tìm

**Bài 13.** Cho phương trình  $x^2 - 5x + m = 0$  ( $m$  là tham số) (1).

a. Giải phương trình trên khi  $m = 6$ .

b. Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1 - x_2| = 3$ .

### Lời giải

a. Thay  $m = 6$  vào phương trình (1) Ta có phương trình

$$x^2 - 5x + 6 = 0 (a = 1, b = -5, c = 6)$$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1 > 0$  phương trình có hai nghiệm

$$x_1 = 2; x_2 = 3$$

b.  $x^2 - 5x + m = 0$  (1)

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m$$

$$\Delta = 25 - 4m$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thì  $\Delta' \geq 0$  hay  $25 - 4m \geq 0$

$$m \leq \frac{25}{4}$$

Theo hệ thức Vi-et, ta có  $x_1 + x_2 = 5$  (2) và  $x_1 \cdot x_2 = -m$  (3)

Theo bài ra  $|x_1 - x_2| = 3$

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2|^2 &= 9 \\ x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 &= 9 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 &= 9 \end{aligned}$$

Thay (2)(3) vào phương trình, ta có  $25 - 4(-m) = 9$   
 $4m = -16$   
 $m = -4$

Vậy  $m = -4$  là giá trị cần tìm

**Bài 14.** Cho phương trình:  $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$  (1)

- a) Giải phương trình (1) khi  $m = 3$   
 b) Tìm  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1; x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + (2m+1)x_2 = 2x_1x_2 + 7$

**Lời giải**

a. Thay  $m = 3$  phương trình (1) ta có  $x^2 - 7x + 11 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4.1.11 = 5 > 0$  nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{5}}{2.1} = \frac{7 + \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}$$

b) Để phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1; x_2$  thì  $\Delta \geq 0$

$$\begin{aligned} [-(2m+1)]^2 - 4.1.(m^2 + 2) &\geq 0 \\ 4m - 7 &\geq 0 \\ m &\geq \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Theo Viet có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1x_2 = m^2 + 2 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned} x_1^2 + (2m+1)x_2 &= 2x_1x_2 + 7 \\ x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 &= 2x_1x_2 + 7 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 &= 7 \\ (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 &= 7 \\ (2m+1)^2 - 3(m^2 + 2) - 7 &= 0 \\ m^2 + 4m - 12 &= 0 \\ (m-2)(m+6) &= 0 \\ \begin{cases} m = 2(\text{tmdk}) \\ m = -6(\text{ktmdk}) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy khi  $m = 2$  thì phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1; x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + (2m+1)x_2 = 2x_1x_2 + 7$

**Bài 15.** Cho phương trình:  $x^2 - (2m+3)x - 2m - 4 = 0$  (1)

- a. Giải phương trình khi  $m = 2$ .  
 b. Tìm  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  sao cho  $|x_1 - x_2| = 5$

**Lời giải**

a. Với  $m = 2$  thì phương trình (1) trở thành:

$$x^2 - (2 \cdot 2 + 3)x - 2 \cdot 2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$x^2 - 8x + x - 8 = 0$$

$$x(x - 8) + (x - 8) = 0$$

$$(x + 1)(x - 8) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 8 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là:  $x = -1$  hoặc  $x = 8$

b. Để phương trình có hai nghiệm thì

$$\Delta \geq 0$$

$$(2m + 3)^2 - 4 \cdot (-2m - 4) \geq 0$$

$$4m^2 + 12m + 9 + 8m + 16 \geq 0$$

$$4m^2 + 20m + 25 \geq 0$$

$$(2m + 5)^2 \geq 0 \quad \forall m$$

Áp dụng định lý Vi-et ta có:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 3 \\ x_1 \cdot x_2 = -2m - 4 \end{cases} \quad (2)$

$$|x_1 - x_2| = 5$$

Viết lại  $(x_1 - x_2)^2 = 5^2$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 25$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 25 \quad (3)$$

Thay (2) vào (3) ta được:  $(2m + 3)^2 - 4 \cdot (-2m - 4) = 25$

$$4m^2 + 12m + 9 + 8m + 16 = 25$$

$$4m^2 + 20m = 0$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ m = -5 \end{cases}$$

Vậy để phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn  $|x_1 - x_2| = 5$  thì  $m = 0$  hoặc  $m = -5$

**Dạng 4:**

**Bài 16.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m + 1) + m^2 + 2m = 0$  (ẩn  $x$ ).

a) Giải phương trình khi  $m = 1$ .

b) Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2$  nhỏ nhất

**Lời giải**

Xét phương trình  $x^2 - 2(m + 1) + m^2 + 2m = 0$  (1).

a) Với  $m = 1$ , thay vào phương trình (1) ta có:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) có tổng các hệ số bằng 0 nên có hai nghiệm là:

$$x_1 = 1, x_2 = 3$$

Vậy khi  $m = 1$  thì phương trình có tập nghiệm  $S = \{1; 3\}$ .

b) Phương trình (1) có  $a = 1 \neq 0$  nên (1) là phương trình bậc hai một ẩn.

$$\Delta' = [-(m+1)]^2 - 1 \cdot (m^2 + 2m) = 1 > 0 \text{ với mọi } m$$

$\Rightarrow$  (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$

Theo hệ Vi-et ta có:  $x_1 + x_2 = 2(m+1) = 2m+2$  và  $x_1 x_2 = m^2 + 2m$

Do đó:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (2m+2)^2 - 2(m^2 + 2m)$$

$$= 4m^2 + 8m + 4 - 2m^2 - 4m = 2m^2 + 4m + 4$$

$$= 2(m^2 + 2m + 1) + 2 = 2(m+1)^2 + 2 \geq 2 \text{ với mọi } m$$

Dấu bằng xảy ra khi  $m = -1$

Vậy  $m = -1$  là giá trị cần tìm.

**Bài 17.** Cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = 3x - m$

a) Tìm  $m$  để  $(d)$  và  $(P)$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = (x_1^2 + 3x_2)^2 + 14m$

### Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  là:  $x^2 - 3x + m = 0$  (1)

Ta có  $\Delta = 9 - 4m$

Để  $(P)$  cắt  $(d)$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$  thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$

$$\Rightarrow \Delta > 0$$

$$9 - 4m > 0$$

$$m < \frac{9}{4} \quad (*)$$

Vậy với  $m < \frac{9}{4}$  thì  $(P)$  cắt  $(d)$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$ .

b) Vì  $x_1$  là nghiệm của phương trình (1) nên ta có  $x_1^2 - 3x_1 + m = 0$

$$\Rightarrow x_1^2 = 3x_1 - m$$

$$\Rightarrow A = (x_1^2 + 3x_2)^2 + 14m = (3x_1 + 3x_2 - m)^2 + 14m = [3(x_1 + x_2) - m]^2 + 14m$$

Theo định lý Vi-et ta có:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$  thay vào biểu thức  $A$  ta được:

$$A = (9 - m)^2 + 14m$$

$$A = m^2 - 4m + 81$$

$$A = (m - 2)^2 + 77$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức là 77

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $m - 2 = 0$

$m = 2$  ( $t/m$ )

Vậy  $A$  đạt GTNN bằng 77 khi  $m = 2$

**Bài 18.** Cho parabol  $(P): y = -x^2$  và đường thẳng  $(d): y = (3 - 2m)x - 4$ .

a) Chứng minh rằng  $(P)$  luôn cắt  $(d)$  tại hai điểm phân biệt với mọi  $m$ .

b) Gọi  $x_1, x_2$  là hoành độ hai giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $K = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2) - 2x_1 - 2x_2$ .

### Lời giải

a) Chứng minh rằng  $(P)$  luôn cắt  $(d)$  tại hai điểm phân biệt.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$ :

$$\begin{aligned} -x^2 &= (3 - 2m)x - 4 \\ x^2 + (3 - 2m)x - 4 &= 0 \end{aligned} \quad (I)$$

Ta có:  $\Delta = b^2 - 4ac = (2m - 3)^2 + 16 > 0$  với mọi  $m$  (do  $(2m - 3)^2 \geq 0$  với mọi  $m$ )

$\Rightarrow$  Phương trình (I) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .

Vậy  $(P)$  luôn cắt  $(d)$  tại hai điểm phân biệt với mọi  $m$ .

b) Gọi  $x_1, x_2$  là hoành độ hai giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $K = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2) - 2x_1 - 2x_2$ .

Xét PT hoành độ giao điểm:  $x^2 + (3 - 2m)x - 4 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ .

$$\text{Theo Viét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 3 & (1) \\ x_1 x_2 = -4 & (2) \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có:  $K = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2) - 2x_1 - 2x_2$

$$K = 1 - (x_1^2 + x_2^2) + (x_1 x_2)^2 - 2(x_1 + x_2)$$

$$K = 1 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1 x_2 + (x_1 x_2)^2 - 2(x_1 + x_2) \quad (3)$$

Thay (1), (2) vào (3), ta có:  $K = 1 - (2m - 3)^2 + 2 \cdot (-4) + (-4)^2 - 2 \cdot (2m - 3)$

$$K = -4m^2 + 8m + 6$$

$K = -(2m - 2)^2 + 10 \leq 10$  do  $(2m - 2)^2 \geq 0$  với mọi  $m$ .

Vậy giá trị lớn nhất của  $K$  là 10. Dấu “=” xảy ra khi

$$\begin{aligned} (2m - 2)^2 &= 0 \\ m &= 1 \end{aligned}$$

**Bài 19.** Cho đường thẳng  $(d): y = mx - m + 1$  và parabol  $(P): y = x^2$  với  $m$  là tham số.

- a) Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d)$  tiếp xúc với parabol  $(P)$ . Tìm tọa độ tiếp điểm.  
 b) Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1; x_2$  sao cho biểu thức  $M = x_1 \cdot x_2 - 6\sqrt{x_1 + x_2} + 5$  có giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

- a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$

$$x^2 = mx - m + 1$$

$$x^2 - mx + m - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Có } \Delta = (-m)^2 - 4 \cdot (m - 1) = (m - 2)^2$$

$$\text{Hoặc tính } a + b + c = 1 - m + m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình (1) có 2 nghiệm } x_1 = 1; x_2 = m - 1$$

Để  $(d)$  tiếp xúc  $(P) \Rightarrow$  Phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\Rightarrow m - 1 = 1$$

$$m = 2$$

- Khi  $m = 2$  phương trình (1) có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = 1 \Rightarrow y_1 = y_2 = 1$

Vậy tọa độ tiếp điểm của  $(d)$  và  $(P)$  là  $(1; 1)$

- b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$

$$x^2 - mx + m - 1 = 0 \quad (1)$$

Để  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt

$\Rightarrow$  Phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  phân biệt khi

$$\Rightarrow x_1 \neq x_2$$

$$\Rightarrow m - 1 \neq 1$$

$$m \neq 2$$

$M = x_1 \cdot x_2 - 6\sqrt{x_1 + x_2} + 5$  có giá trị nhỏ nhất.

$$M = m - 1 - 6\sqrt{m} + 5 \quad \text{đk: } m \geq 0$$

$$M = m - 6\sqrt{m} + 4$$

$$M = m - 2 \cdot \sqrt{m} \cdot 3 + 9 - 5$$

$$M = (\sqrt{m} - 3)^2 - 5 \geq -5$$

Dấu “=” xảy ra khi  $\sqrt{m} - 3 = 0 \Rightarrow m = 9$  (tm)

Vậy  $M$  có giá trị nhỏ nhất là  $-5$  khi  $m = 9$

**Bài 20.** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $d: y = (2m + 5)x - 2m - 1$  và  $(P): y = x^2$ .

- a) Chứng minh với mọi  $m$ , đường thẳng  $d$  luôn cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi  $x_1, x_2$  là hoành độ các giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $M = \left| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right|$

**Lời giải**

a) Hoành độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - (2m+5)x + 2m+1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Có } \Delta = (2m+5)^2 - 4(2m+1)$$

$$\Delta = 4m^2 + 20m + 25 - 8m - 4$$

$$\Delta = 4m^2 + 12m + 21$$

$$\Delta = (2m+3)^2 + 12$$

$$\Rightarrow \Delta > 0 \forall m$$

$\Rightarrow \forall m$  phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy đường thẳng  $(d)$  luôn cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.

b) Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 5 \\ x_1 x_2 = 2m + 1 \end{cases}$$

$$\text{Có } M = \left| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right|$$

$$\Rightarrow M^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2}$$

$$\Rightarrow M^2 = 2m + 5 - 2\sqrt{2m+1} \quad \text{ĐK: } m \geq \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow M^2 = (\sqrt{2m+1} - 1)^2 + 3$$

$$\text{Có } (\sqrt{2m+1} - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{2m+1} - 1)^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow M^2 \geq 3$$

$$\Rightarrow M \geq \sqrt{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi  $m = 0$  (thỏa mãn điều kiện)

Vậy  $M$  có giá trị nhỏ nhất là  $\sqrt{3}$  khi  $m = 0$ .

**Dạng 5:**

**Bài 21.** Tìm hai số tự nhiên liên tiếp có tổng các bình phương của nó là 85.

**Lời giải**

Gọi số bé là  $x (x \in \mathbb{N})$  Số tự nhiên kế sau là  $x+1$ .

Vì tổng các bình phương của nó là 85 nên ta có phương trình:  $x^2 + (x+1)^2 = 85$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 85$$

$$2x^2 + 2x - 84 = 0$$

$$x^2 + x - 42 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.(-42) = 169 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$$

$$x_1 = \frac{-1+13}{2} = 6 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Phương trình có hai nghiệm:

$$x_2 = \frac{-1-13}{2} = -7 \text{ (loại)}$$

Vậy hai số phải tìm là 6 và 7.

**Bài 22.** Tìm hai số biết rằng tổng của chúng bằng 17 đơn vị. Nếu số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ hai tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị.

### Lời giải

Gọi số thứ nhất là  $x$ , số thứ hai là  $y$ .

Theo đề bài tổng của hai số đó bằng 17 đơn vị nên ta có phương trình  $x + y = 17$ . (1)

Số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ hai tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị nên ta có phương trình  $(x+3)(y+2) = 105$ . (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ (x+3)(y+2) = 105 \end{cases}$$

Rút  $y$  từ (1) thế vào (2) và thu gọn, ta được

$$x^2 - 16x + 48 = 0.$$

Giải phương trình ta được  $x_1 = 12$  (thỏa mãn) và  $x_2 = 4$  (thỏa mãn).

Vậy nếu số thứ nhất là 12 thì số thứ hai là 4; nếu số thứ nhất là 4 thì số thứ hai là 12.

**Bài 23.** Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 5 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số mới là nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó

### Lời giải

Gọi tử số của phân số của phân số cần tìm là  $x$  thì mẫu số của phân số cần là  $x+11$

(đk:  $x \in \mathbb{Z}; x \neq 0, x \neq -11$ )

Phân số cần tìm là  $\frac{x}{x+11}$

Khi bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số 4 đơn vị ta được phân số

$$\frac{x-7}{x+15} \quad (\text{Điều kiện: } x \neq -15)$$

Theo bài ra ta có phương trình:  $\frac{x}{x+11} = \frac{x+15}{x-7}$

Giải PT tìm  $x = -5$  vậy phân số cần tìm là  $\frac{-5}{6}$ .

**Bài 24.** Cho một số có hai chữ số. Tìm số đó, biết rằng tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần. Nếu thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho.

### Lời giải

Gọi chữ số hàng chục là  $x$ , chữ số hàng đơn vị là  $y$  ( $x, y \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 9, 0 \leq y \leq 9$ ).

Theo đề bài, tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần, ta có phương trình

$$6(x + y) = 10x + y. \quad (1)$$

Nếu thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho, ta có phương trình

$$xy + 25 = 10y + x. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra  $x = \frac{5y}{4}$  thay vào (2) ta có  $y^2 - 9y + 20 = 0$ .

Giải phương trình này, ta được  $y_1 = 5, y_2 = 4$ .

Với  $y_1 = 5$  thì  $x_1 = 6,25$  (không thỏa mãn).

Với  $y_2 = 4$  thì  $x_2 = 5$  (thỏa mãn).

Vậy số phải tìm là 54.

**Bài 25.** Năm nay tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi Phương. Phương tính rằng 13 năm nữa thì tuổi mẹ gấp 2 lần tuổi Phương. Hỏi năm nay Phương bao nhiêu tuổi?

### Lời giải

Gọi tuổi của Phương năm nay là  $x$  ( $x > 0$ )

Khi đó năm nay mẹ Phương  $3x$  tuổi.

Theo bài 13 năm nữa tuổi mẹ Phương gấp 2 lần tuổi Phương nên ta có phương trình

$$\begin{aligned} 3x + 13 &= (x + 13) \cdot 2 \\ x &= 13. \end{aligned}$$

Vậy năm nay Phương 13 tuổi.

### Dạng 6:

**Bài 26.** Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 30 tấn hàng. Khi sắp khởi hành thì được bổ sung thêm 2 xe nên mỗi xe chở ít hơn 0,5 tấn hàng. Hỏi lúc đầu đoàn xe có bao nhiêu chiếc xe?

### Lời giải

Gọi số xe trong đoàn xe lúc đầu là  $x$  (chiếc) ( $x \in \mathbb{Z}^+$ ).

Số xe trong đoàn xe khi bổ sung thêm là  $x + 2$  (chiếc).

Lúc đầu, lượng hàng mỗi xe phải chở là  $\frac{30}{x}$  (tấn)

Lúc thêm 2 xe, lượng hàng mỗi xe phải chở là  $\frac{30}{x+2}$  (tấn)

Do bổ sung thêm 2 xe thì mỗi xe chở ít hơn  $0,5 = \frac{1}{2}$  tấn hàng nên ta có phương trình :

$$\frac{30}{x} - \frac{30}{x+2} = \frac{1}{2} \quad (x > 0, x \text{ nguyên})$$

$$\Rightarrow 60(x+2) - 60x = x(x+2)$$

$$x^2 + 2x - 120 = 0$$

$$\Delta' = 1^2 - 1 \cdot (-120) = 121 > 0, \sqrt{\Delta'} = \sqrt{121} = 11.$$

$$x_1 = -1 + 11 = 10 \text{ (nhận)}; x_2 = -1 - 11 = -12 \text{ (loại)}.$$

Vậy lúc đầu đoàn xe có 10 chiếc.

**Bài 27.** Một tổ công nhân dự định làm xong 240 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng khi thực hiện, nhờ cải tiến kĩ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 10 sản phẩm so với dự định. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi khi thực hiện, mỗi ngày tổ đã làm được bao nhiêu sản phẩm?

### Lời giải

Gọi số sản phẩm tổ đã thực hiện trong mỗi ngày là  $x$  (sản phẩm). (ĐK:  $x > 10, x \in \mathbb{Z}$ )

Do đó:

Số sản phẩm tổ dự định làm trong mỗi ngày là:  $x - 10$  (sản phẩm).

Thời gian tổ hoàn thành công việc trong thực tế là:  $\frac{240}{x}$  (ngày)

Thời gian tổ hoàn thành công việc theo dự định là:  $\frac{240}{x-10}$  ngày

Vì tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày, do đó ta có phương trình:

$$\frac{240}{x-10} - \frac{240}{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{120}{x-10} - \frac{120}{x} = 1$$

$$\Rightarrow 120x - 120x + 1200 = x^2 - 10x$$

$$x^2 - 10x - 1200 = 0 \dots$$

$$\begin{cases} x = 40 \text{ (TM)} \\ x = -30 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

Vậy số sản phẩm tổ đã thực hiện trong mỗi ngày là 40 sản phẩm.

**Bài 28.** Hưởng ứng phong trào “*Vì biển đảo Trường Sa*” một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở ít hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu, biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau?

### Lời giải

Gọi  $x$  (chiếc) số tàu dự định của đội ( $x \in \mathbb{N}^*, x < 140$ )

Số tàu tham gia vận chuyển là  $x + 1$  (chiếc)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo dự định:  $\frac{280}{x}$  (tấn)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc thực tế:  $\frac{286}{x+1}$  (tấn)

Theo đề bài ta có pt:  $\frac{280}{x} - \frac{286}{x+1} = 2$

$$\Rightarrow 280(x+1) - 286x = 2x(x+1)$$

$$x^2 + 4x - 140 = 0$$

$$\begin{cases} x = 10 \text{ (t/m)} \\ x = -14 \text{ (l)} \end{cases}$$

Vậy đội tàu lúc đầu là 10 chiếc.

**Bài 29.** Một tổ máy trộn bê tông phải sản xuất  $450m^3$  cho một đập thủy lợi trong một thời gian quy định. Nhờ tăng năng suất mỗi ngày  $4,5m^3$  nên 4 ngày trước thời hạn quy định tổ đã sản xuất được 96% công việc. Hỏi thời gian quy định là bao nhiêu ngày.

### Lời giải

Gọi thời gian quy định là  $x$  ngày, ( $x > 4$ )

Năng suất quy định là  $\frac{450}{x}$  ( $m^3$ )

4 ngày trước thời hạn quy định, tổ máy đã sản xuất được  $\frac{96}{100} \cdot 450(m^3)$  hay  $432m^3$ .

Năng suất đã thực hiện là  $\frac{432}{x-4}$  (ngày)

Vì năng suất thực hiện tăng  $4,5m^3$  so với năng suất quy định nên ta có phương trình:

$$\frac{432}{x-4} - \frac{450}{x} = 4,5$$

$$x^2 - 400 = 0$$

Giải phương trình ta được hai nghiệm

$x = 20$  (thỏa mãn)

và  $x = -20$  (không thỏa mãn)

Vậy thời gian quy định là 20 ngày.

**Bài 30.** Hai đội sản xuất lập kế hoạch làm chung 7000 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do đã hết ảnh hưởng của dịch COVID nên năng suất đội I tăng 15%, đội II tăng 20%. Vì thế, trong thời gian quy định, cả hai đội đã làm được 8200 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch mỗi đội phải làm bao nhiêu sản phẩm?

### Lời giải

Gọi số sản phẩm đội I phải làm theo kế hoạch là  $x$  (Sản phẩm) ( $x \in Z^+, x < 7000$ )

Thì số sản phẩm đội II phải làm theo kế hoạch là:  $7000 - x$  (sp)

Thực tế, số sản phẩm đội I tăng:  $\frac{15x}{100}$  (sp)

Số sản phẩm đội II tăng:  $\frac{20(7000 - x)}{100}$  (sp)

Cả hai đội tăng:  $8200 - 7000 = 1200$  (sp)

Nên ta có phương trình:

$$\frac{15x}{100} + \frac{20(7000 - x)}{100} = 1200$$

$$15x - 20(7000 - x) = 120000$$

$$x = 4000 \text{ (t/m)}$$

Vậy theo kế hoạch, đội I phải làm: 4000 (sp)

Và đội II phải làm:  $7000 - 4000 = 3000$  (sp)

### Dạng 7:

**Bài 31.** Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 36km. Khi đi từ B trở về A, người đó tăng vận tốc thêm 3km/h, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B.

#### Lời giải

Gọi vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là  $x$  (km/h) ( $x > 0$ )

Thời gian của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là  $\frac{36}{x}$  (giờ)

Vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ B đến A là  $x+3$  (km/h)

Thời gian của người đi xe đạp khi đi từ B đến A là  $\frac{36}{x+3}$  (giờ)

Ta có phương trình:  $\frac{36}{x} - \frac{36}{x+3} = \frac{36}{60}$

Giải phương trình này ra hai nghiệm  $\begin{cases} x = 12 \\ x = -15 \text{ (loại)} \end{cases}$

Vậy vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là 12km/h

**Bài 32.** Khoảng cách giữa hai bên sông A và B là 48km. Một canô đi từ bên A đến bên B, rồi quay lại bên A. Thời gian cả đi và về là 5 giờ (không tính thời gian nghỉ). Tính vận tốc của canô trong nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là 4km/h.

#### Lời giải

Gọi vận tốc canô trong nước yên lặng là  $x$  (km/h,  $x > 4$ )

Vận tốc canô khi nước xuôi dòng là  $x+4$  (km/h) và thời gian canô chạy khi nước xuôi dòng là  $\frac{48}{x+4}$  (h)

Vận tốc canô khi nước ngược dòng là  $x-4$  (km/h) và thời gian canô chạy khi nước ngược dòng là  $\frac{48}{x-4}$  (h).

Theo giả thiết ta có phương trình  $\frac{48}{x+4} + \frac{48}{x-4} = 5$

$$\Rightarrow 48(x-4+x+4) = 5(x^2-16)$$

$$5x^2 - 96x - 80 = 0$$

Giải phương trình ta được  $x = -0,8$  (loại),  $x = 20$  (thỏa mãn)

Vậy vận tốc canô trong nước yên lặng là  $20\text{km/h}$

**Bài 33.** Một xe ô tô đi từ  $A$  đến  $B$  cách nhau  $180\text{km}$ . Sau khi đi được 2 giờ, ô tô dừng lại để đổ xăng và nghỉ ngơi mất 15 phút rồi tiếp tục đi với vận tốc tăng thêm  $20\text{km/h}$  và đến  $B$  đúng giờ đã định. Tìm vận tốc ban đầu của xe ô tô.

### Lời giải

Gọi  $x(\text{km/h})$  là vận tốc ban đầu của xe ô tô (điều kiện:  $x > 0$ )

Thì vận tốc lúc sau của ô tô là  $x + 20(\text{km/h})$

Quãng đường đi được sau 2 giờ là:  $2x(\text{km})$

Quãng đường đi sau khi nghỉ ngơi là:  $180 - 2x(\text{km})$

Theo bài ra ta có phương trình:  $\frac{180}{x} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{180 - 2x}{x + 20}$

Hay  $x^2 + 180x - 14400 = 0$

Tìm được  $x = 60$  (thỏa mãn);  $x = -240$  (loại)

Vậy vận tốc ban đầu của xe là  $60\text{km/h}$

**Bài 34.** Một ca nô xuôi dòng từ bên sông  $A$  đến bên sông  $B$  cách nhau  $24\text{km}$ ; cùng lúc đó, cũng từ  $A$  về  $B$  một bè nửa trôi với vận tốc dòng nước là  $4\text{km/h}$ . Khi đến  $B$  ca nô quay lại ngay và gặp bè nửa tại địa điểm  $C$  cách  $A$  là  $8\text{km}$ . Tính vận tốc thực của ca nô.

### Lời giải

Do ca nô xuất phát từ  $A$  cùng với bè nửa nên thời gian của ca nô bằng thời gian bè nửa:  $\frac{8}{4} = 2$  (h)

Gọi vận tốc thực của ca nô là  $x(\text{km/h})(x > 4)$

Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là  $x + 4(\text{km/h})$

Vận tốc của ca nô khi ngược dòng là  $x - 4(\text{km/h})$

Thời gian ca nô đi xuôi dòng là  $\frac{24}{x + 4}(h)$

Thời gian ca nô đi ngược dòng là  $\frac{24 - 8}{x - 4}(h)$

Theo bài ta có phương trình

$$\frac{24}{x+4} + \frac{24-8}{x-4} = 2$$

$$\frac{24}{x+4} + \frac{16}{x-4} = 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 40x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 (\text{loại}) \\ x = 20 (t/m) \end{cases}$$

Vậy vận tốc thực của ca nô là  $20(km/h)$

**Bài 35.** Cho quãng đường từ địa điểm  $A$  tới địa điểm  $B$  dài  $90km$ . Lúc 6 giờ một xe máy đi từ  $A$  để tới  $B$ . Lúc 6 giờ 30 phút cùng ngày, một ô tô cũng đi từ  $A$  để tới  $B$  với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy  $15km/h$  (Hai xe chạy trên cùng một con đường đã cho). Hai xe nói trên đều đến  $B$  cùng lúc. Tính vận tốc mỗi xe.

### Lời giải

Xe máy đi trước ô tô thời gian là : 6 giờ 30 phút - 6 giờ = 30 phút =  $\frac{1}{2}h$ .

Gọi vận tốc của xe máy là  $x(km/h)$  ( $x > 0$ )

Vì vận tốc ô tô lớn hơn vận tốc xe máy  $15km/h$  nên vận tốc của ô tô là  $x+15(km/h)$

Thời gian xe máy đi hết quãng đường  $AB$  là :  $\frac{90}{x}$  (h)

Thời gian ô tô đi hết quãng đường  $AB$  là :  $\frac{90}{x+15}$  (h)

Do xe máy đi trước ô tô  $\frac{1}{2}$  giờ và hai xe đều tới  $B$  cùng một lúc nên ta có phương trình:  $\frac{90}{x} - \frac{1}{2} = \frac{90}{x+15}$

$$\Rightarrow 90.2.(x+15) - x(x+15) = 90.2x$$

$$180x + 2700 - x^2 - 15x = 180x$$

$$x^2 + 15x - 2700 = 0 \text{ b}$$

Ta có :  $\Delta = 15^2 - 4.(-2700) = 11025 > 0$ ;  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{11025} = 105$

$$x_1 = \frac{-15-105}{2} = -60 \text{ ( không thỏa mãn điều kiện )}$$

$$x_2 = \frac{-15+105}{2} = 45 \text{ ( thỏa mãn điều kiện )}$$

Vậy vận tốc của xe máy là  $45km/h$ , vận tốc của ô tô là  $45+15 = 60(km/h)$

### Dạng 8:

**Bài 36.** Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng  $3m$  và diện tích bằng  $270m^2$ . Tìm chiều dài, chiều rộng của khu vườn.

**Lời giải**

Gọi  $x(m)$  là chiều rộng của khu vườn. (ĐK:  $x > 0$ )

Chiều dài của khu vườn là:  $x + 3$  (m)

Do diện tích khu vườn là  $270m^2$  nên ta có phương trình:

$$x(x + 3) = 270$$

$$x^2 + 3x - 270 = 0$$

Giải phương trình ta được:  $x_1 = 15$  (thỏa mãn điều kiện),

$$x_2 = -18 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy chiều rộng khu vườn là  $15m$ , chiều dài khu vườn là  $18m$ .

**Bài 37.** Cạnh huyền của một tam giác vuông bằng  $13cm$ . Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau  $7cm$ . Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

**Lời giải**

Gọi  $x(cm)$  là độ dài cạnh góc vuông lớn (điều kiện:  $7 < x < 13$ )

$\Rightarrow$  độ dài cạnh góc vuông nhỏ là:  $x - 7$  (cm)

+ Vì độ dài cạnh huyền bằng  $13cm$  nên ta có phương trình:  $x^2 + (x - 7)^2 = 13^2$

+ Thực hiện biến đổi thu gọn ta được phương trình:  $x^2 - 7x - 60 = 0$

+ Giải phương trình ta được:  $x_1 = 12$  (tmđk)

$$x_2 = -5 \text{ (loại)}$$

Trả lời: Vậy độ dài hai cạnh của tam giác vuông là:  $12cm$  và  $7cm$ .

**Bài 38.** Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là  $100m^2$ . Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên  $2m$  và giảm chiều dài thửa ruộng đi  $5m$  thì diện tích thửa ruộng tăng thêm  $5m^2$ .

**Lời giải**

Gọi chiều dài hình chữ nhật là  $x$  (m,  $x > 0$ ), thì chiều rộng hình chữ nhật là  $\frac{100}{x}$  (m).

Theo đầu bài, nếu tăng chiều rộng thửa ruộng lên  $2m$  và giảm chiều dài thửa ruộng đi  $5m$  thì diện tích thửa ruộng tăng thêm  $5m^2$ , ta có phương trình:

$$(x - 5) \cdot \left( \frac{100}{x} + 2 \right) = 100 + 5$$

$$2x^2 - 15x - 500 = 0$$

Ta có  $\Delta = 15^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-500) = 4225 > 0$ , nên phương trình có nghiệm  $x_1 = -\frac{25}{2}$  (loại);  $x_2 = 20$  (nhận).

Vậy chiều dài mảnh đất hình chữ nhật là 20m, chiều rộng là 5m.

**Bài 39.** Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280m. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn thuộc đất của vườn rộng 2m, diện tích đất còn lại để trồng trọt là  $4256\text{m}^2$ . Tính các kích thước của vườn.

### Lời giải

Gọi chiều dài hình chữ nhật là  $x$  (m,  $x > 70$ )

Khi đó, chiều rộng của khu vườn hình chữ nhật  $280 \div 2 - x = 140 - x$  (m).

Người ta làm một lối đi xung quanh vườn thuộc đất của vườn rộng 2m, thì chiều dài phần đất còn lại để trồng trọt là  $x - 4$  (m), chiều rộng phần đất còn lại để trồng trọt là  $140 - x - 4 = 136 - x$  (m).

Theo đầu bài, diện tích đất trồng còn lại là  $4256\text{m}^2$ , ta có phương trình

$$(x - 4) \cdot (136 - x) = 4256$$

$$x^2 - 140x + 4800 = 0.$$

Ta có  $\Delta = 140^2 - 4 \cdot (4800) = 400 > 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = 60$  (loại);  $x_2 = 80$  (nhận).

Vậy chiều dài mảnh đất hình chữ nhật là 80m, chiều rộng là 60m.

**Bài 40.** Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13m và chiều dài lớn hơn chiều rộng 7m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

### Lời giải

Gọi chiều rộng mảnh đất là  $x$  (m,  $0 < x < 13$ ), thì chiều dài mảnh đất là  $x + 7$  (m).

Theo đầu bài, hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13m, áp dụng định lý Pi-ta-go ta có phương trình

$$x^2 + (x + 7)^2 = 13^2$$

$$x^2 + 7x - 60 = 0.$$

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot (-60) = 289 > 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = -12$  (loại);  $x_2 = 5$  (nhận).

Vậy chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật là 5m và chiều dài của mảnh đất là 12m.

### Dạng 9:

**Bài 41.** Hai công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 6 giờ 40 phút. Nếu họ làm riêng thì công nhân thứ nhất hoàn thành công việc đó ít hơn công nhân thứ hai là 3 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi công nhân phải làm trong bao lâu thì xong việc?

### Lời giải

Ta có 6 giờ 40 phút  $= 6\frac{2}{3}$  giờ.

Gọi thời gian công nhân thứ nhất làm một mình xong công việc là  $x$  (giờ,  $x > 6\frac{2}{3}$ ).

Thời gian công nhân thứ hai làm một mình xong việc là  $x + 3$  (giờ).

Mỗi giờ công nhân thứ nhất làm được  $\frac{1}{x}$  (công việc).

Mỗi giờ công nhân thứ hai làm được  $\frac{1}{x + 3}$  (công việc).

Theo đầu bài, hai công nhân cùng làm thì hoàn thành công việc trong  $6\frac{2}{3}$  giờ. Nên mỗi giờ họ cùng làm được  $1:6\frac{2}{3} = \frac{3}{20}$  (công việc). Ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{20} .$$

$$3x^2 - 31x - 60 = 0$$

Ta có  $\Delta = 31^2 - 4.3.(-60) = 1681 > 0$  nên phương trình có nghiệm là  $x_1 = -\frac{5}{3}$  (loại);  $x_2 = 12$  (nhận).

Vậy thời gian công nhân thứ nhất làm xong công việc là 12 giờ. Thời gian công nhân thứ hai làm một mình xong công việc là 15 giờ.

**Bài 42.** Hai vòi cùng chảy vào một bể thì đầy sau 7 giờ 12 phút. Nếu mỗi vòi chảy riêng mà đầy bể thì tổng thời gian là 30 giờ. Mỗi vòi chảy riêng thì đầy bể trong thời gian là bao lâu?

### Lời giải

Đổi 7 giờ 12 phút =  $7\frac{1}{5}$  giờ.

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể là  $x$  giờ ( $0 < x < 30$ ).

Thời gian vòi thứ hai chảy riêng đầy bể là  $30 - x$  (giờ).

Theo đề bài, hai vòi cùng chảy mà đầy bể sau  $7\frac{1}{5}$  (giờ) nên ta có phương trình

$$7\frac{1}{5} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{30-x} \right) = 1 .$$

$$x^2 - 30x + 216 = 0$$

Ta có  $\Delta = 30^2 - 4.(216) = 36 > 0$  nên phương trình có nghiệm là  $x_1 = 18$  (nhận);  $x_2 = 12$  (nhận).

Vậy vòi thứ nhất chảy riêng sẽ đầy bể sau 12 giờ, vòi thứ hai đầy bể sau 18 giờ. Hoặc ngược lại.

**Bài 43.** Nếu mở hai vòi nước chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút bể đầy nước. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu thì đầy bể.

### Lời giải

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là  $x$  giờ, ( $x > 0$ )

Thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là  $x + 2$  (giờ)

2 giờ 55 phút =  $\frac{35}{12}$  (giờ)

Trong một giờ cả hai vòi cùng chảy được  $\frac{12}{35}$  (bể)

Trong một giờ vòi thứ nhất chảy được  $\frac{1}{x}$  (bể)

Trong một giờ vòi thứ hai chảy được  $\frac{1}{x+2}$  (bể)

Ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{35} \text{ hay } 6x^2 - 23x - 35 = 0$$

Giải phương trình ta được  $x = 5$  ( t. mãn) và  $x = -\frac{7}{6}$  ( không t. mãn)

Vậy vòi thứ nhất chảy một mình trong 5 giờ thì đầy bể, vòi thứ hai chảy một mình trong 7 giờ thì đầy bể.

**Bài 44.** Hai đội xây dựng cùng làm chung một việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Họ cùng làm chung với nhau được 8 ngày thì đội 1 được điều đi làm việc khác, đội 2 tiếp tục làm. Do cải tiến kỹ thuật, năng suất tăng gấp đôi nên đội 2 làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì bao nhiêu ngày sẽ làm xong công việc nói trên ( Coi năng suất của các đội là như nhau)?

### Lời giải

Gọi thời gian đội thứ nhất làm một mình xong công việc là  $x$  (ngày,  $x > 0$  ).

Mỗi ngày đội thứ nhất làm được  $\frac{1}{x}$  (công việc), cả hai người làm được  $\frac{1}{12}$  (công việc), người thứ hai làm được  $\frac{1}{12} - \frac{1}{x}$  (công việc).

Trong 8 ngày cả hai đội làm được  $\frac{2}{3}$  (công việc).

Số phần việc còn lại mà đội hai phải làm là  $\frac{1}{3}$  (công việc).

Năng suất của đội hai sau khi cải tiến kỹ thuật  $\frac{1}{6} - \frac{2}{x}$  (công việc).

Theo đầu bài, đội 2 đã làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày nên ta có phương trình

$$3,5 \left( \frac{1}{6} - \frac{2}{x} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{14}$$

$$x = 28 \text{ ( Thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy thời gian công nhân thứ nhất làm xong công việc là 28 ngày. Thời gian công nhân thứ hai làm một mình xong công việc là 21 ngày.

**Bài 45.** Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành sau 6 ngày. Nếu làm một mình xong công việc thì đội một cần ít thời gian hơn đội hai là 5 ngày. Hỏi mỗi đội làm một mình xong công việc trong bao lâu ?

### Lời giải

Gọi thời gian đội 1 làm một mình xong công việc là  $x$  (ngày) ( $x > 6$ )

Thời gian đội 2 làm một mình xong công việc là  $x + 5$  (ngày)

1 ngày đội 1 làm được  $\frac{1}{x}$  công việc, đội 2 làm được  $\frac{1}{x + 5}$  (công việc)

Mà 1 ngày cả 2 đội làm được  $\frac{1}{6}$  (công việc)

$$\text{ta có PT: } \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 5} = \frac{1}{6}$$

$$6(x + 5) + 6x = x.(x + 5)$$

$$x^2 - 7x - 30 = 0$$

$$x_1 = 10 \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

$$x_2 = -3 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy thời gian đội 1; đội 2 làm một mình xong công việc lần lượt là 10 ngày; 15 ngày

### Dạng 10:

**Bài 46.** Hưởng ứng phong trào thi đua “Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực”, lớp 9A trường THCS Hoa Hồng dự định trồng 300 cây xanh. Đến ngày lao động, có 5 bạn được Liên Đội triệu tập tham gia chiến dịch an toàn giao thông nên mỗi bạn còn lại phải trồng thêm 2 cây mới đảm bảo kế hoạch đặt ra. Hỏi lớp 9A có bao nhiêu học sinh?

#### Lời giải

Gọi  $x$  là số học sinh lớp 9A ( $x > 5, x \in \mathbb{Z}$ )

Số cây mỗi bạn dự định trồng là:  $\frac{300}{x}$  (cây)

Sau khi 5 bạn tham gia chiến dịch ATGT thì lớp còn lại:  $x - 5$  (học sinh)

Do đó mỗi bạn còn lại phải trồng:  $\frac{300}{x-5}$  (cây).

Theo đề ra ta có phương trình:  $\frac{300}{x} + 2 = \frac{300}{x-5}$ .

Rút gọn ta được:  $x^2 - 5x - 750 = 0$ .

Giải ra ta được:  $x = 30$  (thỏa mãn),  $x = -25$  (loại).

Vậy lớp 9A có 30 học sinh.

**Bài 47.** Một phòng họp có 90 người họp được sắp xếp ngồi đều trên các dãy ghế. Nếu ta bớt đi 5 dãy ghế thì mỗi dãy ghế còn lại phải xếp thêm 3 người mới đủ chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế và mỗi dãy ghế được xếp bao nhiêu người?

#### Lời giải

Gọi số dãy ghế có lúc đầu là  $x$  (dãy) (ĐK:  $x$  nguyên dương và  $x > 5$ )

Thì mỗi dãy phải xếp  $\frac{90}{x}$  (người).

Sau khi bớt 5 dãy thì số dãy ghế là  $x - 5$  (dãy)

Mỗi dãy phải xếp  $\frac{90}{x-5}$  (người).

Theo bài ra ta có pt:  $\frac{90}{x-5} - \frac{90}{x} = 3$

$$x^2 - 5x - 150 = 0$$

$$x_1 = 15 \text{ (thỏa mãn)}; \quad x_2 = -10 \text{ (loại)}$$

Vậy lúc đầu phòng họp có 15 dãy ghế và mỗi dãy có 6 người

**Bài 48.** Nhân ngày quốc tế thiếu nhi, 13 học sinh (nam và nữ) tham gia gói 80 phần quà cho các em thiếu nhi. Biết tổng số quà mà học sinh nam gói được bằng tổng số quà mà học sinh nữ gói được. Số quà mỗi bạn nam gói nhiều hơn số quà mà mỗi bạn nữ gói là 3 phần. Tính số học sinh nam và nữ.

### Lời giải

Gọi  $x$  (HS) là số HS nam. (ĐK:  $0 < x < 13, x \in \mathbb{Z}$ )

Số HS nữ là:  $13 - x$  (HS)

Số phần quà mà mỗi HS Nam gói được:  $\frac{40}{x}$  (phần)

Số phần quà mà mỗi HS nữ gói được:  $\frac{40}{13-x}$  (phần)

Theo bài toán ta có phương trình:

$$\frac{40}{x} - \frac{40}{13-x} = 3$$

$$\Rightarrow 40(13-x) - 40x = 3x(13-x)$$

$$520 - 40x - 40x = 39x - 3x^2$$

$$3x^2 - 119x + 520 = 0$$

Giải phương trình ta được  $x = 5$  (thỏa mãn);  $x = \frac{104}{3}$  (không thỏa mãn)

Vậy số học sinh nam là 5, số học sinh nữ là 8.

**Bài 49.** Hai trường  $A$  và  $B$  có 420 học sinh thi đỗ vào lớp 10 đạt tỷ lệ 84%. Riêng trường  $A$  tỷ lệ đỗ là 80%. Riêng trường  $B$  tỷ lệ đỗ là 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.

### Lời giải

Gọi số học sinh dự thi của trường  $A$ , trường  $B$  lần lượt là  $x$ ;  $y$  ( $x, y \in \mathbb{N}^*$ ;  $x, y < 500$ )

Tổng số học sinh dự thi của hai trường là:  $420 : 84\% = 500$  (học sinh)

Ta có phương trình:  $x + y = 500$  (1)

Vì tỷ lệ đỗ của trường  $A$  là 80%; tỷ lệ đỗ của trường  $B$  là 90% nên theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{80}{100}x + \frac{90}{100}y = 420 \quad (2)$$

$$0,8x + 0,9y = 420$$

Từ (1) và (2) ta có phương trình:  $0,8(500 - y) = 420$

Giải hệ phương trình ta được  $y = 200; x = 300$ . (Thỏa mãn điều kiện)

Vậy trường  $A$  có 300 học sinh dự thi, trường  $B$  có 200 học sinh dự thi

**Bài 50.** Hưởng ứng phong trào “*Vì biển đảo Trường Sa*” một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở ít hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu, biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau?

### Lời giải

Gọi số chiếc tàu dự định ban đầu của đội là  $x$  (chiếc) ( $x \in N^*$ )

Số tàu của đội sau khi thêm 1 chiếc là  $x+1$  (chiếc)

Số hàng mỗi tàu dự định chở ban đầu là  $\frac{280}{x}$  (tấn)

Số hàng mỗi tàu thực tế chở là  $\frac{286}{x+1}$  (tấn)

Theo bài ra ta có phương trình  $\frac{280}{x} - \frac{286}{x+1} = 2$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 140 = 0$$

Giải PT trên, ta được  $x_1 = 10$  (t/m)       $x_2 = -14$  (loại)

Vậy số chiếc tàu dự định ban đầu của đội là 10 tàu

∞ HẾT ∞