CHƯƠNG VI. HÀM SỐ - PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

BÀI 18. HÀM SỐ $y = ax^2\,(a \neq 0)$.

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số $y = ax^2\,(a \neq 0)$

Hàm số $y = ax^2\,(a \neq 0)$ xác định với mọi giá trị của x thuộc R.

2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2\,(a \neq 0)$

- Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2\,(a \neq 0)$.

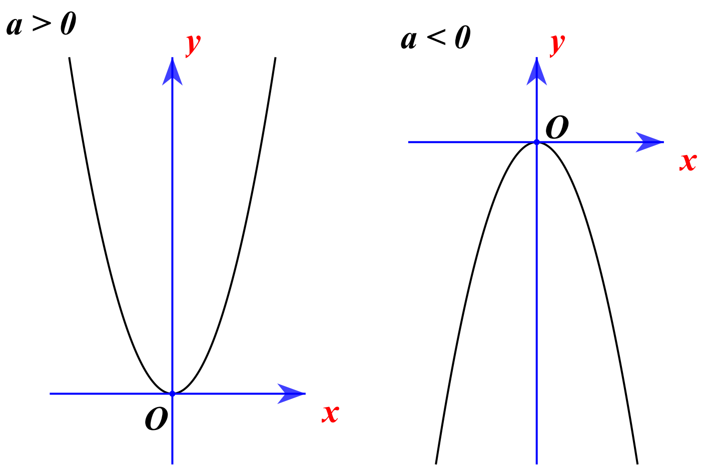
- Lập bảng ghi một số cặp giá trị tương ứng của x và y.

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, biểu diễn các cặp $(x; y)$ trong bảng giá trị trên và nối chúng lại để được một đường cong là đồ thị của hàm số $y = ax^2\,(a \neq 0)$.

- Nhận biết tính đối xứng của đồ thị của hàm số $y = ax^2\,(a \neq 0)$.

Đồ thị của hàm số $y = ax^2\,(a \neq 0)$ là một đường cong, gọi là đường parabol, có các tính chất sau:

- Có đỉnh là gốc tọa độ.
- Có trục đối xứng là Oy.
- Nằm phái bên trên trục hoành nếu $a > 0$ và nằm phái dưới trục hoành nếu $a < 0$



Đồ thị của hàm số $y = ax^2\,(a \neq 0)$

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Hàm số $y = ax^2\,(a \neq 0)$

Bài 1. Hàm số nào sau đây có dạng $ax^2\,(a \neq 0)$? Đối với những hàm số đó, xác định hệ số a của ax^2.

a) $y = x^2$. b) $y = -3x^2$. c) $y = \dfrac{4x^2}{9}$. d) $y = \dfrac{2}{x^2}$

Lời giải

Các hàm số có dạng $ax^2\,(a \neq 0)$ là:

a) $y = x^2$. có $a = 1$

b) $y = -3x^2$. có $a = -3$

c) $y=\frac{4x^2}{9}$. có $a=\frac{4}{9}$

Bài toán tương tự.

Hàm số nào sau đây có dạng $ax^2\left(a\neq 0\right)$? Đối với những hàm số đó, xác định hệ số a của ax^2.

a) $y=-x^2$.	b) $y=\frac{x^2}{2}$.	c) $y=\frac{1}{4x^2}$.

Bài 2. Cho hàm số $y=4x^2$. Tính giá trị của y khi :

a) $x=0$	b) $x=2$	c) $x=-2$.

Lời giải

a)Với $x=0$ thì $y=4.0^2=0$.

b) Với $x=2$ thì $y=4.2^2=16$.

c) Với $x=-2$ thì $y=4.\left(-2\right)^2=16$.

Bài 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^2\left(a\neq 0\right)$. Xác định a, biết rằng $f\left(-2\right)=4$.

Lời giải

Thay $x=-2; y=4$ vào phương trình $y=ax^2$, ta được

$4=a.\left(-2\right)^2$

$4a=4$

$a=1$

Vậy hàm số có dạng $y=x^2$.

Bài toán tương tự. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^2$.

a) Tìm a biết $f\left(-3\right)=-9$

b) Với a vừa tìm được ở câu trên. Tính $f\left(0\right); f\left(3\right)$.

c) Với a vừa tìm được ở câu a). Tìm x_0 biết $f\left(x_0\right)=-27$.

Lời giải

a)Thay $x=-3; y=-9$ vào phương trình $y=ax^2$, ta được

$-9=a.\left(-3\right)^2$

$9a=-9$

$a=-1$

Vậy hàm số có dạng $y=-x^2$.

b) $f\left(x\right)=-x^2 \Rightarrow f\left(0\right)=0; f\left(3\right)=-\left(3\right)^2=-9$

c)Ta có $y=f\left(x\right)=-x^2$ nên $f\left(x_0\right)=-{x_0}^2$

Mà $f\left(x_0\right)=-27$, nên $-{x_0}^2=-27$

${x_0}^2=27$

$x_0 = \pm 3\sqrt{3}$

Nhận xét : Bạn thường quên giá trị $x_0 = -3\sqrt{3}$.

Vì $x_0{}^2 = 27$ nên $\sqrt{x_0{}^2} = \sqrt{27}$

$|x_0| = 3\sqrt{3}$

$x_0 = \pm 3\sqrt{3}$.

Bài 4. Lập bảng giá trị của hàm số $y = x^2$ và $y = -x^2$, với các giá trị của x lần lượt bằng $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$.

Lời giải

Bảng giá trị của hàm số $y = x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Bảng giá trị của hàm số $y = -x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

Bài 5. Lực $F(N)$ của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỷ lệ thuận với bình phương tốc độ $v(m/s)$ của gió theo công thức : $F = av^2$, ở đó a là một hằng số. Biết rằng, khi tốc độ gió là $2m/s$ thì lực tác động lên cánh buồm của con thuyền bằng $120N$.

a) Tính hằng số a.

b) Khi tốc độ của gió là $v = 10m/s$ thì lực F của gió tác động lên cánh buồm là bao nhiêu?

c) Cánh buồm của thuyền chỉ chịu được lực tác động tối đa là $12000N$. Hỏi con thuyền có thể ra khơi khi tốc độ của gió là $90km/h$ hay không? Vì sao?

Lời giải

a) Thay $v = 2, F = 120$ vào công thức $F = av^2$, ta được $120 = a.2^2$

$4a = 120$

$a = 30$

b) Vì $a = 30$ nên $F = 30.v^2$

Với $v = 10$ ta có $F = 30.10^2 = 3000(N)$

c) Đổi $90km/h = 25m/s$

Với $v = 25$, ta có $F = 30.25^2 = 18750(N)$

Ta thấy $18750 > 12000$ nên con thuyền có thể ra khơi với tốc độ gió là $90km/h$.

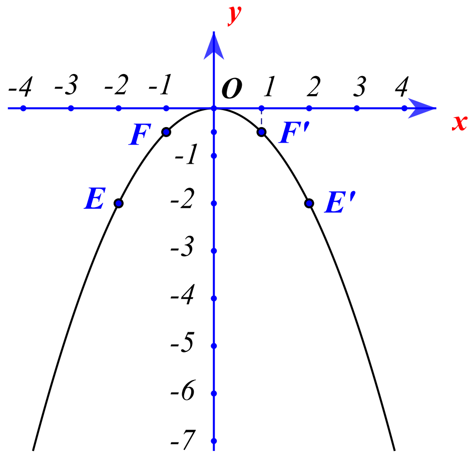
II. Đồ thị của hàm số $y = ax^2\,(a \neq 0)$

Bài 6. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^2$

Lời giải

Bảng giá trị của hàm số:

x	-2	-1	0	1	2
$y=-\dfrac{1}{2}x^2$	-2	$-\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	-2



Trên mặt phẳng tọa độ Oxy các điểm $E(-2;-2); F\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right); O(0;0); F'\left(1;-\dfrac{1}{2}\right); E'(2;-2)$

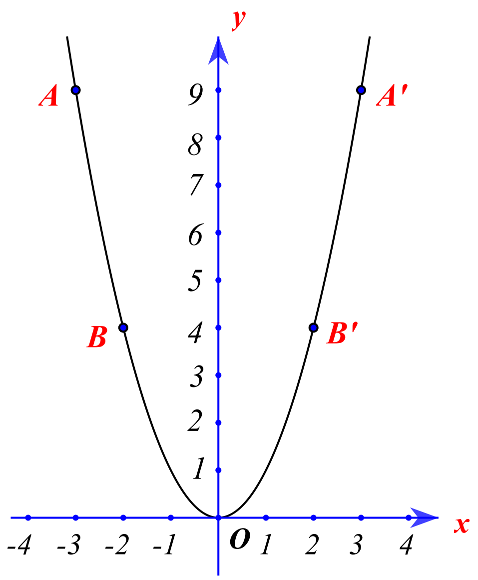
Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^2$ là một parabol đỉnh O, đi qua các điểm trên và có dạng như hình vẽ trên.

Bài toán tương tự. Vẽ đồ thị của hàm số $y=x^2$.

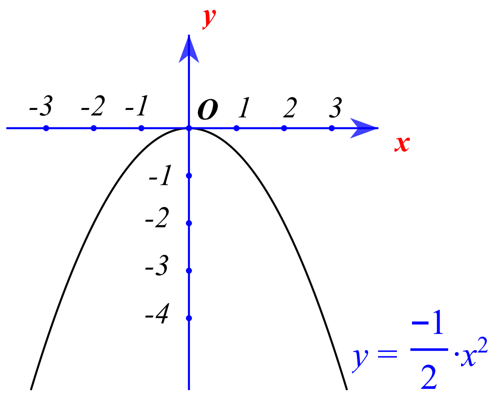
Lời giải

Bảng giá trị của hàm số $y=x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x^2$	9	4	1	0	1	4	9



Bài 7. Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ có đồ thị là parabol như hình vẽ bên.



a) Các điểm $M(-2;-2); N(2;-2)$ có thuộc parabol đó hay không ?

b) Nêu nhận xét về vị trí cặp điểm M và N đối với trục Ox

Lời giải

a) Do $-2 = -\frac{1}{2}.(-2)^2$ và $-2 = -\frac{1}{2}.2^2$ nên các điểm $M(-2;-2); N(2;-2)$ thuộc parabol đó.

b) Ta thấy điểm M và N đối xứng nhau qua trục Ox .

Bài 8. Cho hai hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$ và $y = -x^2$

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm điểm A thuộc đồ thị $y = \frac{3}{2}x^2$, điểm B thuộc đồ thị $y = -x^2$. Biết rằng A và B đều có hoành độ $x = -\frac{3}{2}$

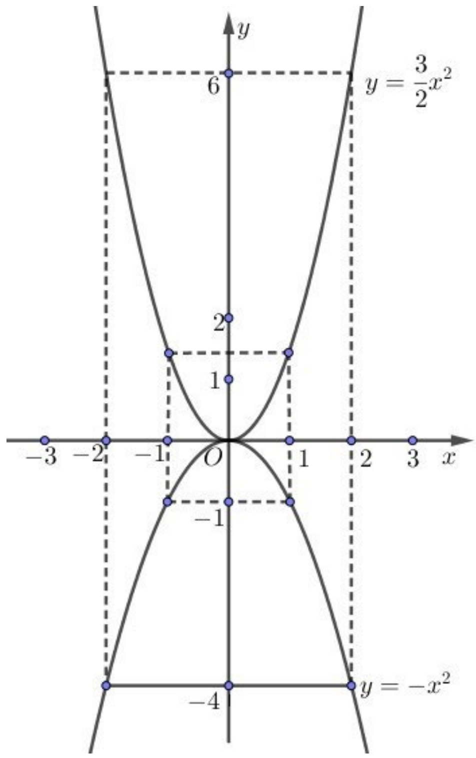
Lời giải

a) Lập bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{3}{2}x^2$	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị của hai hàm số như hình vẽ.



b) Với $x=-\frac{3}{2}$, thay vào công thức $y=\frac{3}{2}x^2$, ta có : $y=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)^2=\frac{27}{8}$. Vậy $A\left(\frac{-3}{2};\frac{27}{8}\right)$.

Với $x=-\frac{3}{2}$, thay vào công thức $y=-x^2$, ta có : $y=-\left(\frac{-3}{2}\right)^2=-\frac{9}{4}$. Vậy $B\left(\frac{-3}{2};-\frac{9}{4}\right)$.

Bài 9. Một cổng chào được thiết kế theo hình parabol là một phần của đồ thị hàm số $y=-\frac{x^2}{2}$. Khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB=8\,\text{m}$.

a) Tính hoành độ của hai điểm A,B

b) Tính chiều cao của cổng.

Lời giải

a) Ta có $\frac{AB}{2}=4$. Vậy hoành độ của A và B thứ tự là -4 và 4

b) Thay $x=4$ vào công thức $y=-\frac{x^2}{2}$, ta có : $y=-\frac{4^2}{2}\Rightarrow y=-8$

Vậy chiều cao của cổng là $|-8|=8(\text{m})$.

Bài 10. a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x$ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Hướng dẫn giải

a) Vẽ parabol $y=x^2$ bằng các lập bảng giá trị (ta phải tìm ít nhất 5 giá trị).

b) Lập phương trình hoành dộ giao điểm của (P) và (d).

Lời giải

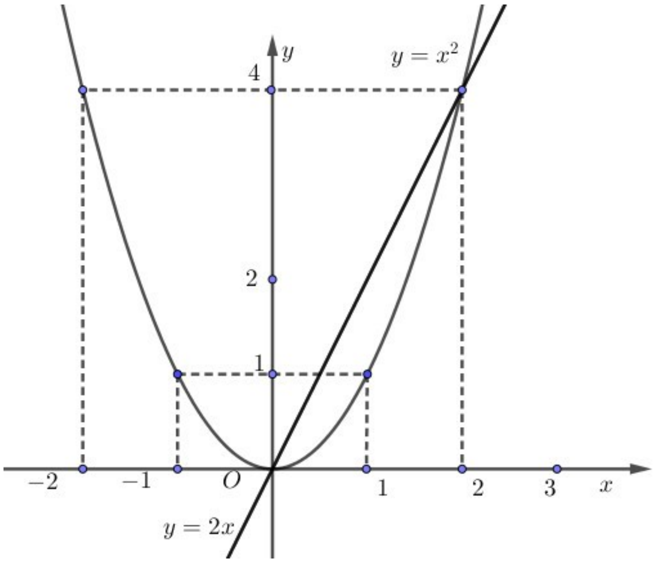
a) Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y=x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị (P) của hàm số $y=x^2$ là một parabol có đỉnh O và nhận trục tung làm trục đối xứng.

x	0	1
$y=2x$	0	2

Đồ thị (d) của hàm số $y=2x$ là một đường thẳng qua hai điểm $(0;0)$; $(1;2)$ (xem hình vẽ).



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d), ta có:

$x^2=2x \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

Với $x=0 \Rightarrow y=0$. Vậy O là một giao điểm của (P) và (d).

Với $x=2 \Rightarrow y=4$. Vậy $A(2;4)$ là giao điểm thứ hai của (P) và (d).

Bài 11. Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $(d): y=\frac{1}{2}x+2$.

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa dộ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

c) Tìm phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng 2.

Hướng dẫn giải

a) Lập bảng giá trị.

b) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

c) $(d')\,//\,(d)$ nên phương trình (d') có dạng: $y=\frac{1}{2}x+b$ $(b\neq 2)$

Lời giải

a) Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4

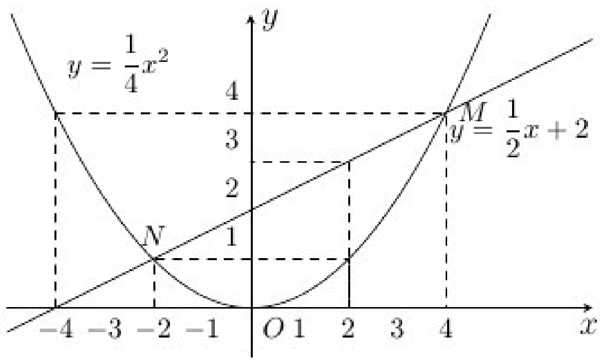
$y=\frac{1}{4}x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị (P) là một parabol qua O và nhận trục tung làm trục đối xứng.

Bảng giá trị:

x	0	2
$y=\frac{1}{2}x+2$	2	3

Đường thẳng (d) qua hai điểm $(0;2)$ và $(2;3)$ (xem hình vẽ).



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d), ta có:

$\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{2}x+2 \Leftrightarrow x^2=2x+8 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0$

$(x^2-2x+1)-9=0$

$(x-1)^2=9 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{9}$

$|x-1|=3$

$x-1=3$ hoặc $x-1=-3$

$x=4$ hoặc $x=-2$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $M(4;4)$ và $N(-2;1)$.

c) Đường thẳng (d') song song với (d) nên có phương trình $y=\frac{1}{2}x+b(b\neq 2)$.

Điểm $A(2;y_0)\in(P)\Rightarrow y_0=\frac{1}{4}\cdot(2)^2\Rightarrow y_0=1$.

Vậy $A(2;1).A\in(d')\Rightarrow 1=\frac{1}{2}\cdot 2+b\Rightarrow b=0$.

Phương trình $(d'): y=\frac{1}{2}x$

Bài 12. Cho hàm số $y=(m+1)x^2$ và $y=2x-1$.

a) Tìm m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại điểm A có hoành độ bằng 2.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y=(m+1)x^2$ với m vừa tìm được ở câu a).

Hướng dẫn giải

a) Thế $x=2$ (hoành độ của điểm A) vào phương trình $y=2x-1$. Từ đó tìm được m nhờ phương trình $y=(m+1)x^2$.

b) Lập bảng giá trị.

Lời giải

a) A thuộc đường thẳng $y=2x-1$ và hoành độ bằng 2 nên tung độ của A : $y=2.2-1 \Rightarrow y=3$

Vậy $A(2;3)$.

Lại có A là giao điểm của parabol $y=(m+1)x^2$ và $y=2x-1$ nên ta có $3=(m+1)\cdot(2)^2$

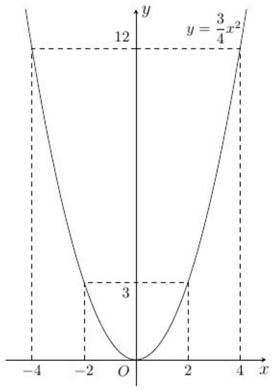
$\Rightarrow 4m+4=3 \Rightarrow m=-\dfrac{1}{4}$. Vậy $y=\dfrac{3}{4}x^2$.

b) Vẽ parabol $(P): y=\dfrac{3}{4}x^2$.

Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
$y=\dfrac{3}{4}x^2$	12	3	0	3	12

Parabol (P) có đỉnh O và nhận trục tung làm trục đối xứng.



Bài 13. Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{2}x^2$.

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số đã cho.

b) Trên (P) lấy hai điểm A,B có hoành độ lần lượt -2 và 1.

Viết phương trình đường thẳng AB.

Hướng dẫn giải

b) $A(-2;y_0); A\in(P) \Rightarrow y_0=-\dfrac{1}{2}(-2)^2 \Rightarrow y_0=-2$.

Tương tự tính B. Từ đó viết phương trình dường thẳng AB (có dạng: $y=ax+b$)

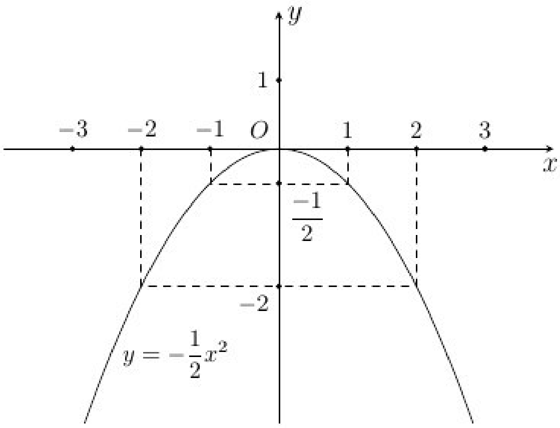
Lời giải

a) Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2

$y=\frac{1}{2}x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

Đồ thị (P) là một parabol có đỉnh O và nhận trục tung làm trục đối xứng.



b) Đặt $A(-2;y_0)\in(P)$

$\Rightarrow y_0=\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)^2\Rightarrow y_0=-2$

Vậy $A(-2;-2)$.

Đặt $B(1;y_1)\in(P)\Rightarrow y_1=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1^2\Rightarrow y_1=-\frac{1}{2}$. Vậy $B\left(1;-\frac{1}{2}\right)$

Đường thẳng AB có phương trình $y=ax+b\,(d)$.

$A\in(d)\Rightarrow -2=-2a+b$; $B\in(d)\Rightarrow -\frac{1}{2}=a+b$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}-2a+b=-2\\ a+b=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a-b=2\\ a+b=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ a+b=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=-1\end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB có dạng: $y=\frac{1}{2}x-1$.

☙ HẾT ❧

BÀI 19. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Định nghĩa phương trình bậc hai một ẩn.

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2+bx+c=0$ trong đó x là ẩn; a,b,c là những số cho trước gọi là hệ số và $a\neq 0$.

2. Cách giải phương trình bậc hai một ẩn có dạng đặc biệt

$$ax^2+bx=0; ax^2+c=0.$$

Dùng phương pháp đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức để đưa vế trái về một bình phương.

Lưu ý: • Nếu $A\cdot B=0$ thì $A=0$ hoặc $B=0$.

• Nếu $A^2=B\left(B\geq 0\right)$ thì $A=\sqrt{B}$ hoặc $A=-\sqrt{B}$.

3. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$.

Tính biệt thức $\Delta=b^2-4ac$.

• Nếu $\Delta>0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Nếu $\Delta=0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

• Nếu $\Delta<0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý:

Xét phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$, với $b=2b'$ và $\Delta'=b'^2-ac$.

• Nếu $\Delta'>0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}, x_2=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$.

• Nếu $\Delta'=0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1=x_2=-\dfrac{b'}{a}$.

• Nếu $\Delta'<0$ thì phương trình vô nghiệm.

Các công thức ở trên gọi là công thức nghiệm thu gọn.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tìm các hệ số a,b,c của phương trình $ax^2+bx+c=0$.

Bài 1. Tìm các hệ số $a,b,$ của phương trình:

a) $x^2-8x+2=0$

b) $5x^2+2x=4-x$

c) $x^2+\sqrt{2}x=0$

d) $-\dfrac{1}{2}x^2+2x+2=0$

e) $x^2+4x=4-m^2$

f) $x^2+m\left(x-1\right)=1-m$

Hướng dẫn: Đưa mỗi phương trình về dạng $ax^2+bx+c=0$.

Lời giải

a) Ta có: $a=1; b=-8; c=2$.

Chú ý: $b=-8$ chứ không phải $b=8$.

b) Ta có: $5x^2+2x=4-x \Leftrightarrow 5x^2+3x-4=0$.

Vậy $a=5;b=3;c=-4$.

Chú ý: Biến đổi phương trình để cho vế phải bằng 0.

c) Ta có: $a=1;b=\sqrt{2};c=0$.

d) Ta có: $a=-\frac{1}{2},\ b=2;c=2$.

e) Ta có: $x^2+4x=4-m^2 \Leftrightarrow x^2+4x+m^2-4=0$

Vậy $a=1;b=4;c=m^2-4$.

Chú ý: $c=m^2-4$, bạn đừng tưởng rằng $c=-4$.

f) Ta có: $x^2+m(x-1)=1-m \Leftrightarrow x^2+mx-1=0$

Vậy $a=1,b=m;c=-1$.

Bài 2. Tìm các hệ số a,b,c của phương trình.

a) $2x^2-(1-2a)x+a-1=0$

b) $mx^2-2(m-1)x+m-3=0$

c) $3x^2+2(m-3)x+2m+1=0$

d) $-x^2+(m-2)x+2=0$

Lời giải

Đặt phương trình $Ax^2+Bx^2+C=0$

a) Ta có: $A=2;B=-(1-2a);C=a-1$.

b) Ta có: $A=m;B=-2(m-1);C=m-3$.

c) Ta có: $A=3;B=2(m-3);C=2m+1$.

d) Ta có: $A=-1;B=m-2;C=2$.

Chú ý: Ở câu a, người ta đã dùng chữ a để chỉ tham số; x là ẩn, nên ta phải dùng chữ hoa: $Ax^2+Bx+C=0$.

Bài 3. Tìm các hệ số a,b,c của phương trình:

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{5}{12}$ (1)

b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=2$ (2)

c) $(x+1)\left(\frac{1}{x}-2\right)=5$ (3)

Hướng dẫn: Quy đồng và rút gọn phương trình về dạng $ax^2+bx+c=0$.

Lời giải

a) Điều kiện $x\neq 0;-2$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x+2+x=\frac{5}{12}x(x+2)$

$\Leftrightarrow 24x+24=5x^2+10x \Leftrightarrow 5x^2-14x-24=0$

Vậy $a=5; b=-14; c=-24$.

b) Điều kiện: $x \neq 0;1$.

Ta có: $(2) \Leftrightarrow x-1+x=2x(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x-1=2x^2-2x \Leftrightarrow -2x^2+4x-1=0$

Vậy $a=-2; b=4; c=-1$.

Chú ý: Ta có thể nhân hai vế phương trình với -1 (đổi dấu hai vế), ta được: $2x^2-4x+1=0$. Lúc này $a=2; b=-4; c=1$.

c) Ta có: (3) $\Leftrightarrow (x+1)(1-2x)=5x$; $x \neq 0$

$\Leftrightarrow x-2x^2+1-2x-5x=0 \Leftrightarrow 2x^2+6x-1=0$

Vậy $a=2; b=6; c=-1$.

II. Giải phương trình bậc hai khuyết

Bài 4. Giải phương trình sau:

a) $2x^2-\sqrt{2}x=0$ (1)

b) $x^2-4=0$ (2)

c) $3x^2=27$ (3)

d) $x^2+1=0$ (4)

Hướng dẫn: Rút gọn vế dạng $f(x)=0$. Phân tích $f(x)$ thành nhân tử.

Lời giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow x\left(2x-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x-\sqrt{2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

b) Ta có: $x^2-4=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Chú ý: Có thể viết gọn: $x=\pm 2$, nhưng ta phải hiểu $x=2$ hoặc $x=-2$; không phải $x=2$ và $x=-2$. (Ở trên, bạn chú ý đến dấu ngoặc vuông)

Cách khác: Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{4} \Leftrightarrow |x|=2$

$\Leftrightarrow x=\pm 2$

c) Ta có: (3) $\Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{9}$

$\Leftrightarrow |x|=3 \Leftrightarrow x=\pm 3$

Cách khác: (3) $\Leftrightarrow x^2-9=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$

d) Vì $x^2>0, \forall x \Rightarrow x^2+1>0$. Vậy phương trình (4) vô nghiệm.

Bài 5. Cho phương trình $x^2+mx-35=0$.

a) Tìm m biết ràng phương trình có một nghiệm bằng 7.

b) Giải phương trình với m vừa tìm được.

Hướng dẫn: $x=7$ là nghiệm của phương trình $x^2+mx-35=0$ nên thay $x=7$ vào phương trình, ta được: $7^2+m.7-35=0$. Từ đó tìm được m.

Lời giải

a) Vì $x=7$ là một nghiệm của phương trình đã cho, nên thay $x=7$ vào phương trình, ta được

$7^2+m.7-35=0 \Leftrightarrow 49+7\,m-35=0$

$\Leftrightarrow 7\,m=-14 \Leftrightarrow m=-2$

b) Theo kết quả trên, với $m=-2$, phương trình đã cho trở thành:

$x^2-2x-35=0$ (*)

$\Leftrightarrow x^2-2x+1-36=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=6^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{6^2} \Leftrightarrow |x-1|=6$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=6 \\ x-1=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-5 \end{array}\right.$

Cách khác: Ta có: (*) $\Leftrightarrow x^2-2x+1-36=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-6^2=0$

$\Leftrightarrow (x-1-6)(x-1+6)=0$

$\Leftrightarrow (x-7)(x+5)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-7=0 \\ x+5-0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-5 \end{array}\right.$

Ta cũng có thể biến đổi như sau: (*) $\Leftrightarrow x^2+5x-7x-35=0 \Leftrightarrow x(x+5)-7(x+5)=0$

$\Leftrightarrow (x+5)(x-7)=0$ (tiếp tục như trên).

Bài 6. Cho phương trình $x^2+px+q=0$. Tìm p,q biết rằng phương trình có hai nghiệm $x=3$ và $x=4$

Lời giải

Thay $x=3$ và $x=4$ vào phương trình $x^2+px+q=0$, ta có hệ:

$\begin{cases} 9+3p+q=0 \\ 16+4p+q=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-7 \\ 9+3p+q=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-7 \\ q=12 \end{cases}$

Bài tập tương tự

Tìm p,q để nghiệm của phương trình $x^2-4=0$ cũng là nghiệm của phương trình $x^2+px+q=0$.

Lời giải

Ta có: $x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{4} \Leftrightarrow |x|=2 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Thay $x=\pm 2$ vào phương trình $x^2+px+q=0$, ta có hệ:

$$\begin{cases}4+2p+q=0\\4-2p+q=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=-4\\p=0\end{cases}$$

Nhận xét: Ta được phương trình $x^2+0x-4=0\Leftrightarrow x^2-4=0$, đó chính là phương trình thứ nhất.

Bài 7. Giải phương trình.

a) $x^2-5x-6=0\ (1)$

b) $x^2+3x-4=0\ (2)$

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 5.

Lời giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^2-6x+x-6=0$

$\Leftrightarrow x(x-6)+(x-6)=0\ \Leftrightarrow(x-6)\cdot(x+1)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-6=0\\x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\x=-1\end{array}\right.$$

Cách khác: (1) $\Leftrightarrow x^2-2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}-6=0$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{49}{4}\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{4}}$$

$$\Leftrightarrow\left|x-\frac{5}{2}\right|=\frac{7}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{5}{2}=\frac{7}{2}\\x-\frac{5}{2}=-\frac{7}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\x=-1\end{array}\right.$$

b) Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2+4x-x-4=0$

$\Leftrightarrow x(x+4)-(x+4)=0\Leftrightarrow(x+4)(x-1)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+4=0\\x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=1\end{array}\right.$$

Cách khác: (2) $\Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{3}{x}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-4=0$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}\Leftrightarrow\left|x+\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}\\x+\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-4\end{array}\right.$$

Bài 8. Tìm tọa độ giao điểm của các đồ thị hàm số sau: $y=4x^2;y=4x+3$.

Hướng dẫn: Lập phương trình hoành độ giao điểm.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của hai đồ thị

$4x^2=4x+3\Leftrightarrow 4x^2-4x=3$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=4 \Leftrightarrow (2x-1)^2=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2}=\sqrt{4} \Leftrightarrow |2x-1|=2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=2 \\ 2x-1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Với $x=\dfrac{3}{2}$, ta tìm được $y=9$.

Với $x=-\dfrac{1}{2}$, ta tìm được $y=1$.

Vậy tọa độ giao điểm của hai đồ thị là: $A\left(\dfrac{3}{2};9\right);B\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

Bài 9. Tìm m để phương trình $x^2+2mx+1=0$ có nghiệm.

Lời giải

Ta có: $x^2+2mx+1=x^2+2mx+m^2-m^2+1=0$

$\Leftrightarrow (x+m)^2=m^2-1$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m^2-1\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{m^2}\geq\sqrt{1} \Leftrightarrow |m|\geq 1$.

Nhận xét: Ta có thể xét điều kiện để phương trình vô nghiệm: $|m|<1$.

Bài 10. Tìm m để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung: $x^2-1=0$ và $x^2-mx=0$.

Hướng dẫn: Tìm nghiệm của từng phương trình.

Lời giải

Ta có: $x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{1} \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

$x^2-mx=0 \Leftrightarrow x(x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=m \end{array}\right.$

$x=1$ là nghiệm của phương trình $x^2-mx=0$ khi $m=1$.

$x=-1$ là nghiệm của phương trình $x^2-mx=0$ khi $m=-1$.

III. Giải phương trình dạng $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$

Bài 11. Giải phương trình:

a) $2x^2-5x+2=0$

b) $x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}=0$

c) $2x^2-7x+2=0$

Hướng dẫn: Xác định các hệ số a,b,c; sau đó tính Δ $\left(\Delta=b^2-4ac\right)$.

Lời giải

a) Ta có $a=2;b=-5;c=2$.

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4.2.2=25-16=9>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \dfrac{-(-5)+3}{2.2} = 2; x_2 = \dfrac{-(-5)-3}{2.2} = \dfrac{1}{2}$

b) Ta có: $a = 1; b = -\left(1+\sqrt{2}\right); c = \sqrt{2}$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left[-\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^2 - 4.1.\sqrt{2}$

$= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 4\sqrt{2}$

$= 1 - 2\sqrt{2} + 2 = (1-\sqrt{2})^2 > 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2} - 1$

Phương trình có hai nghiệm:

$x_1 = \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)}{2.1} = \sqrt{2}$; $x_2 = \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)}{2.1} = 1$

Cách khác: $x^2 - \left(1+\sqrt{2}\right)x + \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - \sqrt{2}x + \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow x\left(x-1\right) - \sqrt{2}\left(x-1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x-\sqrt{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-\sqrt{2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$

c) Ta có: $a = 2; b = -7; c = 2$

$\Delta = \left(-7\right)^2 - 4.2.2 = 49 - 16 = 33 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{33}$

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \dfrac{7+\sqrt{33}}{4}; x_2 = \dfrac{7-\sqrt{33}}{4}$

Bài 12. Giải phương trình:

a) $9x^2 - 30x + 225 = 0$

b) $\left(2x-3\right)^2 = 11x - 19$

c) $3\left(x^2-1\right) = 8x$

d) $9x^2 - 30x + 25 = 0$

e) $5x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$

Hướng dẫn: Xác định các hệ số a, b, c sau đó tính $\Delta\left(\Delta = b^2 - 4ac\right)$.

Lời giải

a) Ta có: $9x^2 - 30x + 225 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 75 = 0$

$a = 3; b = -10; c = 75$

$\Delta = \left(-10\right)^2 - 4.3.75 = -800 < 0$

Phương trình vô nghiệm.

b) Ta có: $\left(2x-3\right)^2 = 11x - 19 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 - 11x + 19 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 23x + 28 = 0$

$a=4; b=-23; c=28$

$\Delta=(-23)^2-4.4.28=81>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{81}=9$

Phương trình có hai nghiệm:

$x_1=\dfrac{23+9}{2.4}=4;\ x_2=\dfrac{23-9}{2.4}=\dfrac{7}{4}$

c) Ta có: $3(x^2-1)=8x \Leftrightarrow 3x^2-3-8x=0 \Leftrightarrow 3x^2-8x-3=0$

$a=3; b=-8; c=-3$

$\Delta=(8)^2-4.3(-3)=100>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{100}=10$

Phương trình có hai nghiệm:

$x_1=\dfrac{8+6}{6}=3;\ x_2=\dfrac{8-10}{6}=-\dfrac{1}{3}$

Chú ý: Em cần sắp xếp các số hạng để đưa về dạng $ax^2+bx+c=0$, chẳng hạn: $3x^2-3-8x=0$.

d) Ta có: $a=9; b=-30; c=25$

$\Delta=(-30)^2-4.9.25=0$

Phương trình có nghiệm kép: $x_1=x_2=\dfrac{-(-30)}{2.9}=\dfrac{5}{3}$

Cách khác: Ta có: $9x^2-30x+25=0 \Leftrightarrow (3x-5)^2=0$

$\Leftrightarrow 3x-5=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}.$

e) Ta có: $a=5; b=-2\sqrt{5}; c=1.$

$\Delta=\left(2\sqrt{5}\right)^2-4.5.1=0$

Phương trình có nghiệm kép: $x_1=x_2=\dfrac{2\sqrt{5}}{10}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Cách khác: Ta có: $5x^2-2\sqrt{5}x+1=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}x-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Bài 13. Giải phương trình:

a) $(2x+1)^2=8x$ (1)

b) $(3x-1)(x+1)=15$ (2)

c) $2x^2+3x-(x-1)(x-2)=0$ (3)

Hướng dẫn: Rút gọn và đưa về dạng $ax^2+bx+c=0$.

Lời giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow 4x^2+4x+1-8x=0$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2=0$

$2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

(Ta có thể tính Δ và có $\Delta=0$ nên phương trình có nghiệm kép).

b) Ta có: (2) $\Leftrightarrow 3x^2+3x-x-1-15=0 \Leftrightarrow 3x^2+2x-16=0$

Trong đó: $a=3; b=2; c=-16$

$\Delta=4-4.3(-16)=196>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{196}=14.$

Phương trình có hai nghiệm:

$x_1=\dfrac{-2+14}{6}=2;\ x_2=\dfrac{-2-14}{6}=-\dfrac{8}{3}$

c) Ta có: (3) $\Leftrightarrow 2x^2+3x-\left(x^2-3x+2\right)=0 \Leftrightarrow x^2+6x-2=0$

Trong đó: $a=1; b=6; c=-2$

$\Delta=6^2-4.1.(-2)=44>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{144}=2\sqrt{11}$

Phương tình có hai ngiệm:

$x_1=\dfrac{-6+2\sqrt{11}}{2}=-3+\sqrt{11};\ x_2=\dfrac{-6-2\sqrt{11}}{2}=-3-\sqrt{11}$

IV. Điều kiện phương trình có nghiệm và số nghiệm của phương trình

Bài 14. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

$$x^2+2x+m-2=0$$

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta>0\\ a\neq 0\end{cases}$

Lời giải

Ta có: $a=1; b=2; c=m-2$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$\begin{cases}\Delta>0\\ a\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2^2-4.1.(m-2)>0\\ 1\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow 4-4m+8>0 \Leftrightarrow 12-4m>0 \Leftrightarrow m<3$.

Chú ý: Hệ số $c=m-2$, chứ không phải $c=-2$.

Bài tập tương tự.

+ Tìm m để phương trình vô nghiệm; có nghiệm kép; có nghiệm.

(Đáp số: $m>3; m=3; m\leq 3$).

+ Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng 0. (Đáp số: $m=2$).

Bài 15. Tìm m để phương trình $mx^2+(2m-1)x+m+2=0$ có nghiệm.

Hướng dẫn: Xét trường hợp $a=0; a\neq 0$ và xem chú ý ở bài toán 14.

Lời giải

Ta có: $a=m; b=2m-1; m+2$

+ Nếu $a\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$.

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - 4.m.(m+2) \geq 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 - 8m \geq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12m + 1 \geq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{1}{12} \\ m \neq 0 \end{cases}$

+ Nếu $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Ta có Phương trình: $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy với $m = 0$, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq \dfrac{1}{12}$.

Chú ý: + Bạn thường quên xét trường hợp $a = 0$.

+ Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

(Đáp số: $m < \dfrac{1}{12}$ và $m \neq 0$).

Bài 16. Tìm m để phương trình $(m-1)x^2 + (m+4)x + m + 7 = 0$ có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn: Xét hai trường hợp: $a = 0$ và $a \neq 0$.

(Nếu $a \neq 0$. Phương trình bậc hai có nghiệm kép).

Lời giải

Ta có: $a = m - 1; b = m + 4; c = m + 7$

Trường hợp 1: $a = 0 \Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Ta có phương trình: $5x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{8}$ (nghiệm duy nhất).

Trường hợp 2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Phương trình có nghiệm kéo $\Leftrightarrow \Delta = 0$.

$\Leftrightarrow (m+4)^2 - 4.(m-1)(m+7) = 0$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 16m - 44 = 0\ (*)$

Giải phương trình (*), có dạng:

$Am^2 + Bm + C = 0$; trong đó: $A = 3; B = 16; C = -44; m$ là ẩn số.

$\Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 16^2 - 4.3.(44) = 784 > 0 \Rightarrow \sqrt{784} = 28$.

Vậy (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-16+28}{6} \\ m = \dfrac{-16+28}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -\dfrac{22}{3} \end{array}\right.$

Đáp số: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = 1; m = 2; m = -\dfrac{22}{3}$

Chú ý: Ta phải xét cả khi $a = 0$, phương trình đã cho trở thành phương trình bậc nhất.

Bạn có thể phân biệt với bài toán 17 dưới dây.

Bài 17. Tìm m để phương trình $mx^2-2(m-1)x+2=0$ có nghiệm kép.

Hướng dẫn: Phương trình bậc hai có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $a=m; b=-2(m-1); c=2.$

Phương trình đã cho có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \left[-2(m-1)^2\right]-4.m.2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 4m^2-16m+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m^2-4m+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m=2\pm\sqrt{3}$$

Bài 18. Tìm m để phương trình $x^2+(2m+1)x+m^2=0$ có nghiệm kép và tính nghiệm kép với m vừa tìm được.

Hướng dẫn: Xem bài toán 17.

Lời giải

• Ta có: $a=1; b=2m+1; c=m^2$.

Phương trình đã cho có nghiệm kép khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\neq 0 \\ (2m+1)^2-4.1.m^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow 4m+1=0 \Leftrightarrow m=\frac{-1}{4}$$

• Với $m=-\frac{1}{4}$, phương trình đã cho có dạng:

$$x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$$

Bài 19. Chứng minh rằng phương trình $2x^2+(2m-1)x+m-1=0$ luôn luôn có nghiệm với mọi m.

Hướng dẫn: Chứng tỏ $\Delta\geq 0, \forall m.$

Lời giải

Ta có: $a=2; b=2m-1; c=m-1$

$$\Rightarrow \Delta=(2m-1)^2-4.2.(m-1)=4m^2-12m+9$$

$$=(2m-3)^2\geq 0, \forall m.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm với mọi m.

Bài 20. Chứng tỏ phương trình $ax^2+bx+c=0$ có các hệ số a và c trái dấu thì luôn có nghiệm.

Hướng dẫn: Xét biệt thức $\Delta=b^2-4ac.$

Theo giả thiết: a và c trái dấu $\Rightarrow ac<0 \Rightarrow -ac>0 \Rightarrow -4ac>0$

$$\Rightarrow b^2-4ac>b^2\geq 0 \Rightarrow \Delta>0.$$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Áp dụng: Không tính Δ hãy giải thích vì sao phương trình sau có hai nghiệm phân biệt.

1) $x^2-(2m+1)x-1=0$

2) $x^2-mx-m^2-1=0$

Hướng dẫn:

1) Ta có: $a=1; c=-1 \Rightarrow ac=-1<0.$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

2) Ta có: $a=1; c=-m^2-1$, vì $m^2\ge 0 \Rightarrow -m^2\le 0 \Rightarrow -1-m^2\le -1<0$

Vậy a và c trái dấu $\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập tương tự đối với phương trình:

$x^2-mx-1=0; x^2-(2m-1)x-m^2-2m-3=0.$

V. Giải và biện luận phương trình có tham số

Bài 21. Giải và biện luận phương trình sau

a) $x^2+2mx+m^2-1=0$ (1)

b) $mx^2+(2m-1)x+m+2=0$ (2)

Lời giải

a) Ta có: $a=1;\ b=2m;\ c=m^2-1$

$\Delta=(2m)^2-4.1.(m^2-1)=4>0,\forall m \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2>0$.

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị $m\in R$

$x_1=\dfrac{-2m+2}{2}=-m+1;\ x_2=\dfrac{-2m-2}{2}=-m-1;$

b) Ta có: $a=m;\ b=2m-1;\ c=m+2$

Trường hợp 1: $a=0 \Leftrightarrow m=0$

Ta có phương trình: $-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$

Trường hợp 2: $a\ne 0 \Leftrightarrow m\ne 0$

$\Delta=(2m-1)^2-4.m.(m+2)=4m^2-4m+1-4m^2-8m=-12m+1$.

+) $\Delta<0 \Leftrightarrow -12m+1<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{12}$ Phương trình vô nghiệm.

+) $\Delta=0 \Leftrightarrow -12m+1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{12}$ phương trình có nghiệm kép: $x_1=x_2=5$

+) $\Delta>0 \Leftrightarrow -12m+1>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{12}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x_1=\dfrac{1-2m-\sqrt{1-12m}}{2m};\ x_2=\dfrac{1-2m+\sqrt{1-12m}}{2m}$

Đáp số: $m=0$ *thì* $x=2;\ m<\dfrac{1}{12}$ *thì* $x_1=\dfrac{1-2m-\sqrt{1-12m}}{2m}; x_2=\dfrac{1-2m+\sqrt{1-12m}}{2m}$.

Bài 22. Giải phương trình:

a) $x^2-2(2m+1)x+4m^2+4m-3=0$

b) $(m+1)x^2-2(m-1)x+m-2=0$

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 10.

Lời giải

a) $x^2-2(2m+1)x+4m^2+4m-3=0$

Ta có: $a=1;\ b=-2(2m+1);\ c=4m^2+4m-3$

$\Delta=\left[-2(2m+1)\right]^2-4.1.(4m^2+4m-3)=16>0;\ \sqrt{\Delta}=4$

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt:

$x_1=\dfrac{2(2m+1)-4}{2}=2m-1;\ \ x_2=\dfrac{2(2m+1)+4}{2}=2m+3$

b) $(m+1)x^2-2(m-1)x+m-2=0$

+) $m+1\neq 0\Leftrightarrow m\neq -1$

Ta có: $a=m+1;\ b=-2(m-1);\ c=m-2$

$\Delta=\left[-2(m-1)\right]^2-4.(m+1).(m-2)=-4m+12$

+) Nếu $\Delta<0\Leftrightarrow -4m+12<0\Leftrightarrow m>3$ phương trình vô nghiệm

+) Nếu $\Delta=0\Leftrightarrow -4m+12=0\Leftrightarrow m=3$ phương trình có nghiệm kép: $x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$

+) Nếu $\begin{cases}\Delta>0\\ a\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<3\\ m\neq 1\end{cases}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1=\dfrac{2m+2-\sqrt{12-4m}}{2(m+1)}=\dfrac{m+1-\sqrt{3-m}}{m+1}$; $x_2=\dfrac{2m+2+\sqrt{12-4m}}{2(m+1)}=\dfrac{m+1+\sqrt{3-m}}{m+1}$

VI. Vị trí tương đối của parabol $y=ax^2\ (a\neq 0)$ và đường thẳng $y=ax+b\ (a\neq 0)$

Bài 23. Cho parabol $(P): y=2x^2$ và đường thẳng $(d): y=-x+3$

Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d)

Hướng dẫn: Xét phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d)

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d)

$2x^2=-x+3\Leftrightarrow 2x^2+x-3=0\,(*)$

$a=2;b=1;c=-3\Rightarrow\Delta=1^2-4.2.(-3)=25>0\Rightarrow\sqrt{\Delta}=5$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{-1-5}{4}=\dfrac{-3}{2};\ x_2=\dfrac{-1+5}{4}=1$

*) Với $x=-\frac{3}{2}\Rightarrow y=\frac{9}{2}$

*) Với $x=1\Rightarrow y=2$

Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $A\left(-\frac{3}{2};\ \frac{9}{2}\right)$ *và* $B(1;\ 2)$

Cách khác: Tọa độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d) thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} y=2x^2 \\ y=-x+3 \end{cases}$

Trừ vế cho vế của hai phương trình, ta có: $2x^2+x-3=0$ (sau đó giải tiếp tục như cách trên).

Bài 24. Chứng tỏ rằng parabol $(P): y=\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y=x-1$ tiếp xúc nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm.

Hướng dẫn: Chứng tỏ phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm kép.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d)

$\frac{1}{4}x^2=x-1 \Leftrightarrow x^2=4x-4=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0\,(*)$

Ta có: $a=1; b=-4; c=4 \Rightarrow \Delta=(-4)^2-4.1.4=0$

Phương trình (*) có nghiệm kép $x_1=x_2=2$

Vậy (P) và (d) tiếp xúc nhau.

Với $x=2\Rightarrow y=1$

Tọa độ tiếp điểm: $M(2;1)$

Bài tập tương tự. Vẽ parabol $(P): y=\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y=x-1$. Tìm tọa độ giao điểm.

Bài 25. Cho $(P): y=2x^2$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(0;-2)$ và tiếp xúc với (P).

Hướng dẫn: Phương trình đường thẳng $(d): y=-(-2)=k(x-0)\Leftrightarrow y=kx-2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) *và* (d).

(P) *và* (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình hoành độ giao điểm của (P) *và* (d) có nghiệm kép

Lời giải

Phương trình đường thẳng (d) đi qua M có hệ số góc k:

$y=-(-2)=k(x-0)\Leftrightarrow y=kx-2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) *và* (d) :

$2x^2=kx-2\Leftrightarrow 2x^2-kx+2=0\ (*)$

(P) *và* (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow k^2-16=0 \Leftrightarrow \sqrt{k^2}=\sqrt{16}$

$\Leftrightarrow |k| = 4 \Leftrightarrow k = 4;\ k = -4$

Chú ý: Điều kiện "tiếp xúc", ta dùng "phương trình hoành độ giao điểm".

Bài 26. Cho parabol $(P): y = \frac{3}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m$. Tìm m để (P) *và* (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Hướng dẫn: Phương trình hoành độ của parabol $(P): y = \frac{3}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m$ có hai điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ của (P) *và* (d) :

$\frac{3}{2}x^2 = x + m \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 2m = 0$ (*)

Ta có: $a = 3;\ b = -2;\ c = 2m$

(P) *và* (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiêm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0$

$\Leftrightarrow (-2)^2 - 4.3.(-2m) > 0 \Leftrightarrow 4 + 24m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{6}$

Chú ý: Điều kiện cắt nhau ta dùng "phương trình hoành độ giao điểm có hai nghiệm phân biệt"

+) *Cách khác:* Tọa độ giao điểm của (P) *và* (d) thỏa mãn hệ: $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x^2 \\ y = x + m \end{cases}$

Trừ vế cho vế cua hai phương trình trên, ta được $\frac{3}{2}x^2 - x - m = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 2m = 0$, ta được phương trình (*) tiếp tục như trên.

Bài 27. Cho $(P): y = -\frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $(d): y = x - 4$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) *và* (d) bằng phép tính.

b) Viết phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và tiếp xúc với (P).

Hướng dẫn:

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) *và* (d).

b) Phương trình $(d'): y = x + m\ (m \neq 4)$

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) *và* (d).

$-\frac{x^2}{2} = x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$ (*)

Ta có: $a = 1;\ b = 2;\ c = -8 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4.1.(-8) = 36 > 0$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6$

Phương trình (*) có hai nghiêm phân biệt:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-2-6}{2} \\ x_2 = \dfrac{-2+6}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$$

*) Với $x = -4$, thay vào phương trình $y = x - 4 \Rightarrow y = -8$

*) Với $x = 2$, thay vào phương trình $y = x - 4 \Rightarrow y = -2$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) *và* (d) *là* $A(-4; -8)$ *và* $B(2; -2)$

b) Phương trình đường thẳng (d') song song với (d) có dạng $y = x + m$ $(m \neq -4)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) *và* (d') là:

$$-\frac{x^2}{2} = x + m \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2m = 0 \ (**)$$

Ta có: $a = 1;\ b = 2;\ c = 2m$

(P) *và* (d') tiếp xúc nhâu khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 4 - 8m = 0 \Leftrightarrow m\frac{1}{2}$$

Bài 28. Cho $a + b = 1$.

a) Chứng minh rằng**:** $a^2 + b^2 \geq \dfrac{1}{2}$.

b) Chứng minh rằng**:** $a^3 + b^3 \geq \dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Hướng dẫn:

a) Đặt $y = a^2 + b^2$. Từ giả thiết: $a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a \Rightarrow b^2 = (1-a)^2$

Vậy: $y = a^2 + (1-a)^2 \Leftrightarrow y = 2a^2 - 2a + 1 \Leftrightarrow 2a^2 - 2a + 1 - y = 0$ (*)

Tìm điều kện của y để phương trình (*) có nghiệm:

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$.

$$\Leftrightarrow 4 - 4.2.(1-y) \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 8 + 8y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2}$$

Vậy $a^2 + b^2 \geq \dfrac{1}{2}$ (Đpcm).

b) Đặt $z = a^3 + b^3 \Leftrightarrow z = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Từ giả thiết: $a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a \Rightarrow b^2 = (1-a)^2$

$$\Leftrightarrow z = a^2 - a(1-a) + (1-a)^2$$

$$\Leftrightarrow z = 3a^2 - 3a + 1$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 3a + 1 - z = 0 \quad (**)$$

Tìm điều kện của z để phương trình (**) có nghiệm:

Phương trình (**) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$.

$$\Leftrightarrow 9 - 4.3.(1-z) \geq 0 \Leftrightarrow 12z - 3 \geq 0 \Leftrightarrow z \geq \frac{1}{4}$$

Vậy $a^3+b^3\ge\frac{1}{4}$ (Đpcm).

Bài 29. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $y=\frac{2x}{x^2+1}$

Hướng dẫn: Biến đổi biểu thức về dạng $y(x^2+1)=2x\Leftrightarrow yx^2-2x+y=0$ (*)

Tìm điều kiên để phương trình bậc hai theo x có nghiệm.

Lời giải

Ta có: $y=\frac{2x}{x^2+1}\Leftrightarrow y(x^2+1)=2x\ \ (vì\ x^2+1>0,\ \forall x\in R)$

$\Leftrightarrow yx^2-2x+y=0$ (*)

+ Trường hợp 1: $y=0\Rightarrow x=0$

+ Trường hợp 2: $y\ne 0$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\ge 0$

$\Leftrightarrow 4-4y^2\ge 0\Leftrightarrow 4y^2\le 4\Leftrightarrow \sqrt{4y^2}\le 2$

$\Leftrightarrow |2y|\le 2\Leftrightarrow -1\le y\le 1$

Vậy giá trị lớn nhất của y bằng 1.

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1$

Giá trị nhở nhất của y bằng -1.

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow x^2+2x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

Bài 30. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $y=\sqrt{x+1}-x$.

Hướng dẫn: Đặt $u=\sqrt{x+1}\Rightarrow u^2=x+1\Rightarrow x=u^2-1(x\ge -1\Rightarrow u\ge 0)$.

Ta xét như bài toán 29.

Lời giải

Đặt $u=\sqrt{x+1};\ x+1\ge 0\Rightarrow u\ge 0$

Ta có: $u^2=x+1\Rightarrow x=u^2-1$

Vậy $y=u-(u^2-1)\Leftrightarrow u^2-u-1+y=0$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\ge 0$

$5-4y\ge 0\Leftrightarrow y\le\frac{5}{4}$

Với $y\le\frac{5}{4}$ phương trình (*) trở thành $u^2-u-1+\frac{5}{4}=0$, ta tìm được: $u=\frac{1}{2}$

Với $u=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $u\ge 0$).

Vậy $\sqrt{x+1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}$

Giá trị lớn nhất của y bằng $\frac{5}{4}$. Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $x=-\frac{3}{4}$

VII. Công thức nghiệm thu gọn

Bài 29. Giải phương trình bằng công thức nghiệm thu gọn.

a) $5x^2+2x-16=0$ (1)

b) $x^2-2\sqrt{3}x-6=0$ (2)

c) $x^2-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}-1=0$ (3)

d) $\sqrt{2}x^2-2(\sqrt{2}-1)x+\sqrt{2}-2=0$ (4)

Hướng dẫn: Nhận xét về hệ số b, tính $b'=\dfrac{b}{2}$ *và* $\Delta'=b'^2-ac$

Lời giải

a) $5x^2+2x-16=0$ (1)

Ta có: $a=5;\ b=2\Rightarrow b'=1;\ c=-16$

$\Delta'=1^2-5.(-16)=81>0\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=\sqrt{81}=9$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$x_1=\dfrac{-1-9}{5}=-2;\ x_2=\dfrac{-1+9}{5}=\dfrac{8}{5}$

b) $x^2-2\sqrt{3}x-6=0$ (2)

Ta có: $a=1;\ b=-2\sqrt{3}\Rightarrow b'=-\sqrt{3};\ c=-6$

$\Delta'=(-\sqrt{3})^2-1.(-6)=9>0\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=\sqrt{9}=3$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt:

$x_1=\dfrac{-(-\sqrt{3})-3}{1}=\sqrt{3}-3;\ x_2=\dfrac{-(-\sqrt{3})+3}{1}=\sqrt{3}+3$

c) $x^2-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}-1=0$ (3)

Ta có: $a=1;\ b=-2\sqrt{2}\Rightarrow b'=-\sqrt{2};\ c=2\sqrt{2}-1$

$\Delta'=(-\sqrt{2})^2-1.(2\sqrt{2}-1)=2-2\sqrt{2}+1=(\sqrt{2}-1)^2>0$

$\Rightarrow\Delta'=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1>0$

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt:

$x_1=\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=1;\ x_2=\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-1$

d) $\sqrt{2}x^2-2(\sqrt{2}-1)x+\sqrt{2}-2=0$ (4)

Ta có: $a=\sqrt{2};\ b=-2(\sqrt{2}-1)\Rightarrow b'=-(\sqrt{2}-1);\ c=\sqrt{2}-2$

$\Delta'=\left[-(\sqrt{2}-1)\right]^2-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=1>0\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=\sqrt{1}=1$

Vậy phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt:

$x_1=\dfrac{(\sqrt{2}-1)-1}{\sqrt{2}}=1-\sqrt{2};\ x_2=\dfrac{(\sqrt{2}-1)+1}{\sqrt{2}}=1$

Bài 32. Với giá trị nào của m phương trình sau đây vô nghiệm.

a) $3x^2-2x+m=0$ (1) b) $5x^2-18x+m=0$ (2)

c) $m^2-6x+1=0$ (3) d) $x^2-2(m+3)x+m^2+3=0$ (4)

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'<0 \end{cases}$

Lời giải

a) $3x^2-2x+m=0$ (1)

Ta có: $a=3;\ b=-2\Rightarrow b'=-1;\ c=m$

$\Delta'=(-1)^2-3m=1-3m$

Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 3\neq 0 \\ 1-3m<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{3}$

b) $5x^2-18x+m=0$ (2)

Ta có: $a=5;\ b=18\Rightarrow b'=9;\ c=m$

$\Delta'=9^2-5m=81-5m$

Phương trình (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 5\neq 0 \\ 81-5m<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\dfrac{81}{5}$

Lời giải

Đặt $u=\sqrt{x+1}; x+1\geq 0\Rightarrow u\geq 0$.

Ta có: $u^2=x+1\Rightarrow x=u^2-1$

Vậy $y=u-\left(u^2-1\right)\Leftrightarrow u^2-u-1+y=0$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\geq 0 \Leftrightarrow 5-4y\geq 0\Leftrightarrow y\leq\dfrac{5}{4}$

Với $y=\dfrac{5}{4}$; phương trình (*) trở thành:

$u^2-u-1+\dfrac{5}{4}=0$, ta tìm được $u=\dfrac{1}{2}$

Với $u=\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $u\geq 0$).

Ta có $\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{4}$ (thoả mãn)

Giá trị lớn nhất của y bằng $\dfrac{5}{4}$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=-\dfrac{3}{4}$.

VII. Công thức nghiệm thu gọn

Bài 31. Giải phương trình bằng công thức nghiệm thu gọn.

a) $5x^2+2x-16=0$

b) $x^2-2\sqrt{3}x-6=0$

c) $x^2-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}-1=0$

d) $\sqrt{2}x^2-2(\sqrt{2}-1)x+\sqrt{2}-2=0$

Hướng dẫn: Nhận xét về hệ số b, tính $b'=\frac{b}{2}$ và $\Delta'=b^2-ac$.

Lời giải

a) Ta có: $a=5;b=2\Rightarrow b'=1;c=-16$.

$\Delta'=1^2-5.(-16)=81>0\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=\sqrt{81}=9$

Vậy phương trình (1) có nghiệm phân biệt: $x_1=\frac{-1-9}{5}=-2$, $x_2=\frac{-1+9}{5}=\frac{8}{5}$.

b) Ta có: $a=1,b=-2\sqrt{3}\Rightarrow b'=-\sqrt{3};c=-6$

$\Delta'=(-\sqrt{3})^2-1.(-6)=9>0\Rightarrow\sqrt{\Delta}=3$

Vậy phương trình (2) có nghiệm phân biệt: $x_1=\sqrt{3}-3$, $x_2=\sqrt{3}+3$.

c) Ta có: $a=1;b=-2\sqrt{2}\Rightarrow b'=-\sqrt{2};c=2\sqrt{2}-1$

$\Delta'=(-\sqrt{2})^2-1.(2\sqrt{2}-1)=2-2\sqrt{2}+1=(\sqrt{2}-1)^2>0$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$

Vậy phương trình (3) có nghiệm phân biệt:

$x_1=\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=1$, $x_2=\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-1$.

d) Ta có: $a=\sqrt{2};b=-2(\sqrt{2}-1)\Rightarrow b'=-(\sqrt{2}-1);c=\sqrt{2}-2$

$\Delta'=[-(\sqrt{2}-1)]^2-\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-2)=1>0\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=1$

Vậy phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt:

$x_1=\frac{(\sqrt{2}-1)-1}{\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$, $x_2=\frac{(\sqrt{2}-1)+1}{\sqrt{2}}=1$.

Bài 32. Với giá trị nào của m phương trình sau đây vô nghiệm:

a) $3x^2-2x+m=0$ (1)

b) $5x^2+18x+m=0$ (2)

c) $m^2-6x+1=0$ (3)

d) $x^2-2(m+3)x+m^2+3=0$ (4)

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq0\\\Delta'<0\end{cases}$

Lời giải

a) Ta có $a=3;b=-2\Rightarrow b'=-1;c=m$

$\Delta'=(-1)^2-3m=1-3m$

Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq0\\\Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\neq0\\1-3m<0\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{1}{3}$

b) Ta có: $a=5;b=18\Rightarrow b'=9;c=m$

Phương trình (2) vô nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \neq 0 \\ 81 - 5m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{81}{5}$

c) Ta có $a = m; b = -6 \Rightarrow b' = -3; c = 1$

Phương trình (3) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9 - m < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > 9 \end{cases} \Leftrightarrow m > 9$

d) Ta có: $a = 1; b = -2(m+3) \Rightarrow b' = -(m+3); c = m^2 + 3$

$\Delta' = [-(m+3)]^2 - \left(m^2 + 3\right) = m^2 + 6m + 9 - m^2 - 3 = 6m + 6$

Phương trình (4) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 6m + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$

Bài tập tương tự

Tìm m để các phương trình trên có nghiệm kép, có hai nghiệm phân biêt hoặc có nghiệm.

Bài 33. Tìm m để phương trình sau có nghiệm kép:

a) $5x^2 + 2mx - 2m + 5 = 0$ (1)

b) $mx^2 - 4(m-1)x - 8 = 0$ (2)

c) $mx^2 - 100x + m = 0$ (3)

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$.

Lời giải

a) Ta có: $a = 5; b = 2m \Rightarrow b' = m; c = -2m + 15$

$\Delta' = m^2 - 5(-2m + 15) = m^2 + 10m - 75$

Phương trình (1) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \neq 0 \\ m^2 + 10m - 75 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m^2 + 10m - 75 = 0 \quad (*)$

Giải phương trình (*) $a = 1; b = 10 \Rightarrow b' = 5; c = -75$

$\Delta' = 25 + 75 = 100 > 0 \Rightarrow \sqrt{8'} = 10$

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -5 + 10 \\ m = -5 - 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = -15 \end{array}\right.$

b) Ta có: $a = m; b = -4(m-1) \Rightarrow b' = -2(m-1); c = -8$

$\Delta' = \left[-4(m-1)\right]^2 - m.(-8) = 4m^2 + 4$

Phương trình (2) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4m^2 + 4 = 0 \ (*) \end{cases}$

Phương trình (*) vô nghiệm vì $m^2 \geq 0, \forall m \in R \Rightarrow 4m^2 + 4 > 0, \forall m$.

Vậy không có giá trị m nào để phương trình (2) có nghiệm kép.

c) Ta có: $a = m; b = -100 \Rightarrow b' = -50, c = m$

$\Delta' = 2500 - m^2$

Phương trình (3) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2500 - m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 50$

Nhận xét: Với các phương trình đã cho, ta có thể tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 34. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt.

a) $(m+1)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0$ (1)

b) $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$ (2)

c) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$ (3)

d) $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m - 1 = 0$ (4)

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có: $a = m+1; b = 4m \Rightarrow b' = 2m; c = 4m - 1$.

$\Delta' = (2m)^2 - (m+1)(4m-1) = 4m^2 - 4m^2 + m - 4m + 1 = -3m + 1$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ -3m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

b) Ta có: $a = 1; b = -2(m+3) \Rightarrow b' = -(m+3); c = m^2 + 3$.

$\Delta' = [-(m+3)]^2 - \left(m^2 + 3\right) = m^2 + 6m + 9 - m^2 - 3 = 6m + 6$

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 6m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$$

c) Ta có: $a = 1; b = -2(m-1) \Rightarrow b' = -(m-1) = 1 - m; c = m^2$.

$\Delta' = (1-m)^2 - m^2 = 1 - 2m + m^2 - m^2 = 1 - 2m$

Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$$

d) Ta có: $a = 1; b = -2(m+1) \Rightarrow b' = -(m+1); c = m^2 + m - 1$

$\Delta' = [-(m+1)]^2 - \left(m^2 + m - 1\right) = m^2 + 2m + 1 - m^2 - m + 1 = m + 2$

Phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ m+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$

Bài tập tương tự bài d):

"Tìm m để phương trình (4) có hai nghiệm".

Hướng dẫn: Phương trình (4) có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m+2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -2.$

Ta hãy so sánh với bài toán tương tự bài a):

"Tìm m để phương trình (1) có nghiệm".

Lời giải

Trường hợp 1; $a = m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ (*)

Phương trình (1) trờ thành: $-4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{4}$

Vấy $m = -1$: Phương trình (1) có nghiệm.

Truờng hợp 2: $a = m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Phương trình (1) có nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -3m+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \leq \dfrac{1}{3} (**) \end{cases}$

Kết hợp (*) và (**), ta có: Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq \dfrac{1}{3}$.

Chú ý: Khi xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, ta phải xét đến hệ số a trước hết ví dụ bài toán trên: $a = m+1$. Nếu không xét trường hợp $m+1 = 0$ ta sẽ có kết luận không chính xác.

Bài 35. Tìm m để parabol (P): $y = -\dfrac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - 2m - 1$ tiếp xúc nhau.

Hướng dẫn: Xét phương trình hoành đọ giao điểm của (P) và (d), sau đó tìm điều kiện để phương trình có nghiệm kép.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$-\dfrac{1}{4}x^2 = mx - 2m - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4mx - 8m - 4 = 0 (*)$

Ta có: $a = 1; b = 4m \Rightarrow b' = 2m; c = -8m - 4$

(P) và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 4m^2 + 8m + 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 = 0 \Leftrightarrow m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Nhận xét: Bài: “Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt" được giải tương tự.

$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m+1)^2 > 0 \Leftrightarrow m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Bài 36. Tìm m để parabol $(P): y = mx^2 (m \neq 0)$ và đường thẳng $y = 2x - 1$ tiếp xúc nhau.

Hướng dẫn: Xem bài toán 35.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$mx^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow mx^2 - 2x + 1 = 0(*)$

Ta có: $a = m; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = 1$

(P) và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Bài 37. Tìm tọa dộ giao điểm của parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x + 3$.

Hướng dẫn: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d) :

$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0(*)$

Ta có: $a = 1; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = -3$

$$\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (-3) = 4 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 2$$

Vậy $(*) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - 2 \\ x = 1 + 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

*) Với $x = -1$, ta tìm được: $y = 1$.

*) Với $x = 3$, ta tìm được: $y = 9$.

Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $A(1;1)$ và $B(3;9)$.

Bài 38. Cho parabol $(P): y = \frac{1}{x} x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + m$. Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt?

Hướng dẫn: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d).

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$\frac{1}{2} x^2 = -x + m \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2m = 0 \; (*)$

Ta có: $a = 1; b = 2 \Rightarrow b' = 1; c = -2m$.

$$\Delta' = 1 + 2m$$

(P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2m > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m > -\frac{1}{2}.$$

Bài 39. Cho $x^2+y^2=1$. Chứng minh $|5x+12y|\le 13$.

Hướng dẫn: Đặt $m=5x+12y\Rightarrow x=\dfrac{m-12y}{5}$.

Thế vào biểu thức $x^2+y^2=1$, ta được phương trình bậc hai của y và m là tham số.

Lời giải

Đặt $m=5x+12y\Rightarrow x=\dfrac{m-12y}{5}$

Thế x vào đẳng thức $x^2+y^2=1$, ta được:

$$\left(\frac{m-12y}{5}\right)^2+y^2=1\Leftrightarrow 169y^2-24my+m^2-25=0\left(^*\right)$$

Phương trình (*) có nghiệm

$\Delta'\ge 0\Rightarrow -25m^2+4225\ge 0\Leftrightarrow m^2\le 169\Leftrightarrow |m|\le 13$

hay $|5x+12y|\le 13$ (đpcm)

Cách khác: Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$|5x+12y|\le\sqrt{5^2+12^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$, vì $x^2+y^2=1$, nên

$|5x+12y|\le\sqrt{169}\cdot\sqrt{1}\Leftrightarrow |5x+12y|\le 13$

Bài 40. Cho $4x+y=1$. Chứng minh rằng $4x^2+y^2\ge\dfrac{1}{5}$.

Hướng dẫn: Đặt $m=4x^2+y^2$.

Từ $4x+y=1\Rightarrow y=1-4x$, và thế y vào đẳng thức $m=4x^2+y^2$. Ta được phương trình bậc hai của x, tham số m. Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

Lời giải

Đặt $m=4x^2+y^2$.

Từ giả thiết: $4x+y=1\Rightarrow y=1-4x$. Thế y vào đẳng thức trên, ta được:

$m=4x^2+(1-4x)^2\Rightarrow 20x^2-8x+1-m=0$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta'\ge 0$.

$16-20(1-m)\ge 0$

$-4+20m\ge 0$

$m\ge\dfrac{1}{5}$ hay $4x^2+y^2\ge\dfrac{1}{5}$ (đpcm)

☙ HẾT ❧

Bài 20. ĐỊNH LÍ VI-ET VÀ ỨNG DỤNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1) Định lí Vi-et.

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ thì

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

2) Áp dụng định lí Vi-et để tính nhẩm nghiệm.

Xét phương trình $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$:

*) Nếu $a+b+c=0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1=1$, còn nghiệm kia là $x_2=\dfrac{c}{a}$.

*) Nếu $a-b+c=0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1=-1$, còn nghiệm kia là $x_2=-\dfrac{c}{a}$.

3) Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $x^2-Sx+P=0$.

Điều kiện để có hai số đó là $S^2-4P\geq 0$.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Biểu thức đối xứng với các nghiệm $\left(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2};x_1^{\ 3}+x_2^{\ 3};x_1^{\ 4}+x_2^{\ 4}\right)$

Bài 1. Cho phương trình $x^2-x-10=0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ và tính $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}$.

Hướng dẫn: $a=1;c=-10\Rightarrow ac<0$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

$x_1^{\ 2}+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2$

Lời giải

Ta có: $a=1;c=-10\Rightarrow ac<0\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

Nhận xét:

Ta có ac $<0\Rightarrow\dfrac{\text{c}}{\text{a}}<0$ mà $x_1x_2=\dfrac{c}{a}\Rightarrow x_1x_2<0$.

Vậy khi a và c trái dấu thì phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt và trái dấu (chẳng hạn: $x_1<0<x_2$).

Biểu thức $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}$ không thay đổi khi ta thay x_1 bởi x_2 và ngược lại, gọi là biểu thức đối xứng của x_1 và x_2. Bạn cần nhớ một vài công thức sau:

$S=x_1+x_2$

- $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=S^2-2P$

(biểu thị qua tổng và tích các nghiệm)

- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$

$= (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right]$

$= S.(S^2 - 3P) = S^3 - 3SP$

- $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2$

$= \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left[S^2 - 2P\right]^2 - 2P^2$

- $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$

$= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

$= S^2 - 4P$

Bài 2. Cho phương trình $2x^2 - 3x - 6 = 0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Tính $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^3 + x_2^3$.

Hướng dẫn: Xem nhận xét ở Bài 1.

Lời giải

Ta có: $a = 2; c = -6 \Rightarrow ac = -12 < 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt (trái dấu) $x_1; x_2$. Theo định lí Vi-et, ta có: $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}; x_1x_2 = \frac{-6}{2} = -3$

Vậy $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2(-3) = \frac{33}{4}$.

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = \frac{3}{2}\left[\frac{33}{4} - (-3)\right] = \frac{135}{8}$

Cách khác: Ta cũng có: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3.(-3).\frac{3}{2} = \frac{135}{8}$.

Bài 3. Cho phương trình $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $M = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$, với $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Hướng dẫn: Chứng minh phương trình có nghiệm.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

Lời giải

Ta có $a = 1; b = -6 \Rightarrow b' = -3$.

$\Delta' = 9 - 8 = 1 > 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt. Theo định lí Vi-et, ta có:

$x_1 + x_2 = 6(1)$ và $x_1 - x_2 = 8(2)$

Vậy $M = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 \Leftrightarrow M = (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2$ (3)

Từ (1); (2) và (3), ta có: $M = 6^2 - 5.8 = 36 - 40 = -4$

Chú ý: Ta cần chứng tỏ phương trình có nghiệm $x_1; x_2$; sau đó mới áp dụng định lí Vi-et.

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - x + m - 1 = 0$ (*).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$.

b) Hãy tính $x_1^2 + x_2^2$ theo m.

Hướng dẫn:

*) Phương trình đã cho có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ (không cần hai nghiệm phân biệt).

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

Lời giải

a) Phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1 - 4 \cdot 1.(m-1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 5 - 4\text{ m} \geq 0 \Rightarrow \text{m} \leq \frac{5}{4}$$

b) Theo định lí Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$

Vậy $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1 - 2(m-1) = 3 - 2m$

Bài 5. Theo phương trình $3x^2 + 2x - 6 = 0$. Tính giá trị của biểu thức A $A = (x_1 - x_2)^2$; trong đó $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Lời giải

Ta có $a = 3; b = 2; c = -6$

$\Rightarrow$ $a.c = -18 < 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt (khác dấu) x_1, x_2.

Theo định lí Vi-et, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{2}{3}; x_1x_2 = -2$.

Vậy $A = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot (-2) = \frac{76}{9}$

Nhận xét: Từ kết quả trên, ta có thể tìm được: $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{76}}{3} = \frac{2\sqrt{19}}{3} \Rightarrow x_1 - x_2 = \pm\frac{2\sqrt{19}}{3}$

Bài 6. Cho phương trình $3x^2 - 7x - 4 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, hãy tính.

a) $A = |x_1 - x_2|$

b) $B = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$

Hướng dẫn:

1. Chứng tỏ phương trình có nghiệm.

2. Áp dụng định lí Vi-et, tính:

$A^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$. Từ đó tính *A*.

Lời giải

Ta có: $a=3;b=-7;c=-4\Rightarrow a.c=-12<0$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$.

Theo định lí Vi-et, ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{7}{3} \\ x_1x_2=\dfrac{-4}{3} \end{cases}.$$

a) Ta có: $A^2=\left|x_1-x_2\right|^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2$

$$=\left(\frac{7}{3}\right)^2-4.\left(\frac{-4}{3}\right)=\frac{97}{9}\Rightarrow A=\frac{\sqrt{97}}{3}.$$

b) Ta có: $B=\dfrac{x_1^2+x_2^3}{x_1x_2}=\dfrac{\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)}{x_1x_2}$

$$=\frac{\left(\frac{7}{3}\right)^3-3\cdot\left(\frac{-4}{3}\right)\cdot\frac{7}{3}}{\frac{-4}{3}}=-\frac{595}{36}.$$

Bài 7. Cho phương trình $x^2-2x+m+2=0$. Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2=10$.

Hướng dẫn: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm, áp dụng hệ thức Viète tính $x_1^2+x_2^2$ qua x_1+x_2 và x_1x_2

Lời giải

Ta có: $a=1;b=-2\Rightarrow b'=-1;c=m+2$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1;x_2$ khi và chỉ khi

$\Delta'\geq 0\Leftrightarrow(-1)^2-(m+2)\geq 0\Leftrightarrow m\leq -1$

Theo hệ thức Viète, ta có $x_1+x_2=2;x_1x_2=m+2$

Vậy $x_1^2+x_2^2=10\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=10$

$\Leftrightarrow 4-2(m+2)=10\Leftrightarrow -2m=10$

$\Leftrightarrow m=-5$ (thỏa điều kiện $m\leq -1$)

Đáp số: $m=-5$

Cách khác: Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1;x_2$. Theo hệ thức Viète, ta có:

$x_1+x_2=2;x_1x_2=m+2$ (Tương tự cách giải trên):

$x_1^2+x_2^2=10\Leftrightarrow 4-2(m+2)=10\Leftrightarrow m=-5$

Thử lại: Với $m=-5$ ta có phương trình $x^2-2x-3=0$

$a=1;b=-2;c=-3\Rightarrow ac=-2<0\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm.

Chú ý: Vì ta giả sử có nghiệm, để tìm được m, sau đó ta phải thử lại. Nếu làm như cách thứ nhất, ta tìm điều kiện cho phương trình có nghiệm thì không cần thử lại.

Bài 8. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ trong đó $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Hướng dẫn: Trước hết phải tìm điều kiện để phương trình có nghiệm sau đó áp dụng hệ thức Viète để tính $x_1^2 + x_2^2$ qua các hệ số.

Lời giải

Ta có $a = 1; b = -2m \Rightarrow b' = -1m; c = 2m - 3$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (-m)^2 - (2m - 3) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 3 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + 2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (m - 1)^2 + 2 \geq 0$$

(luôn đúng với mọi m, vì $(m-1)^2 \geq 0; \forall m$)

Theo hệ thức Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 2m; x_1x_2 = 2m - 3$

Vậy $A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 - 2(2m - 3)$

$= 4m^2 - 4m + 6 = 4m^2 - 4m + 1 + 5$

$= (2m - 1)^2 + 5 \geq 5; \forall m$ (vì $(2m-1)^2 \geq 0, \forall m$)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$

Chú ý: Nếu ta không đặt điều kiện phương trình có nghiệm thì vẫn đúng đáp số, nhưng lời giải như vậy chưa chính xác.

II. Biểu thức không đối xứng với các nghiệm

Bài 9. Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $3x_1 + 2x_2 = 1$

Hướng dẫn: Biểu thức $3x_1 + 2x_2$ gọi là không đối xứng. Áp dụng hệ thức Viète, tính $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ và $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$. Ta có hệ phương trình, từ đó tìm được m

Lời giải

Ta có $a = 1; b = 2 \Rightarrow b' = 1; c = m$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

Theo hệ thức Viète, ta có $x_1 + x_2 = -2$ và $x_1x_2 = m$

Xét hệ: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -7 \end{cases}$

(hệ hai ẩn bậc nhất đối với x_1 và x_2)

Thế $x_1 = 5$ và $x_2 = -7$ vào phương trình $x_1x_2 = m$, ta có:

$m = 5.(-7) = -35$ (thỏa điều kiện $m \le 1$)

Đáp số: $m = -35$

Bài 10. Tìm m để phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 4$

Hướng dẫn: Xem lời giải Bài 9.

Lời giải

Ta có: $a = 1; b = -4 \Rightarrow b' = -2; c = m$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta' \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \ne 0 \\ 4 - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 4$$

Theo hệ thức viète, ta có $x_1 + x_2 = 4$ và $x_1x_2 = m$

Xét hệ: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Vậy $m = 0$ (thỏa điều kiện $m \le 4$)

III. Tính nhẩm các nghiệm của phương trình bậc hai

Bài 11. Giải phương trình:

a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ (1)

b) $x^2 - \left(1 + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2} = 0$ (2)

c) $mx^2 - 2(m+1)x + m + 2 = 0$ (3)

d) $(1 - 2m)x^2 + (2m + 1)x - 2 = 0$ (4)

Hướng dẫn:

• Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0\,(a \ne 0)$ có hai nghiệm: $x_1 = 1;\, x_2 = \dfrac{c}{a}$.

• Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0\,(a \ne 0)$ có hai nghiệm: $x_1 = -1;\, x_2 = -\dfrac{c}{a}$.

Lời giải

a) Ta có $a = 2; b = -5; c = 3 \Rightarrow a + b + c = 0$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = 1;\, x_2 = \dfrac{3}{2}$.

b) Ta có $a = 1; b = -\left(1 + \sqrt{2}\right); c = \sqrt{2}$

$\Rightarrow a + b + c = 1 - \left(1 + \sqrt{2}\right) + \sqrt{2} = 0$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm $x_1 = 1;\, x_2 = \sqrt{2}$

c) Ta có $a = m; b = -2(m+1); c = m + 2$

$a \ne 0 \Leftrightarrow m \ne 0$. Ta nhận thấy:

$a+b+c=m-2\left(m+1\right)+m+2=0$

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm $x_1=1;\, x_2=\dfrac{m+2}{m}\quad\left(m\neq 0\right)$.

$m=0\ \ \left(3\right)\Leftrightarrow -2x+2=0\Leftrightarrow x=1$

d) Ta có $a=1-2m;b=2m+1;c=-2$

$\Rightarrow a+b+c=0=1-2m+2m+1-2=0$

Vậy phương trình (4) có hai nghiệm $x_1=1;\, x_2=-\dfrac{2}{1-2m}$.

$\left(a\neq 0\Leftrightarrow 1-2m\neq 0\Leftrightarrow m\neq \dfrac{1}{2}\right)$

Bài 12. Giải phương trình:

a) $x^2+2mx+2m-1=0$ (1)

b) $mx^2+2\left(m+1\right)x+m+2=0\quad\left(m\neq 0\right)$ (2)

c) $\left(5+\sqrt{2}\right)x^2-\left(\sqrt{2}-5\right)x-10=0$ (3)

Hướng dẫn: Xem hướng dẫn Bài 11.

Lời giải

a) Ta có $a=1;b=2m;c=2m-1\Rightarrow a-b+c=0=1-2m+2m-1=0$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x_1=-1;\, x_2=-\dfrac{\left(2m-1\right)}{1}$.

b) Ta có $a=m;b=2\left(m+1\right);c=m+2$

$\Rightarrow a-b+c=0=m-2\left(m+1\right)+m+2=0$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm $x_1=-1;\, x_2=\dfrac{-\left(m+2\right)}{m}\ \left(m\neq 0\right)$.

c) Ta có $a=5+\sqrt{2};b=\sqrt{2}-5;c=-10$

$\Rightarrow a-b+c=0=5+\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}-5\right)-10=0$

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm $x_1=-1;\, x_2=\dfrac{10}{5+\sqrt{2}}$.

IV. Xét dấu các nghiệm

Ta cần nhớ kết quả như sau:

Phương trình $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$.

Hai nghiệm trái dấu: $\left(x_1<0<x_2\right)\Leftrightarrow ac<0$.

Hai nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases}$

Hai nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} < 0 \end{cases}$

Bài 13. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm trái dấu:

$x^2 + 4x + m = 0$

Hướng dẫn: Xét $ac < 0 \Leftrightarrow -4ac > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > b^2 \geq 0$.

Vậy $\Delta > 0$. Lại có $ac < 0 \Rightarrow \dfrac{c}{a} < 0 \Rightarrow x_1x_2 < 0$

Vậy hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

Ta có $a = 1; b = 4; c = m$

Phương trình sau có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m < 0$

Nhận xét: Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt âm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ m > 0 \\ -4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Bài 14. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt dương

$x^2 - 2x + m = 0$

Lời giải

Ta có $a = 1; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = m$

Vậy $\Delta' = 1 - m$

Phương trình sau có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ m > 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$$

Bài 15. Tìm m để phương trình $x^2 - 3x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ và thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$

Hướng dẫn: $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 1 - 1 < x_2 - 1$

$\Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1$

Vậy $x_1 - 1$ và $x_2 - 1$ trái dấu.

Lời giải

Ta có $a = 1; b = -3; c = m - 1$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 - 1$ và $x_2 - 1$ trái dấu khi và chỉ khi.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4(m-1) > 0 & (1) \\ x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow m < \frac{13}{4}$. Với điều kiện $m < \frac{13}{4}$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$x_1 + x_2 = 3$; $x_1x_2 = m - 1$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow (m-1) - 3 + 1 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Kết hợp $m < 3$ và $m < \frac{13}{4} \Rightarrow m < 3$

Cách khác: Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$ thế t vào phương trình đã cho, ta có:

$(t+1)^2 - 3(t+1) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t + m - 3 = 0\ (*)$

Điều kiện $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1$.

Khi đó, gọi $t_1 = x_1 - 1; t_2 = x_2 - 1$ là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Vậy $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$

Nhận xét: - Cách thứ hai, gọi là đặt ẩn phụ; ta không phải tìm điều kiện: $\Delta > 0$!

Bạn hãy tự giải. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn: $1 < x_1 < x_2$ hoặc $x_1 < x_2 < 1$.

Bài 16. Tìm m để phương trình $x^2 + (2 - m)x + 1 = 0$ có nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn điều kiện $-1 < x_1 < x_2$.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp đặt ẩn phụ. $-1 < x_1 < x_2$ hay $0 < x_1 + 1 < x_2 + 1$

Lời giải

Đặt $t = x + 1$ suy ra $x = t - 1$. Thế x vào phương trình đã cho, ta được:

$(t-1)^2 + (2-m)(t-1) + 1 = 0$ hay $t^2 - mt + m = 0\ (*)$.

Ta có $a = 1$; $b = -m$; $c = m$.

Điều kiện $-1 < x_1 < x_2$ hay $0 < x_1 + 1 < x_2 + 1$

Đặt $t_1 = x_1 + 1$; $t_2 = x_2 + 1$, ta đưa về bài toán. Tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm t_1; t_2 thỏa mãn:

$$0<t_1<t_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ P=\dfrac{c}{a}>0\\ S=-\dfrac{b}{a}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-4m>0\\ m>0\\ m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m(m-4)>0\\ m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>0\\ m>4\end{cases} \Leftrightarrow m>4$$

Cách khác:

*) $-1<x_1<x_2 \Leftrightarrow 0<x_1+1<x_2+1 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ (x_1+1)(x_2+1)>0\\ x_1+1+x_2+1>0\end{cases}$

Bài toán tương tự với điều kiện $x_1<-1<x_2$; $x_1<x_2<-1$.

Bài 17. Tìm m để phương trình $x^2-2(m-1)x+5m+1=0$ có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn điều kiện: $x_1 \le x_2 < 3$.

Hướng dẫn: Đặt ẩn phụ $t=x_1-3\le x_2-3<0$. Vậy x_1-3 và x_2-3 đều cùng âm.

Lời giải

Cách giải thứ nhất.

Đặt $t=x-3$ suy ra $x=t+3$. Thế x vào phương trình đã cho, ta được:

$(t+3)^2-2(m-1)(t+3)+5m+1=0 \Leftrightarrow t^2+2(2-m)t+4-m=0$ $(*)$

Gọi t_1; t_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Điều kiện $x_1\le x_2<3 \Leftrightarrow x_1-3\le x_2-3<0 \Leftrightarrow t_1\le t_2<0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'\ge 0\\ P=\dfrac{c}{a}>0\\ S=-\dfrac{b}{a}<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-3m\ge 0\\ 4-m>0\\ 2-m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m(m-3)\ge 0\\ m<4\\ m<2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\ge 3\\ m<2\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}m\le 0\\ m<2\end{cases} \Leftrightarrow m\le 0$$

Với $\begin{cases}m\ge 3\\ m<2\end{cases}$ (vô nghiệm).

Với $\begin{cases}m\le 0\\ m<2\end{cases} \Leftrightarrow m\le 0$

Vậy $m\le 0$.

Cách giải thứ hai: Xét phương trình đã cho: Ta có $x_1\le x_2<3 \Leftrightarrow x_1-3\le x_2-3<0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'\ge 0\\ (x_2-3)(x_2-3)>0\\ (x_1-3)+(x_2-3)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'\ge 0\\ x_1x_2-3(x_1+x_2)+9>0\\ x_1+x_2-6<0\end{cases}$$

Với $x_1+x_2=2m+2$; $x_1x_2=5m+1$: $\Delta'=m^2-3m$.

Ta có hệ: $\begin{cases} m^2-3m\geq 0 \\ 5m+1-3(2m+2)+9>0 \\ 2m+2-6<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-3)\geq 0 \\ 4-m>0 \\ 2m-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\leq 0 \\ m<4 \\ m<2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m\geq 3 \\ m<4 \\ m<2 \end{cases}$

Với $\begin{cases} m\leq 0 \\ m<4 \\ m<2 \end{cases} \Leftrightarrow m\leq 0$.

Với $\begin{cases} m\geq 3 \\ m<4 \\ m<2 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy $m\leq 0$

V. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng

Bài 18. Tìm hai số u và v biết $u+v=1$ và $u\cdot v=-2$.

Hướng dẫn: Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm phương trình bậc hai $x^2-Sx+P=0$.

Lời giải

Hai số u; v cần tìm là hai nghiệm phương trình: $x^2-1.x-2=0$ $(*)$

Ta có: $a=1$; $b=-1$; $c=-2$. Suy ra $a-b+c=1-(-1)-2=0$.

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm $x_1=-1$ và $x_2=2$.

Vậy hai số cần tìm: $u=-1$; $v=2$ hoặc $u=2$; $v=-1$.

Nhận xét: Ta có thể giải bài toán sau: "Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là -1 và 2.

Lời giải

Ta có $(-1)+2=1=S$ và $(-1)\cdot 2=-2=P$.

Vậy -1 và 2 là nghiệm của phương trình bậc hai sau đây: $x^2-1\cdot x-2=0$ hay $x^2-x-2=0$

Bài toán tương tự.

Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là 3 và -5.

Lời giải

Ta có: $3+(-5)=-2=S$ và $3.(-5)=-15=P$.

Vậy 3 và -5 là hai nghiệmủa phương trình $x^2+2x-15=0$.

(Ta cần nhớ phương trình dạng $x^2-Sx+P=0$ nên phương trình trên có dạng: $x^2-(-2)x-15=0$.

Cách khác: $x=-5$ hoặc $x=3$ là nghiệm phương trình $x+5=0$ hoặc $x-3=0$.

Suy ra $(x+5)(x-3)=0$ $\Rightarrow x^2-3x+5x-15=0$ $\Rightarrow x^2+2x-15=0$

Bài 19. Tìm hai số u, v; biết $u+v=12$; $uv=28$ và $u>v$.

Lời giải

Hai số u; v là hai nghiệm của phương trình $x^2-12x+28=0$ $(*)$

Ta có: $a=1$; $b=-12$ $\Rightarrow$ $b'=-6$; $c=28$.

$\Delta' = (-6)^2 - 1 \,.\, 28 = 8 > 0 \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Nên phương trình $(*)$ có nghiệm $x = 6 + 2\sqrt{2}$; $x = 6 - 2\sqrt{2}$.

Vậy hai số cần tìm: $u = 6 + 2\sqrt{2}$; $v = 6 - 2\sqrt{2}$ hoặc $u = 6 - 2\sqrt{2}$; $v = 6 + 2\sqrt{2}$.

Bài 20. Cho phương trình $x^2 + x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1; x_2.

Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$.

Hướng dẫn: Xem nhận xét sau Bài 18.

Lời giải

Ta có: $a = 1$; $c = -3$ suy ra $ac = -3 < 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm (trái dấu) x_1; x_2 suy ra $x_1 + x_2 = -1$; $x_1 \,.\, x_2 = -3$.

Mặt khác: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{x_1} \cdot \dfrac{1}{x_2} = -\dfrac{1}{3}$.

Vậy $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3} = 0$ hay $3x^2 - x - 1 = 0$

Bài 21. Cho phương trình $x^2 + mx - 5 = 0$ có hai nghiệm x_1 ; x_2. Lập phương trình có hai nghiệm là $-x_1$ và $-x_2$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 + mx - 5 = 0$, ta có: $a = 1$; $b = m$; $c = -5 \quad \Rightarrow ac = -5 < 0$ suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt (trái dấu). x_1 ; x_2.

Theo hệ thức Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -m$; $x_1 x_2 = -5$.

Mặt khác: $(-x_1) + (-x_2) = -(x_1 + x_2) = m$; $(-x_1)(-x_2) = x_1 x_2 = -5$

Vậy $-x_1$ và $-x_2$ là hai nghiệm phương trình $x^2 - mx - 5 = 0$.

Bài 22. Tìm m để hai phương trình sau tương đương: $x^2 + mx - 2 = 0$ và $x^2 - 2x + m = 0$ có tập hợp nghiệm trùng nhau.

Hướng dẫn:

1. Hai phương trình bậc hai cùng vô nghiệm hoặc:
2. Hai phương trình bậc hai cùng có nghiệm và tổng; tích hai nghiệm của từng phương trình phải bằng nhau.

Lời giải

Phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$ có hệ số $a = 1$ và $c = -2$ suy ra $ac < 0$, nên phương trình này không thể vô nghiệm, mà sẽ có hai nghiệm x_1; x_2.

Tương tự:

Gọi $x_1' + x_2'$ là hai nghiệm phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ với điều kiện $\Delta' = 1 - m \geq 0 \;\Leftrightarrow m \leq 1$

Gọi $S_2 = x_1' + x_2' = 2$; $\quad P_2 = x_1' \,.\, x_2' = m$.

Vậy hai phương trình tương dương khi và chỉ khi: $\begin{cases} m \le 1 \\ S_1 = S_2 \\ P_1 = P_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 \\ -m = 2 \\ -2 = m \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$

Bài toán tương tự.

Tìm m để phương trình sau tương đương: $x^2 + 2x - 3 = 0 \quad (1)$ và $2x^2 + mx - 6 = 0 \quad (2)$.

Lời giải

Phương trình (1) có a ; c trái dấu nên luôn có hai nghiệm x_1 ; x_2

Suy ra $S_1 = x_1 + x_2 = -2$; $P_1 = x_1x_2 = -3$

Tương tự: Phương trình (2) cũng luôn có hai nghiệm x_3 và x_4

Suy ra $S_2 = x_3 + x_4 = -\dfrac{m}{2}$; $P_2 = x_3x_4 = -3$.

Hai phương trình tương đương $\Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = S_2 \\ P_1 = P_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -\dfrac{m}{2} \\ -3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$

VI. Phân tích thành nhân tử

Bài 23. Tam thức $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1; x_2. Chứng minh: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Lời giải

Ta có: x_1; x_2 là nghiệm của tam thức $ax^2 + bx + c$ có nghĩa là phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1; x_2.

Theo định lí Viète: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$; $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Khi đó vế phải được viết dưới dạng

$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right]$

$= a\left[x^2 - \left(-\dfrac{b}{a}\right)x + \dfrac{c}{a}\right] = ax^2 + bx + c$ (Đpcm).

Áp dụng: Phân tích đa thức $x^2 - 3x + 2$ thành nhân từ.

Phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có $a = 1$; $b = -3$; $c = 2$.

Suy ra $a + b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

Vậy $x^2 - 3x + 2 = 1.(x - 1)(x - 2)$.

Bài 24. Rút gọn phân thức: $P = \dfrac{x^2 - 9x + 8}{2x^2 - 3x + 1}$

Hướng dẫn: Phân tích các tam thức ở tử số và mẫu số thành nhân tử.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - 9x + 8 = 0$, ta có: $a = 1$; $b = -9$; $c = 8$.

Suy ra $a + b + c = 1 - 9 + 8 = 0$ suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = 8$.

Vậy $x^2 - 9x + 8 = 1 . (x - 1)(x - 8)$.

Tương tự: $2x^2-3x+1 \;=2\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right) \;=(x-1)(2x-1)$.

Điều kiện: $x\neq 1$ và $x\neq \frac{1}{2}$.

Vậy $\frac{x^2-9x+8}{2x^2-3x+1} \;=\frac{(x-1)(x-8)}{(x-1)(2x-1)} \;=\frac{x-8}{2x-1}$.

Bài 25. Rút gọn phân thức: $P=\frac{\sqrt{x}-1}{x-5\sqrt{x}+6}$

Huớng dẫn: Đặt $a=\sqrt{x}$; $a\geq 0 \;\Rightarrow x=a^2$. Rút gọn phân thức theo a.

Lời giải

Đặt $a=\sqrt{x}$, $a\geq 0 \;\Rightarrow x=a^2$.

Ta có: $P=\frac{a-1}{a^2-5a+6}$

Xét phương trình $a^2-5a+6=0$; phương trình hai nghiệm: $a_1=1$ và $a_2=6$.

suy ra $a^2-5a+6 \;=1\,.\,(a-1)(a-6) \;=(a-1)(a-6)$

Vậy $P=\frac{a-1}{(a-1)(a-6)}=\frac{1}{a-6} \quad (a\neq 1\,;\,a\neq 6)$

Thay $a=\sqrt{x}$ suy ra $P=\frac{1}{\sqrt{x}-6}$.

VII. Biết một nghiệm của phương trình, tìm nghiệm còn lại

Bài 26. Chứng tỏ phương trình $3x^2+2x-21=0$ có một nghiệm là -3.

Tìm nghiệm kia.

Hướng dẫn: Thay $x=-3$ vào phương trình.

Dùng hệ thức: $x_1x_2=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$ để tìm $x_2(x_1=-3)$ (hoặc $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$).

Lời giải

Thay $x=-3$ x = −3 vào phương trình đã cho, ta có

$3.(-3)^2+2.(-3)-21=0 \Leftrightarrow 27-6-21=0$ (luôn đúng)

Vậy $x=-3$ x = −3 là một nghiệm của phương trình.

Đặt $x_1=-3$, nghiệm còn lại là x_2.

Theo hệ thức Viète, ta có: $x_1x_2=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}=\frac{-21}{3}=-7$

Với $x_1=-3 \Rightarrow (-3)\cdot x_2=-7 \Rightarrow x_2=\frac{7}{3}$.

Cách khác: Theo hệ thức Viète:

$x_1+x_2=-\frac{2}{3}$ với $x_1=-3 \Rightarrow (-3)+x_2=-\frac{2}{3} \Rightarrow x_2=\frac{7}{3}$.

Bài 27. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có một nghiệm là 2. Tìm nghiệm còn lại.

Hướng dẫn: Xem Bài 26.

Lời giải

Thay $x = 2$ vào phương trình đã cho, ta được:

$4 - 4m + m - 1 = 0 \Rightarrow -3m = -3 \Rightarrow m = 1$

Với $m = 1$, phương trình trở thành: $x^2 - 2x = 0$.

$\Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Nghiệm còn lại là $x = 0$.

Cách khác: Tương tự, ta có $m = 1$. Đặt $x_1 = 2$.

Theo hệ thức Viète: $x_1 + x_2 = 2m \Rightarrow 2 + x_2 = 2.1 \Rightarrow x_2 = 0$.

(Cũng có thể tìm x_2 nhờ hệ thức $x_1x_2 = \frac{c}{a}$).

Bài 28. Cho phương trình $4x^2 + 3x + 3m - m^2 = n$ có một nghiệm $x_1 = -2$. Tìm x_2 và m.

Hướng dẫn: Dùng hệ thức Viète: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ để tìm x_2; dùng hệ thức $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ để tìm m.

Lời giải

Theo hệ thức Viète, ta có:

$x_1 + x_2 = -\frac{3}{4}$ và $x_1 = -2 \Rightarrow -2 + x_2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{4}$

Lại theo hệ thức Viète: $x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3m - m^2}{4}; x_1 = -2; x_2 = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow \frac{3m - m^2}{4} = (-2) \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow m^2 - 3m - 10 = 0$.

Tính nhẩm: $a = 1; c = -10 \Rightarrow ac < 0$, phương trình có nghiệm trái dấu (m_1 và m_2).

Ta có: $m_1m_2 = -10 = (-2) \cdot 5 = 2 \cdot (-5) = 1 \cdot (-10) = (-1) \cdot 10$.

Vì $m_1 + m_2 = 3$. Vậy ta lấy $m_1 = -2; m_2 = 5$.

Đáp số: $x_2 = \frac{5}{4}; m_1 = -2$ (hoặc $m_2 = 5$).

HẾT

Bài 21. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Các bước giải một bài toán băng cách lập phương trình:

➢ Bước 1: Lập phương trình.

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

➢ Bước 2: Giải phương trình.

➢ Bước 3: Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Toán chuyển động đều

Bài 1. Quãng đường AB dài $90\ \mathrm{km}$, có hai ô tô khởi hành cùng một lúc. Ô tô thứ nhất đi từ A đến B ô tô thứ hai đi từ B đến A. Sau 1 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi. Xe ô tô thứ hai tới A trước xe thứ nhất tới B là 27 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $S=v.t$ (S là quãng đường, v là vận tốc, t là thời gian, $S:(\mathrm{km})$; $v(\mathrm{km/h})$; $t(\mathrm{h})$).

Lời giải

Ta có: 27 phút $=\dfrac{9}{20}$ (giờ).

Sau 1 giờ hai xe gặp nhau nên tổng vận tốc của hai xe bằng $90(\mathrm{km/h})$.

Gọi x là vận tốc của xe thứ nhất ($x>0; x$ tính bằng $\mathrm{km/h}$).

thì vận tốc của xe thứ hai là $90-x(\mathrm{km/h})(x<90)$

Thời gian của xe thứ nhất di từ A dến B là $\dfrac{90}{x}$ (giờ).

Thời gian của xe thứ hai là $\dfrac{90}{90-x}$ (giờ).

Ta có phương trình: $\dfrac{90}{x}-\dfrac{9}{90-x}=\dfrac{9}{20}$.

$\Leftrightarrow x^2-490x+18000=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=40 \text{ (nhan)} \\ x=450 \text{ (loai)} \end{array}\right.$

Trả lời: Vận tốc của xe thứ nhất là $40(\mathrm{km/h})$; vận tốc của xe thứ hai là $50(\mathrm{km/h})$.

Bài 2. Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau $120\ \mathrm{km}$ trong một thời gian đã định.
Sau khi đi 1 giờ, ô tô dừng lại 10 phút. Do đó để dến B dúng như dự kiến, ô tô phải tăng vận tốc thêm $6\ \mathrm{km/h}$. Tính vận tốc ban đầu của ô tô.

Lời giải

Gọi $x(\mathrm{km/h}; x>0)$ là vận tốc ban đầu của ô tô.

Như vậy thời gian dự định để đi từ A đến B là $\dfrac{120}{x}$ (h).

Ta có 10 phút $=\frac{1}{6}$ (giờ).

Sau khi đi 1 giờ, ô tô đi được một đoạn đường là x(km) (như vận tốc của ô tô đã dự định đi 1 giờ được $x\left(\text{km}\right)$.

Vậy quãng đường còn lại là $120-x\left(\text{km}\right)$.

Ta có phương trình $\frac{120-x}{x+6}+1+\frac{1}{6}=\frac{120}{x}$

$\Leftrightarrow 6x\left(120-x\right)+7x\left(x+6\right)=720\left(x+6\right)$

$\Leftrightarrow x^2+42x-4320=0\left({}^*\right)$

$\Delta=1;b=42\Rightarrow b'=21;c=-4320$

$\Delta'=21^2+4320=4341>0\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=69$

Ta có: $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-21-69\\x=-21+69\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-90\text{ (loai)}\\x=48\text{ (nhan)}\end{array}\right.$

Trả lời: Vận tốc dự định của ô tô là $48\left(\text{ km/h}\right)$.

Bài 3. Một người đi xe đạp từ A đến B dài 36 km. Lúc về người đó tăng vận tốc thêm 3 km / h, do đó thời gian về ít hơn lúc đi là 36 phút. Tính vận tốc lúc đi.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài toán 1.

Lời giải

Gọi $x(\text{km/h};x>0)$ là vận tốc của xe đạp lúc di từ A đến B; như vậy thời gian để đi từ A đến B mất $\frac{36}{x}\left(\text{h}\right)$.

Lúc về có vận tốc là $x+3\left(\text{ km/h}\right)$, nên thời gian về là $\frac{36}{x+3}\left(\text{h}\right)$.

Lại có 36 (phút) $=\frac{3}{5}$ (giơ).

Ta có phương trình: $\frac{36}{x}=\frac{36}{x+3}+\frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow 180\left(x+3\right)=180x+3x\left(x+3\right)$

$\Leftrightarrow 180\left(x+3\right)=180x+3x\left(x+3\right)$

$\Leftrightarrow 3x^2+9x-540=0(*)$

$\left(a=3;b=9;c=-540\right)$

$\Rightarrow\Delta=9^2-4.3.\left(-540\right)=6561>0\Rightarrow\sqrt{\Delta}=81.$

Vậy (*) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-9-81}{6}\\x=\frac{-9+81}{6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-15\text{ (loai)}\\x=12\text{ (nhan)}\end{array}\right.$

Trả lời: Vận tốc lúc đi từ A đến B của người đi xe dạp là $12\left(\text{ km}/\text{h}\right)$.

II. Toán về công việc làm chung

Bài 4. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì 6 giờ đầy bể. Nếu mở vòi chảy một mình cho đầy bể thì vòi thứ hai cần nhiều hơn vòi thứ nhất 5 giờ. Tính thời gian để mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Hướng dẫn: Bài toán quy về đơn vị (bạn xem chương II. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn).

Lời giải

Gọi thời gian để vòi thứ nhất chảy đầy bể là x (giờ) $(x>0)$ thì thời gian để vòi thứ hai chảy đầy bể $x+5$ (giờ)

Khi đó, mỗi giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể; vòi thứ hai chảy dược: $\frac{1}{x+5}$ bể và cả hai vòi chảy được $\frac{1}{6}$ bể.

Vậy, ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow 6\left(x+5\right)+6x=x\left(x+5\right)$

$\Leftrightarrow x^2-7x-30=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \text{ (nhan)} \\ x=-3 \text{ (loai)} \end{array}\right.$

Trả lời:

Vòi thứ nhất chảy đầy bể trong 10 giờ.

Vòi thứ hai chảy đầy bế trong 15 giờ.

Bài 5. Hai người cùng làm chung một công việc trong 12 ngày mới xong. Nếu người thứ nhất làm một mình được một nửa công việc và để người thứ hai làm phần còn lại cho xong thì mất tất cả 25 ngày. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì bao lâu sẽ xong?

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 4.

Lời giải

Gọi x (ngày; $x>0$) là thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc; như vậy một ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc). Người thứ nhất và người thứ hai làm mỗi người một nửa công việc thì mất 25 ngày, vậy tổng số ngày làm riêng của hai người sẽ là $25\times 2=50$ (ngày).

Vậy người thứ hai làm riêng hết $50-x$ (ngày); nếu do đó một ngày người thứ hai làm được $\frac{1}{50-x}$ (công việc).

Điếu kiện $x<50$; Theo bài ra, ta có phương trình:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{50-x}=\frac{1}{12}$

$\Leftrightarrow 12\left(50-x\right)+12x=x\left(50-x\right)$

$\Leftrightarrow x^2-50x+600=0\left({}^*\right)$

$a=1;b=-50;c=600$

$\Rightarrow \Delta' = (-25)^2 - 600 = 25 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 5.$

Vậy (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 25-5 \\ x = 25+5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 20 \text{ (nhan)} \\ x = 30 \text{ (nhan)} \end{array}\right.$

Trả lời: Người thứ nhất và người thứ hai làm một mình xong công việc lần lượt hết 20 ngày; 30 ngày (hoặc ngược lại: (30 ngày hoặc 20 ngày).

III. Tính độ dài, diện tích

Bài 6. Một mảnh đất hình chữ nhật có dộ dài dường chéo là 13 m, chiều dài hơn chiều rộng là 7 m Tính diện tích của mảnh đất.

Hướng dẫn: Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông có cạnh huyền là đường chéo hình chữ nhật, hai cạnh góc vuông là hai cạnh hình chữ nhật.

Lời giải

Gọi $x(m; x > 0)$ là chiều rộng của hình chữ nhật, thì chiều dài của nó là $x + 7(\mathrm{m})$.

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông ABD, ta có:

$BD^2 = AD^2 + AB^2$

Vậy ta có phương trình: $x^2 + (x+7)^2 = 13^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 14x - 120 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 7x - 60 = 0\left(^*\right)$

$\left(a = 1; b = 7; c = -60\right)$

$\Delta = 289 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 17$

$\left(^*\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-7-17}{2} \\ x = \dfrac{-7+17}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -12(loai) \\ x = 5 \end{array}\right.$

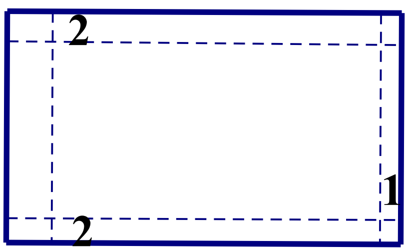
Chiều rộng, chiều dài hình chữ nhật lần lượt là $5(\mathrm{~m})$ và $12(\mathrm{~m})$. Vậy diện tích hình chữ nhật là: $60\left(\mathrm{~m}^2\right)$.

Bài toán tương tự. Cạnh huyền của một tam giác vuông bằng 10 m. Hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 2 m. Tìm các cạnh góc vuông.

(*Đáp số*: $6(\mathrm{~m}); 8(\mathrm{~m})$).

Bài 7. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280 m. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn rộng 2 m, diện tích còn lại để trồng trọt là $4256\ \mathrm{m}^2$. Tính chiều dài, chiều rộng của vườn.

Lời giải



Nửa chu vi của vườn là $\frac{280}{2}=140(\text{ m})$.

Gọi chiều dài của hình chữ nhật là x ($m; 70 < x < 140$),

chiều rộng là $140 - x$ (m).

Mỗi bên để $2(\text{ m})$ làm lối đi, nên chiều dài của đất để lại trồng trọt chỉ còn $x-4$ (m) và chiêu rộng là $140 - x - 4 = 136 - x(\text{m})$.

Theo bài ra, ta có phương trình:

$(x-4)(136-x)=4256$

$\Leftrightarrow\ 136x - x^2 - 544 + 4x = 4256$

$\Leftrightarrow\ x^2 - 140x + 4800 = 0\left(^*\right)$

$\left(a=1; b=-140 \Rightarrow b'=-70; c=4800\right)$

$\Delta' = 4900 - 4800 = 100 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 10$

Vậy $\left(^*\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 70 - 10 \\ x = 70 + 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 60 \text{ (loai)} \\ x = 80 \text{ (nhan)} \end{array}\right.$

Trả lời: Chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là 80 (m) và 60 (m)

IV. Tìm số tự nhlên

Bài 8. Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.

Hướng dẫn: Hai số tự nhiên liên tiếp là n và n + 1 (chẳng hạn: 5 và 6).

Lời giải

Gọi số tự nhiên là $x(x \in N^*)$ thì số kề sau nó là $x+1$. Theo bài ra, ta có phương trình:

$x(x+1)-(x+x+1)=109$

$\Leftrightarrow x^2 + x - x - x - 1 - 109 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 110 = 0(*)$

$(a=1; b=-1; c=-110)$

$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-110) = 441 \rangle 0$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 21$

Vậy $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1+21}{2} \\ x = \frac{1-21}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 11(nhân) \\ x = -10(loai) \end{array}\right.$

Trả lời: Hai số cần tìm là 11 và 12.

Bài 10. Tìm hai số tự nhiên, biết rằng số lớn hơn số bé 5 đơn vị, tổng các bình phương của chúng bằng 4153.

Hướng dẫn: Hai số là a và b thì tổng các bình phương là a^2+b^2 (không phải là $(a+b)^2$.

Lời giải

Gọi số bé là $x(x \in N^*)$ thì số lớn sẽ là $x+5$. Theo đề ra, ta có phương trình:

$x^2+(x+5)^2=4153$

$\Leftrightarrow 2x^2+10x-4128=0(*)$

$a=2; b=10 \Rightarrow b'=5; c=-4128$

$\Delta'=25+2.4128=8281>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'}=91$

Vậy $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-5-91}{2} \\ x=\dfrac{-5+91}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-48(loai) \\ x=43(nhân) \end{array}\right.$

Trả lời: Số bé là 43; số lớn là 43 + 5 = 48.

VI. Bài toán về phần trăm

Bài 11. Dân số của một tỉnh sau hai năm tăng từ 2.000.000 người lên 2048288 người. Tính xem hàng năm trung bình dân số tăng bao nhêu phần trăm?

Hướng dẫn: Tìm số dân tăng từng năm: Sau năm thứ nhất khác với sau năm thứ hai. Ta không thể lấy 2048288 trừ đi 2.000.000 và chia trung bình (chia cho 2).

Lời giải

Gọi phần trăm tăng mỗi năm là $x(\%); x>0$.

Sau năm thứ nhất số dân của tỉnh là:

$2.000.000+2.000.000\cdot\dfrac{x}{100}=2.000.000+20.000.x$

Số dân sau năm thứ hai là:

$(2.000.000+20.000x)\cdot\dfrac{x}{100}=200x(x+100)$

Theo bài ra, ta có phương trình:

$2000.000+20.000x+200x(x+100)=2.048.288$

$\Leftrightarrow x^2+200x-241,44=0(^*)$

$(a=1; b=200 \Rightarrow b'=100; c=-241,44\ )$

$\Delta'=10000+241,44=10241,44>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'}=101,2$

$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-100-101,2 \\ x=-100+101,2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-201,2(loai) \\ x=1,2(tm) \end{array}\right.$

Trả lời: Hàng năm dân số tỉnh A tăng $1,2(\%)$.

Bài 12. Một người vay 20 triệu đồng ở ngân hàng thời hạn một năm phải trả cả vốn lẫn lời. Song được ngân hàng tiếp tục cho vay thêm một năm nữa. Hết hai năm phải trả 24.200.000 đóng. Hỏi lãi suất cho vay là bao nhiêu phần trăm trong một năm.

Hướng dẫn: Bài toán này tương tự như bài toán 11, ta không tính trung bình, mà tính "lãi mẹ đẻ lãi con" mới đúng.

Lời giải

Gọi $x(\%); x>0$ là lãi suất trong một năm của ngân hàng.

Sau năm thứ nhất người đó phải trả:

$$20.000.000+20.000.000.\frac{x}{100}=200.000(100+x)$$

Số tiền sau năm thứ hai tăng thêm là:

$$200.000\left(100+\mathrm{x}\right)\frac{\mathrm{x}}{100}=2000\mathrm{x}\left(\mathrm{x}+100\right)$$

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$200.000\left(100+x\right)+2000x\left(x+100\right)=24.2000.000$$

$$2000x^2+400.000x-4.200.000=0\left(*\right)$$

Giải ra, ta được nghiệm của phương trình (*) là: $\left[\begin{array}{ll} x_1 = \ \ 10 & \text{(thoa)} \\ x_2 = -210 & \text{(loai)} \end{array}\right.$

Trả lời: Lãi của ngân hàng một năm là 10% .

HẾT

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A. TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$?

A. $(1;2)$. **B.** $(2;1)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Bài 2. Hình vẽ bên là hai đường parabol trong mặt phẳng toạ độ Oxy. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a<0<b$. **B.** $a<b<0$. **C.** $a>b>0$. **D.** $a>0>b$.

Bài 3. Các nghiệm của phương trình $x^2+7x+12=0$ là:

A. $x_1=3;x_2=4$. **B.** $x_1=-3;x_2=-4$. **C.** $x_1=3;x_2=-4$. **D.** $x_1=-3;x_2=4$.

Bài 4. Phương trình bậc hai có hai nghiệm $x_1=13$ và $x_2=25$ là:

A. $x^2-13x+25=0$. **B.** $x^2-25x+13=0$.

C. $x^2-38x+325=0$. **D.** $x^2+38x+325=0$.

Bài 5. Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-5x+6=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $A=x_1^2+x_2^2$ là:

A. 13. **B.** 19. **C.** 25. **D.** 5.

Bài 6. Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật có chu vi 20 cm và diện tích 24 cm^2 là:

A. $5\text{ cm và }4\text{ cm}$. **B.** $6\text{ cm và }4\text{ cm}$. **C.** $8\text{ cm và }3\text{ cm}$. **D.** $10\text{ cm và }2\text{ cm}$.

Hướng dẫn- đáp số

Bài 1. Chọn D.

Bài 2. Chọn D.

Bài 3. Chọn B.

Bài 4. Chọn C.

Bài 5. $A=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2; x_1+x_2=5; x_1x_2=6$

$\Rightarrow A=25-2.6=13$. Chọn A.

Cách khác: Dùng MTCT, ta có: $x_1=2;x_2=3$

$\Rightarrow x_1^2+x_2^2=2^2+3^2=13$. Chon A.

Bài 6. Gọi a,b lần lượt là chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật ($a>b>0$).

$\Rightarrow a+b=10(\text{ cm}); ab=24(\text{ cm}^2)$

Vây a,b là nghiệm của phương trình: $x^2-10x+24=0$

Phương trình có hai nghiệm là $x=6$ và $x=4$.

Ta lấy $a=4;b=6$ thoả mãn điu kiện $a>b>0$.

Chọn B.

Cách khác: Ta thấy $5.4=20\neq 24$.

$10.2=20\neq 24$

Vậy có thể chọn B hoặc C.

Xét B: $2(6+4)=20$. Vậy chọn B.

B. TỰ LUẬN

Bài 1. Vẽ đồ thị của hàm số $y=\frac{5}{2}x^2$ và $y=-\frac{5}{2}x^2$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ

Bài 2. Cho hàm số $y=ax^2$. Xác định hệ số a, biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(3;3)$.

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $5x^2-5\sqrt{5}x+2=0$ b) $2x^2-2\sqrt{6}x-8=0$

Bài 4. Cho phương trình $x^2-11x+30=0$. Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính:

a) $x_1^2+x_2^2$; b) $x_1^3+x_2^3$.

Bài 5. Tìm hai số u và v, biết:

a) $u+v=13$ và $uv=40$; b) $u-v=4$ và $uv=77$.

Bài 6. Các kỹ sư đảm bảo an toàn của đường cao tốc thường sử dụng công thức $d\ =0,05v^2+1,1v$ để ước tính khoảng cách an toàn tối thiểu d (feet) (tức là độ dài quãng đường mà xe đi được kể từ khi đạp phanh đến khi xe dừng lại) đối với một phương tiện di chuyển với tốc độ v (dặm/giờ) (theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008). Giả sử giới hạn tốc độ trên một đường cao tốc nào đó là 70 dặm/giờ. Nếu một ô tô có thể dừng lại sau 300 feet kể từ khi đạp phanh thì ô tô đó có chạy nhanh hơn giới hạn tốc độ của đường cao tốc này không?

Bài 7. Bác Hương gửi tiết kiệm ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 12 tháng. Sau một năm, do chưa có nhu cầu sử dụng nên bác chưa rút sổ tiết kiệm này ra mà gửi tiếp và gửi thêm một sổ tiết kiệm mới với số tiền 50 triệu đồng, cũng với kì hạn 12 tháng. Sau hai năm (kể từ khi gửi lần đầu), bác Hương nhận được số tiền cả vốn lãi là 176 triệu đồng. Tính lãi suất năm của hình thức gửi tiết kiệm này (giả sử lãi suất không đổi trong suốt quá trình gửi).

Bài 8. Hai khối học sinh lớp 8 và 9 của một trường trung học cơ sở tham gia lao động. Nếu làm chung thì sẽ hoàn thành công việc sau 1 giờ 12 phút. Nếu mỗi khối lớp làm riêng thì khối lớp 9 làm xong nhanh hơn khối lớp 8 là 1 giờ. Hỏi nếu mỗi khối lớp làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc?

Bài 9. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước và sau 5 giờ 50 phút thì đầy bể. Nếu chảy riêng một vòi thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai 4 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì bao lâu mới đây bể.

Bài 10. Một ca nô chạy từ A đến B và trở về hết tất cả 3 giờ. Tính vận tốc của ca nô khi đi từ A đến B, biết vận tốc lúc đi hơn lúc về là $15\ km/h$ và đoạn sông dài $30\ km$.

Hướng dẫn

Bài 1. Học sinh tự giải.

Bài 2. Thay $x=3; y=3$ vào phương trình $y=ax^2$, ta được: $3=a.3^2 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$.

Bài 3. Đáp số: a) $x=\frac{\pm\sqrt{35}+3\sqrt{5}}{5}$; b) $x_1=x_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$

Bài 4. $\Delta=11^2-4.1.30=1>0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Ta có: $x_1 + x_2 = 11;\ x_1 . x_2 = 30$

a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 11^2 - 2.3 = 61$

b) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] = 11.(11^2 - 3.30) = 341$

Cách khác:

Phương trình $x^2 - 11x + 30 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 5$ và $x_2 = 6$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 5^2 + 6^2 = 61;$

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = 5^3 + 6^3 = 341.$

Bài 5. a) $13^2 - 4.40 = 9 > 0$

Vậy u, v là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 13x + 40 = 0 \Rightarrow x_1 = 8; x_2 = 5$

Ta lấy $u = 8; v = 5$ hoặc $u = 5; v = 8$

b) Ta có u – v = 4 hay u + (-v) = 4 ;

uv = 77 $\Rightarrow$ u.(-v) = -77.

$u^2 = 4.(-77) = 4^2 + 4.77 > 0$.

Vậy u, (-v) là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 4x - 77 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 11$ và $x_2 = -7$

Ta lấy u = 11; v = 7

Bài 6. Học sinh tự giải.

Bài 7. Xem bài toán 12.

Đáp số: 9%

Bài 8. Đáp số: Lớp 8 làm trong 3 giờ, lớp 9 làm trong 2 giờ.

Bài 9. Gọi x là thời gian vòi thứ nhất chảy đầy bể (x > 0, x tính bằng giờ)

Thời gian vòi thứ hai chảy đầy bể là x

Một giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể), vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{x+4}$ (bể).

Ta có: 5 giờ 50 phút $= \frac{35}{6}$ (giờ)

Khi đó cả hai vòi chảy 1 giờ $\frac{6}{35}$ (bể)

Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{6}{35}$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 23x - 70 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 (\text{nhận}) \\ x = \frac{7}{3} (\text{loại}) \end{array}\right.$

Trả lời: Vòi thứ nhất chảy đầy bể trong 10 giờ, vòi thứ hai chảy đầy bể trong 14 giờ.

Bài 10. Gọi x (km/h; x > 0) là vận tốc của ca nô lúc đi; vận tốc của ca nô lúc về sẽ là x – 15 (x > 15).

Thời gian lúc đi của ca nô là $\frac{30}{x}$; thời gian lúc về: $\frac{30}{x-15}$.

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{30}{x}+\frac{30}{x-30}=3$

$\Leftrightarrow 30x-450+30x=3x\left(x-15\right)$

$\Leftrightarrow\ x^2-35x+150=0\left(*\right)$

$a=1;b=-35;c=150=\left(-35\right)^2-4.150=625>0$

$\Rightarrow\ \Delta=\sqrt{625}=25.$

Vậy (*) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{35-25}{2}\\x=\frac{35+25}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5(\text{loại})\\x=30(\text{nhận})\end{array}\right.$

Trả lời: Vận tốc lúc đi của ca nô là 30 (km/h).

HẾT

CHƯƠNG VII. TẦN SỐ VÀ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

BÀI 22. BẢNG TẦN SỐ VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Bảng tần số

* Tần số của một giá trị là số lần xuất hiện giá trị đó trong mẫu dữ liệu.

* Bảng tần số là bảng thống kê cho biết số của các giá trị trong mẫu dữ liệu.

Bảng tần số có dạng sau:

Giá trị	x_1	x_2	…	x_k
Tần số	m_1	m_2	…	m_k

Trong đó m_1 là tần số của x_1, m_2 là tần số của x_2, ……., m_k là tần số của x_k.

2. Biểu đồ tần số

Biểu đồ biểu diễn bảng tần số được gọi là biểu đồ tần số. Biểu đồ tần số thường gặp là biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng.

Nhận xét: Để vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Vẽ trục ngang để biểu diễn các giá trị trong dãy dữ liệu, vẽ trục đứng thể hiện tần số.

Bước 2: Với mỗi giá trị trên trục ngang và tần số tương ứng ta xác định một điểm. nối các điểm liên tiếp với nhau.

Bước 3: Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP.

1. Lập bảng tần số

Bài toán 1. Một đội bóng đá thi đấu 26 trận trong một mùa giải. Số bàn thắng mà đội đó ghi được trong từng trận đấu được thống kê lại như sau:

2	3	2	3	3	1	0	3	1	0	1	1	2
2	4	0	0	2	2	2	0	3	4	0	2	0

Mẫu dữ liệu trên có bao nhiêu giá trị khác nhau ? Xác định tần số của mỗi giá trị và lập bảng tần số của mẫu dữ liệu.

Lời giải

Mẫu dữ liệu có các giá trị là: 0; 1; 2; 3; 4 ;5.

Tần số của các giá trị: 0; 1; 2; 3; 4 ;5 lần lượt là: 7; 4; 8; 4; 2; 1.

Bảng tần số:

Số bàn thắng	0	1	2	3	4	5	
Tần số	7	4	8	4	2	1	

Chú ý 1: Số giá trị của mẫu dữ liệu gọi là cỡ mẫu.

Trong bài toán 1, tổng các tần số 7 + 4 + 8 + 4 + 2 +1 = 26.

Cỡ mẫu là 26.

Chú ý 2: có thể lập bảng tần số ở dạng cột thứ nhất ghi các giá trị, cột thứ hai ghi tần số của các giá trị đó.

Số bàn thắng	Tần số

0	7
1	4
2	8
3	4
4	2
5	1

Bài toán 2. Người ta đếm số lượng người ngồi trên mỗi chiếc xe ô tô 5 chỗ đi qua một trạm thu phí trong khoảng thời gian từ 9 giờ đến 10 giờ sáng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

5	4	5	2	3	2	5	1	1	2	1	1	2	5	1
1	1	3	2	1	1	4	2	1	4	1	2	1	4	1
2	3	2	3	2	3	2	3	3	1	2	1	3	2	2
1	4	3	2	3	1	3	5	1	2	3	5	1	2	1

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu trên.

Lời giải

Bảng tần số:

Số người	1	2	3	4	5
Tần số	20	17	12	5	6

Nhận xét:

- Số người ngồi trên xe phổ biến nhất là 1 người.
- Cỡ mẫu: 60.

Bài toán 3. Số cuộc gọi đến một tổng đài hỗ trợ khách hàng mỗi ngày trong tháng 4/2023 được ghi lại như sau:

4	2	6	3	6	3	2	5	4	2	5	4	3	3	3
3	5	4	4	3	4	6	5	3	6	3	5	3	5	5

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu trên.

Lời giải

Bảng tần số:

Số cuộc gọi mỗi ngày	2	3	4	5	6
Tần số	3	10	6	7	4

Nhận xét:

- Tháng 4 có 30 ngày.
- Cỡ mẫu: 30.

Bài toán 4. Bảng sau đây ghi lại các bạn đạt điểm tốt vào các ngày trong tuần của lớp 9E, mỗi điểm tốt ghi tên một lần.

5	5	5	7	7	8	8	8	5	8	8	8	6	6	6	6	8	9	5	7
6	6	7	7	6	8	9	9	7	8	8	5	7	7	7	7	6	8	8	9

Ngày	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu
Tên bạn đạt điểm tốt	Bình Nam	Tuấn Thảo	Bình	Yến Nam	Nam Thảo

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu trên.

Lời giải

Bảng tần số:

Tên người	Bình	Nam	Tuấn	Thảo	Yến
Tần số	2	3	1	2	1

Nhận xét:

- Có thể lập bảng tần số dạng cột.
- Người có số lần đạt điểm tốt nhiều nhất là bạn Nam, Nam được 3 lần đạt điểm tốt.

Bài toán 5. Thống kê điểm kiểm tra môn Toán của 40 học sinh lớp 9C như sau:

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu trên:

Lời giải

Bảng tần số của mẫu số liệu:

Điểm	5	6	7	8	9	Cộng
Tần số	6	8	10	12	4	$N = 40$

Bài toán tương tự:

Thống kê thâm niên công tác (đơn vị: năm) của 33 nhân viên ở một công sơ như sau:

7	2	5	9	7	4	3	8	10	4	4
2	4	4	5	6	7	7	5	4	1	8
9	4	2	8	5	5	7	3	14	8	8

Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên.

Hướng dẫn

Bảng tần số của mẫu số liệu:

Số năm công tác	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	14
Tần số	1	3	2	7	5	1	5	5	2	1	1

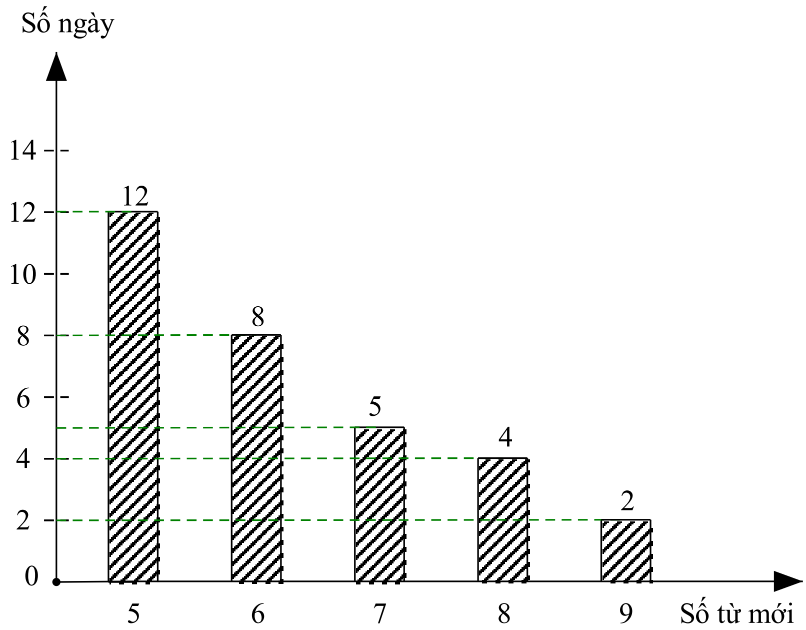
II. Biểu đồ tần số

Bài toán 6. Vào đợt nghỉ hè vừa rồi, mỗi ngày bạn Bình đề học thêm một số từ vựng tiếng Anh mới. Số lượng từ vựng mới bạn Bình học mỗi ngày được biểu diễn ở biểu đồ cột như hình bên dưới.

a) Số lượng từ vựng mới mà bạn Bình học mỗi ngày nhận được những giá trị nào ? Tìm tần số của mỗi giá trị đó ?

b) Bạn Bình đã học từ vựng tiếng Anh mới trong bao nhiêu ngày?

c) Có bao nhiêu ngày bạn Bình nhiều hơn 7 từ vựng mới?



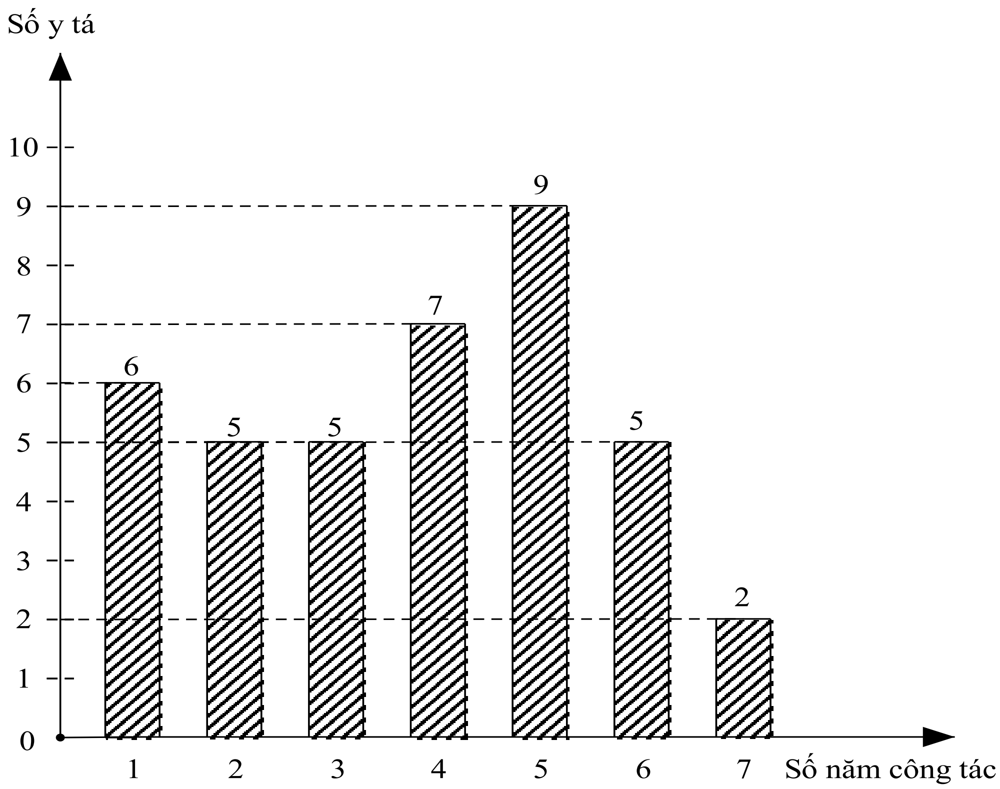
a) Số lượng từ vựng mới mà bạn Bình học mỗi ngày nhận được nhưng giá trị là $5;6;7;8;9$. Tần số của các giá trị đó lần lượt là 12 ; 8; 5 ; 4 ; 2.

b) Số ngày bạn Bình học từ vựng mới là:

$12+8+5+4+2=31$ (ngày).

c) Số ngày bạn Bình học nhiều hơn 7 từ vựng mới là $4+2=6$ (ngày).

Bài toán 7. Biểu đồ bên thống kê thời gian (theo năm) của các y tá ở một phòng khám.



a) Các y tá của phòng khám có thời gian công tác nhận được những giá trị nào? Tìm tần số của mọi giá trị đó.

b) Phòng khám có tổng số bao nhiêu y tá?

c) Có bao nhiêu y tá đã công tác ở phòng khám ít nhất 3 năm?

Lời giải

a) Các giá trị: $1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 7$

Tân số của mỗi giá trị đó lần lượt là $6\ ;\ 5\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 9\ ;\ 5\ ;\ 2$

b) Ta có: $6+5+5+7+9+5+2=39$ (y tá).

c) Ta có: $5+7+9+5+2=28$ (y tá)

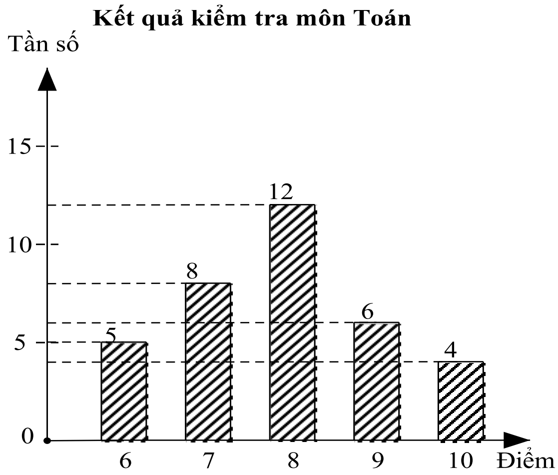
Nhận xét:

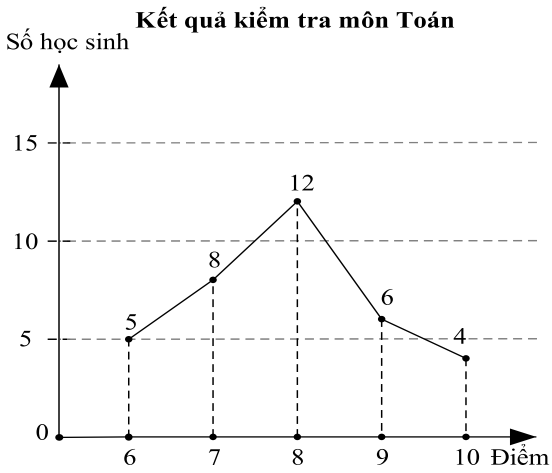
1. Từ biểu đồ trên, ta có thể lập bảng thống kê cho dữ liệu đó.

Số năm công tác	1	2	3	4	5	6	7
Số y tá	6	5	5	7	9	5	2

2. Ta có thể vẽ biểu đồ đoạn thẳng.

Bài toán 8. Cho hai biểu đồ sau:





a) Đọc và giải thích mỗi biểu đồ trên.

b) Hai biểu đồ trên có biểu diễn cùng một dữ liệu không? Lập bảng thống kê cho dữ liệu đó. Bảng thống kê thu được có phải là bảng tần số hay không?

Lời giải

a) Biểu đồ A: biểu đồ cột.

Số học sinh đạt diểm $6\ ;\ 7\ ;\ 8\ ;\ 9\ ;\ 10$ tương ứng là $5\ ;\ 8\ ;\ 12\ ;\ 6\ ;\ 4$.

Biểu đồ B: biểu đồ đoạn thẳng.

Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng còn gọi là đa giác tần số (frequecy pologon)

b) Hai biểu đồ trên cùng biểu diễn một dữ liệu.

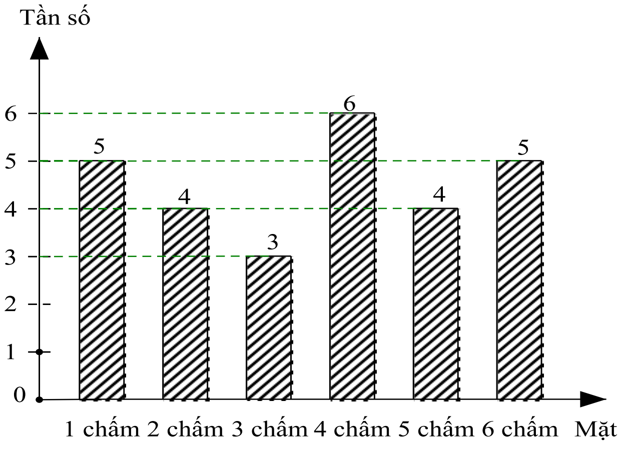
Bảng thống kê

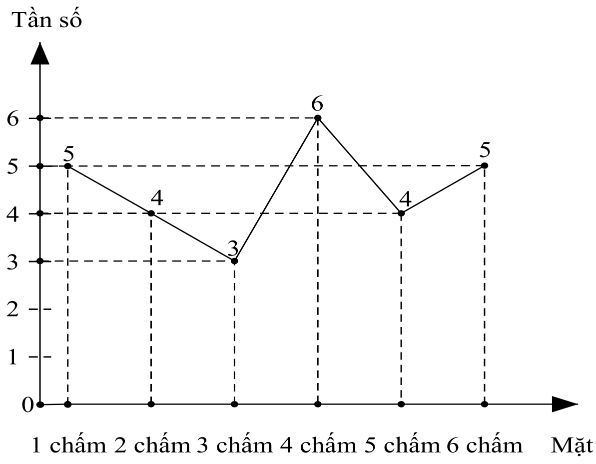
Điểm	6	7	8	9	10
Só học sinh (Tần số)	5	5	12	6	4

Bảng thống kê trên cũng là bảng tần số.

Bài toán tương tự

Lập bảng thống kê và kết quả khi gieo con xúc xắc từ biểu đồ đã cho.





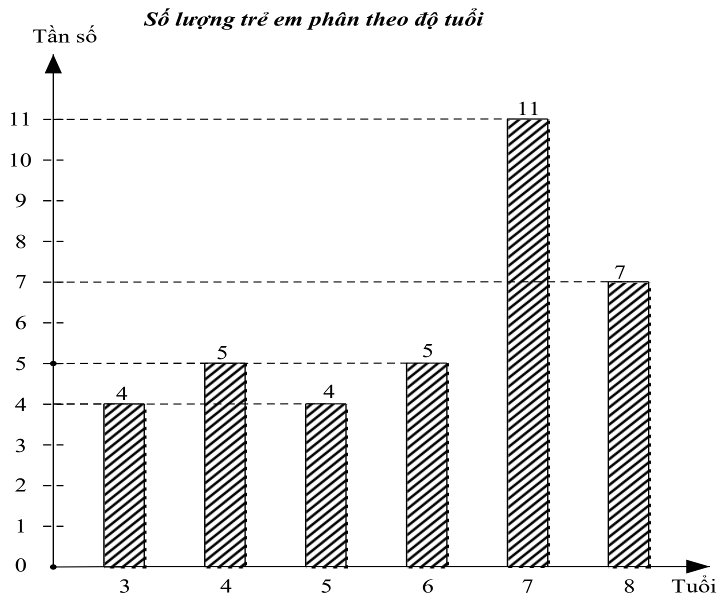
Bài toán 9. Một khu vui chơi dành cho trẻ em thống kê lại độ tuổi của một số trẻ em đến chơi trong một ngày ở bảng tần số như sau:

Tuổi	3	4	5	6	7	8
Tần số	4	5	4	5	11	7

a) Hãy vẽ biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số liệu ở bảng tần số.

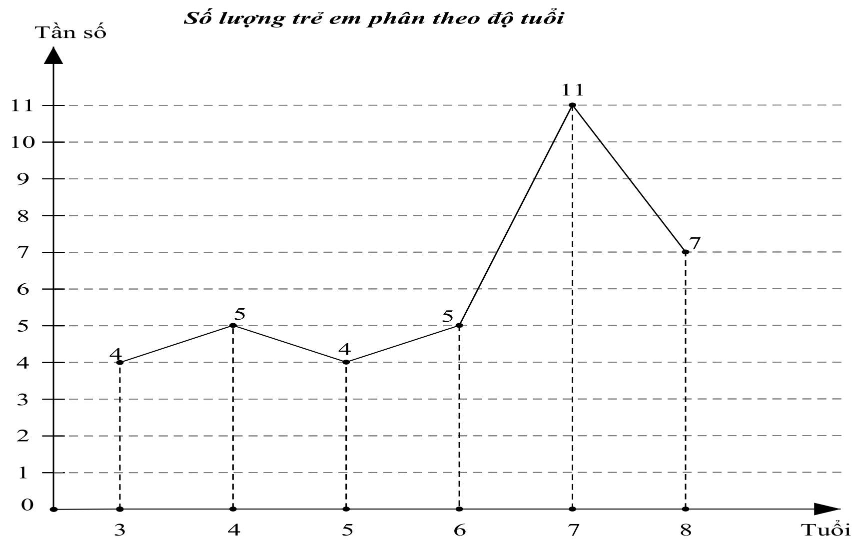
b) Theo biểu đồ ở câu a, trong số các trẻ em đến khu vui chơi, trẻ em ở độ tuổi nào nhiều nhất?

Lời giải



a) Biểu đồ cột.

Biểu đồ đoạn thẳng:



b) Theo biểu đồ trên trong số các trẻ em đến khu vui chơi, trẻ em 7 tuổi là nhiều nhất.

Bài toán tương tự

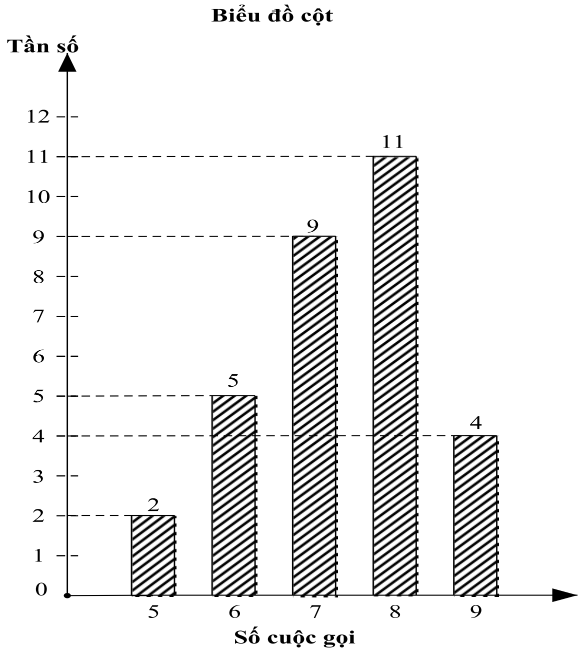
Bác An thống kê lại số cuộc gọi điện thoại mà mình thực hiện mỗi ngày trong tháng 7 ở bảng tần số sau:

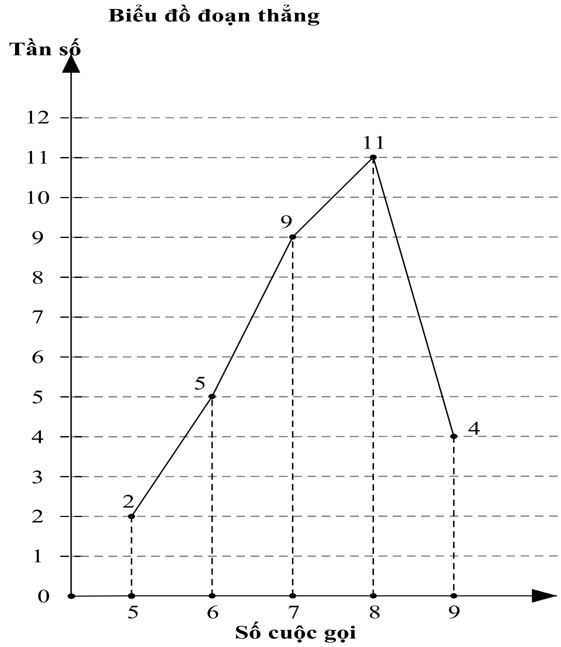
Số cuộc gọi	5	6	7	8	9
Tần số (số ngày)	2	5	9	11	4

Hãy vẽ biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số liệu ở bảng tần số trên.

Hướng dẫn:

Xem hình vẽ





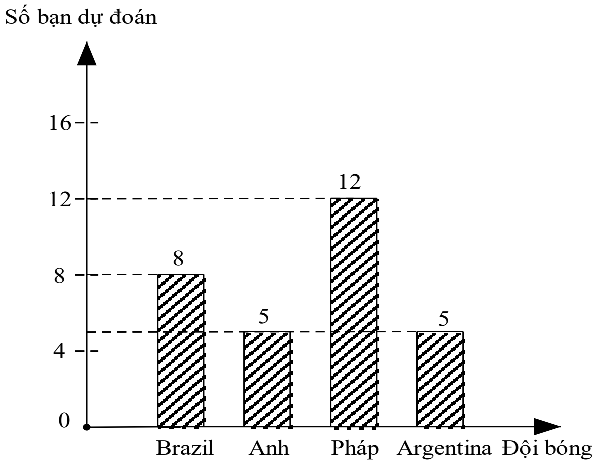
Bài toán 10. Bảng tần số sau cho biết số học sinh của lớp (D dự đoán đội bóng vô địch World Cup 2022 trước khi giải đấu bắt đầu.

Đội bóng	Brazil	Anh	Pháp	Argentina
Số bạn dự đoán	8	15	12	5

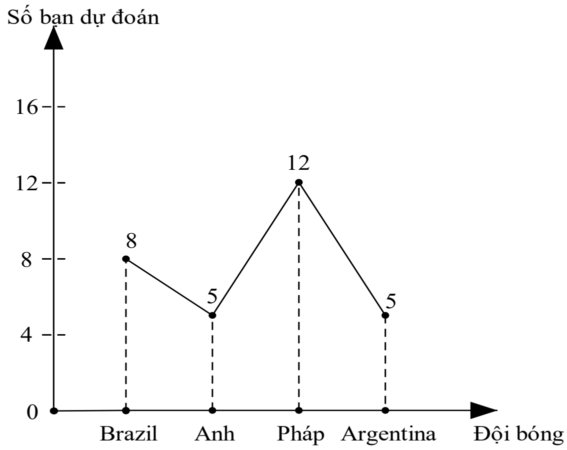
Vẽ biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu ở bảng tần số trên.

Lời giải

Biểu đồ cột



Biểu đồ đoạn thẳng



Bài toán 11. Một công ty xuất khẩu các mặt hàng nông hải sản thống kê lại trong bảng sau số đơn hàng trong mỗi năm thuộc giai đoạn $2018-2022$:

Năm	2018	2019	2020	2021	2022	Tổng
Tần số	16	26	20	6	12	$N=80$

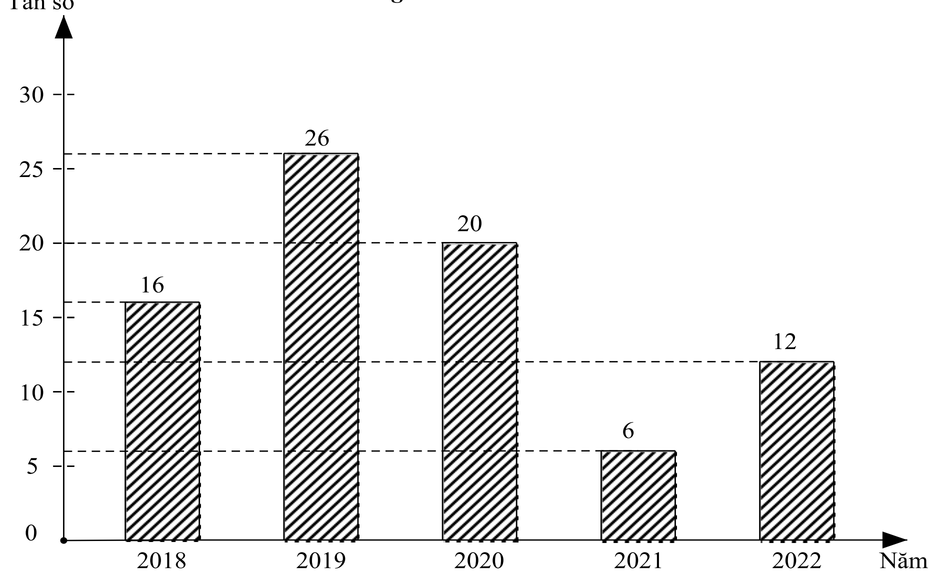
a) Hãy chọn loại biểu đồ thuận tiện cho việc so sánh số đơn đặt hàng của các năm. Vẽ biểu đồ đó. Số đơn đặt hàng tập trung nhiều nhất vào năm nào? Số đơn đặt hàng của năm nào ít nhất?

b) Hãy chọn loại biểu đồ thể hiện rõ xu hướng thay đổi số đơn hàng qua các năm. Vẽ biểu đồ đó. Dựa vào biểu đồ này, cho biết vào những năm nào số đơn hàng giảm sút so với năm trước đó? Năm nào giảm nhiều nhất?

Lời giải

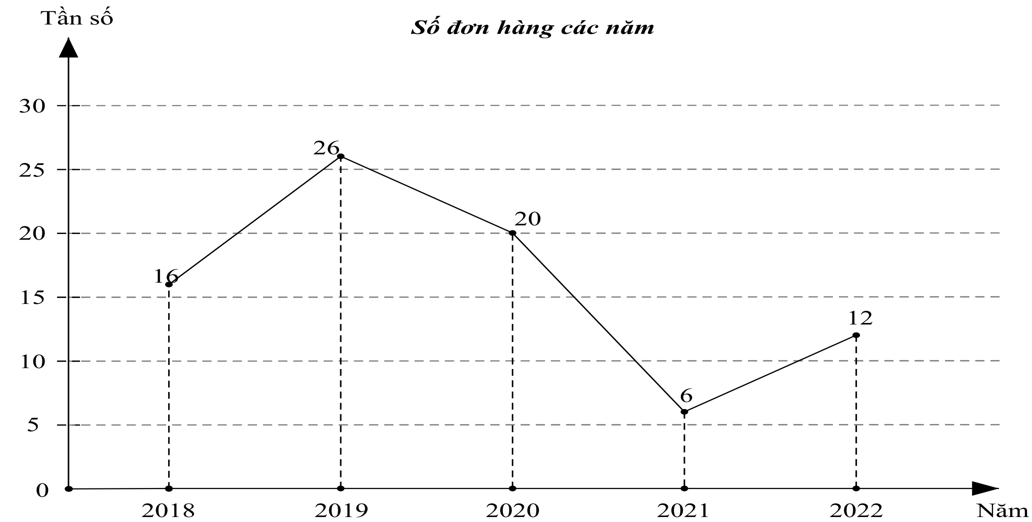
a) Để so sánh số đơn đặt hàng trong các năm thì biểu đồ tần số dạng cột là loại biểu đồ phù hợp. Biểu đồ được vẽ bởi hình dưới đâytrong đó trục ngang biểu thị các năm, trục đứng biểu thị tần số ứng với mỗi năm.

Số đơn hàng các năm



Biểu đồ cho thấy rõ là số đơn hàng tập trung vào năm 2019. Năm 2021 có số đơn hàng ít nhất và chênh lệch khá nhiều so với các năm còn lại (chẳng hạn chỉ bằng một nửa số đơn hàng của năm 2022 hay chưa đến một phần tư số đơn hàng của năm 2019).

b) Để thể hiện rõ xu hướng thay đổi số đơn hàng qua các năm thì ta vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng.

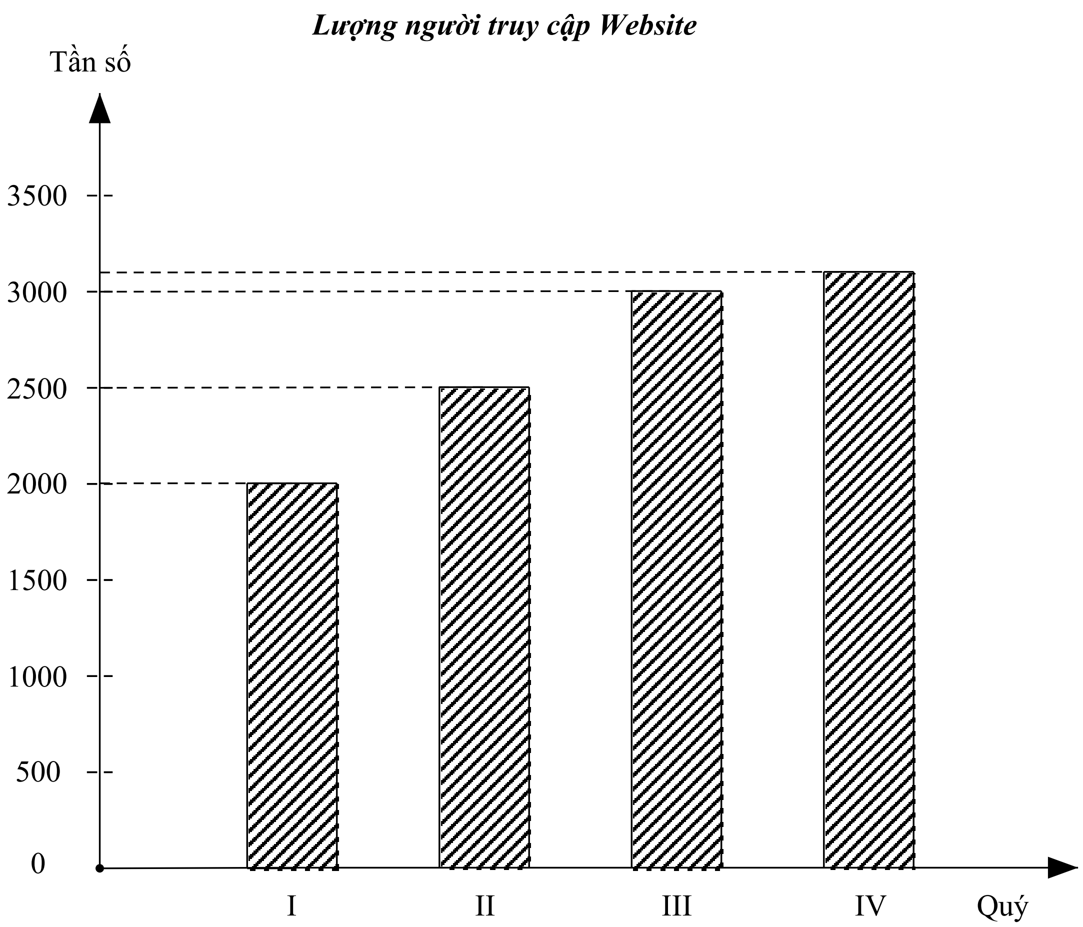


Quan sát biểu đồ ta thấy năm 2020 và năm 2021 đều có số đơn hàng giảm so với năm trước đó. Đoạn thẳng đi xuống dốc hơn là đoạn chuyển từ năm 2020 sang năm 2021, chứng tỏ năm 2021 có số đơn hàng giảm nhiều nhất so với năm trước đó.

Bài toán 12. Biểu đồ được đưa ra để quảng cáo cho một Website.

Quan sát biểu đồ, bạn Vân nhận xét: " Lượng người truy cập quý II tăng gấp đôi so với quý I. Sang quý III lượng người truy cập lại tăng gấp 3 so với quý I ".

Ý kiến của bạn Vân đúng không? Giải thích vì sao?



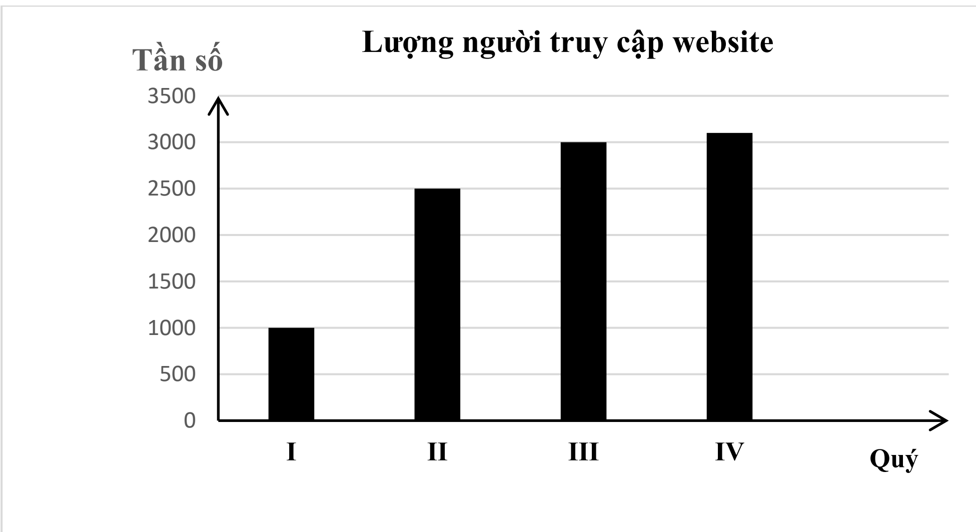
Lời giải

Hình vẽ người ta đã thu gọn đóạn ứng với số 2000 trên trục tung. Mỗi đơn vị tiếp theo ứng với 500 (ngươi). Như vậy từ quý I sang quý II chỉ tăng 500 người chứ không phải tăng gấp đôi (từ 2000 lên 4000). Tương tự, lượng người truy cập từ quý I sang quý III chỉ tăng 1000 chứ không phải tăng gấp 3 (từ 2000 lên 6000).

Như vậy ý kiến của bạn Vân không đúng vì chỉ nhìn chiều cao của các cột mà không để ý đền số liệu trên trục tần số.

Chú ý: Khi vẽ biểu đồ, ta nên chọn đơn vị phù hợp cho trục tần số để có thể bắt đầu từ số 0, không gây nhầm lẫn về thị giác.

Chẳng hạn, biểu đồ ở hình trên có thể vẽ lại như sau:



☙ HẾT ❧

BÀI 23. BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Bảng tần số tương đối

Cho dãy dữ liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tần số tương đối f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số của x_i (gọi là m_i) với n.

Bảng sau đây được gọi là bảng tần số tương đối:

Giá trị	x_1	$\ldots$	x_k
Tần số tương đối	f_1	$\ldots$	f_k

trong đó $n = m_1 + \ldots + m_k$ và $f_1 = \frac{m_1}{n} \cdot 100(\%)$ là tần số tương đối của x_1, ..., $f_k = \frac{m_k}{n} \cdot .100(\%)$ là tần số tương đối của x_k.

Tần số tương đối còn gọi là tần suất.

Tần số tương đối của một giá trị là ước lượng xác suất xuất hiện giá trị đó.

Chú ý: Người ta còn cho bảng tần số tương đối ở dạng cột: cột thứ nhất ghi các giá trị, cột thứ hai ghi tần số tương đối của các giá trị đó.

2. Biểu đồ tần số tương đối

Biểu đồ biểu diễn bảng tần số tương đối được gọi là biểu đồ tần số tương đối. Dạng thường gặp của biểu đồ tần số tương đối là biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn.

Để vẽ biểu đồ hình quạt tròn ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định số đo cung tương ứng của các hình quạt dùng để biểu diễn tần số tương đối của các giá trị theo công thức $360^\circ . f_i$ với $i = 1, \ldots, k$.

Bước 2: Vẽ hình tròn và chia hình tròn thành các hình quạt có số đo tương ứng được xác định trong bước 1.

Bước 3: Định dạng các hình quat tròn (thường bằng cách tô màu), ghi tần số tương đối, chú giải và tiêu đề.

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tần số tương đối

Bài toán 1. Sau bài thi môn Ngữ văn, cô giáo ghi lại số lỗi chính tả mà một học sinh mắc phải vào bảng thống kê sau:

2	5	2	2	1	3	4	0	5	2	5	1	2	1	3	5	1	0	4	1
4	2	1	4	3	3	2	0	4	5	4	5	1	4	1	1	0	3	1	4

a) Mẫu số liệu trên gồm những giá trị khác nhau nào?

b) Hãy lập bảng tần số và bảng tần số tương đối của số lỗi chính tả mà học sinh mắc phải.

Hướng dẫn: b) Từ bảng tần số, ta tìm tần số tương đối $f_k = \frac{m_k}{n} \cdot 100\%$.

Lời giải

a) Các giá trị khác nhau của mẫu số liệu là: $0; 1; 2; 3; 4; 5$.

b) Có mẫu $n = 40$.

Bảng tần số:

Số lỗi chính tả	0	1	2	3	4	5
Tần số	4	10	7	5	8	6

Vì tần số của giá trị 0 là 4 nên tần số tương đối của giá trị 0 là $\frac{4}{40} \cdot 100\% = 10,0\%$.

Vì tần số của giá trị 1 là 10 nên tần số tương đối của giá trị 1 là $\frac{10}{40} \cdot 100\% = 25,0\%$.

Tương tự, ta tính được tần số tương đối của các giá trị $2; 3; 4; 5$ lần lượt là $17,5\%; 12,5\%; 20,0\%; 15,0\%$.

Bảng tần số tương đối:

Số lỗi chính tả	0	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Tần số	$10,0\%$	$25,0\%$	$17,5\%$	$12,5\%$	$20,0\%$	$15,0\%$

Bài toán 2. Điều tra về "Loại nhạc cụ bạn muốn chơi nhất" đối với các học trong lớp, bạn Dương thu được ý kiến trả lời và ghi lại như dưới đây:

Đàn piano	Trống	Đàn bầu	Đàn piano	Đàn guitar
Đàn guitar	Sáo	Đàn guitar	Đàn guitar	Đàn piano
Sáo	Đàn guitar	Sáo	Kèn harmonica	Đàn violin
Trống	Đàn guitar	Đàn bầu	Đàn piano	Đàn piano
Đàn violin	Đàn piano	Đàn violin	Sáo	Trống
Kèn harmonica	Đàn violin	Đàn piano	Đàn piano	Đàn guitar

Lập bảng tần số tương đối của các loại nhạc cụ.

Hướng dẫn: Ta có thể lập bảng tần số và bảng tần số tương đối vào chung một hình vẽ.

Lời giải

Ta có: $n = 30$.

Bảng tần số - tần số tương đối.

Nhạc cụ	Piano	Guitar	Đàn bầu	Violin	Harmonica	Sáo	Trống
Tần số	9	6	2	4	2	4	3
Tần số tương đối	$30,0\%$	$20,0\%$	$6,7\%$	$13,3\%$	$6,7\%$	$13,3\%$	$10,0\%$

Bài toán 3. Thu thập dữ liệu về chất lượng không khí tại một địa điểm trong 30 ngày mùa xuân cho kết quả như sau:

M1, M1, M2, M2, M2, M1, M2, M2, M2, M2, M2, M2, M2, M2,

M4, M3, M3, M3, M3, M4, M4, M1, M1, M1, M1, M3, M3, M3, M1.

(M1: Tốt; M2: Trung bình; M3: Kém; M4: Xấu)

Lập bảng tần số tương đối.

Lời giải

Ta có: $n = 30$.

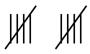
Bảng tần số - tần số tương đối.

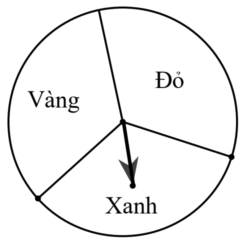
Chất lượng không khí	M1	M2	M3	M4
Tần số	8	12	7	3
Tần số tương đối	$26,7\%$	40%	$23,3\%$	10%

Bài toán 4. Quay 50 lần một tấm bìa hình tròn được chia thành ba hình quạt với các màu xanh, đỏ, vàng. Quan sát và ghi lại mũi tên chỉ vào hình quạt có màu nào khi tấm bìa dừng lại. Kết quả thu được như sau:

Xanh: 

Đỏ: 

Vàng: 



a) Lập bảng tần số tương đối cho kết quả thu được.

b) Ước lượng xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu đỏ.

Lời giải

a) Bảng tần số - tần số tương đối.

Màu sắc	Xanh	Đỏ	Vàng
Tần số	15	25	10
Tần số tương đối	30%	50%	20%

b) 50%.

II. Biểu đồ tần số tương đối

Bài toán 5. Một doanh nghiệp thu thập mức độ yêu thích của người tiêu dùng về một loại sản phẩm theo các mức: $1,2,3,4,5$. Mẫu số liệu thống kê sau phản ánh ý kiến của 50 người tiêu dùng như sau:

4	4	1	4	5	2	2	5	5	5	2	4	3	4	4	4	5
3	3	4	4	4	5	1	5	4	4	4	2	4	4	2	5	5
1	1	1	4	4	4	3	2	4	3	3	3	4	4	4	5	

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

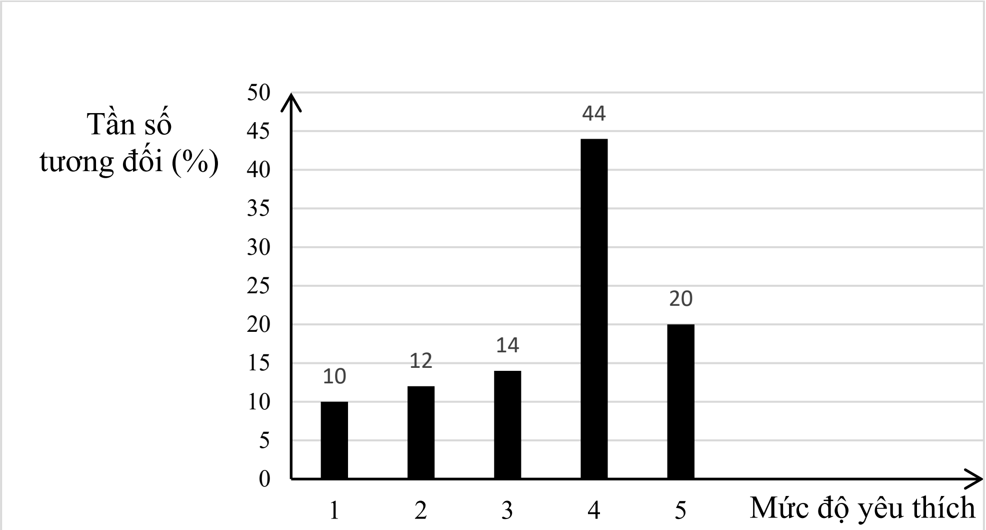
Lời giải

a) Ta có: $n = 50$.

Bảng tần số - tần số tương đối.

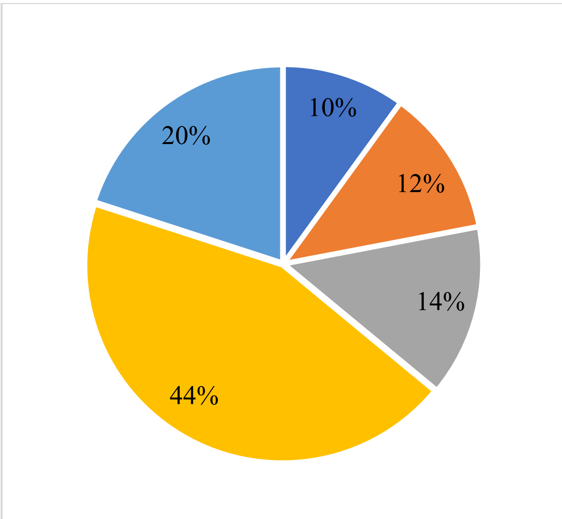
Mức độ yêu thích	1	2	3	4	5
Tần số	5	6	7	22	10
Tần số tương đối	10%	12%	14%	44%	20%

b) Biểu đồ (xem hình vẽ).



Nhận xét: Ta có thể vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu trên.

Xem hình vẽ.



Bài toán 6. Gieo một xúc xắc 32 lần liên tiếp, ghi lại số chấm trên mặt xuất hiện của xúc xắc, ta được mẫu số liệu thống kê như sau:

1 6 4 4 6 6 5 5 4 2 2 3 1 1 4 4

5 1 2 3 3 2 4 4 5 2 3 4 2 6 2 2

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó.

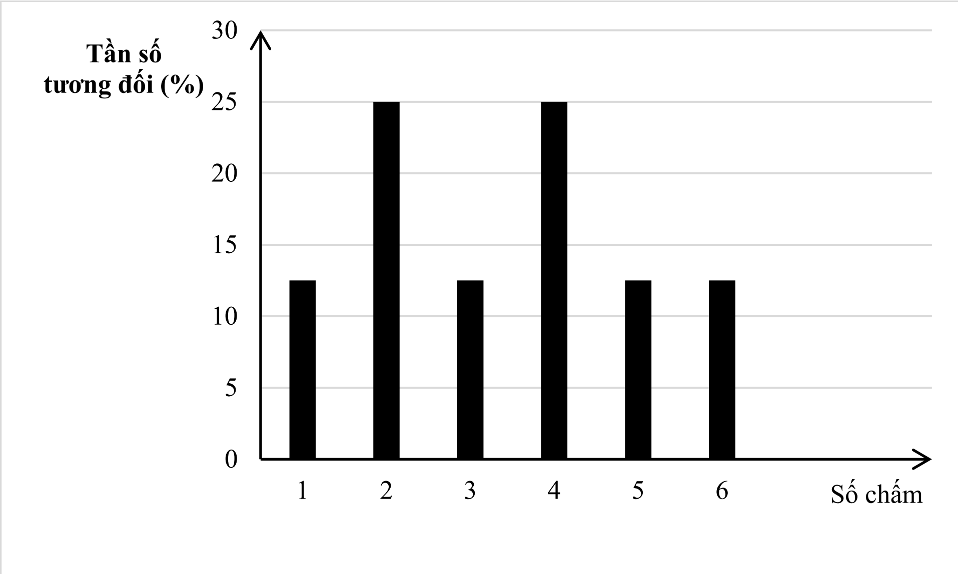
Lời giải

a) Ta có: $n = 32$.

Bảng tần số - tần số tương đối.

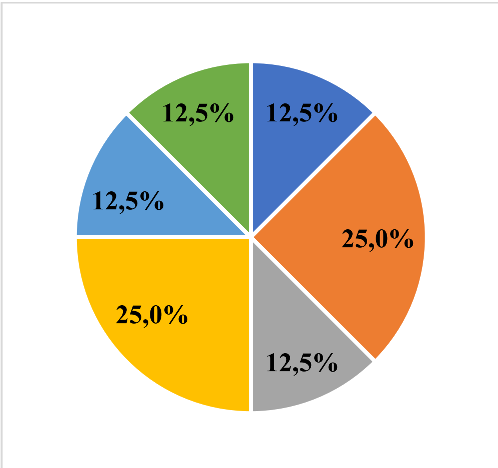
Số chấm	1	2	3	4	5	6
Tần số	4	8	4	8	4	4
Tần số tương đối	$12,5\%$	25%	$12,5\%$	25%	$12,5\%$	$12,5\%$

b) Biểu đồ cột.



Biểu đồ hình quạt tròn.

Hướng dẫn: Vẽ đường tròn, $12,5\%$ ứng với hình quạt có góc ở tâm là 45°; 25% ứng với hình quạt có góc ở tâm là 90° (Xem hình vẽ).



Bài toán 7. Thống kê điểm kiểm tra môn Toán của 40 học sinh lớp $9C$ (Xem bài toán 5 - Bài 22. Bảng tần số và biểu đồ tần số).

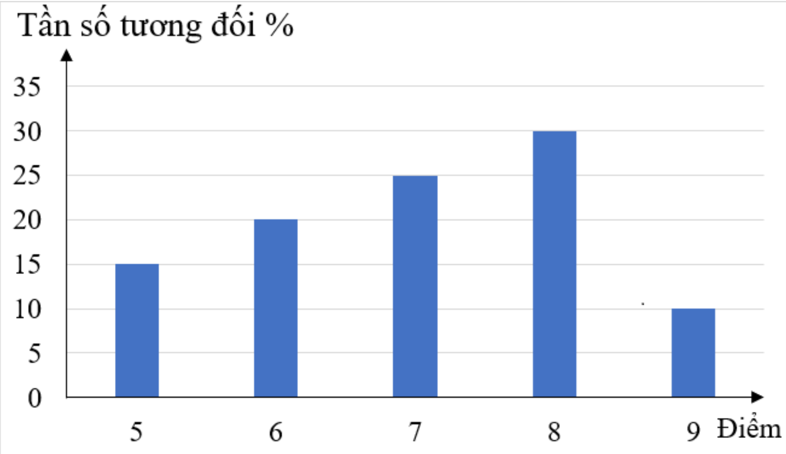
Vẽ biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các số liệu thống kê đó.

Lời giải

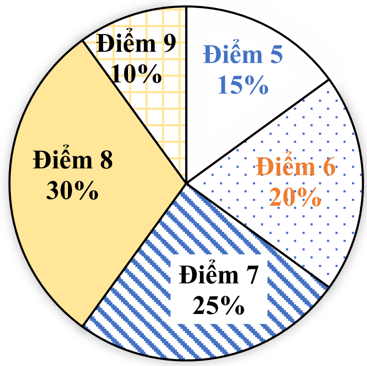
Bảng tần số- tần số tương đối.

Điểm	5	6	7	8	9
Tần số	6	8	10	12	4
Tần số tương đối	15%	20%	25%	30%	10%

Biểu đồ cột:



Biểu đồ quạt tròn:



Bài toán 8. Câu lạc bộ mĩ thuật của nhà văn hóa thiếu nhi thống kê tuổi của các thành viên lớp hội họa và biểu diên dữ liệu qua bảng sau:

Tuổi của các thành viên lớp hội họa

Tuổi	9	10	11	12	13	14	Tổng
Tần số	10	4	6	2	12	6	N = 40

a) Tính tần số tương đối của mỗi giá trị và lập bảng tần số tương đối.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn.

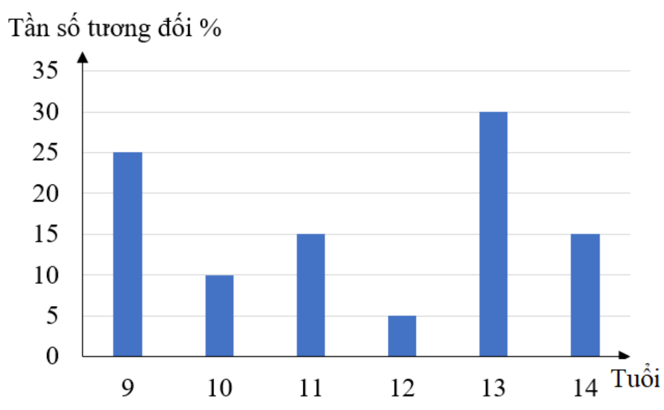
Lời giải

a) Bảng tần số - tần số tương đối

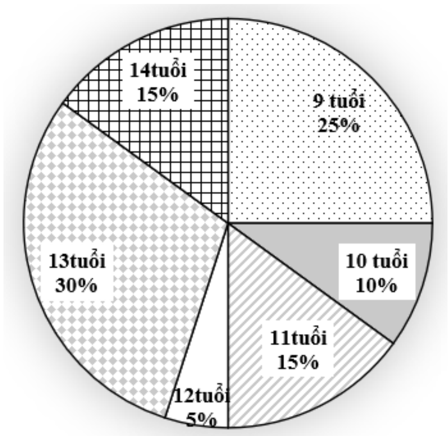
Tuổi	9	10	11	12	13	14	Tổng
Tần số	10	4	6	2	12	6	N = 40
Tần số tương đối (%)	25	10	15	5	30	15	100

b) Xem hình vẽ

Biểu đồ cột:



Biểu đồ hình quạt tròn:



☙ HẾT ❧

BÀI 24: BẢNG TẦN SỐ. TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM VÀ BIỂU ĐỒ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Bảng tần số, tần số tương đối ghép nhóm.

Bảng tần số ghép nhóm là bảng tần số của các nhóm số liệu:

Nhóm	$(a_1;a_2)$	$[a_2;a_3)$	....	$[a_k;a_{k+1})$
Tần số	m_1	m_2	.....	m_k

Bảng tần số ghép nhóm

Tần số m_i của nhóm $[a_i;a_{i+1})$ là số giá trị của mẫu số liệu lớn hơn hoặc bằng a_i và nhỏ hơn a_{i+1}

Bảng tần số tương đối ghép nhóm là bảng tần số tương đối của các nhóm số liệu:

Nhóm	$(a_1;a_2)$	$[a_2;a_3)$	....	$[a_k;a_{k+1})$
Tần số tương đối	f_1	f_2	.....	f_k

Bảng tần số tương đối ghép nhóm

Trong đó $n = m_1 + m_2 + ... + m_k$ và

$f_1 = \dfrac{m_1}{n}.100\%$ là tần số tương đối của nhóm $[a_1;a_2)$, ...

$f_k = \dfrac{m_k}{n}.100\%$ là tần số tương đối của nhóm $[a_k;a_{k+1})$.

2. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột

*Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột là biểu đồ gồm các cột liền nhau để biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm. Trong biểu đồ này, chiều cao mỗi cột biểu diễn tần số tương đối của nhóm số liệu.

*Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm với các nhóm số liệu có độ dài bằng nhau ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Vẽ trục đứng, trục ngang. Trên trục đứng xác dịnh đơn vị độ dài phù hợp với các tần số tương đối. Trên trục ngang xác định các nhóm số liệu cần biểu diễn.

Bước 2: Dựng các hình cột (kề nhau) ứng với các nhóm dữ liệu, mỗi hình cột có chiều cao bằng tần số tương đối của nhóm số liệu.

Bước 3: Ghi chú giải cho các trục, các cột và tiêu đề cho biểu đồ.

Chú ý: Trong biểu đồ trên, nếu chiều cao mỗi cột biểu diễn tần số của nhóm số liệu thì ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột.

Biểu đồ tần số tương đối (tần số) ghép nhóm dạng cột còn gọi là tổ chức đồ (histogram).

3. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng

*Để biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm ta cũng có thể dùng biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng.

*Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn giá trị $x_i = \dfrac{a_i + a_{i\cdot 1}}{2}$ đại diện cho nhóm số liệu $[a_i;a_{i+1})$ với $i = 1,2,...,k$.

Bước 2: Vẽ trục ngang để biểu diễn các giá trị đại diện cho các nhóm số liệu, vẽ trục đứng thể hiện tấn số tương đối.

Bước 3: Với mỗi giá trị đại diện x_i trên trục ngang và tần số tương đối f_i tương ứng, ta xác định một điểm $M_i\left(x_i; f_i\right)$. Nối các điểm liên tiếp với nhau.

Bước 4: Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ.

Chú ý: Trong cách vẽ biểu đồ trên, nếu thay tần số tương đối bằng tần số thì ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dạng đoạn thẳng.

Trên trục ngang ta cũng có thể điền các nhóm số liệu thay cho các giá trị đại diện.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

1. Tần số ghép nhóm, tần số tương đối ghép nhóm

Bài toán 1. Giáo viên chủ nhiệm lớp 9C đã thu được kết quả như sau: Thời gian tự học dưới 1 giờ có 10 bạn; từ 1 giờ đến dưới 2 giờ có 15 bạn; từ 2 giờ đến dưới 3 giờ có 8 bạn; từ 3 giờ đến dưới 4 giờ có 7 bạn. Dựa vào dữ liệu dưới, hãy hoàn thiện các bảng sau vào vở:

Bảng 1

Thời gian(giờ)	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; 4)$
Tần số	?	?	?	?

Bảng 2

Thời gian(giờ)	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; 4)$
Tần số tương đối	?	?	?	?

Hướng dẫn: Nhóm số liệu $[a; b)$ là nhóm gồm các số liệu lớn hơn hoặc bằng a và nhỏ hơn b.

Lời giải

Bảng 1

Thời gian(giờ)	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; 4)$
Tần số	10	15	8	7

Bảng 2

Thời gian(giờ)	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; 4)$
Tần số tương đối	25%	37,5%	20%	17,5%

Nhận xét:

1. Bảng 1 gọi là bảng tần số ghép nhóm.

Bảng 2 gọi là bảng tần số tương đối ghép nhóm. (Kết qua viết dưới dạng phần trăm).

2. Ta có thể ghi chung trong một bảng.

Bảng tần số - Tần số tương đối ghép nhóm

Thời gian(giờ)	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; 4)$
Tần số	10	15	8	7

Tần số tương đối	25%	37,5%	20%	17,5%

Bài toán 2. Cho bảng tần số ghép nhóm về tuổi thọ của một số ong mật cái như sau:

Tuổi thọ(ngày)	$[30;\ 40)$	$[40;\ 50)$	$[50;\ 60)$
Tần số	12	23	15

a) Đọc và giải thích bảng thống kê trên.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê này.

Lời giải

a) Tuổi thọ từ 30 ngày đến dưới 40 ngày là 12 con; tuổi thọ từ 40 ngày đến dưới 50 ngày là 23 con; tuổi thọ từ 50 ngày đến dưới 60 ngày là 15 con.

b) Ta có: $n = 12 + 23 + 15 = 50$

$\frac{12}{50}\% = 24\%;\ \frac{23}{50}\% = 46\%;\ \frac{15}{50}\% = 30\%.$

Bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Tuổi thọ(ngày)	$[30;\ 40)$	$[40;\ 50)$	$[50;\ 60)$
Tần số tương đối	24%	46%	30%

Bài toán 3. Nhà may Hưng Thịnh tặng áo phông cho 40 học sinh lớp 9A. Nhà may đo chiều cao (đơn vị: centimét) của cả lớp để quyết định chọn các cỡ áo khi may, kết quả như sau:

161	159	168	153	150	157	172	165	161	158
169	153	164	167	172	174	163	156	166	166
161	152	165	169	160	152	165	163	174	168
159	168	164	169	156	172	167	158	161	160

Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu trên.

Hướng dẫn:

Ta có thể ghép các số liệu thành 5 nhóm, có độ dài bằng nhau.

Vì $174\ < 175$,ta có: $175 - 150 = 25$ và $25 : 5 = 6$

$\Rightarrow$ $[150;\ 155)$, $[155;\ 160)$, $[160;\ 165)$,$[165;\ 170)$,$[170;\ 175)$.

Lời giải

Nhóm	$[150;\ 155)$	$[155;\ 160)$	$[160;\ 165)$	$[165;\ 170)$	$[170;\ 175)$
Tần số(n)	5	7	10	13	5
Tần số tương đối	12,5%	17,5%	25%	32,5%	12,5%

Bài toán 4. Mẫu số liệu dưới dây ghi lại tốc độ (đơn vị: km/h) của 44 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ:

48,5	43	50	55	45	60	53	55,5	44	65	54,5
51	62,5	41	44,5	57	57	68	49	46,5	53,5	49
61	49,5	54	62	59	56	47	50	59,5	61	46,5
49,5	52,5	57	47	59	55	45	47,5	48	61,5	48,5

a) Ghép các số liệu thành 6 nhóm.

b) Lập bảng tần số ghép nhóm.

Hướng dẫn:

a) Ta có số liệu có giá trị nhỏ nhất là 41; số liệu có giá trị lớn nhất là 68.

Ta có: $640 < 41,68 < 70.$

$70 - 40 = 30; 30 : 6 = 5.$

b) Xem bài toán 3.

Lời giải

a) Ta có 6 nhóm: $[40;\ 45)$, $[45;\ 50)$, $[50;\ 55)$, $[55;\ 60)$,$[60;\ 65)$,$[65;\ 70)$.

b) Bảng tần số ghép nhóm.

Tốc độ	$[40;\ 45)$	$[45;\ 50)$	$[50;\ 55)$	$[55;\ 60)$	$[60;\ 65)$	$[65;\ 70)$
Tần số	4	14	8	10	6	2

Bài toán tương tự.

Thống kê số lần truy cập Internet của 30 người trong một tuần là:

85	81	65	58	47	30	51	89	85	42
55	37	31	82	63	33	44	88	77	57
44	74	63	67	46	73	52	53	47	35

Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đó sau khi được ghép nhóm theo sáu nhóm.

Hướng dẫn: Ta có $89 < 90$, $90 - 30 = 60$. Ta ghép thành 6 nhóm.

$[30;\ 40)[40;\ 50),[50;\ 60),[60; 70),[70;\ 80),[80;\ 90)$.

Bài toán 5: Chỉ số phát triển con người (HDI) là chỉ tiêu tổng hợp hản ánh các mặt thu nhập, sức khỏe, giáo dục của người dân trong mọt quốc gia. Các nước và vùng lãnh thổ trên thế giới được chia thành bốn nhóm theo HDI: Nhóm 1 (rất cao) có HDI từ 0,8 trở lên; Nhóm 2 (cao) có HDI từ 0,7 đến dưới 0,8; Nhóm 3 (trung bình) có HDI từ 0,55 đến dưới 0,7; Nhóm 4 (thấp) có HDI dưới 0,55. Năm 2021, chỉ số HDI của 11 quốc gia Đông Nam Á như sau:

0,939	0,829	0,803	0,8	0,705	0,703	0,699	0,607	0,607	0,593	0,585

Dựa vào dữ liệu trên, hãy hoàn thành bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Chỉ số HDI	[0; 0,55]	[0,55; 0,7]	[0,7; 0,8]	[0,8; 1,0]
Tần số				
Tần số tương đối				

Hướng dẫn:

Tần số tương đối tính theo số phần trăm.

Ta có $n \approx 11$.

Tần số ghép nhóm của Nhóm 1: [0,8; 1,0] là 4.

Ta có tần số tương đối ghép nhóm của Nhóm 1 là $\frac{4}{11} \approx 36\%$.

Lời giải

Chỉ số HDI	[0; 0,55]	[0,55; 0,7]	[0,7; 0,8]	[0,8; 1,0]
Tần số	0	5	2	4
Tần số tương đối	0%	45,46%	28,18%	36,36%

Bài toán 6. Bác Quảng ghi lại thời gian truy cập Internet của mình mỗi ngày (đơn vị: giờ) trong vòng 1 tháng như sau:

1,2	3,2	2,4	2,7	0,5	2,6	4,8	2,4	4,2	2,4
3,7	2,3	3,5	4,9	0,4	0,6	1,5	4,6	1,7	3,4
3,9	2,1	3,4	2,7	1,5	1,8	2,9	3,5	3,9	1,6

a) Lập bảng tần số ghép nhóm theo 5 nhóm: [0; 1), [1; 2), [2; 3), [3; 4), [4; 5).

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Lời giải

a) Bảng tần só ghép nhóm

Thời gian (giờ)	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)
Tần số	3	6	9	8	4

b) Bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Thời gian (giờ)	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)
Tần số tương đối	10,0%	20,0%	30,0%	26,7%	13,3%

Bài toán tương tự:

Cô Loan ghi lại chiều cao (đơn vị: cm) của các cây bạch đàn giống vừa được chuyển đến nông trường ở bảng sau:

16,4	19	29,6	18,3	21,8	20,6	22,2	27,1	23,3	19,5
21,2	15,9	28,6	18	29,8	27,2	18,1	28,4	18,8	23,5
29,2	23,8	29,6	25	24,4	15,4	23,8	16	17,2	23,5
23,2	17	17,8	19,8	16,8	18,4	21,9	24,3	27,3	21

Hướng dẫn:

Bảng tần số ghép nhóm - tần số tương đối ghép: (n = 40)

Thời gian (giờ)	[15; 18)	[18; 21)	[21; 24)	[24; 27)	[27; 30)
Tần số	8	9	11	3	9
Tần số tương đối	20%	22,5%	27,5%	7,5%	22,5%

Bài toán 7. Kết quả đo chiều cao của 40 học sinh được thống kê trong bảng sau:

146	148	148	150	150	151	151	152	152	152
153	154	154	154	155	155	155	155	155	156
156	156	156	157	157	159	159	160	162	163
163	163	163	163	164	165	167	168	168	170

Theo quy định của công ty may mặc, cỡ S tương ứng với chiều cao từ 146cm đến dưới 152cm. Cỡ M tương ứng với chiều cao từ 152cm đến dưới 158cm. Cỡ L tương ứng với chiều cao từ 158cm đến dưới 164cm. Cỡ XL tương ứng với chiều cao từ 164cm đến 170cm.

Đối với 40 học sinh này, làm thế nào xác để xác định số quần áo cần may ở mỗi kich cỡ ?

Hướng dẫn: Cỡ S: [146; 152), Cỡ M: [152; 158), Cỡ L: [158; 164), Cỡ XL: [164; 170).

Ta có n = 40.

Lời giải

a) Bảng tần số ghép nhóm - tần số tương đối ghép nhóm.

Thời gian (giờ)	[146; 152)	[152; 158)	[158; 164)	[164; 170)
Tần số	7	18	9	6
Tần số tương đối	17,5%	45%	22,5%	15%

II. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột

Bài toán 8. Thủy thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: kim) mình đi bộ mỗi ngày trong tháng Sáu ở bảng sau:

Quãng đường (km)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)
Tần số (số ngày)	6	12	8	3	1

Hãy vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột biểu diễn số liệu trên.

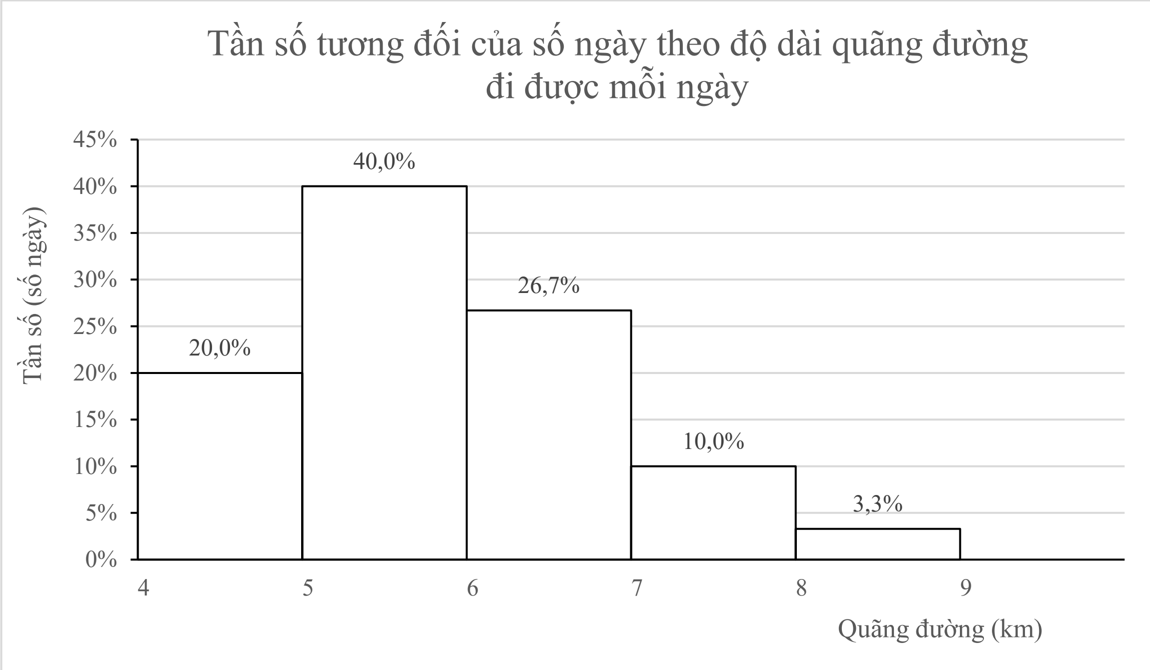
Hướng dẫn: Trước hết, ta lập bảng tần số tương đối ghép nhóm (tính theo tỉ lệ phần trăm).

Lời giải

Bảng tần số ghép nhóm - tần số tương đối ghép nhóm: (Tháng Sáu có 30 ngày: n = 30).

Quãng đường (km)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)
Tần số (số ngày)	20,0%	40,0%	26,7%	10,0%	3,3%

Biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột biểu diễn mẫu số liệu:

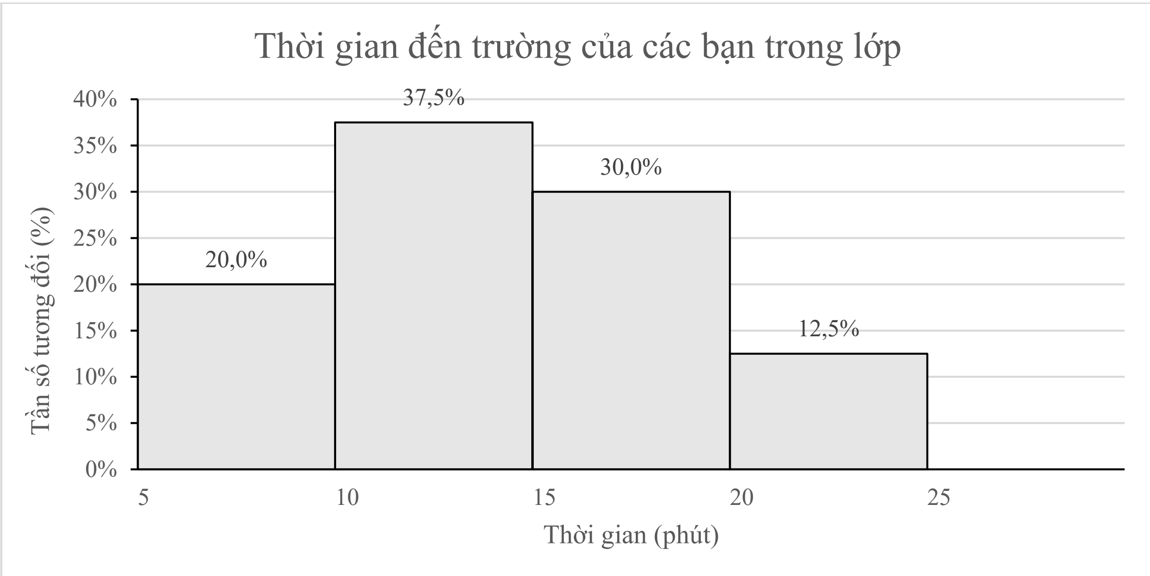


Bài toán tương tự.

Vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê sau về thời gian đi từ nhà tới trường của một số bạn trong lớp 9D.

Thời gian (phút)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)
Tần số tương đối	20%	37,5%	30%	12,5%

Hướng dẫn: (Xem hình vẽ).

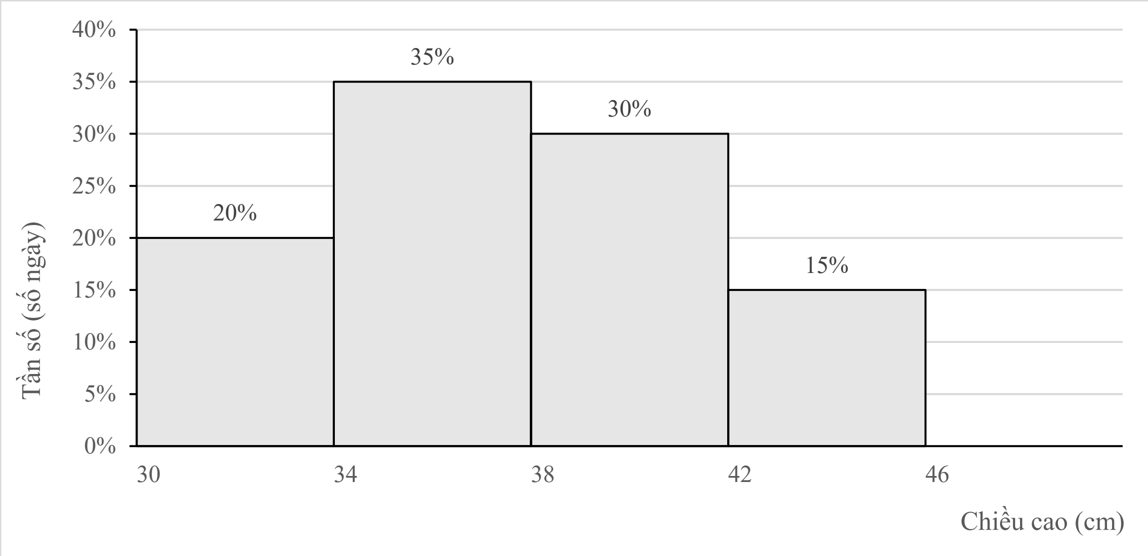


Bài toán 9. Vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột cho bảng sau về chiều cao của một số cây chà là giống 3 tháng tuổi.

Chiều cao (cm)	[30; 34)	[34; 38)	[38; 42)	[42; 46)
Tần số (số ngày)	20%	35%	30%	15%

Lời giải

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột:



Bài toán 10. Xét mẫu số liệu ghép nhóm có bảng tần số ghép nhóm sau đây:

Nhóm	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)
Tần số	4	12	7	8	9

a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

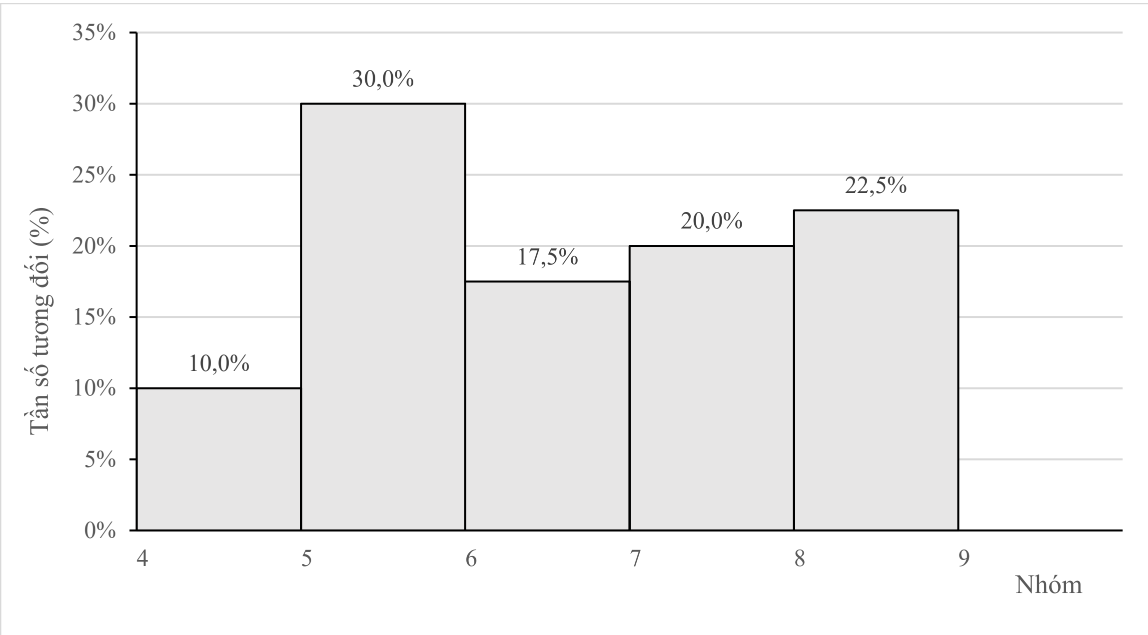
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột.

Lời giải

a) Bảng tần số ghép nhóm - tần số tương đối ghép nhóm: (n = 40)

Nhóm	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)
Tần số	4	12	7	8	9
Tần số tương đối	10%	30%	17,5%	20%	22,5%

b) Xem hình vẽ.



Bài toán 11: Sau khi thống kê độ dài (đơn vị: centimet) của 50 lá dương xỉ trưởng thành, người ta có bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)
Tần số	8	18	14	10

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhòm dạng biểu đồ cột

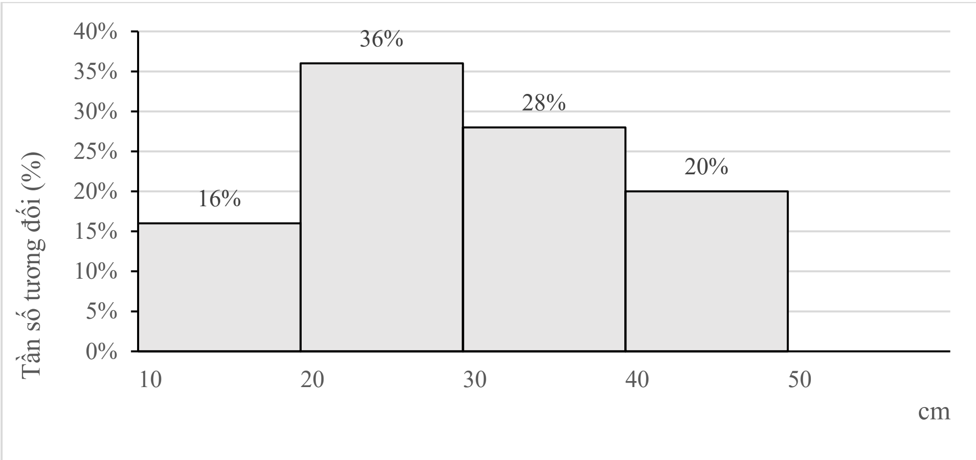
Hưỡng dẫn: Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm (tính theo phần trăm).

Lời giải

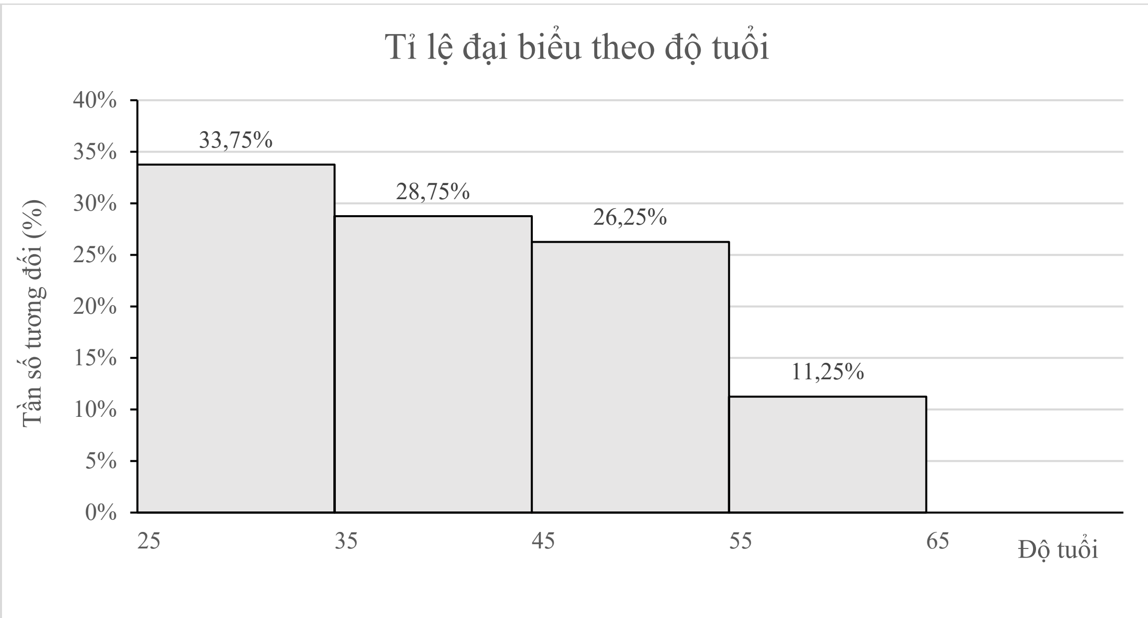
Bảng tần số ghép nhóm - tần số tương đối ghép nhóm: (n = 50).

Nhóm	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)
Tần số	8	18	14	10
Tần số tương đối	16%	36%	28%	20%

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột.



Bài toán 12. Biểu đồ bên biểu diễn tỉ lệ đại biểu tham dự hội nghị theo độ tuổi. Biết rằng có 54 đại biểu từ 25 tuổi đến 35 tuổi.



a) Có bao nhiêu đại biểu tham dự hội nghị?

b) Lập bảng tần số ghép nhóm tương ứng.

c) Một người cho rằng có trên 50% số đại biểu tham dự hội nghị dưới 45 tuổi. Nhận định đó đúng hay sai? Tại sao?

Hướng dẫn: Nhóm [25; 35) chiếm 33,75% so với tổng số đại biểu và có 54 người.

Ta có: 54: 33,75% = 160 (người).

Lời giải

a) ta có: 54: 33,75% = 160 (người)

Tổng số đại biểu tham dự hội nghị là 160 người.

b) Từ câu a, ta tìm được số người tham dự của các nhóm. Ta có bảng tần số ghép nhóm nhu sau:

Nhóm	[25; 35)	[35;45)	[45; 55)	[55; 65)
Tần số	54	46	42	18

c) $33,75\% + 28,75\% = 62,5\% > 50\%$.

Nhận định trên là đúng.

Chú ý: Các bài toán $8;\ 9;\ 10;\ 11$, em hãy đặt ra bài toán mới, khi biết biểu đồ tần số ghép nhóm tương đối và bổ sung số lượng n trong mỗi bài.

III. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng

Bài toán 13. Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm sau về tuổi thọ của một bóng đèn.

Tuổi thọ (năm)	$[1;\ 1,5)$	$[1,5;\ 2)$	$[2;\ 2,5)$	$[2,5;\ 3)$	$[3;\ 3,5)$
Tần số tương đối	15%	20%	30%	25%	10%

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê trên.

Hướng dẫn:

Chọn giá trị đại diện cho các nhóm.

$\frac{1+1,5}{2} = 1,25;\ \frac{1,5+2}{2} = 1,75;\ \frac{2+2,5}{2} = 2,25$

$\frac{2,5+3}{2} = 2,75;\ \frac{3+3,5}{2} = 6,25$

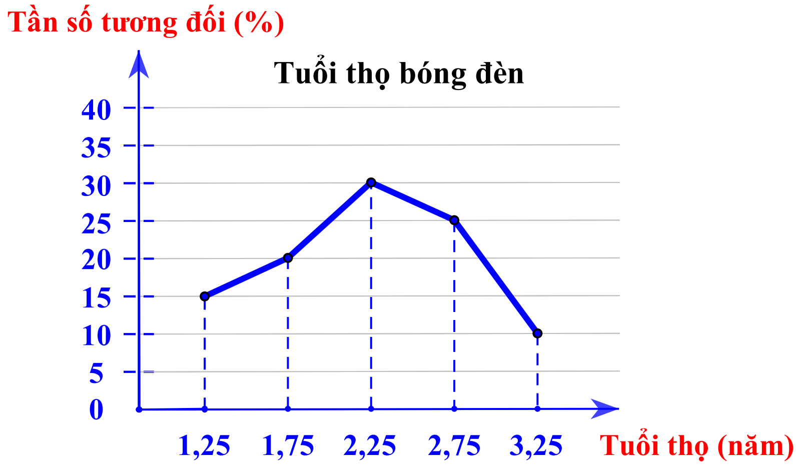
Xem phần A. Kiến thức cần nhớ.

Lời giải

Ta có bảng sau:

Tuổi thọ (năm)	$1,25$	$1,75$	$2,25$	$2,75$	$3,25$
Tần số tương đối	15%	20%	30%	25%	10%

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng.



Bài toán 14. Bảng sau thống kê chiều cao (đơn vị: mét) của các cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường.

Chiều cao (m)	$[8,5;\ 8,7)$	$[8,7;\ 8,9)$	$[8,9;\ 9,1)$	$[9,1;\ 9,3)$	$[9,3;\ 9,5)$
Tần số tương đối	15%	25%	35%	20%	15%

Hãy vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu trên.

Hướng dẫn:

Chọn giá trị đại diện cho các nhóm.

$$\frac{8,5+8,7}{2}=8,6;\quad \frac{8,7+8,9}{2}=8,8;\quad \frac{8,9+9,1}{2}=9,0\quad \frac{9,1+9,3}{2}=9,2;\quad \frac{9,3+9,5}{2}=9,4$$

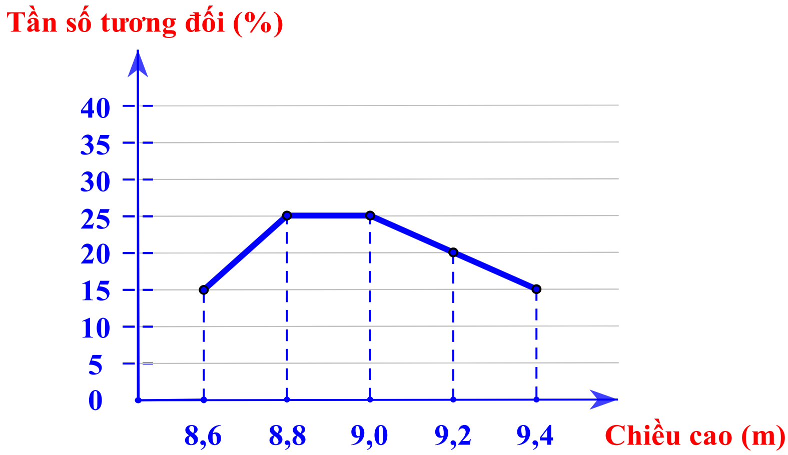
Lời giải

Ta có bảng sau:

Chiều cao (m)	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4
Tần số tương đối	15%	25%	35%	20%	15%

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng.

Tần số tương đối của số cây theo chiều cao



Bài toán 15. Bảng dưới đây được lấy từ dữ liệu do một trọng tài ghi lại về thành tích của các vận động viên nam trong cuộc thi bơi tự do dài 50 m được một trung tâm thể dục thể thao tổ chức.

Thành tích bơi tự do 50 m nam

Thời gian (giây)	$[24;\ 26)$	$[26;\ 28)$	$[28;\ 30)$	$[30;\ 32)$	$[32;\ 34)$
Tần số	2	8	10	8	4

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu trên.

Hướng dẫn:

- Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.
- Chọn các giá trị đại diện cho nhóm số liệu.
- Vẽ biểu đồ.

Lời giải

• Tần số tương đối của nhóm $[24;\ 26)$ là: $f_1 = \dfrac{2}{32} = 0,0625 = 6,25\%$.

• Tần số tương đối của nhóm [26; 28) là: $f_2 = \dfrac{8}{32} = 0,25 = 25\%$.

• Tương tự với các nhóm tiếp theo: $f_3 = \dfrac{10}{32} = 0,3125 = 31,25\%$.

$f_4 = \dfrac{8}{32} = 0,25 = 25\%$; $f_5 = \dfrac{4}{32} = 0,125 = 12,5\%$.

Ta lập được bảng tần số tương đối ghép nhóm dưới đây:

Bảng tần số tương đối ghép nhóm thành tích bơi tự do 50 m nam

Thời gian (giây)	$[24;\ 26)$	$[26;\ 28)$	$[28;\ 30)$	$[30;\ 32)$	$[32;\ 34)$
Tần số tương đối %	6,25	25	31,25	25	12,5

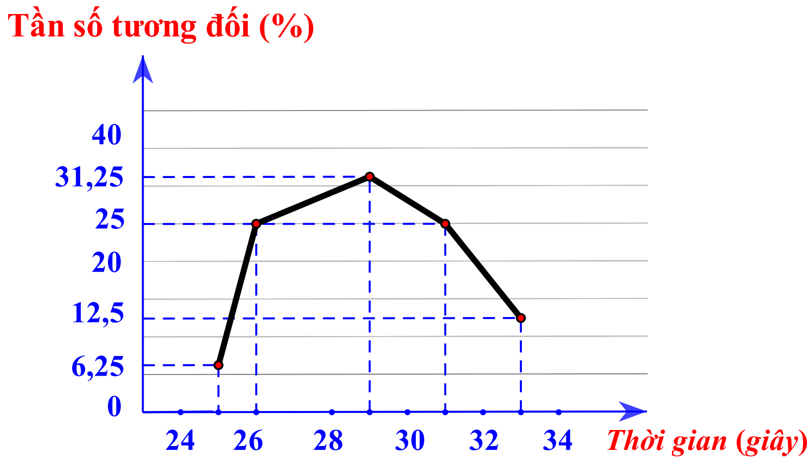
Lời giải

Ta có: $\dfrac{24+26}{2} = 25$; $\dfrac{26+28}{2} = 27$; $\dfrac{28+30}{2} = 29$; $\dfrac{30+32}{2} = 31$; $\dfrac{32+34}{2} = 33$

Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Thời gian (giây)	25	27	29	31	33
Tần số tương đối %	6,25	25	31,25	25	12,5

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng:



⊗ HẾT ⊗

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

A. TRẮC NGHIỆM

Sử dụng dữ liệu sau để trả lời các bài tập từ 1 đến 3.

Gieo một con xúc xắc 50 lần cho kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Tần số tương đối	8	7	?	8	6	11

Bài tập 1. Tần số xuất hiện của mặt 3 chấm là:

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Bài tập 2. Tần số tương đối xuất hiện của mặt 5 chấm là:

A. 6%. **B.** 8%. **C.** 12%. **D.** 14%.

Bài tập 3. Để biểu diễn bảng thống kê trên, không thể cùng loại biểu đồ nào sao đây?

A. Biểu đồ tranh. **B.** Biểu đồ tần số dạng cột.

C. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng. **D.** Biểu đồ cột kép.

Bài tập 4. Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm về thời gian đi từ nhà đến trường của học sinh lớp 9A như sau:

Thời gian đến trường (phút)	$[0;\ 10)$	$[10;\ 20)$	$[20;\ 30)$
Tần số tương đối	20%	55%	25%

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng, ta dùng giá trị nào đại diện cho nhóm số liệu $[10;\ 20)$?

A. 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 30.

Lời giải

Bài tập 1. Ta có: $50-(8+7+8+6+11)=10$. Chọn B.

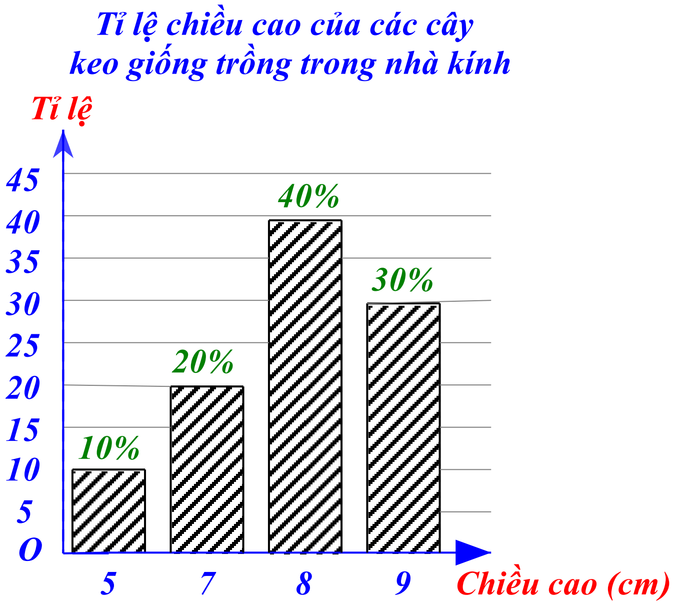
Bài tập 2. Ta có: $\frac{6}{50}\cdot 100\%=12\%$. Chọn C.

Bài tập 3. Chọn D.

Bài tập 4. Ta có: $\frac{10+20}{2}=15$. Chọn B.

B. TỰ LUẬN

Bài toán 1. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm (hình vẽ) cho biết tỉ lệ chiều cao của các cây keo giống do một kỹ sư lâm nghiệp đã trồng trong nhà kính Tỉ lệ chiều cao của các cây keo giống trồng trong nhà kính.



Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Bài toán 2. Kĩ sư lâm nghiệp trên cũng tròng một số cây keo giống khác ngoài trời thu được kết quả như sau:

a) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên

b) Từ biểu đồ vừa vẽ và biểu đồ cho trong bài 1, hãy so sánh chiều cao của các cây keo giống được trồng trong nhà kính và trồng ngoài trời.

Bài toán 3. Tỉ lệ học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường được ghi trong bảng sau:

Số chấm xuất hiện	Huy	Minh	An	Thảo
Tần số tương đối	30%	25%	10%	35%

Biết rằng có 500 học sinh tham gia bình chọn.

a) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối trên.

b) Lập bảng tần số biểu diễn số học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường.

Bài toán 4. Qua đợt khám mắt, lớp $9A$ có 20 học sinh bị cận thị trong đó có 10 học sinh cận thị nhẹ, 8 học sinh cận thị vừa và 2 học sinh cận thị nặng. Biết rằng cận thị có số đo từ $0,25$ đến dưới $3,25$ dioptre là cận thị nhẹ; từ $3,25$ đến dưới $6,25$ dioptre là cận thị vừa; từ $6,25$ đến dưới $10,25$ dioptre là cận thị nặng.

a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối ghép nhóm theo độ cận thị của các học sinh này.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a.

Bài toán 5. Lương của các công nhân một nhà máy được cho trong bảng sau:

Lương (triệu đồng)	$[5;7)$	$[7;\ 9)$	$[9;\ 11)$	$[11;\ 13)$	$[13;\ 15)$
Số công nhân	20	50	70	40	20

a) Nêu các nhóm số liệu và tần số. Giải thích ý nghĩa cho một nhóm số liệu và tần số của nó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.

Lời giải

Bài toán 1. Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Nhóm	$[0;\ 10)$	$[10;\ 20)$	$[20;\ 30)$	$[30;\ 40)$
Tần số tương đối	10%	20%	40%	30%

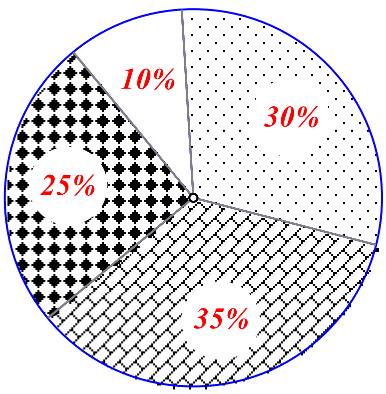
Bài toán 2. a) Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Chiều cao (cm)	$[0;\ 10)$	$[10;\ 20)$	$[20;\ 30)$	$[30;\ 40)$
Tần số tương đối	25%	45%	20%	10%

Dựa vào bảng trên, học sinh tự vẽ biểu đồ dạng cột. (Xem bài toán 8).

b) Trồng trong nhà kính cây lớn nhanh hơn.

Bài toán 3. a) Xem hình vẽ.



b) Hình quạt tròn tương ứng với:

$30\%;\ 25\%;\ 10\%;\ 35\%.$

Có góc ở tâm là:

$108^0;\ 90^0;\ 36^0;\ 126^0$

CHƯƠNG VIII. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ MÔ HÌNH XÁC SUẤT ĐƠN GIẢN

BÀI 25. PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

• Một hoặc một số hành động, thực nghiệm được tiến hành liên tiếp hay đồng thời mà kết quả của chúng không thể biết được trước khi thực hiện nhưng có thể liệt kê được tất cả các kết quả có thể xảy ra, được gọi là một phép thử ngẫu nhiên, gọi tắt là phép thử.

• Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử (gọi tắt là tập tất cả các kết quả có thể của phép thử) được gọi là không gian mẫu của phép thử.

• Không gian mẫu của phép thử được kí hiệu là Ω.

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Phép thử ngẫu nhiên

Bài toán 1. Trong các hoạt động sau, hoạt động nào là phép thử ngẫu nhiên? Tại sao?

a) Gieo hai khối gỗ hình lập phương, mỗi khối được sơn một màu, màu xanh và màu vàng. Quan sát màu sắc của mặt xuất hiện bên trên.

b) Chọn bất kì 1 cây bút bi từ hộp có 4 cây bút bi.

c) Chọn ra đồng thời 2 que gỗ từ hộp có 2 que gỗ màu xanh và que gỗ màu đỏ.

Lời giải

a) Hoạt động gieo hai khối gỗ hình lập phương không là phép thử ngẫu nhiên vì ta biết trước chỉ có một kết quả xảy ra là xuất hiện 1 mặt màu xanh và một mặt màu vàng.

b) Hoạt động lấy 1 cây bút bi là phép thử ngẫu nhiên vì ta không thể biết trước được kết quả của nó, nhưng biết tất cả 4 kết quả có thể xảy ra.

c) Hoạt động lấy ra đồng thời 2 que gỗ không là phép thử ngẫu nhiên vì ta biết chỉ có một kết quả xảy ra là lấy được 1 que gỗ màu xanh và 1 que gỗ màu đỏ.

Bài toán 2. Mỗi hành động sau có phải là phép thử ngẫu nhiên? Giải thích vì sao?

a) Trên bàn có 5 phiếu giống hệt nhau. Trên 2 phiếu có vẽ hoa mai. Trên 3 phiếu còn lại vẽ hoa đào. Bạn Hà Mi lấy một phiếu bất kì và quan sat hình vẽ trên đó.

b) “Dế mèn phiêu lưu kí” là quyển sách duy nhất có trên bàn. Bạn Minh Khang lấy một quyển sách trên bàn để đọc.

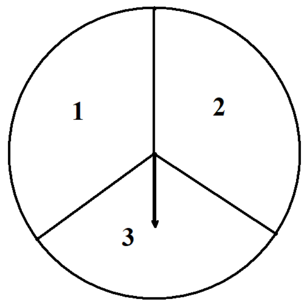
Lời giải

a) Trước khi thực hiện hành động, bạn Hà Mi đã biết là có 2 kết quả có thể xảy ra: Lấy được phiếu vẽ hoa mai hoặc phiếu vẽ hoa đào. Tuy nhiên Hà Mi không đoán trước được là sẽ lấy trúng phiếu vẽ hoa gì. Vậy đây là một phép thử ngẫu nhiên.

b) Khi bạn Minh Khang lấy một quyển sách trên bàn để đọc thì kết quả chắc chắn xảy ra là sẽ lấy được quyển “Dế mèn phiêu lưu kí” (vì trên bàn chỉ có quyển sách này). Như vậy ta sẽ biết được kết quả của hành động lấy sách trên bàn. Suy ra hành động lấy sách trên bàn trong trường hợp này không phải là một phép thử ngẫu nhiên.

Bài toán 3. Một tấm bìa cứng hình tròn được chia là ba hình quạt bằng nhau, đánh số 1; 2; 3 và được gắn vào trục quay cố định ở tâm (xem hình). Bạn Hiền quay tấm bìa liên tiếp hai lần và quan sát xem mũi tên chỉ vào hình quạt nào khi tấm bìa dừng lại.

Phép thử và kết quả của phép thử là gì?



Lời giải

Phép thử là quay lần thứ nhất và kết quả nhận được một số trong ba số 1; 2; 3.

Hai lần quay, ta nhận được kết quả ghi trong bảng sau:

Lần 2 / Lần 1	**1**	**2**	**3**
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)
2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)
3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)

Bài toán 4. Gieo một con xúc xắc một lần. Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

Lời giải

Gieo con xúc xắc, ta không biết trước kết quả.

Vậy đó là phép thử.

Kết quả nhận được là xuất hiện mặt 1; 2; 3; 4; 5; 6 chấm.

Bài toán 5. Một cửa hàng muốn tặng hai phần quà cho hai trong bốn khách hàng có lượng mua nhiều nhất trong tháng bằng cách rút thăm ngẫu nhiên. Việc rút thăm tiến hành như sau: Nhân viên viết tên 4 khách hàng đó vào 4 lá phiếu để vào một chiếc hộp. Nhân viên rút ngẫu nhiên một lá phiếu trong hộp. Lá phiếu rút ra không trả lại vào hộp. Sau đó, nhân viên tiếp tục rút ngẫu nhiên một lá phiếu từ ba lá phiếu còn lại. Hai khách hàng có tên trong hai lá phiếu được rút ra là hai khách hàng được tặng quà.

Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

Lời giải

Phép thử là rút ngẫu nhiên hai lá phiếu, lá phiếu lấy ra lần một không trả lại vào hộp.

Kết quả như bảng sau:

Lần 1 / Lần 2	**A**	**B**	**C**	**D**
A	\	(A;B)	(A;C)	(A;D)
B	(B;A)	\	(B;C)	(B;D)
C	(C;A)	(C;B)	\	(C;D)
D	(D;A)	(D;B)	(D;C)	\

II. Không gian mẫu. Số phần tử của không gian mẫu.

Bài toán 6. Xác định không gian mẫu của các phép thử ngẫu nhiên sau:

a) Gieo 1 con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần.

b) Lấy ra lần lượt 2 quả bóng từ một hộp chứa 3 quả bóng được đánh số 1; 2; 3.

Hướng dẫn: Xem bài toán 4; 5.

Lời giải

a) Kí hiệu (i; j) là kết quả lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt có i chấm, lần gieo thứ hai xuất hiện mặt có j chấm. Không gian mẫu của phép thử là:

$$\Omega = \{(1;1);(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);(1;6);$$
$$\{(2;1);(2;2);(2;3);(2;4);(2;5);(2;6);$$
$$\{(3;1);(3;2);(3;3);(3;4);(3;5);(3;6);$$
$$\{(4;1);(4;2);(4;3);(4;4);(4;5);(4;6);$$
$$\{(5;1);(5;2);(5;3);(5;4);(5;5);(5;6);$$
$$\{(6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6)\}.$$

Ta cũng có thể viết gọn không gian mẫu là:

$\Omega = \{(i;j)/1 \le i \le 6; 1 \le j \le 6\}$.

b) Kí hiệu (i; j) là kết quả bóng lấy ra lần thứ nhất được đánh số i, bóng lấy ra lần thứ hai được đánh số j. Không gian mẫu cảu phép thử là:

$\Omega = \{(1;2);(1;3);(2;1);(2;3);(3;1);(3;2)\}$.

Nhận xét:

a) Ta có thể lập bảng như bài toán 5.

Lần 2 / Lần 1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)
2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)
3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)
4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)
5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)
6	(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)	(6; 5)	(6; 6)

Không gian mẫu có 36 phần tử.

Bài toán 7. Hai bạn nam Hùng, Dũng và hai bạn nữ Dung, Nguyệt tham gia đội văn nghệ của lớp 9A. Cô giáo phụ trách đội chọn ngẫu nhiên hai bạn để hát song ca.

Liệt kê các cách chọn ngẫu nhiên hai bạn để hát song ca.

Hướng dẫn: Xem bài toán 5.

Lời giải

Có các cách chọn sau:

Hùng – Dũng; Hùng – Dung; Hùng – Nguyệt

Dũng – Dung; Dũng – Nguyệt; Dung – Nguyệt.

Nhận xét:Có 6 cách chọn.

Bài toán 8. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên lẻ có hai chữ số.

Tìm số phần tử của tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra.

Lời giải

a) Ta có: $\Omega = \{11;13;15;...;97;99\}$.

Nhận xét:Số phần tử của tập hợp Ω là: $\frac{99-11}{2}+1=45$

Bài toán tương tự::

Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên lớn hơn 499 và nhỏ hơn 1000.

Viết tập hợp các kết quả có thể xảy ra của phép thử. Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra.

Hướng dẫn: $\{500;501;...;998;999\}$

Số các số tự nhiên: (999-500) + 1 = 500.

Bài toán 9. Một hộp có chứa 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Lấy ra ngẫu nhiên cùng một lúc 2 tấm thẻ từ hộp.

Hãy liệt kê các phần tử của không gian mẫu của phép thử.

Lời giải

Kí hiệu (x; y) là kết quả lấy được hai thẻ, trong đó một thẻ đánh số x và một thẻ đánh số y.

Các phần tử của không gian mẫu của phép thử là:

$\Omega = \{(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);(2;3);(2;4);(2;5);\ (3;4);(3;5);(4;5)\}$.

Bài toán 10. Màu hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: màu vàng và màu xanh, có hai gene ứng với hai kiểu hình này allele lặn a. Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: hạt trơn và hạt nhăn, có hai gene ứng với hai kiểu hình này allele trội B và allele lặn b.

Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cây con lấy ngẫu nhiên một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ để hình thành một cặp gene. Phép thử là cho lai hai cây đậu Hà Lan, trong đó cây bố có kiểu gene là (AA, Bb), cây mẹ có kiểu gene là (Aa, Bb).

Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử trên. Không gian mẫu có bao nhiêu phân tử?

Gợi ý: Về kiểu gene, có hai kiểu gene ứng với màu hạt của cây con là AA; Aa.

Có bốn kiểu gene ứng với dạng hạt của cây con là BB; Bb; bB; bb.

Lời giải

Ta có bảng sau:

Dạng hạt / **Màu hạt**	BB	Bb	bB	Bb
AA	$(AA;BB)$	$(AA;Bb)$	$(AA;bB)$	$(AA;bb)$
Aa	$(Aa;BB)$	$(Aa;Bb)$	$(Aa;bB)$	$(Aa;bb)$

Không gian mẫu có 8 phần tử?

Nhận xét: Người ta có thể viết: (AA; BB) là AABb;...

Bài toán 11. Trên giá sách có 4 quyển thuộc thể loại Văn học, 3 quyển thuộc thể loại Lịch sử, 2 quyển thuộc thể loại Khoa học viễn tưởng. Bạn Minh Anh rút ngẫu nhiên một quyển. Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra? Không gian mẫu của phép thử này gồm những phần tử nào?

Lời giải

Kí hiệu: 4 quyển thuộc thể loại Văn học là $V1,V2,V3,V4$;

3 quyển thuộc thể loại Lịch sử là $L1,L2,L3$;

2 quyển thuộc thể loại Khoa học viễn tưởng là $K1, K2$.

Trên giá có 9 quyển sách nên khi rút ngẫu nhiên một quyển thì có 9 kết quả có thể xảy ra. Như vậy không gian mẫu có 9 kết quả. Cụ thể, các kết quả của không gian mẫu được liệt kê như sau:

$\Omega = \{V1,\ V2,\ V3,\ V4,\ L1,\ L2,\ L3,\ K1,\ K2\}$

Bài toán 12. Trong hộp thứ nhất có 5 thẻ được đánh số $1, 2, 3, 4, 5$. Trong hộp thứ hai có 4 chữ cái tạo thành từ TOÁN. Lấy ngẫu nhiên một thẻ trong hộp thứ nhất và một chữ cái trong hộp thứ hai. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử đó.

Lời giải

Ta có bảng sau:

Chữ / Thẻ số	T	O	A	N
1	$1T$	$1O$	$1A$	$1N$
2	$2T$	$2O$	$2A$	$2N$
3	$3T$	$3O$	$3A$	$3N$
4	$4T$	$4O$	$4A$	$4N$
5	$5T$	$5O$	$5A$	$5N$

Không gian mẫu có 20 phần tử.

Bài toán tương tự:

Xét phép thử tung một đồng xu và một con xúc xắc 6 mặt. Hãy liệt kê các phần tử của không gian mẫu.

Hướng dẫn: Kí hiệu S, N là mặt sấp, mặt ngửa của đồng xu: $1, 2, 3, 4, 5, 6$ là số chấm xuất hiện trên con xúc xắc.

Ta có bảng sau:

Xúc xắc / Đồng xu	1	2	3	4	5	6
1	$(S;1)$	$(S;2)$	$(S;3)$	$(S;4)$	$(S;5)$	$(S;6)$
2	$(N;1)$	$(N;2)$	$(N;3)$	$(N;4)$	$(N;5)$	$(N;6)$

HẾT

BÀI 26. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ LIÊN QUAN TỚI PHÉP THỬ

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Kết quả thuận lợi cho một biến cố liên quan tới phép thử

Cho phép thử T. Xét biến cố E, ở đó việc xảy ra hay không xảy ra của E tuỳ thuộc vào kết quả của phép thử T. Kết quả của phép thử T làm cho biến cố E xảy ra gọi là kết quả thuận lợi cho E.

2. Tính xác suất của biến cố liên quan đến phép thử khi các kết quả của phép thử đồng khả năng.

• Giả sử rằng các kết quả có thể của phép thử T là đồng khả năng. Kho đó xác suất $P(E)$ của biến cố E bằng tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố E và số phần tử của tập Ω.

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Trong đó Ω là không gian mẫu của T, $n(E)$ là số kết quả thuận lợi cho biến cố E và $n(\Omega)$ là số phần tử của tập Ω.

Cách tính xác suất của một biến cố

Việc tính xác suất của một biến cố E gồm các bước sau:

Bước 1: Mô tả không gian mẫu của phép thử. Từ đó xác định số phần tử của không gian mẫu Ω.

Bước 2: Chứng tỏ các kết quả có thể của phép thử là đồng khả năng.

Bước 3: Mô tả các kết quả thuận lợi cho biến cố E. Từ đó xác định số kết quả thuận lợi cho biến cố E.

Bước 4: Lập tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố E với số phần tử của không gian mẫu Ω.

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Kết quả thuận lợi cho một biến cố

Bài toán 1. Xét phép thử tung một con xúc xắc cân đối và đồng chất có 6 mặt. Gọi A là biến cố "nhận được mặt mặt có số chấm là số nguyên tố". Hãy liệt kê những kết quả thuận lợi cho biến cố A.

Hướng dẫn giải: Các kết quả thuận lợi cho biến cố là một tập con của không gian mẫu.

Lời giải

Ta có: $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

Đó là kết quả khi tung xúc xắc 6 mặt.

Trong các số từ 1 đến 6 có ba số nguyên tố $2;3;5$.

Vậy kết quả thuận lợi cho biến A là $2;3;5$.

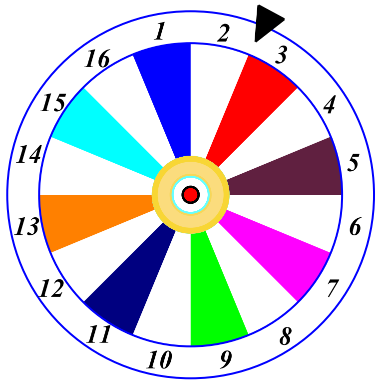
Vậy có thể viết: $A=\{2;3;5\}$

Nhận xét: A là tập con của Ω.

Bài toán 2.

Bánh xe được chia thành 16 hình quạt bằng nhau, đánh số thứ tự từ 1 đến 16. Quay bánh xe và quan sát xem khi nó dừng thì mũi kim (được gắn cố định) chỉ vào hình quạt số mấy (ta nói ngắn gọn là "kim chỉ vào số mấy").

Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố sau:



A: "Kim chỉ vào số là bội số của 5";

B: "Kim chỉ vào số là ước của 14".

Lời giải

Ta có: $\Omega = \{1;\ 2;\ 3;...;\ 14;\ 15;\ 16\}$.

Khi đó $A = \{5;\ 10;\ 15\}$

$B = \{1;\ 2;\ 7;\ 14\}$

Nhận xét: Ta ghi tập hợp A là các bội của 5, không vượt quá 16; tập hợp B là tập hợp các ước của 14.

A và B là tập hợp con của tập Ω.

Bài toán 3. Bảng thống kê tuổi các thành viên tham gia câu lạc bộ bơi lội của một nhà văn hoá thiếu nhi.

Tuổi của các thành viên câu lạc bộ bơi lội

	10 tuổi	12 tuổi	13 tuổi	14 tuổi	Tổng số
Nam	3	5	7	15	30
Nữ	5	6	10	6	27
Tổng số	8	11	17	21	57

Lấy ngẫu nhiên một bạn trong danh sách để kiểm tra sức khoẻ ? Xét các biến cố:

A: "Chọn được một bạn nữ 10 tuổi";

B: "Chọn được một bạn nữ";

C: "Chọn được một bạn nam 13 tuổi hoặc 14 tuổi".

Hãy xác định số kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố A, B, C.

Lời giải

Kết quả thuận cho biến cố A là 5.

Tổng số thành viên nữ là 27 nên có 27 kết quả thuận lợi cho biến cố B.

Tổng số bạn nam 13 tuổi hoặc 14 tuổi là:

$$7 + 15 = 22.$$

Vậy có 22 kết quả thuận lợi cho biến cố C.

Bài toán 4. Bảng biểu diễn kết quả thống kê của một bệnh viện về cân nặng của một số trẻ sơ sinh.

Cân nặng của một số trẻ sơ sinh

Cân nặng (g)		[2800;3000)	[3000;3200)	[3200;3400)	[3400; 3600)	Tổng số
Tần số	Bé gái	4	17	10	5	36
	Bé trai	3	18	8	3	32

Chọn ngẫu nhiên một trẻ sơ sinh trong số này. Xác định số kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

M : "Chọn được một bé gái thuộc nhóm có cân nặng trong khoảng $[3200;3400)$ (g)";

N: "Chọn được một bé cân nặng dưới 3000 g";

O: "Chọn được một bé trai cân nặng không dưới 3200 g";

Lời giải

Ta có kết quả thuận lợi cho biến cố M là 10; số kết quả thuận lợi cho biến cố N là $3+4=7$; số kết quả thuận lợi cho biến cố O là $8+3=11$.

Bài toán 5. Viết ngẫu nhiên một số chẵn có hai chữ số. Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố "Số tự nhiên được viết là bội của 4";

Hướng dẫn:

$\Omega=\{10;\,12;...;\,96;\,98\}$

Bội của $4: 12;\,16;\,...;\,96$.

Lời giải

Các bội của 4 có hai chữ số có dạng $4k;\ k\in\{3;4;\,...;23;\,24\}$.

Vậy các kết quả thuận lợi cho biến cố trên là: $\{12;16;\,20;...;\ 88;\,92;\ 96\}$

Nhận xét: Số kết quả thuận lợi là 22

Bài toán tương tự:

Viết ngẫu nhiên một số lẻ không vượt quá 100. Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố E : "Số tự nhiên được viết là bội của 9";

Đáp số: $E=\{9;\,18;\,27;\,36;\ 45;\ 54;\,63;\,72;\,81;\ 90;\,99\}$

E có 11 phần tử.

II. Xác suất của biến cố

Bài toán 6. Màu hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình là vàng và xanh. Có hai gene ứng với hai kiểu hình này là allele trội A và allele lặn a. Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: hạt trơn và hạt nhăn. Có hai gene ứng với hai kiểu hình này là allele trội B và allele lặn b.

Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cặp gene của cây con được lấy ngẫu nhiên từ gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ. Phép thử là cho lai hai cây đậu Hà Lan, trong đó cây bố và cây mẹ có kiểu hình là "hạt vàng nhăn". Hỏi xác suất để cây con có kiểu hình như cây bố và cây mẹ là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có bảng sau:

Màu hạt \ Dạng hạt	BB	Bb	bB	bb
AA	$(AA;BB)$	$(AA;Bb)$	$(AA;bB)$	$(AA;bb)$
Aa	$(Aa;BB)$	$(Aa;Bb)$	$(Aa;bB)$	$(Aa;bb)$

Gọi E là biến cố ‘‘ cây con có hạt vàng nhăn ’’.

Ta có: $E=\{(AA,bb);(Aa,bb)\}$

Có hai kết quả thuận lợi cho biến cố E.

$\Omega=\{(AA,BB);(AA,Bb);(AA,bB);(AA,bb);(Aa,BB);(Aa,Bb);(Aa,bB);(Aa,bb)\}$

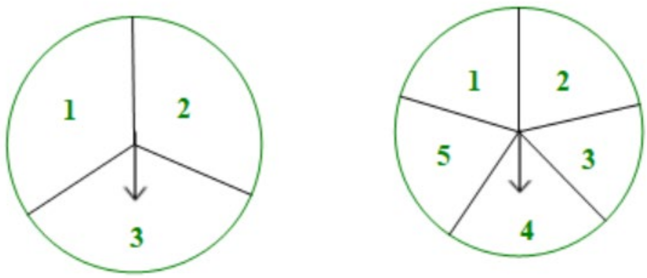
Vậy $P(E)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

Bài toán tương tự: Tính xác suất của biến cố F: “Cây con có hạt vàng và trơn”;

Đáp số: $P(F)=0,75$

Bài toán 7. Tấm bìa cứng A hình tròn được chia thành 3 hình quạt có diện tích bằng nhau, đánh số 1; 2; 3 và tấm bìa cứng B hình tròn được chia thành 5 hình quạt có diện tích bằng nhau, đánh số 1; 2; 3; 4; 5. Trục quay của A và B được gắn mũi tên ở tên. Bạn Nam quay tấm bìa A, bạm Bình quay tấm bìa B. Quan sát xem mũi tên dừng ở hình quạt nào trên hai tấm bìa. (Xem hình vẽ)

Lời giải



Tấm bìa A *Tấm bìa B*

Tính xác suất của các biến cố sau:

E: “ Tích hai số ở hình quạt mà hai mũi tên chỉ vào bằng 6 ”;

F: “ Tích hai số ở hình quạt mà hai mũi tên chỉ vào nhỏ hơn 5 ”;

G: “ Tích hai số ở hình quạt mà hai mũi tên chỉ vào là số chẵn ”.

Hướng dẫn: Viết tậm hợp Ω và các tập hợp E,F,G.

Lời giải

Ta có bảng sau:

B \ A	1	2	3
1	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$

2	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$
3	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$
4	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$
5	$(5;1)$	$(5;2)$	$(5;3)$

$\Omega = \{(1;1);(1;2);(1;3);(2;1);(2;2);(2;3);(3;1);(3;2);(3;3);(4;1);(4;2);(4;3);(5;1);(5;2);(5;3)\}$

Số phần tử của Ω là 15; $n(\Omega) = 15$.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố E là:

$E = [(3;2);(2;3)] \Rightarrow P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{15}$

Ta có: F = $[(1;1);(1;2);(2;1);(1;3);(3;1);(2;2);(4;1)]$

$\Rightarrow P(F) = \dfrac{7}{15}$

Ta có: G = $[(1;2);(2;1);(2;2);(2;3);(3;2);(4;1);(4;2);(4;3);(5;2)]$

Tập hợp G có 9 phần tử.

Bài toán 8: Cho hai túi I và II, mỗi túi chứa 3 tấm thẻ được ghi các số 2; 4; 9. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi ra một tấm thẻ và ghép thành số có hai chữ số với chữ số trên tấm thẻ từ túi I là chữ số hàng chục. Tính xác suất các biến cố sau:

a) A: "Số tạo thành chia hết cho 4"

b) B: " Số tạo thành là số nguyên tố"

Lời giải

Ta có: $\Omega = \{22;24;29;42;44;49;92;94;99\}$

Số phần tử của Ω là 9.

a) Ta có: $A = \{24;44;92\}$. Tập hợp A có 3 phần tử.

Vậy $P(A) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

b) Ta có: $B = \{29\}$. Tập hợp B có 1 phần tử.

Vậy $P(B) = \dfrac{1}{9}$

Bài toán tương tự:

Xét ba bạn An, Bình, Châu ngồi trên một dãy ghế có ba chỗ ngồi.

Tính xác suất các biến cố sau:

a) E: "An không ngồi ngoài cùng bên ngoài"

b) B: "Bình và Châu ngồi cạnh"

Hướng dẫn: Viết tập hợp các phần tử của không gian mẫu bằng cách liệt kê các kết quả.

Lời giải

Kí hiệu ba bạn An, Bình, Châu là A, B, C

Có các cách sắp xếp ba bạn vào dãy ghế:

$(A,B,C);(A,C,B);(B,A,C);(B,C,A);(C,A,B);(C,B,A)$

Vậy $\Omega=\{(A,B,C);(A,C,B);(B,A,C);(B,C,A);(C,A,B);(C,B,A)\}$

Số phần tử của Ω là 6.

a) Ta có: $E=\{(B,A,C);(B,C,A);(C,A,B);(C,B,A)\}$

Vậy $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

b) Ta có: $F=\{(B,A,C);(C,A,B)\}$

Vậy $P(F)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

Bài toán 9:

Tính xác suất của các biến cố sau:

E: "Trong hai bạn được chọn, có một bạn nam và một bạn nữ"

F: "Trong hai bạn được chọn có bạn Dung"

Hướng dẫn: Xem bài toán 7.

Số phần tử của tập hợp Ω là 6.

Lời giải

Ta có: Ω = {Hùng – Dũng; Hùng – Dung; Hùng – Nguyệt; Dũng – Dung; Dũng – Nguyệt; Dung – Nguyệt}

E = {Hùng – Dung; Hùng – Nguyệt; Dũng – Dung; Dũng – Nguyệt}

Vậy $P(E)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

Bài toán 10: Bạn Hoàng lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ một túi đựng 2 quả cầu gồm một quả màu đen và một quả cầu màu trắng, có cùng khối lượng và kích thước. Bạn Hải rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ một hộp đựng 3 tấm thẻ A, B, C.

a) Mô tả không gian mẫu của phép thử

b) Xét các biến cố sau:

E: "Bạn Hoàng lấy được một quả cầu màu đen"

F: "Hoàng lấy được quả cầu màu trắng và bạn Hải không rút được tấm thẻ A"

Tính $P(E);P(F)$

Lời giải

a) Kí hiệu quả cầu đen, trắng thứ tự là Đ, T.

Ta có bảng sau:

Tấm thẻ / Quả cầu	A	B	C
1	(Đ;A)	(Đ;B)	(Đ;C)
2	(T;A)	(T;B)	(T;C)

Không gian mẫu có 6 phần tử.

b) Ta có: $E = \{(Đ;A);\ (D;B);\ (D;C)\}$

Vậy $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$F = \{(T;B);\ (T;C)\}$

Vậy $P(F) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Bài toán 11: Hộp thứ nhất đựng 1 quả bóng trắng, 1 quả bóng đó. Hộp thứ 2 đựng 1 quả bóng đó, 1 quả bóng vàng. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 quả bóng.

a) Xác định không gian mẫu và số kết quả có thể xảy ra của phép thử.

b) Biết rằng các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Hãy tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "2 quả bóng lấy ra có cùng màu"
B: "Có đúng 1 quả bóng màu đỏ trong 2 quả bóng lấy ra"

Lời giải

a) Kí hiểu T là màu trắng, Đ là màu đỏ và V là màu vàng.

Không gian mẫu $\Omega = \{$(T;Đ); (T;V); (Đ;Đ); (Đ;V)$\}$

Số kết quả cỏ thể xảy ra là $n(\Omega) = 4$

b) Vì các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng nên các kết quả trên có cùng khả năng xảy ra.

Chỉ có một kết quả thuận lợi cho biến cố A là (Đ;Đ) nên $n(A) = 1$

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{4}$

Các kết quả thuận lợi cho biến cố B là (T;Đ) và (Đ;V) nên $n(B) = 2$

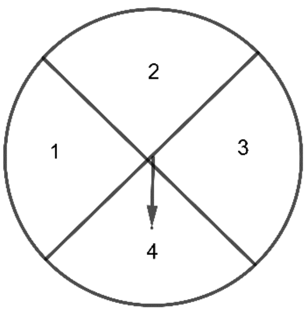
Xác suất của biến cố B là $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Bài toán 12: Một tấm bìa cứng hình tròn được chia làm bốn hình quạt bằng nhau, đánh số 1; 2; 3; 4 và được gắn vào trục quay có mũi tên ở tâm (hình vẽ).Bạn Tuấn quay tấm bìa hai lần, quan sát và ghi lại số hình quạt và mũi tên chỉ vào.

Tính xác suất của các biến cố:

a) E: "Tổng hay số ghi trên hai hình quạt ở hai lần quay bằng 5"

b) F: "Tích hai số ghi trên hai hình quạt ở hai lần quay bằng 4"



Hướng dẫn:

Liệt kê các phần tử của không gian mẫu và các phần tử của tập hợp E và tập hợp F.

Lời giải

a) Ta có bảng sau:

Lần 1 \ Lần 2	1	2	3	4
1	**(1;1)**	**(1;2)**	**(1;3)**	**(1;4)**
2	**(2;1)**	**(2;2)**	**(2;3)**	**(2;4)**
3	**(3;1)**	**(3;2)**	**(3;3)**	**(3;4)**
4	**(4;1)**	**(4;2)**	**(4;3)**	**(4;4)**

Ω = {(1;1); (1;2); (1;3); (1;4); (2;1); (2;2); (2;3); (2;4); (3;1); (3;2); (3;3); (3;4)
(4;1); (4;2); (4;3); (4;4)}

Số phần tử của Ω là 16: $n(\Omega)=16$

a) Ta có: E = {(1;4); (2;3); (3;2); (4;1)}

$\Rightarrow n(E)=4 \Rightarrow P(E)=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$

b) Ta có: F = {(1;4); (2;2); (4;1)}

$\Rightarrow n(F)=3 \Rightarrow P(F)=\dfrac{3}{16}$

Bài toán tương tự:

Có hai túi I và II, mỗi túi chứa 4 tấm thẻ được đánh số 1; 2; 3; 4. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi ra một tấm thẻ và nhân hai số ghi trên tấm thẻ với nhau. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: "Kết quả là một số lẻ"

b) B: "Kết quả là 1 hoặc một số nguyên tố"

Hướng dẫn:

Ta có bảng sau:

Túi I \ Túi II	1	2	3	4
1	**(1;1)**	**(1;2)**	**(1;3)**	**(1;4)**
2	**(2;1)**	**(2;2)**	**(2;3)**	**(2;4)**

3	**(3;1)**	**(3;2)**	**(3;3)**	**(3;4)**
4	**(4;1)**	**(4;2)**	**(4;3)**	**(4;4)**

Ta có: $n(\Omega)=16$

Lời giải

a) Ta có: $A=\{(1;1);(1;3);(3;1);(3;3)\}\Rightarrow n(A)=4$

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$

b) Ta có: $B=\{(1;1);(1;2);(1;3);(2;1);(3;1)\}\Rightarrow n(B)=5$

Vậy $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{5}{16}$

Nhận xét: Em hãy tính $P(C)$, với C là biến cố: " Kết quả là một số chẵn".

Đáp số: $P(C)=\dfrac{3}{4}$

Bài toán 13: Một bó hoa gồm 3 bông hoa màu đỏ và 1 bông hoa màu vàng. Bạn Linh chọn ngẫu nhiên 2 bông hoa từ bó hoa đó.

a) Liệt kê các cách chọn mà bạn Linh có thể thực hiện.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố:

E: "Trong 2 bông hoa được chọn ra, có đúng 1 bông hoa màu đỏ''

F: "Trong 2 bông hoa được chọn ra, có ít nhất 1 bông hoa màu đỏ".

Hướng dẫn:

Chọn hai bông không phân biệt thứ tự như bài 12, ta lập một tập hợp con của tập hợp 4 phần tử. Kí hiệu các phần tử đã cho là Đ1, Đ2, Đ3 và V là thứ tự là ba bên màu đỏ và một bông hoa màu vàng.

Lời giải

a) Kí hiệu các phần tử đã cho là Đ1, Đ2, Đ3 và V là thứ tự là ba bông hoa màu đỏ và một bông hoa màu vàng.

Chọn ngẫu nhiên hai bông, ta có tập hợp A gồm các phần tử sau:

Ω= {(Đ1; Đ2); (Đ1; Đ3); (Đ2; Đ3); (Đ1; V1); (Đ2; V1); (Đ3; V1)}

b) Ta có: R= {(Đ1; V1); (Đ2; V1); (Đ3; V1)} $\Rightarrow n(R)=3$

Theo câu a), ta có: $n(\Omega)=6$

Vậy $P(R)=\dfrac{n(R)}{n(\Omega)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

Tập hợp $T=\Omega$

Vậy $P(T)=1$

Bài toán 14: Một hộp chứa 5 quả bóng màu đỏ và một số quả bóng trắng. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp, xem màu rồi trả lại hộp.Biết xác suất của biến cố " Lấy được quả bóng màu đỏ" là 0,25. Hỏi trong hộp có bao nhiêu quả bóng màu trắng.

Lời giải

Gọi n là số quả bóng màu trắng có trong hộp.

Số cách chọn ra ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp là $n+5$

Do các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng nên các quả bóng cùng khả năng được chọn.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố " Lấy được quả bóng màu đỏ" là xác suất của biến cố là $\frac{5}{n+5}$

Theo giải thiết, ta có: $\frac{5}{n+5}=0,25$ hay $n+5=20$, ta được $n=15$

Vậy có 15 quả bóng màu trắng trong hộp.

Bài toán tương tự:

1. Bạn Thắng có n tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến n. Bạn Thắng rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Biết rằng xác suất của biến cố "Lấy được tấm thẻ ghi số có một chữ số" là $0,18$. Hỏi bạn Thắng có bao nhiêu tấm thẻ?

2. Một túi chứa 3 viên bi màu xanh và một số viên bi màu đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Luân lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi. Biết rằng xác suất của biến cố "Lấy được viên bi màu xanh" là $0,6$. Hỏi trong hộp có tổng số bao nhiêu viên bi?

Bài toán 15: Một hộp đựng 20 viên bi đỏ và xanh có cùng kích thước, khối lượng. Tìm số viên bi mỗi màu, biết rằng xác suất của biến cố A: "Lấy được bi đỏ" khi thực hiện phép thử lấy ngẫu nhiên một viên bi là $P(A)=0,6$.

Lời giải

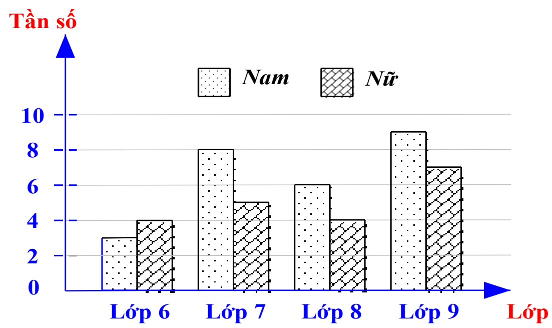
Gọi n là số viên bi đỏ trong hộp.

Ta có: $n(A)=n \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{n}{20}$.

Theo giả thiết, ta có: $\frac{n}{20}=0,6 \Rightarrow n=12$.

Vậy có 12 viên bi màu đỏ và 8 viên bi màu xanh.

Bài toán 16: Hình vẽ là biểu đồ thống kê số học sinh tham gia câu lạc bộ cờ vua. Lấy ngẫu nhiên một học sinh trong số này.



Tính xác suất của các biến cố:

a) Lấy được một học sinh nữ lớp 9.

b) Lấy được một học sinh lớp 6.

c) Lấy được một học sinh nam lớp 7 hoặc lớp 8.

Lời giải

Tổng số học sinh: $(3+4)+(8+5)+(6+4)+(9+7)=46$.

Ta có: $n(\Omega)=46$.

a) A: "Lấy được một học sinh nữ lớp 9" $\Rightarrow n(A)=7 \Rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{7}{46}$.

b) B: "Lấy được một học sinh lớp 6 ". $\Rightarrow n(B)=3+4=7$.

$\Rightarrow P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{7}{46}$.

c) C: "Lấy được một học sinh nam lớp 7 hoặc lớp 8 " $\Rightarrow n(C)=8+6=14$.

$\Rightarrow P(C)=\dfrac{n(C)}{n(\Omega)}=\dfrac{14}{46}=\dfrac{7}{23}$

HẾT

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Gieo đồng thời hai con xúc xác cân đối, đồng chất. Xác suất để "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xác lớn hơn hoặc bằng 10" là:

A. $\frac{7}{36}$. **B.** $\frac{2}{9}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{5}{36}$.

Câu 2. Có hai túi I và II chứa 4 tấm thẻ, đánh số $1; 2; 3; 4$. Túi II chứa 5 tấm thẻ, đánh số $1; 2; 3; 4; 5$. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ mỗi túi I và II. Xác suất để hai tấm thẻ rút ra đều ghi số chẵn là:

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{3}{20}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{4}{21}$.

Câu 3. Một túi đựng 4 viên bi có cùng khối lượng và kích thước, được đánh số $1;\ 2; 3;\ 4$. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi trong túi. Xác suất để tích hai số ghi trên hai viên bi lớn hơn 3 là:

A. $\frac{5}{7}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải và đáp số

Câu 1. Ta có: $n(\Omega)=36$.

Gọi A là biến cố đã cho.

Ta có: $A=\{(4;6);(5;5);(5;6);(6;4);(6;5);(6;6)\}$.

$\Rightarrow n(A)=6 \Rightarrow P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Chọn C.

Câu 2. Ta có: $\Omega=\{(1;1);(1;2);\ldots;(1;5);(2;1);\ldots;(2;5);\ldots;(4;1);\ldots;(4;5)\}$.

$$n(\Omega)=20.$$

Gọi E là biến cố "Hai tấm thẻ đều ghi số chẵn"

Ta có: $E=\{(2;2);(2;4);(4;2);(4;4)\} \Rightarrow n(E)=4$.

Vậy $P(E)=\frac{1}{5}$.

Chọn A.

Câu 3. Ta viết các tập hợp con có hai phần tử của tập hợp $(1; 2; 3; 4)$.

$\Omega=\{(1;2);(1;3);(1;4);(2;3);(2;4);(3;4)\} \Rightarrow n(\Omega)=6$.

Xét biến cố E : "Tích hai số ghi trên hai viên bi lớn hơn 3".

Ta có: $E=\{(1;4);(2;3);(2;4);(3;4)\} \Rightarrow n(E)=4$.

Vậy, $P(E)=\frac{2}{3}$.

Chọn B.

B. TỰ LUẬN

Bài toán 1. Có hai túi I và II. Túi I chứa 3 tấm thẻ, đánh số $2; 3; 4$. Túi II chứa 32 tấm thẻ, đánh số $5; 6$. Từ mỗi túi I và II, rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Hai số ghi trên hai tấm thẻ chênh nhau 2 đơn vị";

B: "Hai số ghi trên hai tấm thẻ chênh nhau lơn hơn 2 đơn vị";

C: "Tích hai số ghi trên hai tấm thẻ là một số chẵn";

D: "Tổng hai số ghi trên hai tấm thẻ là một số nguyên tố".

Bài toán 2. Gieo đồng thời hai con xúc xác cân đối, đồng chất I và II. Tính xác suất của các biến cố sau:

E: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 11";

F: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 8 hoặc 9";

G: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn 6".

Bài toán 3. Hai bạn Minh và Huy chơi một trò chơi như sau: Minh chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp $\{5; 6; 7; 8; 9; 11\}$. Bạn nào chọn được số lớn hơn sẽ là người thắng cuộc. Nếu hai số chọn được bằng nhau thì kết quả là hòa. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: "Bạn Minh thắng";

b) B: "Bạn Huy thắng".

Bài toán 4. Một chiếc hộp có chứa 5 tấm thẻ cùng loại, được đánh số lần lượt là $3; 5$; $6; 7; 9$. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp.

a) Xác định không gian mẫu và số kết quả có thể xảy ra của phép thử.

b) Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Tích các số ghi trên 2 tấm thẻ chia hết cho 3";

B: "Tổng các số ghi trên 2 tấm thẻ lơn hơn 13".

Bài toán 5. Một chiếc hộp chứa 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ và 1 viên bi trắng. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Dung lần lượt lấy ra ngẫu nhiên từng viên bi từ trong hộp cho đến khi hết bi.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Viên bi màu xanh được lấy ra cuối cùng";

B: "Viên bi màu trắng được lấy ra trớc viên bi màu đỏ";

C: Viên bi lấy ra đầu tiên không phải là bi màu trắng

Bài toán 6. Túi kẹo trái cây có 60 viên, trong đó có 20 viên kẹo vị sầu riêng, 15 viên kẹo vị cam, 7 viên kẹo vị dâu, 10 viên kẹo vị chanh, 8 viên kẹo vị mít. Bạn Toàn lấy ngẫu nhiên một vị kẹo trong túi. Tính xác xuất của các biến cố:

a) E: "Bạn Toàn lấy được kẹo vị sầu riêng"

b) F: "Bạn Toàn lấy được kẹo vị cam hoặc chanh"

c) G: "Bạn Toàn không lây được kẹo vị dâu"

Bài toán 7. Đài truyền hình điều tra ý kiến của một số khán giả về một chương trình giải trí. Kết quả điều tra được thống kê trong bản dưới đây:

	Thích	Không thích
Nam	523	154
Nữ	147	68

Chọn ngẫu nhiên một trong số những người được điều tra. Tính xác xuất của các biến cố:

a) A: "Chọn được 1 khán giã nữ không thích chương trình";
b) B: "Chọn được 1 khán giả nam";
c) C: "Chọn được 1 khán giả thích chương trình".

Hướng dẫn giải

Bài toán 1.

Túi I \ Túi II	5	6
2	$\{2;5\}$	$\{2;6\}$
3	$\{3;5\}$	$\{3;6\}$
4	$\{4;5\}$	$\{4;6\}$

Ta có: $\Omega=\{\{2;5\};\{2;6\};\{3;5\};\{3;6\};\{4;5\};\{4;6\}\}\Rightarrow n=6$.

$A=\{\{3;5\};\{4;6\}\}\Rightarrow n(A)=2$

Vậy $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

$B=\{\{2;5\};\{2;6\};\{3;6\}\}\Rightarrow n(B)=3$

Vậy $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

$C=\{\{2;5\};\{2;6\};\{3;6\};\{4;5\};\{4;6\}\}\Rightarrow n(C)=5$

Vậy $P(C)=\frac{5}{6}$

$D=\{\{2;5\}\}\Rightarrow n(D)=1$

Vậy $P(D)=\left\{\frac{1}{6}\right\}$

Bài toán 2. Ta có bảng sau:

Xúc sắc I \ Xúc sắc II	1	2	3	4	5	6
1	$\{1;1\}$	$\{1;2\}$	$\{1;3\}$	$\{1;4\}$	$\{1;5\}$	$\{1;6\}$
2	$\{2;1\}$	$\{2;2\}$	$\{2;3\}$	$\{2;4\}$	$\{2;5\}$	$\{2;6\}$
3	$\{3;1\}$	$\{3;2\}$	$\{3;3\}$	$\{3;4\}$	$\{3;5\}$	$\{3;6\}$
4	$\{4;1\}$	$\{4;2\}$	$\{4;3\}$	$\{4;4\}$	$\{4;5\}$	$\{4;6\}$
5	$\{5;1\}$	$\{5;2\}$	$\{5;3\}$	$\{5;4\}$	$\{5;5\}$	$\{5;6\}$

6	$\{6;1\}$	$\{6;2\}$	$\{6;3\}$	$\{6;4\}$	$\{6;5\}$	$\{6;6\}$

Ta có: $n(\Omega)=36$.

$E=\{\{5;6\};\{6;5\}\}\Rightarrow n(E)=2$.

Vậy $P(E)=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$

$F=\{\{2;6\};\{3;5\};\{3;6\};\{4;4\};\{4;5\};\{5;3\};\{5;4\}\}\Rightarrow n(F)=7$.

Vậy $P(F)=\dfrac{7}{36}$.

$G=\{\{1;1\};\{1;2\};\{1;3\};\{1;4\};\{2;1\};\{2;2\};\{2;3\};\{3;1\};\{3;2\};\{4;1\}\}\Rightarrow n(G)=10$

Vậy $P(G)=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$.

Bài toán 3. Ta có: $n(\Omega)=36$.

a) $P(A)=\dfrac{15}{36}$.

b) $P(B)=\dfrac{15}{36}$.

Bài toán 4. Hướng dẫn:

Xác định số tập hợp con có hai phần tử của tập $X=\{3;5;6;7;9\}$, ta có tập hợp các phần tử của không gian mẫu

Lời giải

a) Ta có:

$\Omega=\{\{3;5\};\{3;6\};\{3;7\};\{3;9\};\{5;6\};\{5;7\};\{5;9\};\{6;7\};\{6;9\};\{7;9\}\}\Rightarrow n(\Omega)=10$

b) Ta có:

$A=\{\{3;5\};\{3;6\};\{3;7\};\{3;9\};\{5;6\};\{5;9\};\{6;7\};\{6;9\};\{7;9\}\}\Rightarrow n(A)=9$.

Vậy $P(A)=\dfrac{9}{10}$.

$B=\{\{5;9\};\{6;9\};\{7;9\}\}\Rightarrow n(B)=3$.

Vậy $P(B)=\dfrac{3}{10}$.

Bài toán 5. a) Kí hiệu $X,Đ,T$ lần lượt là viên xanh, đỏ, trắng.

Ta viết $(X,Đ,T)$ có nghĩa là lấy viên xanh, đến viên đỏ và cuối cùng là viên trắng

$\Omega=\{(X,Đ,T);(X,T,Đ);(Đ,X,T);(Đ,T,X);(T,X,Đ);(T,Đ,X)\}$

$\Rightarrow n(\Omega)=6$.

b) Ta có : $A=\{(Đ,T,X);(T,Đ,X)\}$

$\Rightarrow n(A)=2$.

Vậy $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

$B=\{(X,T,Đ);(T,X,Đ);(T,Đ,X)\}$

$\Rightarrow n(B)=2$.

Vậy $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

$C=\{(X,Đ,T);(X,T,Đ);(Đ,X,T);(Đ,T,X)\}$

$\Rightarrow n(C)=4$.

Vậy $P(C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Bài toán 6. Đáp số : a) $P(E)=\frac{1}{3}$; b) $P(F)=\frac{5}{12}$; c) $P(G)=\frac{53}{60}$.

Bài toán 7. Đáp số : a) $P(A)=\frac{17}{223}$; b) $P(B)=\frac{677}{892}$; c) $P(C)=\frac{335}{446}$.

HẾT

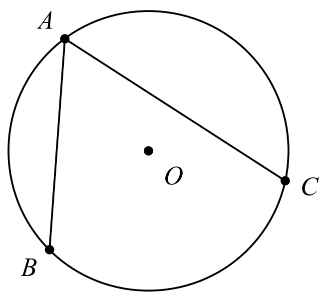
CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

BÀI 27. GÓC NỘI TIẾP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong gọi là cung bị chắn.



2. Định lí: Trong một đường tròn số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

3. Hệ quả: Trong một đường tròn:

a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

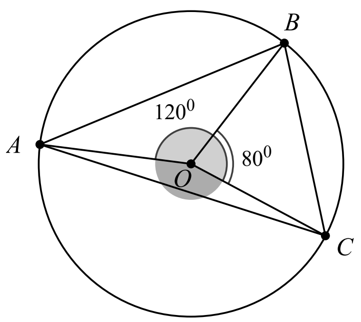
c) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tính toán

Bài toán 1. Cho các điểm như hình vẽ. Tính số đo các góc của tam giác ABC, biết rằng $\widehat{AOB} = 120^0$, $\widehat{BOC} = 80^0$.



Lời giải

Xét đường tròn (O), ta có:

Vì góc nội tiếp $\widehat{BAC}$ và góc ở tâm $\widehat{BOC}$ cùng chắn cung nhỏ BC

nên $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}.80^0 = 40^0$

Vì góc nội tiếp $\widehat{ACB}$ và góc ở tâm $\widehat{AOB}$ cùng chắn cung nhỏ AB nên $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}.120^0 = 60^0$

Xét tam giác ABC, ta có:

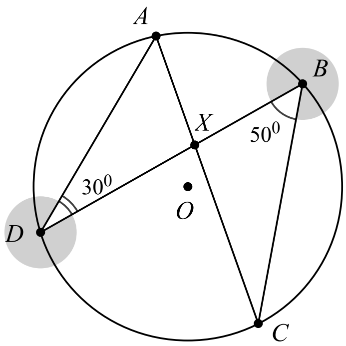
$\widehat{ABC} = 180^0 - \left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right)$

$\widehat{ABC} = 180^0 - \left(40^0 + 60^0\right)$

$\widehat{ABC} = 80^0$.

Bài toán 2. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AC, BD cắt nhau tại X (hình vẽ). Tính số đo góc AXB, biết rằng $\widehat{ADB} = 30^0$ và $\widehat{DBC} = 50^0$.

Lời giải



Do hai góc nội tiếp $\widehat{CAD}$ và $\widehat{CBD}$ cùng chắn cung CD nên $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 50^0$.

Tương tự $\widehat{ADB}$ và $\widehat{ACB}$ cùng chắn cung AB nên $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 30^0$.

Xét tam giác AXB có: $\widehat{CAD} + \widehat{ADB} + \widehat{AXD} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{AXD} = 180^0 - \left(\widehat{CAD} + \widehat{ADB}\right)$

$\Rightarrow \widehat{AXD} = 180^0 - \left(50^0 + 30^0\right)$

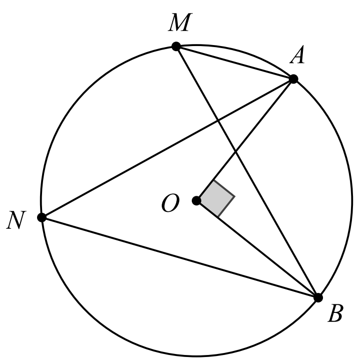
$\Rightarrow \widehat{AXD} = 100^0$.

Ta có: $\widehat{AXB} + \widehat{AXD} = 180^0$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{AXB} = 180^0 - \widehat{AXD}$

$\Rightarrow \widehat{AXB} = 180^0 - 100^0 = 80^0$

Bài toán 3. Tính số đo của $\widehat{AMB}$ và $\widehat{ANB}$ trong hình vẽ.

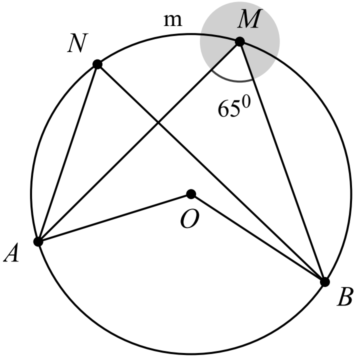


Lời giải

Xét đường tròn (O), ta có:

Do hai góc nội tiếp $\widehat{AMB},\widehat{ANB}$ và góc ở tâm $\widehat{AOB}$ cùng chắn cung nhỏ AB nên $\widehat{AMB}=\widehat{ANB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}=\frac{1}{2}.90^0=45^0$

Bài toán 4. Tính số đo các góc ANB, AOB và cung lớn AB trong hình vẽ.



Lời giải

Xét đường tròn (O), ta có:

Do hai góc nội tiếp $\widehat{ANB}$ và $\widehat{AMB}$ cùng chắn cung nhỏ AB

nên $\widehat{ANB}=\widehat{AMB}=65^0$.

Vì góc nội tiếp $\widehat{AMB}$ và góc ở tâm $\widehat{AOB}$ cùng chắn cung nhỏ AB

Nên $\widehat{AOB}=2\widehat{AMB}=2.65^0=130^0$

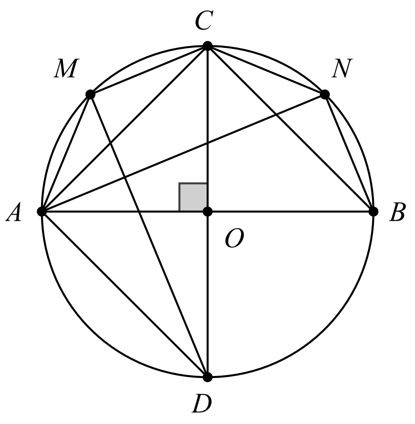
Sđ cung nhỏ AB : sđ $\overset{\frown}{AB}=\widehat{AOB}=130^0$ nên số đo cung lớn là: sđ $\overset{\frown}{AmB}=360^0-130^0=230^0$

Bài toán 5. Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc của nửa đường tròn (O). Gọi M,N lần lượt là hai điểm trên hai cung nhỏ $\overset{\frown}{AC},\overset{\frown}{BC}$ và chia mỗi cung đó thành hai cung bằng nhau (hình vẽ). Tìm số đo các góc sau:

a) $\widehat{ACB},\widehat{ADC}$;

b) b) $\widehat{ADM}$, $\widehat{NCB}$.

Lời giải



Xét đường tròn (O), ta có:

a) $\widehat{ACB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vì góc nội tiếp $\widehat{ADC}$ và góc ở tâm $\widehat{AOC}$ cùng chắn cung nhỏ AC

nên $\widehat{ADC}=\frac{1}{2}\widehat{AOC}=\frac{1}{2}.90^0=45^0$.

b) Vì M,N lần lượt chia hai cung AC và BC thành hai cung nhỏ có số đo bằng nhau nên: sđ $\overset{\frown}{AM}$ = sđ $\overset{\frown}{CM}$ = $\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{2}.90^0=45^0$

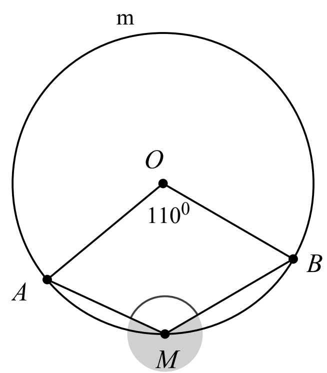
Tương tự sđ $\overset{\frown}{CN}$ = sđ $\overset{\frown}{BN}=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BC}=45^0$

$\widehat{ADM}=\frac{1}{2}.$ sđ $\overset{\frown}{AM}=\frac{45^0}{2}=22,5^0$ (số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn).

Tương tự $\widehat{NCB}=$ sđ $\overset{\frown}{BN}=\frac{45^0}{2}=22,5^0$

Bài toán 6. Tính số đo góc AMB (xem hình vẽ).

Lời giải



Xét đường tròn (O), ta có:

$\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn cung lớn AB.

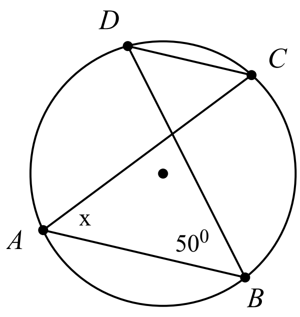
nên $\widehat{AMB}=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{AmB}$ (số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn).

$=\frac{1}{2}\left(360^0-sd\,\overset{\frown}{AMB}\right)$

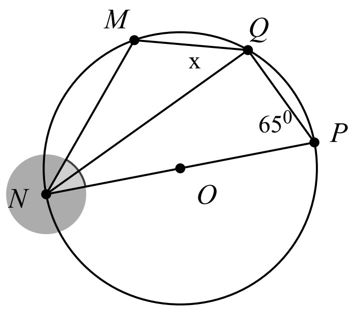
$=\frac{1}{2}\left(360^0-\widehat{AOB}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(360^0-110^0\right)=125^0$.

Bài toán 7. Tính số đo x trong mỗi trường hợp ở hình.

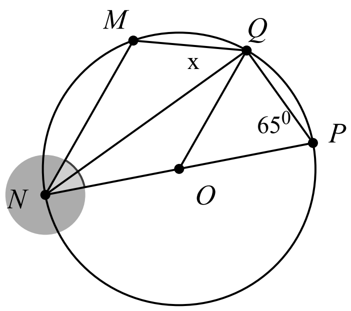


a)



b)

Lời giải



Xét hình a), ta có: $AB // CD$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{B} = 50^0$ (cặp góc so le trong)

Xét đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D, ta có:

Do hai góc nội tiếp $\widehat{BAC}$ và $\widehat{BDC}$ cùng chắn cung nhỏ BC nên $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 50^0$ hay $x = 50^0$
.

Xét hình b), (xem hình vẽ)

Nối O với Q, xét tam giác NQP có: $OQ = ON = OP$ hay $OQ = \dfrac{1}{2}NP$

Do đó tam giác NQP vuông tại Q hay $NQP = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{PNQ} = 90^0 - \widehat{NQP} = 90^0 - 65^0 = 25^0$

Mà $\widehat{MNQ} = \widehat{PNQ} = 25^0$ (gt)

$\Rightarrow sd\,\overset{\frown}{MQ} = 50^0$ (số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn).

Ta có $\widehat{NPQ}$ là góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{QMN}$ mà $\widehat{NPQ} = 65^0$

$\overset{\frown}{QMN} = 2.65^0 = 130^0$ (số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn).

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{MN} = 130^0 - 50^0 = 80^0$

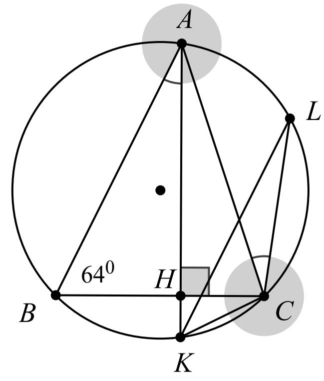
$\Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MN} = 40^0$

Bài toán 8. Ba điểm A, B, C thuộc đường tròn (O) sao cho $\widehat{ABC} = 64^0$. Từ A vẽ AH vuông góc với BC và AH cắt đường tròn (O) tại K.

a) Tính $\widehat{AKC}, \widehat{BAK}$;

b) Gọi KL là một dây cung song song với dây AB. Tính $\widehat{ACL}$.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{AKC} = \widehat{ABC} = 64^0$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

Tam giác AHB vuông tại H (gt) có $\widehat{ABC} = 64^0$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{BAH} = 90^0 - \widehat{ABC} = 90^0 - 64^0 = 26^0$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BK).

b) Ta có: $\widehat{ACL} = \widehat{AKL}$ (1) (góc nội tiếp cùng chắn cung AL).

mà $KL // AB \Rightarrow \widehat{AKL} = \widehat{BAL}$ (2) (cặp gocso le trong)

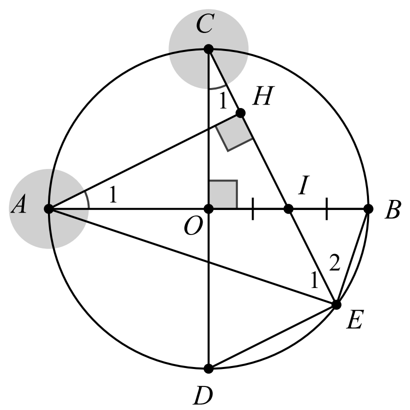
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ACL} = \widehat{BAK} = 26^0$

Bài toán 9. AB và CE là hai đường kính vuông góc của đường tròn $(O;R)$. Kẻ dây CE qua trung điểm I của OB. AE cắt CE ở F.

a) Tính độ dài DF.

b) Kẻ đường cao AH của tam giác ACE. Tính diện tích tam giác ACE.

Lời giải



a) I là trung điểm của $OB \Rightarrow IO = IB = \dfrac{OB}{2} = \dfrac{R}{2}$

$\Rightarrow AI = AO + OI = R + \dfrac{R}{2} = \dfrac{3R}{2} \Rightarrow \dfrac{AI}{BI} = \dfrac{3R}{2} : \dfrac{R}{2} = 3$

Lại có $AB \perp CD$ tại O (gt) $\Rightarrow \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB} \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{E_2}$

ΔAEB có EI là phân giác ta có: $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{IA}{TB} = 3$

Dễ thấy $\Delta AOF \sim \Delta AEB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{OA}{OF}=\dfrac{EA}{EB}=3 \Rightarrow OF=\dfrac{OA}{3}=\dfrac{R}{3} \Rightarrow FD=\dfrac{2R}{3}$

b) Xét tam giác vuông COI theo định lý Pythagore ta có:

$CI^2=CO^2+OI^2=R^2+\left(\dfrac{R}{2}\right)^2=\dfrac{5R^2}{4} \Rightarrow CI=\dfrac{R\sqrt{5}}{2}$

$cosC_1=\dfrac{OC}{CI}=\dfrac{R}{\dfrac{R\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Ta có: $\widehat{A_1}=\widehat{C_1}$ (cùng phụ cới $\widehat{I_1}$) $\Rightarrow \cos A_1=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác vuông AHI ta có $AH=AI\cos A_1=\dfrac{3R\sqrt{5}}{5}$

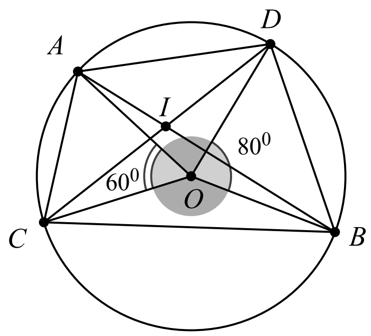
ΔCED vuông tại E (CD là đường kính)

Ta có $CE=CD.\cos C_1=2R.\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{4R\sqrt{5}}{5}$

Vậy $S_{ACE}=\dfrac{1}{2}CE.AH2=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4R\sqrt{5}}{5}.\dfrac{3R\sqrt{5}}{5}=\dfrac{6R^2}{5}$

II. Chứng minh

Bài toán 10. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB,CD cắt nhau tại điểm I nằm trong (O) (Hình vẽ)



a) Biết rằng $\widehat{AOC}=60^0,\widehat{BOD}=80^0$. Tính số đo của góc AID.

b) Chứng minh rằng $IA.IB=IC.ID$

Lời giải

a) (Xem hình vẽ)

Xét đường tròn (O). Nối B với C ta có góc nội tiếp $\widehat{ABC}$ và góc ở tâm cùng chắn cung nhỏ AC nên $\widehat{ABC}=\dfrac{1}{2}\widehat{AOC}=\dfrac{1}{2}.60^0=30^0$.

Tương tự với góc nội tiếp $\widehat{BCD}$ và góc ở tâm $\widehat{BOD}$.

Ta có: $\widehat{BCD}=\dfrac{1}{2}\widehat{BOD}=\dfrac{1}{2}\cdot 80^\circ=40^\circ$.

Xét tam giác BIC, ta có:

$\widehat{BIC}=180^\circ-\left(\widehat{BCD}+\widehat{ABC}\right)$

$\widehat{BIC}=180^\circ-\left(40^\circ+30^\circ\right)$

$\widehat{BIC} = 110^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{BIC} = 110^\circ$ (đối đỉnh)

b) Nối A với C, B với D.

Xét tam giác AIC và tam giác BID có $\widehat{CAB}$ và $\widehat{CDB}$ là hai góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ BC nên $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ (*)

Tương tự $\widehat{ACD}$ và $\widehat{ABD}$ là hai góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ AD nên $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}(**)$

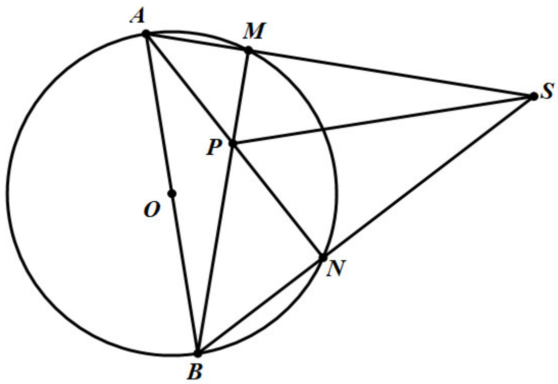
Từ $\left(^*\right)$ và $\left(^{**}\right) \Rightarrow \Delta ACI \backsim \Delta DBI$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{IA}{IC} = \dfrac{ID}{IB}$

$\Rightarrow$ IA.IB = IC.ID (đpcm)

Bài toán 11. Cho đường tròn (O), đường kính AB và điểm S nằm ngoài (O). Cho hai đường thẳng SA, SB lần lượt cắt (O) tại M (khác A) và N (khác B). Gọi P là giao điểm của BM và AN (hình vẽ). Chứng minh rằng SP vuông góc với AB.

Lời giải



a) (Xem hình vẽ).

Nối O với M, O với N

Ta có $OM = OA = OB$ hay $OM = \dfrac{1}{2}AB$

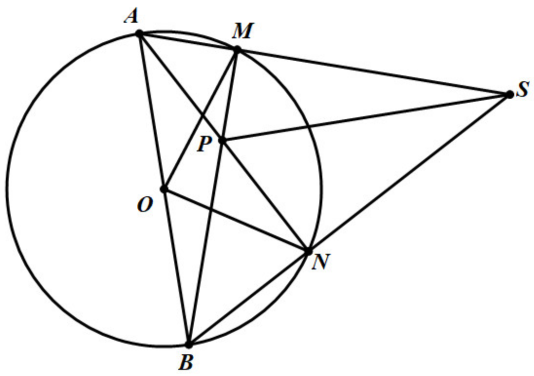
Chứng minh tương tự, ta có tam giác ABN vuông tại N $\Rightarrow AN \perp SB$ hay BM và AN là hai đường cao của tam giác SAB. Mà SA và SB cắt nhau tại P nên P là trực tâm của tam giác SAB $\Rightarrow SP \perp AB$. (đpcm).

Bài toán 12. Cho $\Delta ABC(AB < AC)$ nội tiếp trong đường tròn (O). Lấy D trên cạnh BC, AD cắt cung BC ở E. Chứng minh rằng.

a) $\widehat{AEC} > \widehat{AEB}$;

b) $AB.CD = AD.CE$

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{AEC}=\widehat{ABC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$) và $\widehat{AEB}=\widehat{ACB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$) mà $\widehat{ABC}>\widehat{ACB}$ (vì $AB<AC$)

Do đó $\widehat{AEC}>\widehat{AEB}$

b) Xét ΔABD và ΔCED có: $\widehat{ABD}=\widehat{DEC}$ (cmt) $\widehat{BAE}=\widehat{BCE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

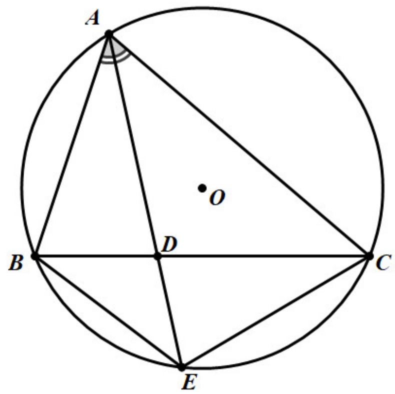
Vậy $\Delta ABD\backsim\Delta CED$ (g.g) $\Rightarrow\dfrac{AB}{CE}=\dfrac{AD}{CD}\Rightarrow AB.CD=AD.CE$ (đpcm).

Bài toán 13. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O). Tia phân giác của góc A cắt BC ở D và cắt đường tròn ở E. Chứng minh rằng:

a) $AB.AC=AD.AE$;

b) $BE^2=AE.DE$.

Lời giải



a) Ta có AE là phân giác của góc A nên $\widehat{BAE}=\widehat{CAE}\Rightarrow\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CE}$

Lại có $\widehat{ABC}=\widehat{AEC}$

(góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

Do đ6 $\Delta ABD\backsim\Delta AEC$ (g.g)

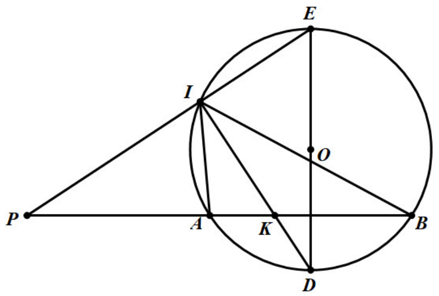
$\Rightarrow\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AD}{AC}\Rightarrow AB\cdot AC=AD\cdot AE$

b) Xét ΔABE và ΔBDE có: $\widehat{AEB}$ chung, $\widehat{BAE}=\widehat{EBC}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CE}$).

Do đó $\Delta ABE\backsim\Delta BDE(g\cdot g)\Rightarrow\dfrac{BE}{DE}=\dfrac{AE}{BE}\Rightarrow BE^2=AE.DE$.

Bài toán 14. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O), kẻ cát tuyến PAB. Gọi D là điểm chính giữa của cung AB. Kẻ đường kính DE, PE cắt (O) tại I, ID cắt AB tại K. Chứng minh rằng: $PA.KB = PB.KA$.

Lời giải



Ta có: $\overset\frown{DA} = \overset\frown{DB}(gt) \Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{BID}$ hay IK là phân giác của $\triangle AIB$.

Khi d6: $\dfrac{KA}{KB} = \dfrac{IA}{IB}$ (1)

Mặt khác $\widehat{EID} = 90^\circ$ (ED là đường kính) $\Rightarrow PI \perp KI$

Do đó PI là phân giác góc ngoài của ΔAIB.

Ta có: $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{IA}{IB}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{PA}{PB} = \dfrac{KA}{KB}$

$\Rightarrow PA.KB = PB.KA$

Nhân xét: Khi cát tuyến PAB trở thành đường kính và dây DE vuông góc với AB (ED không là đường kính). Ta có bài toán tương tự sau:

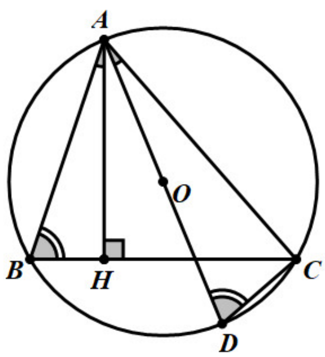
"Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây ED (không qua tâm O) vuông góc với AB.

Gọi M là điểm bất kì thuộc (O) và ME không song song với AB và K là giao điểm của MD với AB. P là giao điểm của tia ME vơi đường thẳng AB. Chứng minh rằng: $PB.KA = PA.KB$.

Hướng dẫn: Hãy chứng tỏ MA, MB lần lượt là phân giác trong, ngoài của ΔMPK.

Bài toán 15. Đỉnh A của tam giác ABC với các góc nhọn được nối với tâm O của đường tròn ngoại tiếp. Từ A vẽ đường cao AH. Chứng minh ràng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Lời giải



Kéo dài AO về phía O ta được đường kính AD.

Ta có: $\widehat{CDA} = \widehat{CBA}$

(cùng chắn cung nhỏ AC).

Mạt khác $AC \perp CD$ (vì $\widehat{ACD}$ chắn cung nửa đường tròn) hay ΔACD vuông tại C và ΔAHB vuông (giả thiết). Có $\widehat{CDA} = \widehat{CBA}$

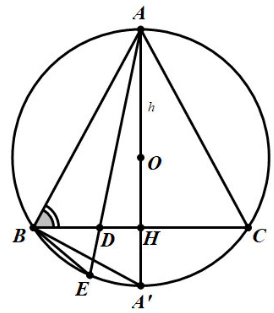
suy ra $\widehat{DAC} = \widehat{BAH}$ hay $\widehat{OAC} = \widehat{BAF}$

Bài toán 16. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$, qua A kẻ đường thẳng cắt cạnh BC tại D và cắt (O) tại E.

a) Chứng minh rằng $AB^2 = AD.AE$.

b) Chứng tỏ tích $AD.AE$ không đổi (không phụ thuộc vào vị trí điểm E) hãy tính tích $AD.AE$ theo R và đường cao h của tam giác kẻ từ A.

Lời giải



a) ΔABC cân tại $A \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$. $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{E}_1$ (góc nội tiếp chắn cung bằng nhau $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$)

Do đó hai tam giác ADB và ABE đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AE$$

b) $AD \cdot AE = AB^2$, không đổi.

Kẻ đường kính AA' của đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của AA' và BC ta có AH là đường cao của ΔABC.

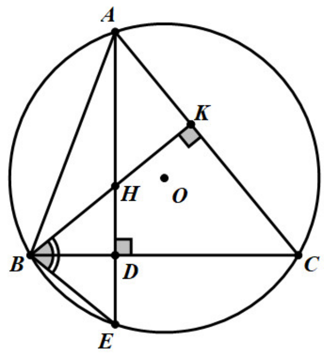
Xét tam giác vuông ABA' có đường cao BH. Áp dụng hệ thức $b^2 = a \cdot b'$ ta có $AB^2 = AA' \cdot AH = 2R.h$ (không đổi).

Bài toán 17. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao AD, BK cắt nhau tại H. AD cắt đường tròn (O) tại E.

a) Chứng minh BC là tia phân giác của $\widehat{HBE}$.

b) Chứng minh E đối xứng với H qua BC.

Lời giải



a) Ta co: $\widehat{CBK} = \widehat{CAD}$ (cùng phụ với $\hat{C}$)

$\widehat{CAD} = \widehat{CBE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CE}$)

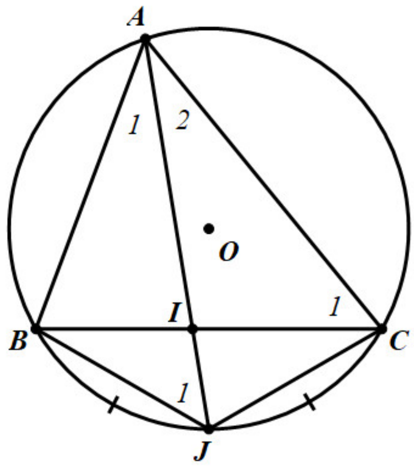
$\Rightarrow \widehat{CBK} = \widehat{CBE}$

Chứng tỏ BC là phân giác của $\widehat{HBE}$.

b) ΔHBE có đường cao BD đồng thời là đường phân giác (cmt). Do đó BD cũng là đường trung trực của đoạn HE hay E và H đối xứng nhau qua BC.

Bài toán 18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi J là điểm chính giữa của cung nhỏ BC và I là giao điểm của AJ với BC. Chứng minh rằng: $AI^2 = AB \cdot AC - IB \cdot IC$.

Lời giải



J là điểm chính giữa cung BC $\Rightarrow \overset{\frown}{JB} = \overset{\frown}{JC}$

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \Delta ABJ \backsim \Delta AIC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AI} = \dfrac{AJ}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AI \cdot AJ$ (1)

Ta lại co: $\widehat{J_1} = \widehat{C_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB).

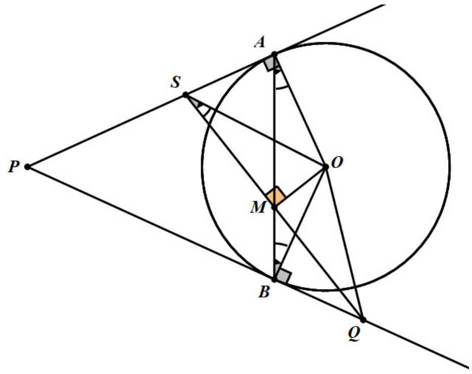
Do đó $\Delta BIJ \backsim \Delta AIC$ (g.g)

$\Rightarrow$ IB.IC = AI.IJ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB.AC - IBIC = AI(AJ - IJ) = AI^2$

Bài toán 19. Từ một diểm P nằm ngoài đường tròn $(O;R)$, kẻ hai tiếp tuyến PA, PB đến $(O)(A, B$, là hai tiếp điểm). Trên dây AB lấy M bất kì. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với OM cắt PA tại S và PB tại Q. Chứng minh rằng: $MS = MQ$.

Lời giải



Ta có $PA \perp OA$ hay $SA \perp OA$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{SAO} = 90^\circ$

nên A thuộc đường tròn đường kính SO.

$OM \perp SQ(gt) \Rightarrow \widehat{SMO} = 90^\circ$

nên M thuộc đường tròn đường kính SO.

Do đó bốn điểm A, O, M, S cùng nằm trên một đường tròn.

Nối SO ta có $\widehat{MSO} = \widehat{MAO}$ (1) (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MO}$).

Dễ thấy tứ giác $OMBQ$ nội tiếp $\left(\widehat{OMQ} = \widehat{OPQ} = 90^\circ\right)$

$\Rightarrow \widehat{MBO} = \widehat{MQO}$ (2) (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MO}$).

Lại có ΔAOB cân tại $O \Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO}$ (3)

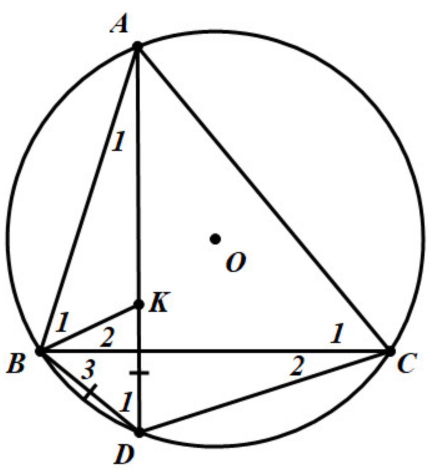
Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{MSO} = \widehat{MQO}$ hay ΔSOQ cân tại O có OM là đường cao nên OM cũng đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow SM = QM$.

Bài toán 20. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Một điểm D nằm trên cung nhỏ BC. Trên đoạn DA lấy $DK = DB$.

a) Chứng tỏ ΔBDK đều.

b) Chứng tỏ: $AD = BD + CD$.

Lời giải



a) ΔBDK cân $\left(DB = DK\right)$ có $\widehat{D_1} = \widehat{C_1} = 60^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$). Vậy ΔBDK đều.

b) ΔBDK đều (cmt) $\Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{B_3} = 60^\circ$ mà $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 60^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_3}$.

Lai có: $BK = BD = DK$ (cmt)

Xét ΔAKB và ΔCDB có:

$\widehat{B_1} = \widehat{B_3}$ (cmt)

$AB = CB$ (gt)

và $\hat{A}_1 = \hat{C}_2$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$)

Vậy $\Delta AKB = \Delta CDB$ (g.c.g)

$\Rightarrow AK = DC$ mà $AD = AK + KD \Rightarrow AD = BD + CD$

c) Xét ba điểm B, D, C có: $DB + DC \ge BC \Rightarrow 2\left(DB + DC\right) \ge 2BC$

mà $DB + DC = DA \Rightarrow DA + DB + DC \ge 2BC$ (không đổi)

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow D$ trùng B hoặc C.

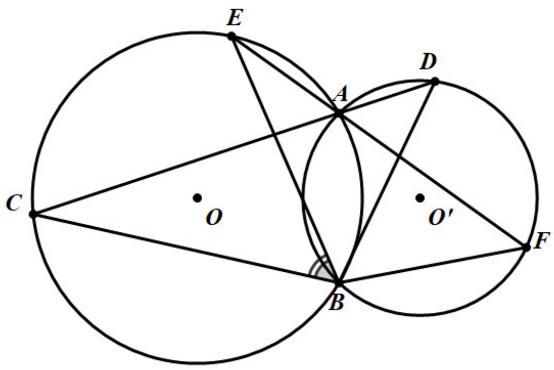
Vậy khi D trùng B hoặc trùng C thì $DA + DB + DC$ nhỏ nhất:

Bài toán 21. Cho hai đường tròn $\left(O\right)$ và ($O'\big)$ cắt nhau tại A và B. Qua A vẽ hai cát tuyến CAD và $EAF\left(C\right.$ và E thuộc $\left(O\right), D$ và F thuộc $\left(O'\right)$. Chứng minh rằng:

a) $BC.BF = BD.BE$.

b) ΔBCE và ΔBDF đồng dạng.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{BCA} = \widehat{BEA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$)

$\widehat{BDA} = \widehat{BFA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$).

Do đó $\Delta BCD \backsim \Delta BEF$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{BD}{BF} \Rightarrow BC \cdot BF = BD \cdot BE$

b) Theo chứng minh câu a: $\Delta BCD \backsim \Delta BEF$

$\Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{EBF}$

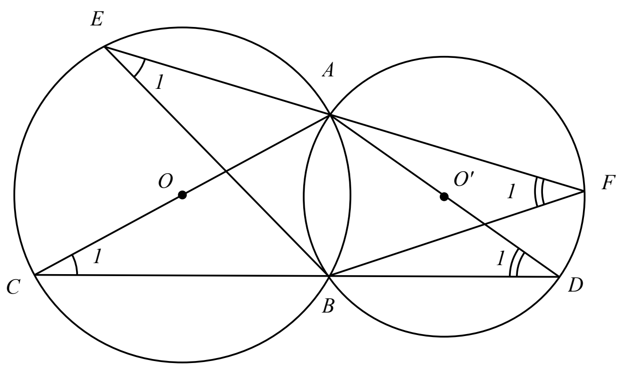
$\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{FBD}$.

Bài toán 22. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ các đường kính AC và AD của hai đường tròn.

a) Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng.

b) Một cát tuyến qua A cắt (O) tại E và (O') tại F. Chứng minh rằng: $AC.BF = AD.BE$

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{ABC} = 90°$ (AC là đường kính) $\Rightarrow AB \perp CB$

Chứng minh tương tự $AB \perp DB$

Suy ra C, B, D thẳng hàng.

b) Có $\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ (Góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

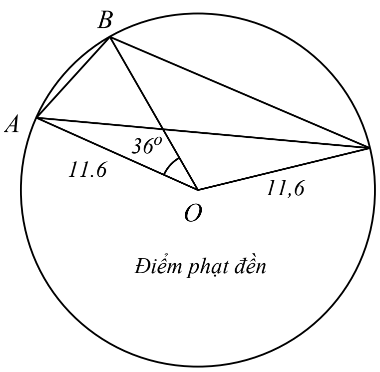
$\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ (Góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

Do đó, $\Delta ACD \# \Delta BEF$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{BE} = \dfrac{AD}{BF} \Rightarrow AC.BF = AD.BE.$

III. Toán thực tế

Bài toán 23. Trên sân bóng, khi trái được đặt tại điểm phạt đền thì có góc sút bằng $30°$ và trái bóng cách mỗi cọc gôn $11,6\,\text{m}$. Hỏi khi trái bóng đặt ở vị trí cách điểm phạt đền $11,6\,\text{m}$ thì góc sút bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi A, B là chân hai cọc gôn và O là điểm phạt đền.

Ta có $OA = OB = OC = 11,6\,\text{m}$

Vậy A, B, C nằm trên đường tròn tâm O bán kính $11,6\,\text{m}$ và góc ở tâm $\widehat{AOB} = 36°$

Do đó, góc nội tiếp $\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}.36° = 18°$.

Vậy góc sút bằng $18°$

☙ HẾT ❧

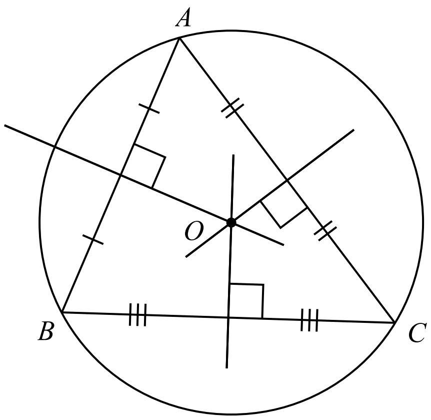
CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

Bài 28. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP CỦA MỘT TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường tròn ngoại tiếp một tam giác

Đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Khi đó tam giác gọi là tam giác nội tiếp đường tròn.

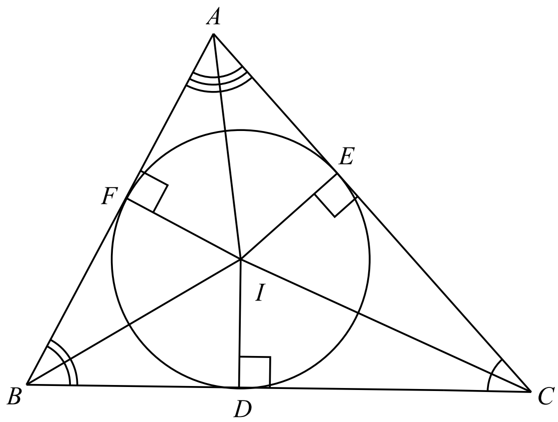


- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác.

- Bán kính là khoảng cách từ giao điểm của ba đường trung trực đến một điểm bất kì của tam giác.

2. Đường tròn nội tiếp một tam giác

Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác. Khi đó tam giác được gọi là tam giác ngoại tiếp đường tròn.



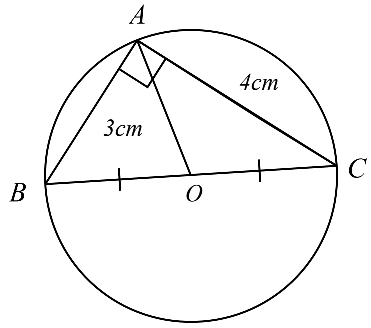
- Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của ba đường phân giác trong.
- Bán kính bằng khoảng cách từ giao điểm đó đến một cạnh bất kì của tam giác.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tính toán

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3\,\text{cm}$, $AC = 4\,\text{cm}$. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải



Gọi O là trung điểm của cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC. Ta có AO là trung tuyến của tam giác vuông ABC nên $OA = \frac{1}{2}BC = OB = OC.$

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

là đường tròn có tâm O là trung điểm của BC.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên theo định

lí Pythagore, ta có:

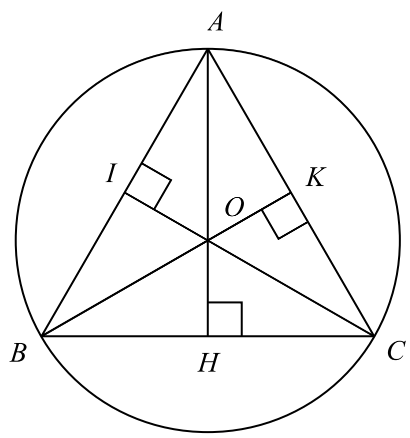
$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

$\Rightarrow BC = \sqrt{25} = 5\,(\text{cm})$

Vậy bán kính của đường tròn là $5:2 = 2,5\,(\text{cm})$

Bài toán 2. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh bằng a.

Lời giải:



Gọi O là giao điểm của ba đường trung trực của tamgiác đều ABC thì O đồng thời là trọng tâm và trực tâm của tam giác.

Ta có $OA = OB = OC = \frac{2}{3}AH$ (H là chân đường cao kẻ từ A)

Do đó, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều $ABC.$

Mặt khác, xét tam giác AHB vuông tại H.

Theo định lí Pythagore, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - HB^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$ (Tính chất trọng tâm)

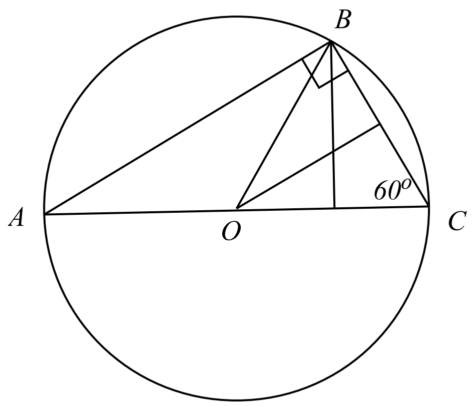
Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm tam giác và có bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Bài toán 3: Cho tam giác ABC vuông tại B có $\widehat{C} = 60°, BC = 3\,\text{cm}$ và O là trung điểm AC. Xác định tâm, bán kính và vẽ đường tròn ngoại tiếp của

a) ΔABC;

b) ΔBCD.

Lời giải



a)Tam giác ABC vuông tại B có $\widehat{C} = 60°$ nên tam giác ABC là nửa tam giác đều.

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 30° \Rightarrow AC = 2BC = 2.3 = 6\,(\text{cm})$

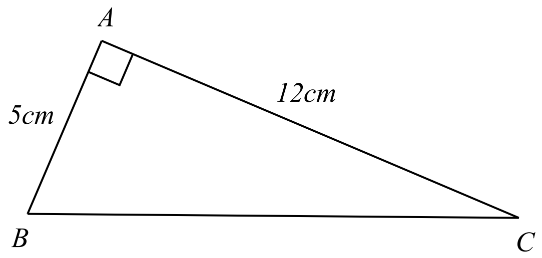
Theo bài toán 1 ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $\frac{AC}{2} = \frac{6}{2} = 3\,(\text{cm})$ và tâm O là trung điểm của cạnh huyền AC.

b) Dễ thấy tam giác BCD đều (Theo bài toán 2)

Gọi I là trọng tâm của tam giác đều BCD, ta có I là tâm của đường tròn ngoại tiếp vì cạnh của tam giác đều BCD là $3\,(\text{cm})$ nên bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều BCD là $\frac{3\sqrt{3}}{3}$ (Xem lời giải bài toán 2)

Bài toán 4. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 5\,\text{cm}$, $AC = 12\,\text{cm}$

Lời giải:



Tam giác ABC vuông tại A (GT)

Theo định lí Pythagore, ta có:

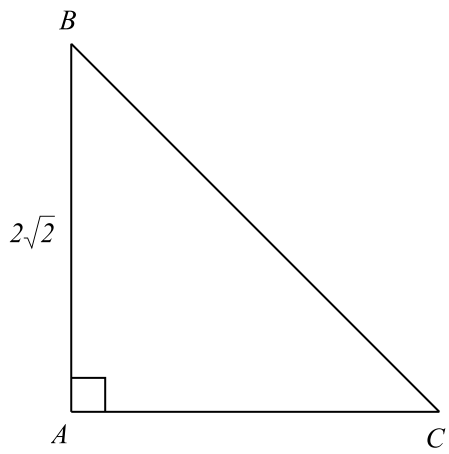
$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

$\Rightarrow BC = \sqrt{169} = 13(\text{cm})$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A là: $\dfrac{BC}{2} = \dfrac{13}{2}(\text{cm})$ (nửa cạnh huyền BC)

Bài toán 5. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Tính bán kính của (O), biết rằng ΔABC vuông cân tại A và có cạnh bằng $2\sqrt{2}$ cm.

Lời giải



(Xem hình vẽ)

Ta có tam giác ABC vuông cân tại A (GT)

Theo định lí Pythagore, ta có:

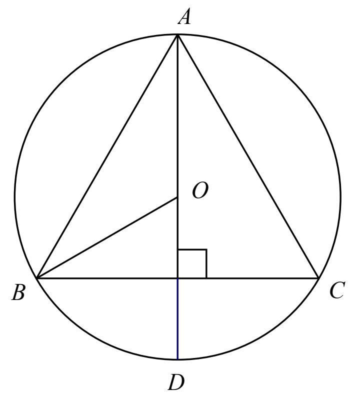
$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 16$

$\Rightarrow BC = \sqrt{16} = 4(\text{cm})$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A có độ dài bằng nửa cạnh huyền BC tức là $2(\text{cm})$.

Bài toán 6. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng đường tròn (O) có bán kính bằng $3\,\text{cm}$. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải



Kẻ đường cao AH vì tam giác ABC đều (gt) nên đường cao AH đồng thời là đường phân giác của góc BAC, ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{CAH} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$

Kéo dài AH cắt đường tròn (O) tại D. Khi đó $\widehat{BOD}$ và $\widehat{BAD}$ lần lượt là góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$) $\Rightarrow \widehat{BOD} = 2.\widehat{BAD} = 2.30^\circ = 60^\circ.$

Tam giác BHO vuông tại H có cạnh huyền $OB = 3\,\text{cm}$ (gt) và $\widehat{BOD} = 60^\circ.$

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $BH = OB.\sin BOH = 3.\sin 60^\circ = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (cm)

Vì ΔABC đều nên đường cao AH đồng thời là trung tuyến hay H là trung điểm của $BC.$

$\Rightarrow BC = 2BH = 2.\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (cm)

Xét tam giác AHB vuông tại H có cạnh huyền: $AB = BC = 3\sqrt{3}\,(\text{cm})$ và $\widehat{BAH} = 30^\circ(\text{cmt})$

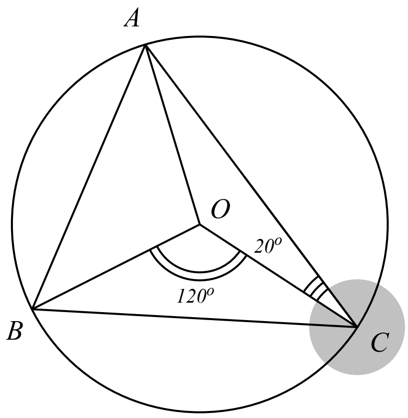
Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$AH = AB.\cos BAH = 3\sqrt{3}.\cos 30^\circ = \dfrac{9}{2}(\text{cm})$

Gọi S_{ABC} là diện tích tam giác đều, ta có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{9}{2}.3\sqrt{3} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}(\text{cm}^2).$

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng $\widehat{BOC} = 120^\circ$ và $\widehat{OCA} = 20^\circ$. Tính số đo các góc của tam giác $ABC.$

Lời giải



Xét đường tròn (O), ta có $\widehat{BAC}$ và $\widehat{BOC}$ và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$. nên $\widehat{BAC}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}=\frac{1}{2}.120°=60°$.

Tam giác $\widehat{BOC}$ cân tại O có góc ở đỉnh $\widehat{BOC}=120°$ (GT)

$$\Rightarrow \widehat{OBC}=\widehat{OCB}=\frac{180°-\widehat{BOC}}{2}=\frac{180°-120°}{2}=30°.$$

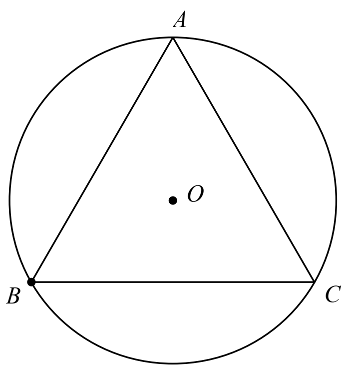
Do đó, $\widehat{BCA}=\widehat{OCB}+\widehat{OCA}=30°+20°=50°$.

Xét tam giác ABC, ta có:

$$\widehat{ABC}=180°-\left(\widehat{BAC}+\widehat{BCA}\right)$$
$$=180°-\left(60°+50°\right)=70°$$

Vậy số đo các góc của tam giác ABC là: $\widehat{BAC}=60°;\widehat{ABC}=70°;\widehat{BCA}=50°$.

Bài toán 8. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 3cm và nội tiếp đường tròn (O) như hình vẽ.

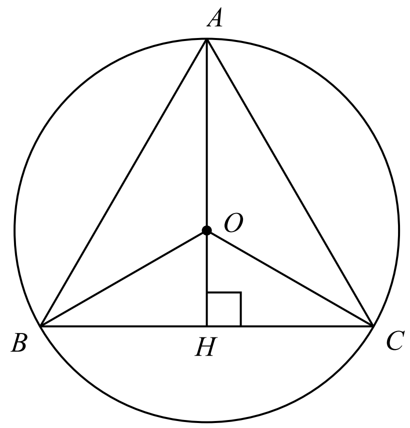


a) Tính bán kính R của đường tròn (O).

b) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung BC và cung nhỏ BC.

Hướng dẫn: Ngoài cách giải như bài toán 2, chúng ta sẽ có cách khác như sau:

Lời giải



a)Kẻ đường cao AH của tam giác đều ABC có

cạnh 3cm ta có $AH = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(\text{cm})$

Vì ΔABC đều nên trực tâm O cùng trùng với

trọng tâm, khi đó $OA = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\,(\text{cm})$

Vậy bán kính R của đường tròn (O) là: $OA = \sqrt{3}\,(\text{cm})$

b) Gọi S_{ABC} là diện tích tam giác đều ABC cạnh 3cm, ta có: $S_{ABC} = \dfrac{3^2.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}(\text{cm}^2)$.

Gọi S là diện tích hình tròn (O) ta có:

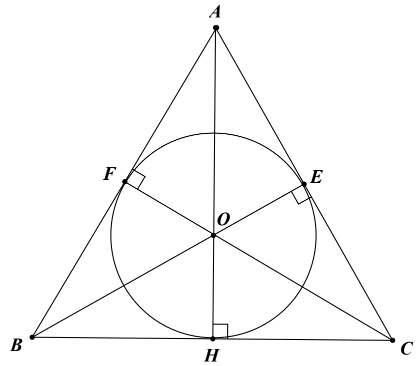
$$S = \pi.\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3\pi\left(\text{cm}^2\right)$$

Do đó diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung BC và cung nhỏ BC là

$$S_{vp} = \frac{1}{3}\left(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4}\right) = 1{,}8\left(\text{cm}^2\right)$$

Bài toán 9. Xác định tâm và bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng a.

Lời giải



Ta có tam giác ABC đều.

Gọi O là trực tâm của tam giác đồng thời là giao điểm ba đường phân giác trong.

Vậy O là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC.

Ta có $\widehat{BAH}=\widehat{CAH}=\dfrac{60^\circ}{2}=30^\circ$.

Xét tam giác AHB vuông tại H có cạnh huyền $AB=a$, $\widehat{BAH}=30^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH=AB.\cos\widehat{BAH}=a.\cos30^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

(*Lưu ý*: Có thể kết luận ngay $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ vì ΔABC đều cạnh a).

Mặt khác tam giác ABC đều nên trực tâm O cũng là trọng tâm, suy ra

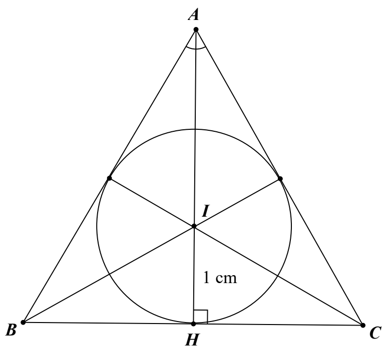
$$OH=\frac{1}{3}\cdot AH=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Nhận xét: Trong tam giác đều, tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp trùng nhau.

Bài toán 10. Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết rằng bán kính của (I) bằng 1cm.

Lời giải



I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC nên là giao điểm của ba đường phân giác và I đồng thời là trọng tâm của tam giác đều ABC, khi đó AH là đường trung tuyến.

Ta có: $AI=2IH=2.1=2(\text{cm})$

Suy ra $BI=CI=AI=2(\text{cm})$.

Xét tam giác BHI vuông tại H, có cạnh huyền $BI=2(\text{cm})$, $\widehat{IBH}=30^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BH=BI.\cos\widehat{IBH}=2.\cos30^\circ=2.\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}(\text{cm}).$$

Suy ra $BC = 2.BH = 2.\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\text{cm}\right)$.

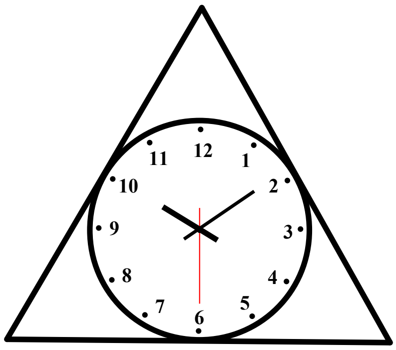
Độ dài các cạnh cuả tam giác đều ABC ngoại tiếp $\left(I, 1\text{cm}\right)$ bằng $2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

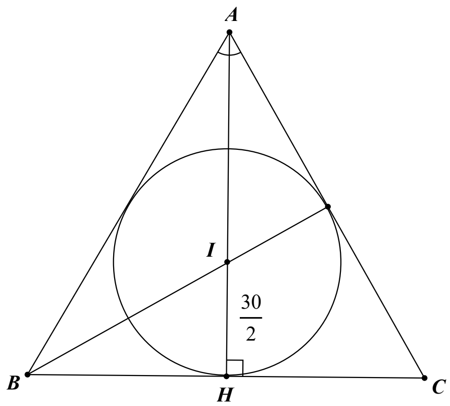
II. Bài toán thực tế

Bài toán 11. Người ta muốn làm một khung gỗ hình tam giác đều để đặt vừa khít một chiếc đồng hồ hình tròn có đường kính $30\,\text{cm}$ (Hình vẽ). Hỏi độ dài các cạnh (phía bên trong) của khung gỗ phải bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn: Giải tương tự bài toán 10.

Lời giải





Ta có bán kính của hình tròn nội tiếp tam giác đều ABC là $\frac{30}{2} = 15\left(\text{cm}\right)$.

Tam giác ABC đều nên giao điểm I của ba đường phân giác cũng là trực tâm và trọng tâm của tam giác hay AH là đường trung tuyến.

Xét tam giác BHI vuông tại H có cạnh huyền $BI = AI = 30\,\text{cm}$ và $\widehat{HBI} = 30^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

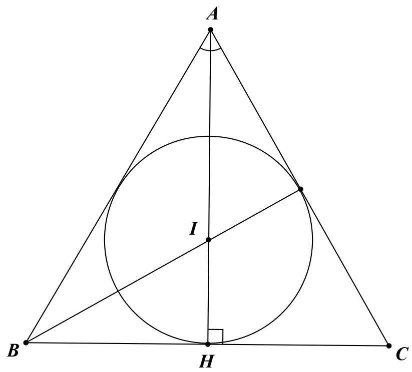
$BH = BI.\cos\widehat{HBI} = 30.\cos 30^\circ = 15\sqrt{3}\ \left(\text{cm}\right)$

Suy ra $BC = 2.15\sqrt{3} = 30\sqrt{3}\left(\text{cm}\right)$.

Vậy độ dài các cạnh (phía bên trong) của khung gỗ phải bằng $30\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Bài toán 12. Một mảnh vườn có dạng hình tam giác đều ABC cạnh $12\,\text{m}$. Người ta muốn trồng hoa ở phần đất bên trong đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính diện tích phần đất trồng hoa đó.

Lời giải



Gọi I là tâm đường trò nội tiếp tam giác đều ABC.

Kẻ đường cao AH, khi đó tâm I của đường tròn nội tiếp (giao điểm của ba đường phân giác cũng là trọng tâm).

Ta có AH là đường trung tuyến suy ra H là trung điểm của BC hay $BH = CH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{12}{2} = 6\,(\text{m})$.

Xét tam giác BHI vuông tại H. Có $BH = 6\,\text{m}$ và $\widehat{IBH} = 30^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$IH = BH.\tan\widehat{IBH} = 6.\tan 30^\circ = 2\sqrt{3}\,(\text{m})$.

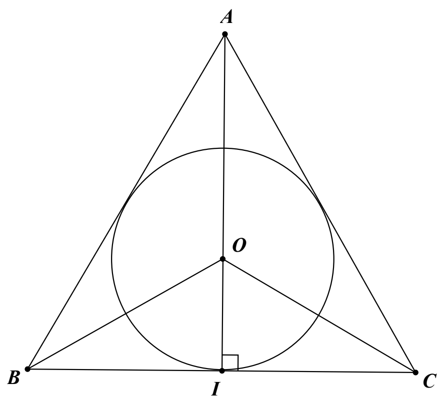
Vậy bán kính của phần đất trồng hoa là $2\sqrt{3}\,(\text{m})$.

Do đó diện tích phần đất trồng hoa là $S = \pi.\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12\pi\,\left(\text{m}^2\right)$.

Bài toán 13. Ba vị trí A B, C ở một công viên là ba đỉnh của một tam giác đều cạnh $15\,\text{m}$. Người ta cần chọn vị trí O cách đều ba vị trí A, B, C để làm một cột đèn. Tính khoảng cách từ vị trí O đến mỗi vị trí A, B, C.

Lời giải

(Xem hình vẽ)



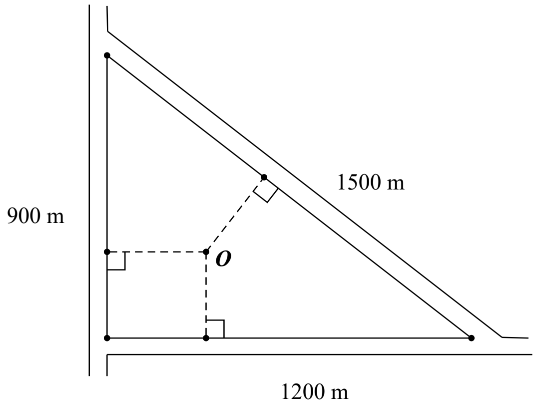
Gọi O là vị trí cách đều ba vị trí A, B, C nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (giao điểm của ba đường trung trực).

Do ΔABC đều (gt) nên O đồng thời là trực tâm và trọng tâm của tam giác hay AH là đường cao của tam giác ABC đều cạnh $15\,\text{m}$.

Suy ra $AH = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}(\text{m})$ vì AH đồng thời là trung tuyến của ΔABC có trọng tâm O suy ra $OA = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{15\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}(\text{m})$.

Vậy khoảng cách từ vị trí O đến mỗi vị trí A, B, C là $5\sqrt{3}(\text{m})$.

Bài toán 14. Người ta vẽ bảng quy hoạch của một khu định cư được bao xung quanh bởi ba con đường thẳng lập thành một tam giác với độ dài các cạnh là $900\,\text{m}$, $1200\,\text{m}$ và $1500\,\text{m}$ (Hình vẽ).

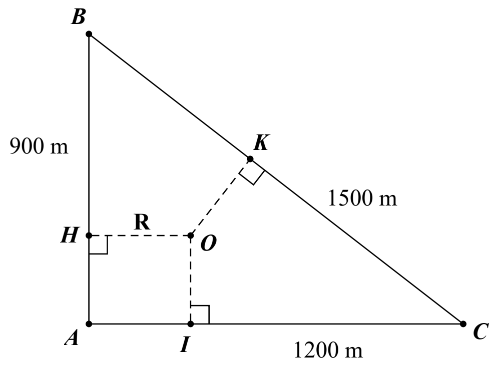


a) Tính chu vi và diện tích của phần đất giới hạn bởi tam giác trên.

b) Họ muốn xây dựng một khách sạn bên trong khu dân cư cách đều cả ba con đường đó. Hỏi khi đó khách sạn sẽ cách một con đừng một khoảng là bao nhiêu?

Lời giải

(Xem hình vẽ)



a) Tam giác ABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ $\left(1500^2 = 900^2 + 1200^2\right)$

Theo định lý Pithagore đảo, tam giác ABC vuông tại A.

Phần đất giới hạn là tam giác vuông, gọi P là chu vi, ta có:

$P = AB + AC + BC = 900 + 1200 + 1500 = 3600(\text{m})$

Và diện tích $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC = \dfrac{1}{2}\cdot 900\cdot 1200 = 540000\left(\text{m}^2\right)$.

b) Gọi O là nơi xây dựng khách sạn và khoảng cách từ khách sạn đến ba con đường là $OH = OI = OK = R$.

Ta có: $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$ (trong đó S_{AOB}, S_{AOC}, S_{BOC} lần lượt là diện tích các tam giác AOB, AOC, BOC).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}R.AB + \frac{1}{2}R.AC + \frac{1}{2}R.BC$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}R.(AB + AC + BC)$$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}R.P$ (S_{ABC} là diện tích ΔABC và P là chu vi)

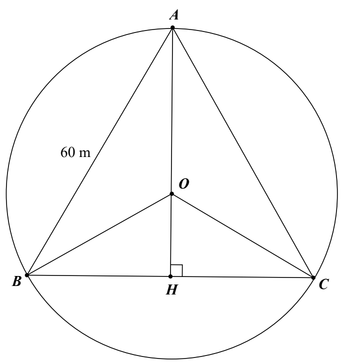
Suy ra $R = \frac{2.S_{ABC}}{P} = \frac{2.540000}{3600} = 300\ (\text{m})$.

Khi đó khách sạn sẽ cách mỗi con đường $300\ (\text{m})$.

Bài toán 15. Trong một khu vui chơi có dạng hình tam giác đều với cạnh bằng $60\ \text{m}$, người ta muốn tìm một vị trí đặt bộ phát sóng wifi sao cho ở chỗ nào trong khu vui chơi đó đều có thể bắt được sóng. Biết rằng bộ phát sóng đó có tầm phát sóng tối đa là $50\,\text{m}$. Hỏi rằng có thể tìm được vị trí để đặt bộ phát sóng như vậy không?

Lời giải

(Xem hình vẽ)



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Kẻ đường cao AH. Vì ΔABC đều nên đường cao đồng thời là đường trung tuyến nên H là trung điểm của BC, ta có:

$$HB = HC = \frac{BC}{2} = \frac{60}{2} = 30\ (\text{m})$$

Tam giác AHC vuông tại H. Theo định lý Pithagore ta có $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 60^2 + 30^2$

Suy ra $AB = \sqrt{60^2 + 30^2} = 30\sqrt{3}\ (\text{m})$.

Ta có: $OA = \frac{2}{3}AH$ (tính chất trọng tâm)

Suy ra $OA = \frac{2}{3} \cdot 30\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\ (\text{m})$.

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC cạnh $60\,\text{m}$ là

$OA = 20\sqrt{3} \approx 34,6\,(\text{m}) < 50\,(\text{m})$.

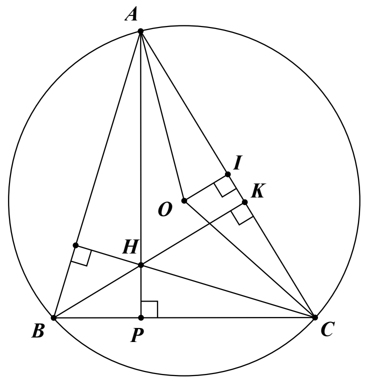
Vậy có thể đặt vị trí bộ phát sóng tại O.

III. Chứng minh

Bài toán 16. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Lời giải

(Xem hình vẽ)



Gọi OI là đường cao của tam giác AOC cân tại O, ta có OI đồng thời là đường phân giác của góc $\widehat{AOC}$ hay $\widehat{AOI} = \widehat{COI} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$.

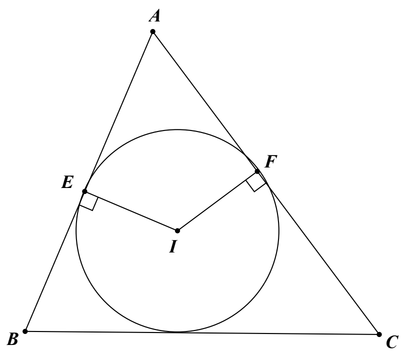
Xét đường tròn (O) ta có $\widehat{ABC}$ và $\widehat{AOC}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC nên $\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AOC}}{2}$ hay $\widehat{ABC} = \widehat{AOI}$.

Hai tam giác APB và AIO đều vuông tại P và I mà $\widehat{ABP} = \widehat{AOI}$ (chứng minh trên)

Nên suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau).

Bài toán 17. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với các tiếp điểm trên các cạnh $AB,\ AC$ lần lượt là $E,\ F$. Chứng minh rằng $\widehat{EIF} + \widehat{BAC} = 180°$.

Lời giải



Ta có E, F lần lượt là hai tiếp điểm trên các cạnh AB, AC (gt) suy ra $\widehat{AEI} = \widehat{AFI} = 90°$.

Xét tứ giác $AEIF$ có $\widehat{AEI} + \widehat{AFI} = 180°$

Suy ra $\widehat{EIF} + \widehat{BAC} = 360° - \left(\widehat{AEI} + \widehat{AFI}\right) = 360° - 180° = 180°$. (đpcm)

Bài toán 18. Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AD = 2R$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh:

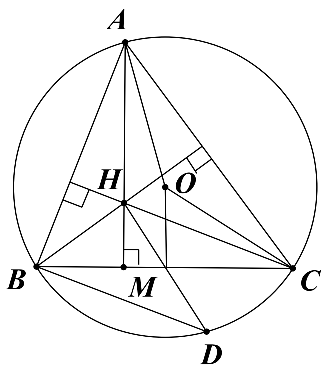
a) $DB \perp AB$ và $CD \perp AC$.

b) Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

c) $AC^2 + BH^2 = 4R^2$.

d) Ba điểm H, M m D thẳng hàng và $AH = 2OM$.

Lời giải



a) Xét tam giác ABD, ta có: $OB = OA = OD(= R)$ hay $OB = AD$

Chứng tỏ ΔABD vuông tại B

Hay $DB \perp AB$ (đpcm)

Chứng minh tương tự ta có $CD \perp AC$.

b) Ta có $BH // DC$ (cùng vuông góc với AC)

Tương tự $CH // BD$ (cùng vuông góc với AB)

Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành (Các cạnh đối song song)

c) Ta có tam giác ACD vuông tại C (chứng minh trên)

$AC^2 + DC^2 = AD^2$ (định lí pythagore)

Mà $DC = BH$ (cmt) $AC^2 + BH^2 = AD^2 = (2R)^2 = 4R^2$.

d) Ta có M là trung điểm của BC (gt) mà tứ giác $BHCD$ là hình bình hành (cmt) nên đường chéo thứ hai HD phải qua trung điểm M hay ba điểm H, M, D thẳng hàng.

* Xét tam giác AHD có O là trung điểm của AD (gt)

M là trung điểm của HD (cmt) nên OM là đường trung bình của tam giác AHD
$\Rightarrow AH = 2.OM$

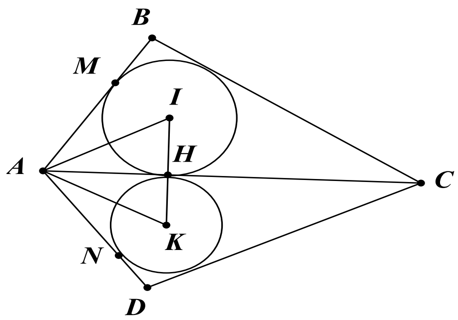
Bài toán 19. Cho tứ giác $ABCD$ có các tam giác ABC và ADC lần lượt ngoại tiếp các đường tròn (I) và (K) sao cho hai đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng AC tại điểm H thuộc đoạn thẳng AC. Giả sử đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AB tại M, đường tròn (K) tiếp xúc với cạnh AD tại N (Hình vẽ). Chứng minh:

a) Ba điểm I, H, K thẳng hàng

b) $AM = AN$

c) $\widehat{IAK} = \frac{1}{2}\widehat{BAD}$

Lời giải



a) Đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AC tại điểm H (gt) $\Rightarrow IH \perp AC$.

Tương tự đường tròn (K) tiếp xúc với cạnh AC tại điểm H (gt) $\Rightarrow KH \perp AC$.

Suy ra ba điểm I, H, K thẳng hàng

b) Ta có: Đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AB tại M hay AM là tiếp tuyến của đường tròn (I)

Lại có AH là tiếp tuyến của đường tròn (I) (cmt)

$AM = AH$ (*) (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Chứng minh tương tự, ta có $AH = AN$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow AM = AN$

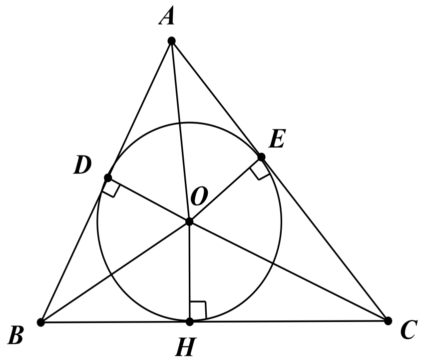
c) Ta có: $\widehat{IAK} = \widehat{IAH} + \widehat{HAK}$ mà $\widehat{IAH} = \frac{1}{2}\widehat{MAH}$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\widehat{HAK} = \frac{1}{2}\widehat{HAN} \Rightarrow \widehat{IAK} = \frac{1}{2}\widehat{HAN} = \frac{1}{2}\left(\widehat{MAH} + \widehat{HAN}\right) = \frac{1}{2}\widehat{MAN}$ hay $= \frac{1}{2}\widehat{BAD}$ (đpcm)

Bài toán 20. Cho tam giác ABC có diện tích S và ngoại tiếp đường tròn $(I;r)$.

Chứng minh rằng $S = \frac{1}{2}r(BC + CA + AB)$

Lời giải



Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp $(I; r)$ với các cạnh AB, AC và BC của tam giác ABC.

Ta có: $S = S_{AIB} + S_{AIC} + S_{BIC}$

$= \frac{1}{2} ID.AB + \frac{1}{2} IE.AC + \frac{1}{2} IF.BC$

Mà $ID = IE = IF = r$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2} r(BC + CA + AB)$ (đpcm).

⊂ HẾT ⊃

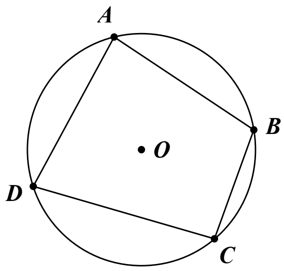
CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

BÀI 29. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Định nghĩa

Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (hoặc đơn giản là tứ giác nội tiếp) và đường tròn được gọi là ngoại tiếp tứ giác.



II. Tính chất

• Định lí: Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180^0

III. Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông

Hình chữ nhật và hình vuông là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tính toán

Bài toán 1. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Tính số đo của các góc còn lại của tứ giác trong mỗi trường hợp sau:

a) $\hat{A}=60^0, \hat{B}=60^0$

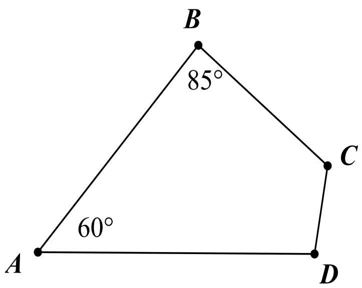
b) $\hat{A}=70^0, \hat{B}=90^0$

c) $\hat{A}=100^0, \hat{B}=60^0$

d) $\hat{A}=100^0, \hat{B}=80^0$

Lời giải

a) (Xem hình vẽ)



Ta có $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên $\hat{A}+\hat{C}=180^0$

Hay $60°+\widehat{C}=180°$

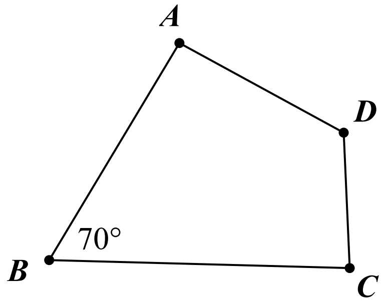
$\Rightarrow \widehat{C}=180°-60°=120°$

Tương tự: $\widehat{B}+\widehat{D}=180°$

$\Rightarrow \widehat{D}=180°-\widehat{B}$

$=180°-85°$

$=95°$



b)

Ta có $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên

$\hat{A}+\widehat{C}=180° \Rightarrow \hat{A}=180°-\widehat{C}$

$=180°-90°$

$=90°$

Töông töï: $\widehat{B}+\widehat{D}=180°$

$\Rightarrow \widehat{D}=180°-\widehat{B}$

$=180°-70°$

$=110°$

c) Bạn tự vẽ hình

Ta có $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên

$\hat{A}+\widehat{C}=180° \Rightarrow \hat{A}=180°-\widehat{C}$

$=180°-100°$

$=80°$

Töông töï: $\widehat{B}+\widehat{D}=180°$

$\Rightarrow \widehat{D}=180°-\widehat{B}$

$=180°-60°$

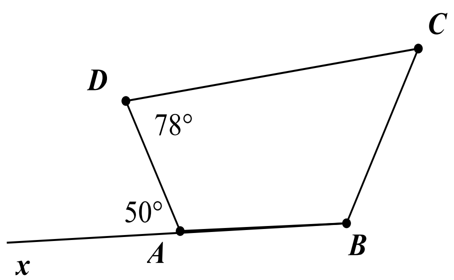
$=120°$

d) Đáp số: $\widehat{C}=180^0-\widehat{A}=180°-80°=100°$

$\widehat{B}=180°-\widehat{D}=180°-110°=70°$

Bài toán 2. Tính số đo các góc B và C của tứ giác ABCD trong hình vẽ. Biết tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn.

Lời giải



Ta có: $\widehat{BAD}=180°-\widehat{DAx}$ (kề bù)

$=180°-50°$

$=130°$

Ta có $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên

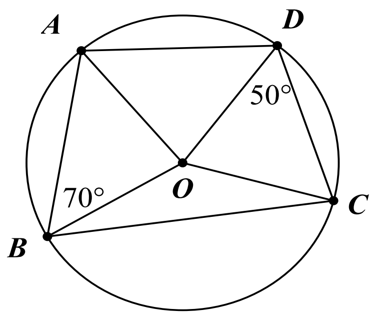
$$\widehat{A}+\widehat{C}=180° \Rightarrow \widehat{C}=180°-\widehat{A}$$
$$=180°-130°$$
$$=50°$$

Töông töï: $\widehat{B}+\widehat{D}=180°$

$$\Rightarrow \widehat{B}=180°-\widehat{D}$$
$$=180°-78°$$
$$=102°$$

Bài toán 3. Bức tranh treo tường có vẽ một tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O (hình vẽ). Cho biết $\widehat{ABC}=70°, \widehat{ODC}=50°$. Tìm góc AOD.

Lời giải



Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O)

Nên $\widehat{ADC}+\widehat{ABC}=180°$

Suy ra $\widehat{ADC}=180°-\widehat{ABC}=180°-70°=110°$

Mà $\widehat{ADC}=\widehat{ADO}+\widehat{ODC}$

$$\widehat{ADO}=\widehat{ADC}-\widehat{ODC}$$
$$=110°-50°$$
$$=60°$$

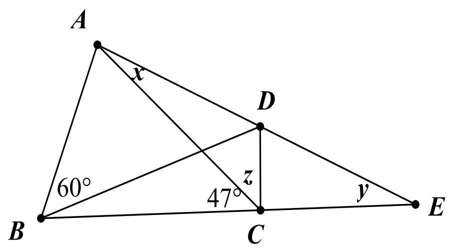
Tam giác AOD cân tại O có $\widehat{ADO}=60°$ (cmt) suy ra $\widehat{DAO}=60°$

$\widehat{AOD}=180°-2.60°=60°$

Vậy $\widehat{AOD}=60°$

Bài toán 4. Trong hình vẽ $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Tính số đo các góc x, y, z.

Lời giải



Ta có : $\widehat{ADC}+\widehat{CDE}=180°$ (kề bù)

$\widehat{ADC} = 180° - \widehat{CDE}$

$= 180° - 70°$

$= 110°$

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180°$

$\widehat{ABC} = 180° - \widehat{ADC}$

$= 180° - 110°$

$= 70°$

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC}$

($\widehat{DBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABD}$

$= 70° - 50°$

$= 20°$

Bốn điểm A, B, C, D nằm trên đường tròn $\widehat{CAD} = \widehat{DBC} = 20°$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD).

Vậy $x = 20°$

Ta lại có $\widehat{ABD}$ và $\widehat{ACD}$ 'là hai góc nội tiếp cùng chắn cung AD

$\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 50°$ hay $z = 50°$.

Ta có $\widehat{BCD} = \widehat{BCA} + \widehat{ACD} = 47° + 50° = 97°$

Mà ($\widehat{BCD} + \widehat{DCE} = 180°$ (kề bù)

$\widehat{DCE} = 180° - \widehat{BCD} = 180° - 97° = 83°$

Xét tam giác DCE, ta có :

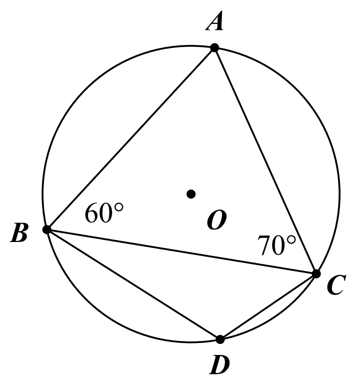
$\widehat{DCE} + \widehat{CED} + \widehat{CDE} = 180°$ hay $83° + 70° + \widehat{CED} = 180°$

$\widehat{CED} = 180° - (83° + 70°) = 27°$

Vậy $y = 27°$.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) thỏa mãn $\widehat{ABC} = 60°, \widehat{ACB} = 70°$. Giả sử D là điểm thuộc cung BC không chứa A. Tính số đo góc BDC.

Lời giải



Xét tam giác ABC, ta có:

$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$

$\widehat{BAC} = 180^\circ - \left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right)$

$= 180^\circ - \left(60^\circ + 70^\circ\right)$

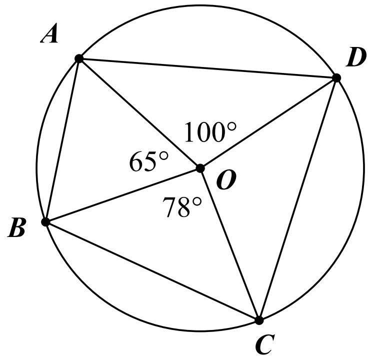
$= 50^\circ$

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên: $\widehat{BDC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$

$\widehat{BDC} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

Bài toán 6. Tính số đo các góc của tứ giác nội tiếp $ABCD$ trong hình vẽ

Lời giải



Tam giác AOB cân tại O

$\widehat{AOB} = \widehat{OBA} = \dfrac{180^\circ - 65^\circ}{2} = 57,5^\circ$

Tương tự tam giác BOC cân tại O

$\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \dfrac{180^\circ - 78^\circ}{2} = 51^\circ$

Do đó $\widehat{ABC} = \widehat{OBA} + \widehat{OBC} = 57,5^\circ + 51^\circ = 108,5^\circ$

Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$

$\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 108,5^\circ = 71,5^\circ$

Lại có tam giác AOD cân tại O

Nên $\widehat{OAD} = \widehat{ODA} = \dfrac{180^\circ - 106^\circ}{2} = 37^\circ$

Mà $\widehat{BAD} = \widehat{OAB} + \widehat{OAD} = 57,5^\circ + 37^\circ = 94,5^\circ$

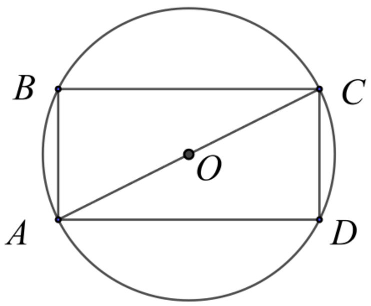
Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = 180^\circ$

$\widehat{BAD} = 180^\circ - \widehat{BCD} = 180^\circ - 94,5^\circ = 85,5^\circ$.

Bài toán 7. Tính diện tích của một hình chữ nhật, biết rằng hình chữ nhật đó có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2,5\,\text{cm}$

Hướng dẫn: Hình chữ nhật $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp có tâm là giao điểm hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

Lời giải



Ta có AC là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $AC = 2.2,5 = 5(\text{cm})$

Gọi chiều rộng hình chữ nhật là x thì chiều dài hình chữ nhật là $2x$

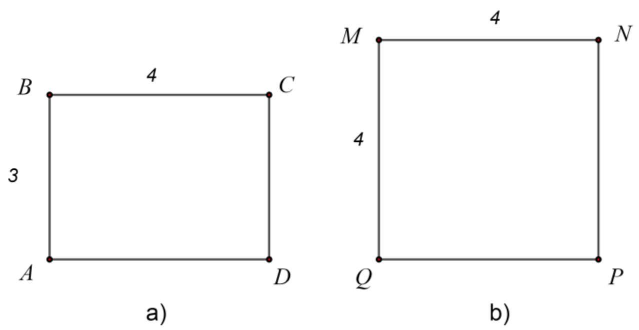
Xét tam giác ABC vuông tại B. Theo định lí Pythagore; ta có:

$$x^2 + (2x)^2 = 5^2 \Rightarrow 5x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}(\text{cm})$$

Vậy chiều rộng hình chữ nhật là $\sqrt{5}(\text{cm})$ và chiều dài là $2\sqrt{5}(\text{cm})$

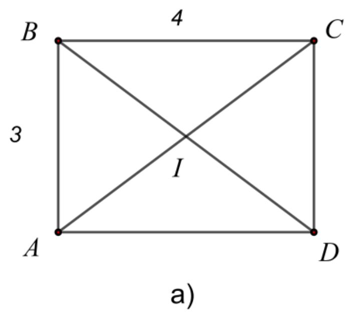
Do đó diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $\sqrt{5}.2\sqrt{5} = 10(\text{cm}^2)$

Bài toán 8. Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông trong hình vẽ.



Lời giải

(Xem hình vẽ a).



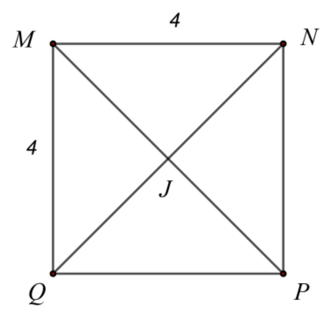
Gọi I là giao điểm của hai đường chéo $AC; BD$ của hình chữ nhật $ACBD$ nên I là trung điểm của AC.

Tam giác ABC vuông tại B. Theo định lí Pythagore; ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Vậy đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật có tâm I (là trung điểm của AC) và bán kính $R = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{5}{2} = 2,5$.

(Xem hình vẽ b).



b)

Gọi J là giao điểm của hai đường chéo hình vuông $MNPQ$ nên J là trung điểm của QN.

Tam giác QMN vuông tại M. Theo định lí Pythagore; ta có: $QN^2 = QM^2 + MN^2 = 4^2 + 4^2$

$\Rightarrow QN = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

Vậy đường tròn ngoại tiếp hình vuông có tâm J (là trung điểm của QN) và bán kính $R = \dfrac{QN}{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Tổng quát: Ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông cạnh a bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Bài toán 9. Cho đường tròn tâm O có bán kính $R = 5\,\text{cm}$

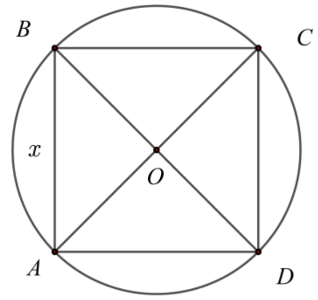
a) Tính độ dài cạnh của hình vuông nội tiếp trong (O).

b) Một hình chữ nhật nội tiếp trong (O) có chu vi (O). Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đó

Hướng dẫn: Hình vuông và hình chữ nhật là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

Lời giải

a) (Xem hình vẽ).



Gọi hình vuông nội tiếp trong đường tròn $(O;5\,\text{cm})$ là $ABCD$

Ta có : $AC = 2.R = 2.5 = 10(\text{cm})$

Gọi cạnh hình vuông là x. Theo định lí Pythagore, ta có:

$x^2 + x^2 = AC^2$

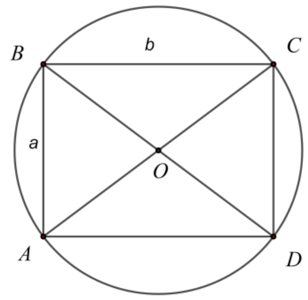
$2x^2 = 10^2$

$x^2=50$

$x=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

Vậy cạnh hình vuông nội tiếp trong đường tròn $(O;5\text{cm})$ bằng $5\sqrt{2}$

b) (Xem hình vẽ)



Gọi chiều dài a, chiều rộng b.

Ta có chu vi hình chữ nhật $2(a+b)=28$

Nửa chu vi $a+b=14$

Tam giác ABC vuông tại B. Theo định lí Pythagore; ta có:

$a^2+b^2=AC^2$

$a^2+b^2=10^2$

$a^2+b^2=100$

Theo bài ra, ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+b=14 \quad (1) \\ a^2+b^2=100\ (2) \end{cases} \quad (a>b>0)$

Từ (1) suy ra $b=14-a \quad (*)$

Thế $(*)$ vào (2), ta có:

$a^2+(14-a)^2=100$

$a^2+\left(196-28a+a^2\right)=100$

$2a^2-28a+196-100=0$

$a^2-14a+48=0$

$a^2-8a-6a+48=0$

$a(a-8)-6(a-8)=0$

$(a-8)(a-6)=0$

$a-8=0$ hoặc $a-6=0$

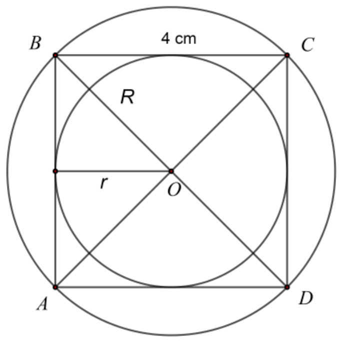
$a=8\Rightarrow b=14-8=6$ (vì $a>b$)

Vậy chiều dài của hình chữ nhật là 8cm và chiều rộng là 6cm.

Bài toán 10. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4cm. Tính chu vi; diện tích của các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp hình vuông $ABCD$

Hướng dẫn: Cần tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp

Lời giải



Dễ thấy bán kính đường tròn nội tiếp $r=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{4}{2}=2\left(\text{cm}\right)$

Chu vi đường tròn nội tiếp hình vuông $P_1=2\pi r=2.\pi.2=4\pi\left(\text{cm}\right)$

Diện tích đường tròn nội tiếp hình vuông $S_1=\pi r^2=\pi.2^2=4\pi\left(\text{cm}^2\right)$

Hình vuông $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn $\left(O;R\right)$ có $ABCD$ là đường kính.

Xét tam giác ABC vuông tại B. Theo định lí Pythagore; ta có:

$AC^2=AB^2+BC^2=4^2+4^2$

$\Rightarrow AC=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}\left(\text{cm}\right)$

$\Rightarrow R=2\sqrt{2}\left(\text{cm}\right)$

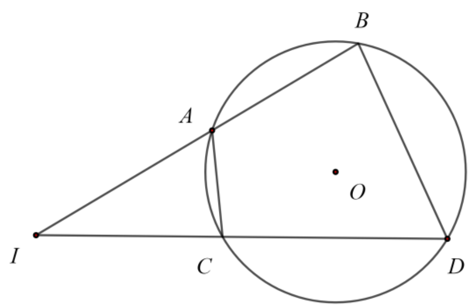
Chu vi đường tròn ngoại tiếp hình vuông $P_2=2\pi R=2.\pi.2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi\left(\text{cm}\right)$

Diện tích đường tròn nội tiếp hình vuông $S_2=\pi R^2=\pi.\left(2\sqrt{2}\right)^2=8\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

II. Chứng minh

Bài toán 11. Cho điểm I nằm ngoài đường tròn $\left(O\right)$. Qua I kẻ hai đường thẳng lần lượt cắt $\left(O\right)$ tại bốn điểm $A;B;C;D$ sao cho A nằm giữa B và I; C nằm giữa D và I. Chứng minh rằng $\widehat{IBD}=\widehat{IAC};\widehat{IAC}=\widehat{IDB}$ và $IA.IB=IC.ID$

Lời giải



Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn $\left(O\right)$ nên $\widehat{IBD}+\widehat{ACD}=180°$

Mà $\widehat{ICA}+\widehat{ACD}=180°$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{IBD}=\widehat{ICA}$.

Chứng minh tương tự ta có : $\widehat{IDB}=\widehat{IAC}$

Xét ΔIAC và ΔIDB có:

$\widehat{IDB}=\widehat{IAC}$ (cmt)

$\widehat{IBD}=\widehat{ICA}$ (cmt)

Do đó $\Delta IAC \backsim \Delta IDB$ (g-g)

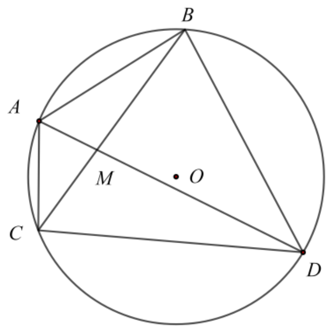
$\Rightarrow \dfrac{IA}{IC}=\dfrac{ID}{IB} \Rightarrow IA.IB=IC.ID$

Bài toán 12. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BAC}=\widehat{BDC}$.

b) AC cắt BD tại M. Chứng minh rằng: $MA.MC=MB.MD$.

Lời giải



a) Ta có : Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O)

Do đó $\widehat{BAC}=\widehat{BDC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BC của đường tròn (O)).

b) Xét ΔMAB và ΔMDC có:

$\widehat{AMB}=\widehat{CMD}$ (đối đỉnh)

$\widehat{BAC}=\widehat{BDC}$ (cm ý a)

Vậy $\Delta MAB \backsim \Delta MDC$ $(g-g)$

Suy ra $\dfrac{MA}{MD}=\dfrac{MB}{MC}$ Hay $MA.MC=MB.MD$ (đpcm)

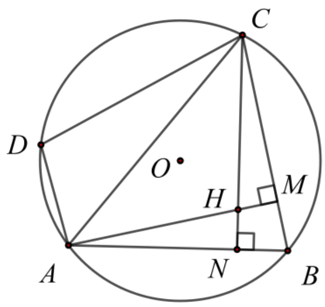
Bài toán 13. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có tam giác ABC là tam giác nhọn. Hai đường cao AM và CN của tam giác ABC cắt nhau tại H (Hình vẽ). Chứng minh:

a) $\widehat{MHN}+\widehat{ABC}=180°$;

b) $\widehat{AHC}=\widehat{ADC}$

c) $\widehat{ADC}=\widehat{BAM}+90°$

Lời giải



a) Xét tứ giác $HMBN$ có:

$\widehat{HMN}+\widehat{HNB}=90°+90°=180°$

Suy ra $\widehat{MHN}+\widehat{ABC}=180°\quad(1)$

b) Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{ADC}+\widehat{ABC}=180°\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MHN}=\widehat{ADC}$ mà $\widehat{MHN}=\widehat{AHC}$ (đối đỉnh)

Do đó $\widehat{AHC}=\widehat{ADC}$

c) Xét tam giác AMB vuông tại M, ta có:

$\widehat{MAB}+\widehat{ABC}+90°=180°$ (Định lí tổng ba góc trong tam giác)

$\Rightarrow \widehat{MAB}+90°=180°-\widehat{ABC}\quad(*)$

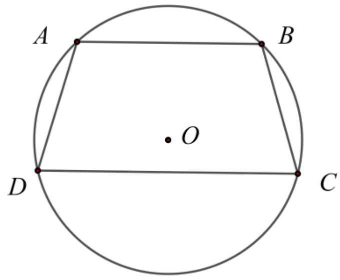
Lại có $\widehat{ADC}+\widehat{ABC}=180°$ (Do tứ giác $ABCD$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{ADC}=180°-\widehat{ABC}\quad(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $\widehat{ADC}=\widehat{BAM}+90°$

Bài toán 14. Cho hình thang $ABCD$ $(AB\,//\,CD)$ nội tiếp đường tròn. Chứng minh hình thang $ABCD$ là hình thang cân

Lời giải



Xét hình thang $ABCD$ có $AB\,//\,CD$ nên $\widehat{DAB}+\widehat{ADC}=180°\quad(1)$ (cặp góc trong cùng phía)

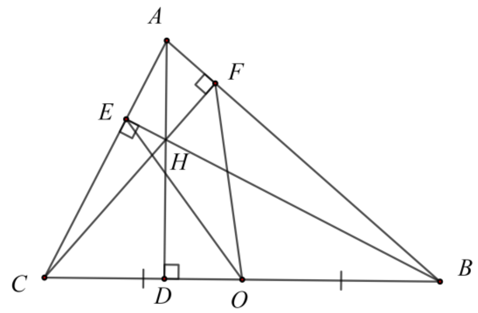
Vì $ABCD$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{DAB}+\widehat{DCB}=180°\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADC}=\widehat{DCB}$

Xét hình thang $ABCD$ có $\widehat{ADC}=\widehat{DCB}$ nên hình thang $ABCD$ là hình thang cân (hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau).

Bài toán 15. Cho tam giác ABC có các đường cao $AD;BE;CF$. Chứng minh rằng các tứ giác $BCEF$; $CAFD$; $ABDE$ là những tứ giác nội tiếp.

Lời giải



Gọi O là trung điểm BC.

Xét tam giác BCF vuông tại F (gt) có FO là đường trung tuyến nên $FO=\dfrac{BC}{2}$ hay $FO=CO=BO$.

Chứng tỏ $B;F;C$ thuộc đường tròn (O)

Chứng minh tương tự ta cũng có $EO=CO=BO$ nên ba điểm $B;E;C$ thuộc đường tròn (O)

Do đó bốn điểm $B;F;C;E$ thuộc đường tròn (O) hay tứ giác $BCEF$ nội tiếp

Hai trường hợp còn lại chứng minh tương tự

Bài toán 16. Cho tam giác nhọn ABC có $AD;BE;CF$ là đường cao và H là trực tâm. Chứng minh rằng

a) Tứ giác $AEHF$; $BDHF$; $CDHF$ là các tứ giác nội tiếp.

b) DA là đường phân giác của góc FDE.

Lời giải

a) Ta có $\widehat{AFH}+\widehat{AEH}=180°$

Do đó tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự, ta có các tứ giác $BDHF$ và $CDHF$ nội tiếp.

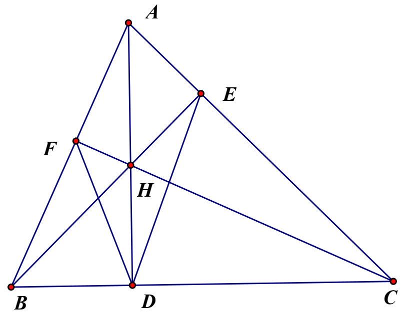
b) Xét tứ giác $BDHF$ nội tiếp(cmt)

$\Rightarrow \widehat{FDH}=\widehat{FBH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung FH)

Tương tự với tứ giác nội tiếp $CDHE$, ta có $\widehat{HDE}=\widehat{HCE}$

mà $\widehat{FBH}=\widehat{HCE}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$)

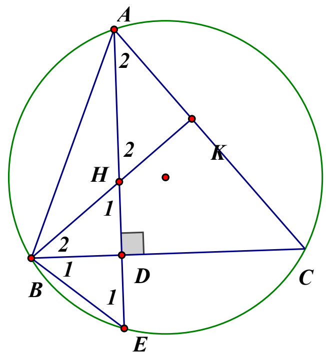
$\Rightarrow \widehat{FDH}=\widehat{HDE}$, chứng tỏ AD là đường phân giác của góc FDE



Bài toán 17. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD cắt đường tròn (O) tại E. Trên AD lấy H sao cho D là trung điểm của EH, BH cắt AC tại K. Chứng minh tứ giác $HKCD$ nội tiếp.

Hướng dẫn: Ta đưa về câu a, bài toán 16 bằng cách chứng minh $\widehat{BKC} = 90°$.

Lời giải



Dễ thấy $\Delta BDE = \Delta BDH$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ và $\widehat{E_1} = \widehat{H_1}$.

$\widehat{H_1} = \widehat{H_2}$ (đối đỉnh)

$\widehat{B_1} = \widehat{A_2}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EC)

mà $\widehat{B_1} + \widehat{E_1} = 90°$ (do $\widehat{BDE} = 90°$ (gt))

$\Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{H_2} = 90°$

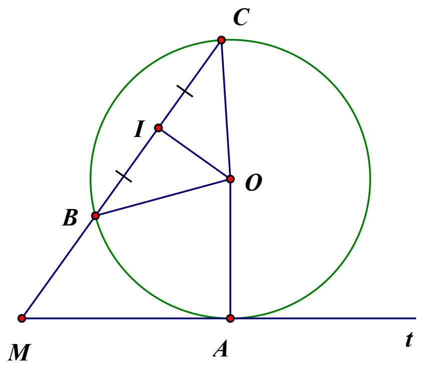
Trong $\Delta AHK \Rightarrow \widehat{AKH} = 180° - 90° = 90°$

$\Rightarrow \widehat{HKC} = 90°$

Ta có $\widehat{HKC} + \widehat{HDC} = 180°$

Do tứ giác $HKCD$ nội tiếp

Bài toán 18. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), vẽ cát tuyến MBC và tiếp tuyến Mt tiếp xúc với (O) tại A. Gọi I là trung điểm của dây BC. Chứng minh $AMIO$ là một tứ giác nội tiếp.



Lời giải

Dễ thấy ΔBOC cân tại O, có OI là trung tuyến (gt) nên OI đồng thời là đường cao, nên $OI \perp BC$.

Mặt khác tiếp tuyến Mt tiếp xúc với (O) tại A nên $OA \perp Mt$.

Xét tứ giác $AMIO$ có $\widehat{MAO} + \widehat{MIO} = 180°$. Nên $AMIO$ là một tứ giác nội tiếp.

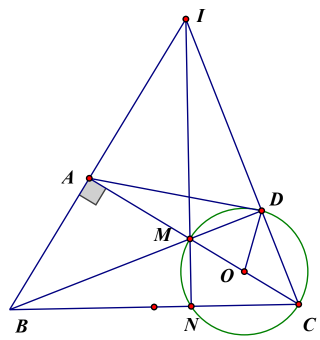
Bài toán 19. Cho tam giác ΔABC vuông tại A.Lấy điểm M bất kì trên đoạn AC, đường tròn đường kính CM cắt hai đường thẳng BM và BC lần lượt tại D và N. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

b) Các đường thẳng AB, MN, CD cùng đi qua một điểm.

Hướng dẫn: câu b cho hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm, chứng minh đường thứ ba đi qua điểm đo.

Lời giải



a) Gọi O là tâm đường tròn đường kính CM.

Ta có $DO = MO = CO$ hay $DO = \dfrac{MC}{2}$.

Chứng tỏ ΔMDC là tam giác vuông tại D.

Xét tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAM} = \widehat{BDC} = 90°$ (cmt) nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn đường kính BC hay tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

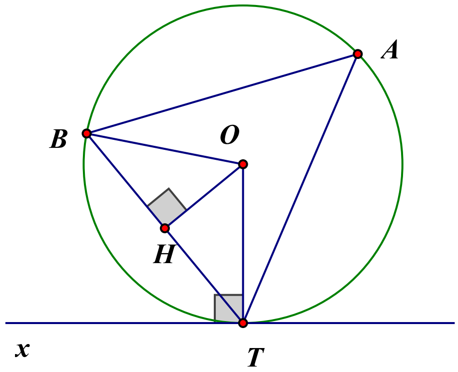
b) Gọi giao điểm của hai đường thẳng AB và CD là I, ta có M là trực tâm của ΔBIC nên IM là đường cao thứ ba $\Rightarrow IM \perp BC$.

$\Rightarrow IM$ và IN phải trùng nhau hay ba điểm I, M, N thẳng hàng.

Vậy các đường thẳng AB, MN, CD cùng đi qua một điểm I.

Bài toán 20. Trong một đường tròn. Chứng minh rằng góc giữa tiếp tuyến một dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Lời giải



Kẻ $OH \perp TB$. Tam giác BOT cân tại O nên đường cao OH đồng thời là đường phân giác hay $\widehat{BOH} = \widehat{HOT} = \frac{1}{2}\widehat{BOT}$. Lại có $\widehat{BAT} = \frac{1}{2}\widehat{BOT}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung)

$\Rightarrow \widehat{HOT} = \widehat{BAT} \quad (1)$

ΔOHT vuông tại H, ta có $\widehat{HOT} + \widehat{OTB} = 90°$

Lại có $\widehat{OTB} + \widehat{BTx} = 90°$ (do Tx là tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{HOT} = \widehat{BTx} \quad (2)$

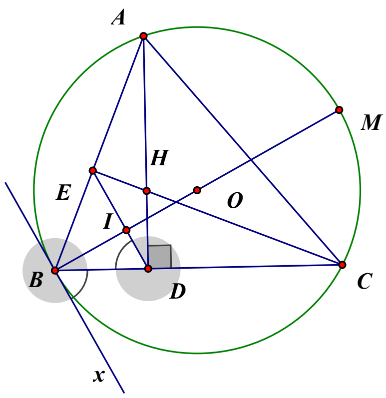
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BAT} = \widehat{BTx}$ ($\widehat{BTx}$ là góc giữa tiếp tuyến một dây và một dây chắn cung BT, $\widehat{BAT}$ là góc nội tiếp chắn cung BT)

Kết luận: Trong một đường tròn, góc giữa tiếp tuyến một dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Ghi chú: Kết luận của bài toán 20 này sẽ dùng để chứng minh cho các bài toán khác và chúng ta xem là một định lí trong hình học.

Bài toán 21. Cho ΔABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O), các đường cao AD và CE cắt nhau tại H. BO cắt DE tại I và cắt đường tròn (O) tại M. Chứng minh rằng tứ giác $DIMC$ nội tiếp.

Hướng dẫn: Dùng kết quả của câu a, bài toán 16 và bài toán 20.



Lời giải

Ta có $\widehat{AEC} = \widehat{ADC} = 90°$ (gt) nên tứ giác $AEDC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EDC} + \widehat{BAC} = 180°$

Mà $\widehat{EDC}+\widehat{EDB}=180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{BAC}=\widehat{BDE}$ (1)

Kẻ tiếp tuyến Bx với đường tròn (O) ta có $\widehat{CBx}=\widehat{BAC}$ (2) (góc giữa tiếp tuyến một dây và một dây chắn cung và góc nội tiếp chắn cung BC)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BDE}=\widehat{CBx}\Rightarrow Bx // ED$ (cặp góc so le trong bằng nhau)

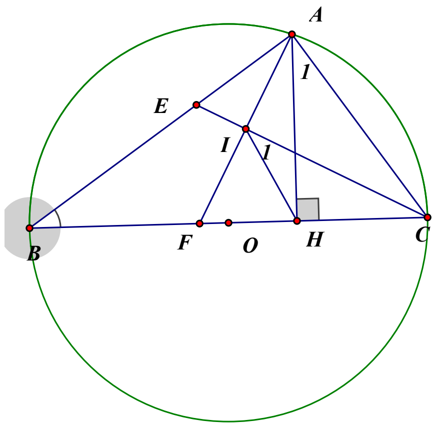
mà $Bx\perp OB$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow DE\perp OB$ hay $\widehat{DIM}=90^\circ$

Dễ thấy $\widehat{BCM}=90^\circ$ (do BM là đường kính) $\Rightarrow \widehat{DIM}+\widehat{BCM}=180^\circ$

Chứng tỏ tứ giác $DIMC$ nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180°)

Bài toán 22. Cho ΔABC $(AB>AC)$ nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính BC. Vẽ đường cao AH của tam giác. Trên cạnh BC lấy $F\,(F\neq O)$ sao cho $CF=CA$. Vẽ $CI\perp AF$ tại I và CI cắt cạnh AB tại E. Chứng minh rằng tứ giác $AIHC$ và $BEIH$ nội tiếp.



Lời giải

Dễ thấy tứ giác $AIHC$ nội tiếp($\widehat{AIC}=\widehat{AHC}=90^\circ$)

$\Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{I_1}$ (1) (góc nội tiếp chắn cung HC)

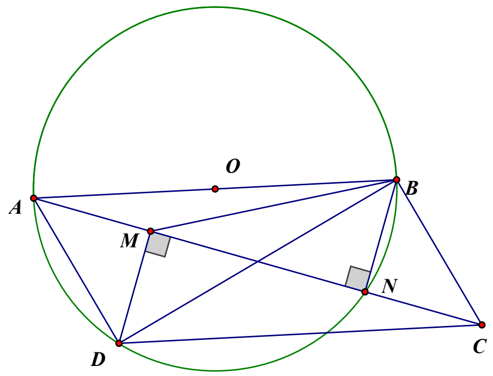
Lại có $\widehat{BAC}=90^\circ$ (BC là đường kính) hay $\widehat{BAH}+\widehat{A_1}=90^\circ$

mà $\widehat{BAH}+\widehat{B}=90^\circ\Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{B}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{B}=\widehat{I_1}$ mà $\widehat{I_1}+\widehat{EIH}=180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{B}+\widehat{EIH}=180^\circ$. Chứng tỏ tứ giác $BEIH$ nội tiếp

Bài toán 23. Cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh D nằm trên đường tròn đường kính AB. Kẻ DM và BN cùng vuông góc với đường chéo AC. Chứng minh tứ giác $CBMD$ nội tiếp.



Lời giải

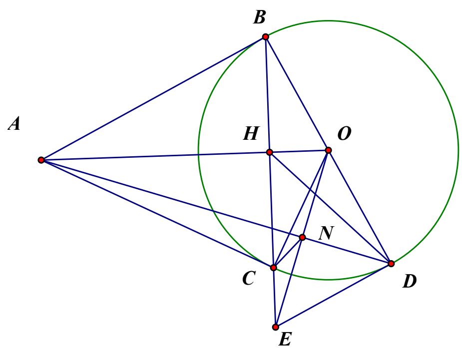
Nối B với D, ta có ΔADB vuông tại D (AB là đường kính) hay $AD \perp BD$.

mà $AD // BC$ (gt) $\Rightarrow BD \perp BC$ $\Rightarrow \widehat{DBC} = 90°$ hay $\widehat{DBC} = \widehat{DMC} = 90°$.

Hai đỉnh M, B cùng nhìn DC dưới hai góc bằng nhau cùng bằng $90°$ nên tứ giác $CBMD$ nội tiếp.

Bài toán 24. Từ điểm A bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là tiếp điểm). Vẽ đường kính BD của đường tròn (O). Tiếp tuyến tại D của (O) cắt đường thẳng BC ở E, OE cắt AD ở N. Chứng minh tứ giác $AONC$ nội tiếp.

Lời giải



Gọi H là giao điểm của AO và BC, ta có $OA = OC = (R)$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên OA là đường trung trực của đoạn BC hay $OA \perp BC$ tại H. Xét ΔACO vuông tại C (tính chất tiếp tuyến) và ΔCHO vuông tại H (cmt) có $\widehat{OAC}$ chung

$\Rightarrow \Delta ACO \backsim \Delta CHO (g-g) \Rightarrow \dfrac{OC}{OH} = \dfrac{OA}{OC} \Rightarrow OC^2 = OH.OA$

Mà $OD = OC (= R) \Rightarrow OD^2 = OH.OA \quad (1)$

Xét ΔAOD và ΔDOH, có $\widehat{AOD}$ chung và (1)

$\Rightarrow \Delta AOD \backsim \Delta DOH (c-g-c) \Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{ODH} \quad (2)$

Lại có tứ giác $OHED$ nội tiếp ($\widehat{OHE} + \widehat{ODE} = 180°$)

$\Rightarrow \widehat{ODH} = \widehat{OEH} \quad (3)$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HO)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{OEH}$ mà $\widehat{OEH} + \widehat{EOH} = 90°$ $\Rightarrow \widehat{OAD} + \widehat{EOH} = 90°$.

Xét ΔAON, ta có $\widehat{ANO} = \widehat{ACO} = 90°$

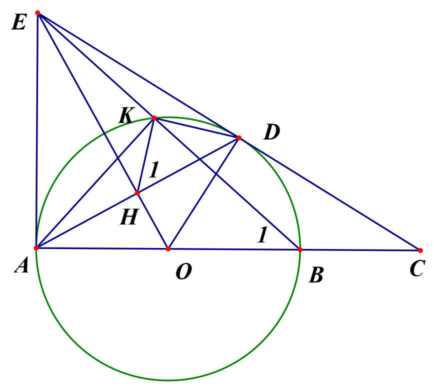
Do đó tứ giác $AONC$ nội tiếp

Bài toán 25. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C (C không trùng với B). Kẻ tiếp tuyến CD với đường tròn (O) (D là tiếp điểm). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng CD tại E. Gọi H là giao điểm của AD và OE, K là giao điểm của BE và đường tròn (O) (K không trùng với B).

a) Chứng minh: $AE^2 = AK.EB$

b) Chứng minh: tứ giác $BOHK$ nội tiếp.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{AKB} = 90°$ (vì AB là đường kính) $\Rightarrow \Delta AKE$ vuông tại K.

Lại có ΔABE vuông tại A (tính chất tiếp tuyến).

Xét ΔAKE và ΔEAB, có $\widehat{AEK}$ chung

$\Rightarrow \Delta AKE \backsim \Delta BAE(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{EK} = \dfrac{EB}{AE} \Rightarrow AE^2 = EK.EB \quad (1)$ (đpcm)

b)Dễ thấy EO là đường trung trực của AD hay $EO \perp AD$ tại H. Xét ΔEHA và ΔEAO có: $\widehat{EHA} = \widehat{EAO} = 90°$; $\widehat{AEO}$ chung. Do đó $\Delta EHA \backsim \Delta EAO(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{EH} = \dfrac{EO}{AE} \Rightarrow AE^2 = EH.EO \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EK.EB = EH.EO$

$\Rightarrow \Delta EHK \backsim \Delta EBO(c-g-c)$

$\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{B_1}$ mà $\widehat{H_1} + \widehat{KHO} = 180°$ (kề bù)

$\widehat{B_1} + \widehat{KHO} = 180°$

Chứng tỏ tứ giác $BOHK$ nội tiếp

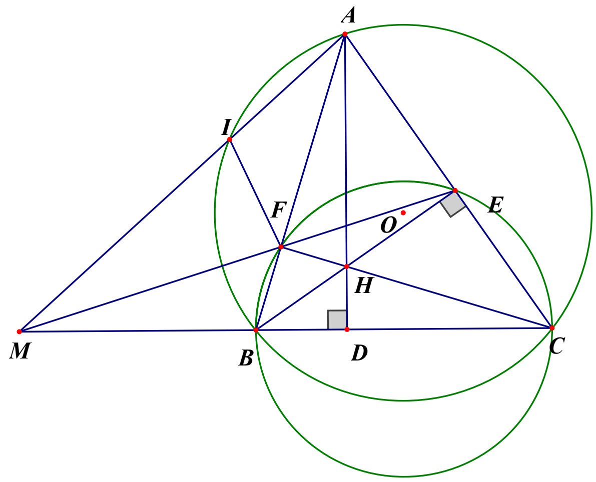
Nhận xét: Trong bài toán 6 có cát tuyến qua E trong đó có cát tuyến đi qua tâm của đường tròn (O). Nếu cả hai cùng không đi qua tâm (O) ta có bài toán phức tạp hơn.

Bài toán 26. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $AFHE$ nội tiếp. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AFHE$.

b) Gọi M là giao điểm của EF và CB và AM cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh tứ giác $AEFI$ nội tiếp.

Lời giải



a)Ta có $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90°$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90°$

Do đó tứ giác $AFHE$ nội tiếp đường tròn tâm là trung điểm của AH và đường kính là AH.

b)Ta có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90°$ (gt) $\Rightarrow BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MFB} = \widehat{MCE}$

$\Rightarrow \Delta MFB \backsim \Delta MCE(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{MF}{MC} = \dfrac{MB}{ME} \Rightarrow MF.ME = MC.MB \quad (1)$

Chứng minh tương tự ta cũng có : $MC.MB = MI.MA \ (2)$ (vì 4 điểm A, I, B, C thuộc (O))

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MF.ME = MI.MA$

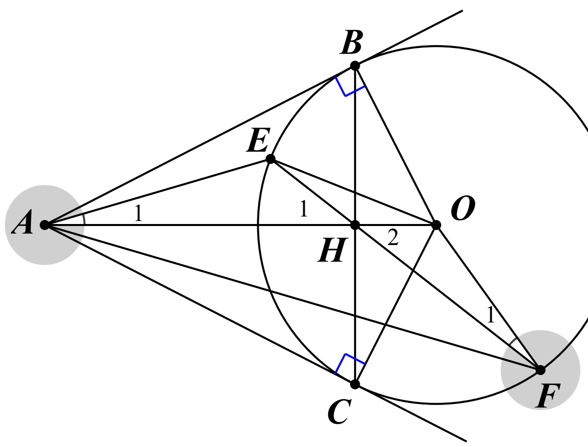
$\Rightarrow \Delta MIF \backsim \Delta MEA(c-g-c) \ \Rightarrow \widehat{MIF} = \widehat{MEA}$

Vậy tứ giác $AEFI$ nội tiếp

Bài toán 27. Từ điểm A bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC, EF là một dây cung đi qua H. Chứng minh tứ giác $AEOF$ nội tiếp.

Lời giải

Lời giải



Dễ thấy OA là đường trung trực của BC hay $OA \perp BC$ tại H.

Ta có ΔABO vuông tại B (tính chất tiếp tuyến)

Xét ΔAHB và ΔBHO có:

$\widehat{AHB} = \widehat{BHO} = 90°, \widehat{ABH} = \widehat{BOH}$ (góc giữa tiếp tuyến một dây và góc ở tâm cùng chắn một cung BC).

Do đó $\Delta AHB \backsim \Delta BHO$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{HA}{HB} = \dfrac{HB}{HO} \Rightarrow HB^2 = HO.HA$

Mà $HB = HC$ nên $HO \cdot HA = HB \cdot HC$ (1)

Dễ thấy $\Delta EHB \backsim \Delta CHF$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{HB}{HE} = \dfrac{HF}{HC} \Rightarrow HB \cdot HC = HE \cdot HF$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow HO.HA = HE.HF$

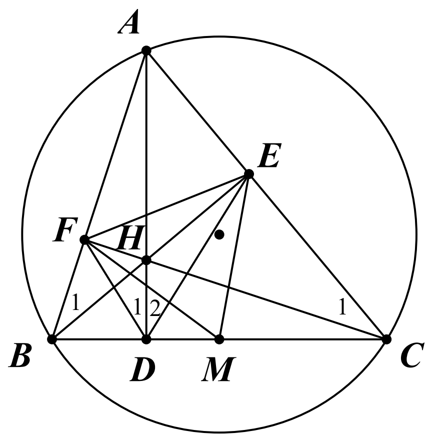
Xét ΔHEA và ΔFOH có $\widehat{H_1} = \widehat{H_2}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta FOH \backsim \Delta HEA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{F_1}$.

Hai đỉnh A và D nhìn E, O dưới một góc bằng nhau nên tứ giác $ADEO$ nội tiếp.

Bài toán 28. Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi H là giao điểm của ba đường cao AD, BE, CF. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh tứ giác $EFDM$ nội tiếp.

Lời giải



Dễ thấy các tứ giác $AFHE, AFDC$ nội tiếp:

Tứ giác $AFHE$ có: $\widehat{BAD} = \widehat{BEF}$ (cùng chắn cung FH) (1)

Lại có M là trung điểm BC; ΔBEC vuông có trung tuyến ứng với cạnh huyền EM

$\Rightarrow \Delta BME$ cân $\Rightarrow \widehat{BEM} = \widehat{EBC}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{FEM}$

Lại có tứ giác $AFDC$ nội tiếp nên $\widehat{BAC} = \widehat{FDB}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ tứ giác $FEDM$ nội tiếp.

Cách khác:

Ta có $\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 180°$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự ta có tứ giác $BFHD$ và $CEHD$.

Cũng là những tứ giác nội tiếp lại có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90°$ (gt) nên $BFEC$ nội tiếp.

Xét đường tròn tâm M bán kính $\frac{BC}{2}$ đi qua 4 điểm B, F, E, C ta có $2\widehat{B_1} = \widehat{FME}$ (1) (góc nội tiếp và góc ở tâm) và $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EF)

Tương tự xét đường tròn đi qua 4 điểm B, F, H, D ta có $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FH).

Tương tự với đường tròn đi qua 4 diém C, E, H, D, ta có $\widehat{C_1} = \widehat{D_2}$ (góc nọi tiẹp cùng chắn cung HE).

$\Rightarrow \widehat{FDE} = 2\widehat{B_1}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{FME} = \widehat{FDE}$. Hai đỉnh M và D cùng nhìn hai đỉnh E, F còn lại dưới 1 góc bằng nhau nên tứ giác $EFDM$ nội tiếp.

Nhận xét:

* Bài toán trên đây là bài toán thu hẹp của bài toán đường tròn Ơle hay vòng tròn 9 điểm mà chúng ta đã có dịp làm quen trong §3. GÓC NỘI TIẾP, ở đây trong 4 đỉnh của tứ giác đã có 3 đỉnh là chân 3 dưởng cao và 1 đỉnh là trung điểm của mốt cạnh của tam giác, trong trưởng hợp này nếu ta đưa vế cách giải của bài toán "Đường tròn Ơ le" thì có phần phức tạp hơn.

* Mặt khác: Nếu chúng ta kẻ đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm và cắt đường thẳng BC thì ta lại có một tứ giác nội tiếp khác mà hai đỉnh vẫn là một chân đường cao với trung điểm và hai đỉnh kia là giao của đường thẳng EF với đường tròn (O). Chúng ta hãy đưa về bài toán sau.

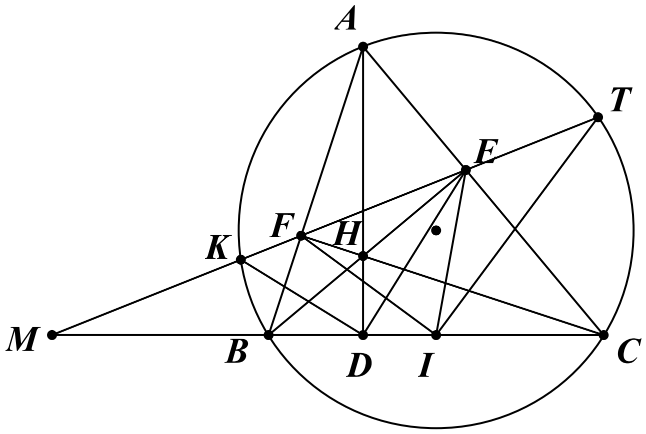
Bài toán 29. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng: Tứ giác $BFEC$ nội tiếp, xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$.

b) Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại M và cắt đường tròn (O) tại K và T (K nằm giữa M và T). Chứng minh rằng: $MK.MT = ME.MF$.

c) Chứng minh tứ giác $KTID$ nội tiếp.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90°(\text{gt})$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm I là trung điểm của BC và bán kính $\dfrac{BC}{2}$.

b) Xét đường tròn (I) ta có $\widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FB).

$\Rightarrow \Delta MEB \backsim \Delta MCF(g-g) \Rightarrow \dfrac{ME}{MC} = \dfrac{MB}{MF} \Rightarrow ME \cdot MF = MB \cdot MC$

Chứng minh tương tự với đường tròn (O) ta có: $MB.MC = MK.MT$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $MK.MT = ME.MF$

c) Dễ thấy tứ giác $HECD$ nội tiếp ($\widehat{HEC} + \widehat{HDC} = 180°$)

$\Rightarrow \widehat{HED} = \widehat{HCD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HD).

Lại có $BFEC$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{HCD} = \widehat{FEB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FB).

$\Rightarrow \widehat{HED} = \widehat{FEB}\left(=\widehat{HCD}\right)$)

Lai có $\widehat{BIF} = 2\widehat{FCB}$ (góc ở tám đường tròn (I) và góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

$\Rightarrow \widehat{BIF} = \widehat{MED} \Rightarrow \Delta MIF \backsim \Delta MED$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{MI}{ME} = \dfrac{MF}{MD} \Rightarrow MI \cdot MD = ME.MF$

Từ (2), (4) $\Rightarrow MI.MD = MK.MT$

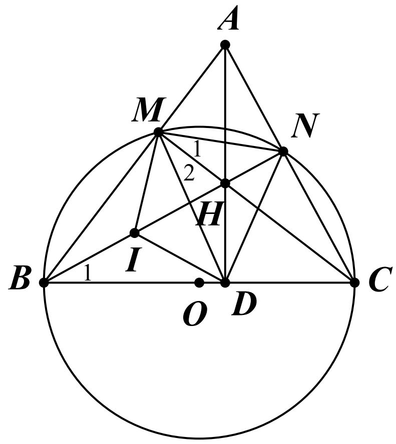
Do đó $\Delta MDK \backsim \Delta MTI$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{MDK} = \widehat{MTI}$ $\Rightarrow$ Tứ giác $KTID$ nội tiếp.

Nhận xét: Cũng nói về đường tròn Ơ le ta hãy xét bài toán tương tự sau, trong đó 3 điểm là chân ba đường cao và điểm còn lại là trung điểm của đoạn thẳng nối trực tâm đến đỉnh.

Bài toán 30. Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$), đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB, AC tại M và N, CM cắt BN tại H, AH cắt BC tại D. Gọi I là trung điểm của HB. Chứng minh tứ giác $MNDI$ nội tiếp.

Lời giải



Dễ thấy các tứ giác sau đây nội tiếp $BMHO, BMNC$.

$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{M_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung NC).

Tương tự $\widehat{B_2} = \widehat{M_2}$ (chắn cung HD)

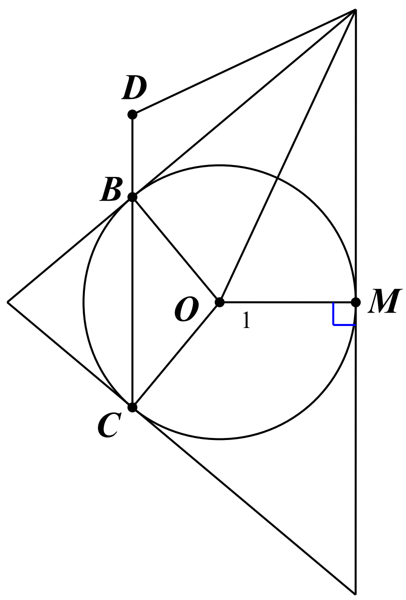
I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BMHD$ $\Rightarrow \widehat{HID} = 2\widehat{B_1}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm).

Mà $\widehat{NMD} = \widehat{M_1} + \widehat{M_2}$ mà $\widehat{M_1} = \widehat{M_2} = \widehat{B_1}$ $\Rightarrow \widehat{HID} = \widehat{NMD}$

Hai đỉnh M, I cùng nhìn N, D dưới 1 góc bằng nhau nên tứ giác $MNDI$ nội tiếp.

Bài toán 31. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B,C là các tiếp điểm). Trên tia đối của tia BC lấy D. Gọi E là giao điểm của DO và AC. Qua E kẻ tiếp tuyến thứ hai, tiếp tuyến này cắt đường thẳng AB ở K. Chứng minh rằng 4 điểm B, D, K, O cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Gọi M là điểm tiếp xúc của KE với (O) ta có $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $\widehat{MBC} = \widehat{M_1}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp) mà $\widehat{MBC} + \widehat{MBD} = 180°$ (kề bù).

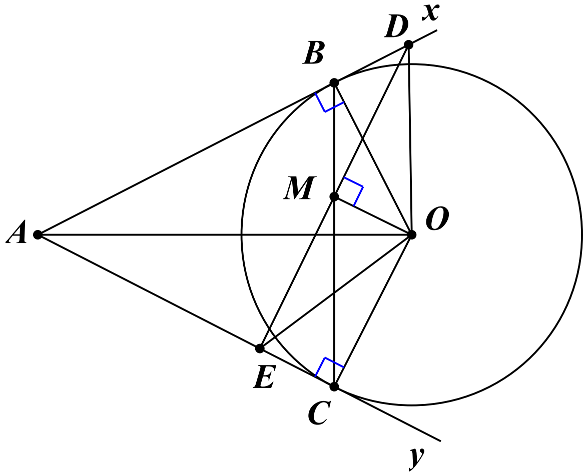
Tương tự $\widehat{M_1} + \widehat{MOD} = 180° \Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{MOD}$.

Hai đỉnh B và O cùng nhìn hai đỉnh còn lại M, D dưới hai góc bằng nhau nên bốn điểm M, O, B, D cùng thuộc 1 đường tròn.

Dễ thấy tự giác $MOBK$ nội tiếp $\Rightarrow B, D, K, O$ cùng thuộc 1 đường tròn đi qua 3 điểm B, K, O.

Bài toán 32. Cho góc $\widehat{xAy}$ và đường tròn (O) tiếp xúc với Ax và Ay tại B và C. Trên đoạn thẳng BC lấy điểm M (khác B và C). Đường thẳng vuông góc với OM tại M cắt Ax, Ay lần lượt tại D và E. Chứng minh các điểm A, D, O, E cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải



$Ax \perp OB$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{OBD} = 90°$.

$\widehat{DMO} = 90°$ (gt) nên tứ giác $OMBD$ nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{ODM} = \widehat{OBM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung OM của đường tròn qua O, M, B, D).

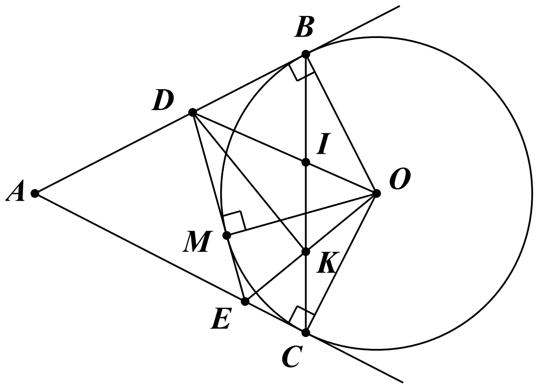
Ta lại có tứ giác $ABOC$ nội tiếp nên $\widehat{OBM} = \widehat{OAC}$.

$\Rightarrow \widehat{ODM} = \widehat{OAC}$ hay $\widehat{ODE} = \widehat{OAE}$

Vì A, D ở cùng phía đối với EO nên A và D nằm trên một cung chứa góc $\frac{1}{2}\widehat{xAy}$ dựng trên OE hay A, D, O, E cùng nằm trèn một đường tròn.

Bài toán 33. Cho đường tròn (O). Từ điểm A nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến AB, AC. Gọi M là điểm thuộc cung nhỏ BC. Tiếp tuyến tại M cắt AB, AC lần lượt ở D và E. Gọi I và K lần lượt là giao điểm OD, OE với BC. Chứng minh rằng tứ giác $OBDK$ nội tiếp.

Lời giải



Dễ thấy tứ giác $ABOC$ nội tiếp (vì $\widehat{ABO}=\widehat{ACO}=90°$ tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{BAC}+\widehat{BOC}=180°$. Do đó $\widehat{BOC}=180°-\widehat{A}$.

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có OD, OE lần lượt là phân giác của hai góc kề $\widehat{BOM}$ và $\widehat{MOC}$.

Nên $\widehat{DOC}=\dfrac{180°-\widehat{A}}{2}$

Mặt khác: ΔABC cân $(AB=AC)$

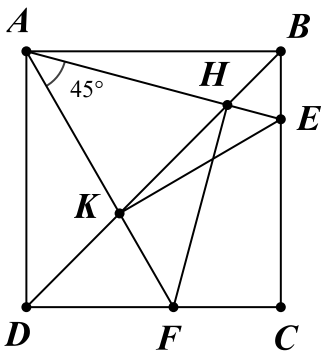
Nên $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=\dfrac{180°-\widehat{A}}{2}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{DOE}=\widehat{ABC}$ hay $\widehat{DOK}=\widehat{DBK}$.

Do đó bốn điểm O, B, K, D cùng nằm trên một đường tròn, hay tứ giác $OBDK$ nội tiếp.

Bài toán 34. Trên các cạnh BC và CD của hình vuông $ABCD$ lấy các điểm E và F sao cho $\widehat{EAF}=45°$. Các đoạn thẳng AE, AF cắt BD theo thứ tự ở H và K. Chứng minh tứ giác $EHKF$ nội tiếp.

Lời giải



Ta có $\widehat{EAF}=\widehat{BDC}=45°$.

Hai điểm A và D ở cùng phía với HF nên AD thuộc cung chứa góc $45°$ vẽ trên đoạn HF.
Hay bốn điểm A, D, F, H cùng thuộc một đường tròn nên tứ giác $ADFH$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{ADF}+\widehat{AHF}=180°$ mà $\widehat{ADF}=90°$ $\Rightarrow \widehat{AHF}=90° \Rightarrow \widehat{FHE}=90°$

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{FKE}=90°$.

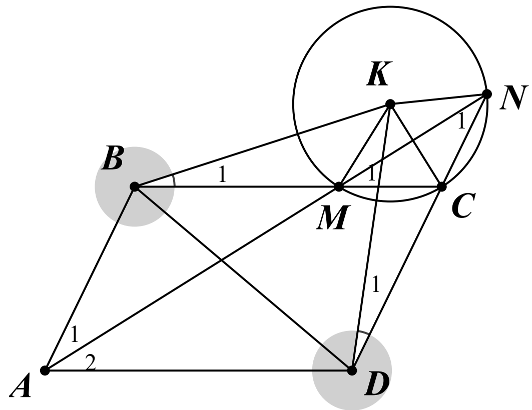
Do đó $EHKF$ là tứ giác nội tiếp.

Bài toán 35. Cho hình bình hành $ABCD$ có góc A nhọn $(AB<AD)$. Các phân giác của góc BAD cắt BC tại M và cắt DC tại N. Gọi K là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MCN.

a) Chứng minh $DN=BC$ và CK vuông góc với MN.

b) Chứng minh tứ giác $BKCD$ nội tiếp.

Lời giải



a) Ta có $AB//CD$ (gt) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{N_1}$ (so le trong) mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{N_1}$. Do đó ΔAND cân tại D

$$\Rightarrow \begin{cases} DN = DA \\ DA = BC \end{cases} \Rightarrow DN = BC$$

Ta có $\widehat{A_2} = \widehat{M_1}$ (đồng vị)

$\widehat{A_2} = \widehat{N_1}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{N_1}$ hay ΔMCN cân tại C $\Rightarrow CM = CN$

Lại có $KM = KN\left(= R\right)$ (R là bán kính của đường tròn $\left(K\right)$).

Do đó CK là đường trung trực của MN $\Rightarrow CK \perp MN$.

b) Dễ thấy $\Delta KNC = \Delta KMC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{CNK} = \widehat{CMK}$ (góc tương ứng) hay $\widehat{DNK} = \widehat{CMK}$ (1)

Lại có ΔMKC cân tại K $\Rightarrow \widehat{CMK} = \widehat{MCK}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{DNK} = \widehat{MCK}$.

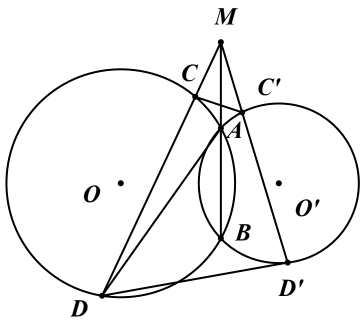
Xét ΔBKC và ΔDKN có $BC = DN$ (cmt), $\widehat{BCK} = \widehat{DNK}$ (cmt)

$KC = KN\left(= R\right)$.

Do đó $\Delta BKC = \Delta DKN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ hai đỉnh B, D cùng nhìn CK dưới hai góc bằng nhau nên tứ giác $BKCD$ nội tiếp.

Bài toán 36. Cho hai đường tròn $\left(O\right)$ và $\left(O'\right)$ cắt nhau tại hai điểm A và B. Gọi M là điểm tùy ý trên đường thẳng AB và nằm ngoài đoạn AB. Vẽ qua M hai cát tuyến MCD và $MC'D'$ với $\left(O'\right)$ và $\left(O\right)$. Chứng minh tứ giác $CDD'C'$ nội tiếp.

Lời giải



Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{CDA} = \widehat{CBM}$ (cùng bù vớii $\widehat{ABC}$).

Do đó $\Delta MBC \backsim \Delta MDA$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC.MD$.

Chứng minh tương tự:

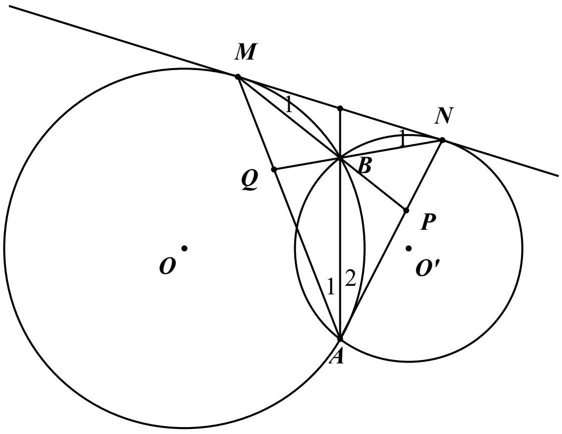
$MA.MB = MC'.MD' \Rightarrow MC.MD = MC'.MD'$

Do đó $\Delta MCC' \backsim \Delta MDD'$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{MCC'} = \widehat{MD'D}$.

Vậy tứ giác $CDD'C'$ nội tiếp.

Bài toán 37. Cho dường tròn $(O;R)$ và ($(O';R')$ cắt nhau tại hai diểm A và B, và O,O' về hai phía của dây chung AB. Vẽ tiếp tuyến chung MN sao cho $M \in (O)$ và $N \in (O')$ dường thẳng AB cát MN tại I $(B$ năm giữa A và $I)$. Đường thẳng MA cát dường thẳng NB tại Q, dường thẳng NA cắt dường thẳng MB tại P. Chứng minh tứ giác $APBQ$ nội tiếp.

Lời giải



Ta có $\widehat{M_1} = \widehat{A_1}$ (1) (góc giữa tiếp tuyến và dây cung, góc nội tiếp cùng chắn cung MB).

Tương tự $\widehat{N_1} = \widehat{A_1}$ (2).

Xét ΔMBM có $\widehat{M_1} + \widehat{MBN} + \widehat{N_1} = 180^\circ$ (3)

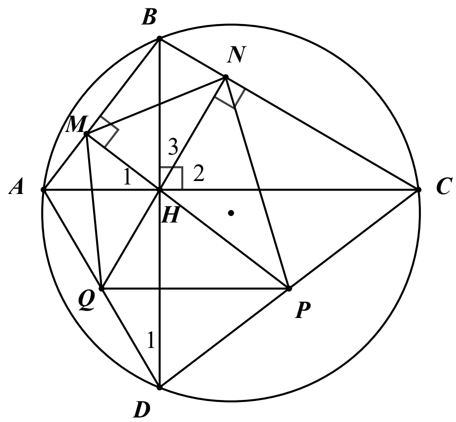
mà $\widehat{MBN} = \widehat{QBP}$ (đối đỉnh) (4)

$\Rightarrow$ Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow \widehat{QBP} + \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 180^\circ$

Do đó tứ giác $APBQ$ nội tiếp.

Bài toán 38. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại H. (H không trùng với tâm của đường tròn). Gọi M,N lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ H xuống các đường thẳng AB, BC, P và Q theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng MH,NH với các đường thẳng CD và AD. Chứng minh rằng PQ và AC song song với nhau và 4 điểm M,N,P,Q cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Ta có $\widehat{CAD}=\widehat{CBD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{CD}$).

$\widehat{CBD}=\widehat{H_2}$ (cùng phụ vơi $\widehat{H_3}$)

$\widehat{H_2}=\widehat{H_1}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{CAD}=\widehat{H_1}$

$AC\perp BD$ (gt) $\Rightarrow \widehat{H_1}+\widehat{H_4}=90^\circ$

$\widehat{D_1}=\widehat{CAD}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{H}_4=\widehat{D} \Rightarrow \Delta HQD$ cân tại $Q \Rightarrow QH=QD$

Lại có ΔAQH cân tại $Q \Rightarrow QH=QA$

$\Rightarrow QA=QD$

Chứng minh tương tự ta có $PD=PC$.

Do đó QP là đường trung bình $\Delta ADC \Rightarrow QP\,//\,AC$

$\Rightarrow \widehat{NQP}=\widehat{H_1}$ (so le trong)

$\widehat{H_1}=\widehat{CAD}$; $\widehat{CAD}=\widehat{CBD}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{NQP}=\widehat{CBD}$ (1)

Xét tứ giác $BNHM$ có $\widehat{BNH}+\widehat{BMH}=180^\circ \Rightarrow BNHM$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{NBH}=\widehat{NMH}$ hay $\widehat{CBD}=\widehat{NMP}$

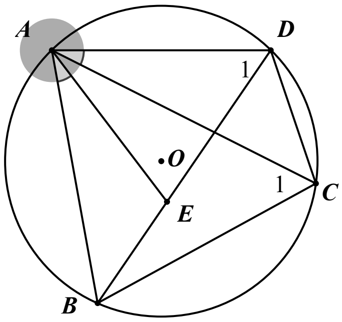
Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{NQP}=\widehat{NMP}$. Hai dỉnh M và Q cùng nhìn 2 đỉnh còn lại NP dưới hai góc bằng nhau nên bốn điểmm M,N,P,Q cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 39. Chứng minh rằng trong một tứ giác nội tiếp, tích của hai đường chéo bằng tổng các tích của hai cặp cạnh đối.

Định lí: Ptô-lê-mê (Plolêmê nhà toán học Hy Lạp).

Hướng dẫn: Điều phải chứng minh: $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$.

Lời giải



Vẽ tia AE hợp với tia AB một góc $\widehat{BAE}=\widehat{CAD}$.

Xét ΔABE và ΔACD có $\widehat{BAE}=\widehat{CAD}$ (cách vẽ)

$\widehat{ABE}=\widehat{ACD}$ (góc nội tiếp chắn cung AD)

$\Rightarrow \Delta ABE\backsim\Delta ACD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CD}$

$\Rightarrow AB.CD=AC.BE$ (1)

Lai có $\widehat{BAE}=\widehat{CAD}$ $\Rightarrow \widehat{BAE}+\widehat{A_1}=\widehat{CAD}+\widehat{A_1}$

hay $\widehat{BAC}=\widehat{EAD}$

Xét ΔABC và ΔAED có $\widehat{C_1}=\widehat{D_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

và $\widehat{BAC}=\widehat{AED}$ (cmt)

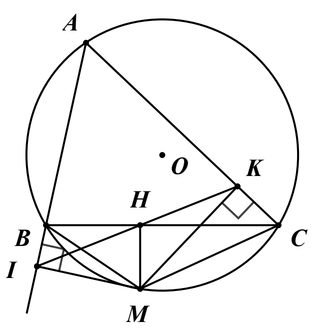
$\Rightarrow \Delta ABC\backsim\Delta AED(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BE+AC\cdot DE$ $=AC(BE+DE)$ $=AC\cdot BD$

Bài toán 40. Từ một điểm bất kì trên đường tròn ngoại tiếp của một tam giác kẻ các đường vuông góc xuống ba cạnh của tam giác thì chân ba đường vuông góc đó thẳng hàng (Đường thẳng Sin Sơn).

Lời giải



Gọi chân ba đường vuông góc kẻ từ M đến ba cạnh AB, BC, AC lần lượt là I, H, K.

Ta có: $\widehat{MIB}=\widehat{MHB}=90^\circ$ $\Rightarrow \widehat{MIB}+\widehat{MHB}=180^\circ$

Do đó $MIBH$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{IHM} = \widehat{IBM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MI)

Lại có bốn điểm $ABMC$ cùng thuộc đường tròn (hay tứ giác $ABMC$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{IBM} = \widehat{ACM}$

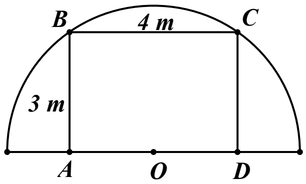
Dễ thấy tứ giác $MHKC$ nội tiếp vì $\widehat{MHK} = \widehat{NKC} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{ACM} + \widehat{MHK} = 180°$. Mà $\widehat{ACM} = \widehat{IBM} = \widehat{IHM}$ (cmt)

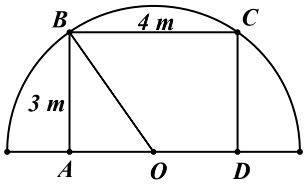
$\Rightarrow \widehat{IHM} + \widehat{MHK} = 180°$. Hay I, H, K thẳng hàng.

III Toán thực tế

Bài toán 41. Người ta muốn dựng một khung cổng hình chữ nhật rộng $4m$ và cao $3m$, bên ngoài khung cổng được bao bởi một khung thép dạng nửa đường tròn như hình vẽ. Tính chiều dài của đoạn thép làm khung nửa đường tròn đó.



Lời giải



(Xem hình vẽ).

Ta có: $OA = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{4}{2} = 2\left(m\right)$

Xét tam giác ABD vuông tại A.

Theo định lí Pythagore, ta có: $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 2^2 + 3^2$

$\Rightarrow OB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}\left(m\right)$

Vậy chiều dài của đoạn thép làm khung là nửa chu vi đường tròn $\left(O\right)$.

Ta có: $\dfrac{1}{2}\pi \cdot 2\sqrt{13} = \pi\sqrt{13} \approx 11,33\left(m\right)$.

≪ HẾT ≫

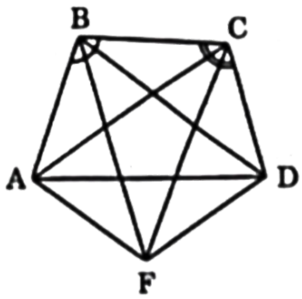
CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

Bài 30. ĐA GIÁC ĐỀU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

ĐA GIÁC Trong đa giác $ABCDE$ ở hình vẽ:

- Các đỉnh là các điểm A, B, C, D, E;
- Các cạnh là các đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EA;
- Các cặp đỉnh kề nhau là: A và B, B và C, C và D, D và E, E và A;



- Các đường chéo là các đoạn thẳng nối hai dỉnh không kề nhau: AC, AD, BD, BE, CF;
- Các góc là: $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDE}$, $\widehat{DEA}$, $\widehat{EAB}$.

Đa giác có n đỉnh $(n \geq 3)$ được gọi là hình $n-$ giác hay hình n cạnh.

Ta thường gọi các đa giác có $3, 4, 5, 6, 8$ đỉnh là tam giác, tứ giác, ngũ giác, lục giác, bát giác.

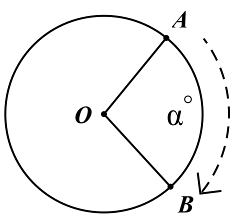
I. Đa giác đều

- Đa giác lồi là đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của đa giác.
- Đa giác đều là một đa giác lồi có cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.

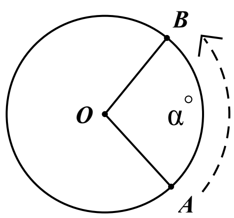
II. Phép quay

Phép quay thuận chiều $\alpha°$ $(0° < \alpha° < 360°)$ tâm O giữ nguyên điểm O, biến điểm A khác điểm O thành điểm B thuộc đường tròn $(O; OA)$ sao cho tia OA quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia OB thì điểm A tạo nên cung AB có số đo $\alpha°$ (Hình a).

Định nghĩa tương tự cho phép quay ngược chiều $\alpha°$ tâm O (Hình b). Phép quay $0°$ và phép quay $360°$ giữ nguyên mọi điểm.



a)



b)

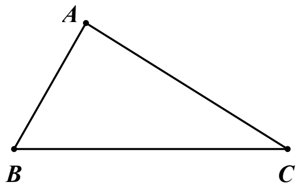
Một phép quay được gọi là giữ nguyên một đa giác đều H nếu phép quay đó biến mỗi điểm H thành một điểm của H.

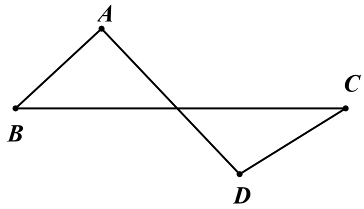
Người ta nghĩ ra rằng nếu một phép quay biến các đỉnh của đa giác đều H thành các đỉnh của H thì phép quay đó giữ nguyên H.

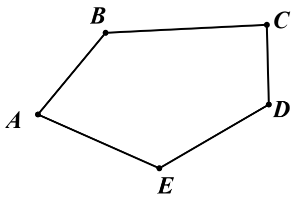
B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

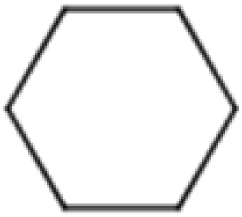
I. Nhận dạng đa giác đếu

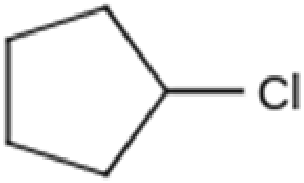
Bài toán 1. Tìm các đa giác lồi trong hình vẽ và giải thích.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

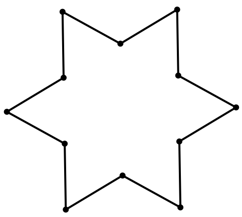
Lời giải

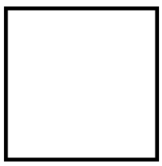
Các đa giác trong hình a, c, e là các đa giác lồi vì đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của đa giác.

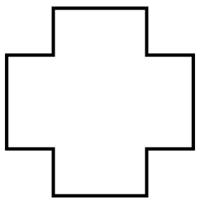
Đa giác ở hình b không phải là đa giác lồi vì không cùng nằm về một phía so với đường thẳng AD hoặc BC.

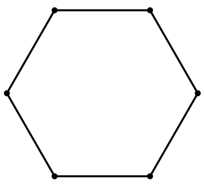
Hình d cũng không phải là đa giác lồi và không cùng nằm về một phía so với đường thẳng BC hoặc CD

Bài toán 2. Trong các hình phẳng sau, hình nào là hình phẳng có dạng đa giác đều?

a) 

b) 

c) 

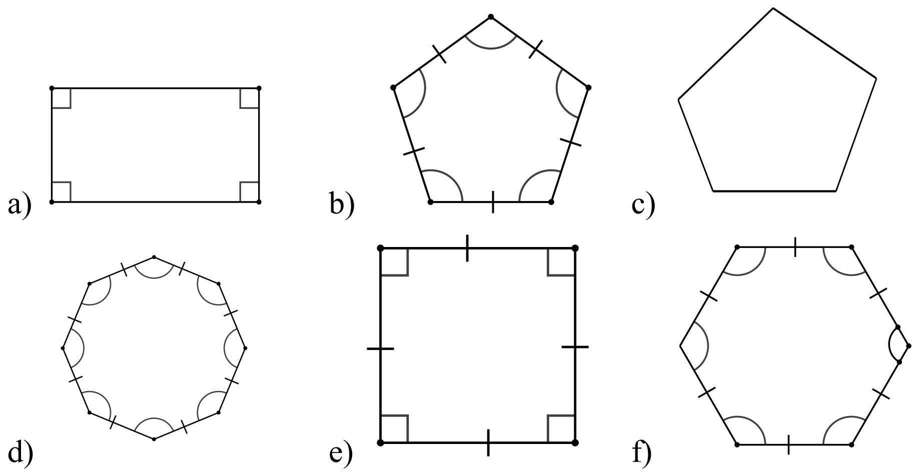
d) 

e) 

Lời giải

Hình phẳng có dạng đa giác đều là hình b và d.

Bài toán 3. Tìm và gọi tên các đa giác đều có trong hình vẽ dưới đây.



Lời giải

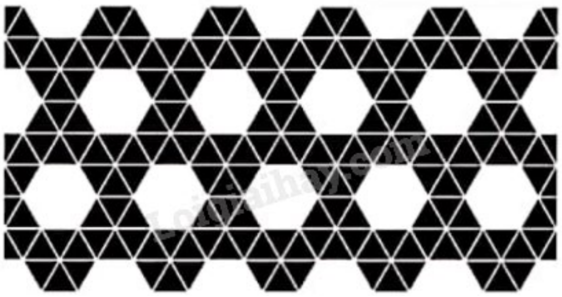
Hình $3b$ là ngũ giác đều;

Hình $3d$ là bát giác đều;

Hình $3e$ là tứ giác đều;

Hình $3g$ là lục giác đều.

Bài toán 4. Kể tên các loại đa giác đều có trong hình.

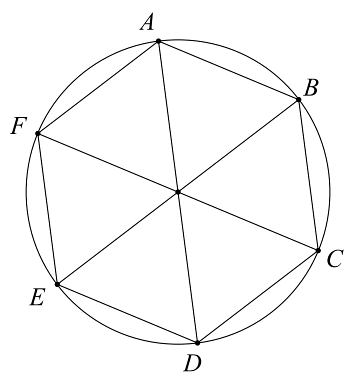


Lời giải

Các đa giác đều có trong hình là: Tam giác đều, tứ giác đều và lục giác đều.

Bài toán 5. Cho đường tròn $(O;R)$. Lấy các điểm A,B,C,D,E,F trên đường tròn $(O;R)$ sao cho số đo các cung $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{FA}$ bằng nhau. Đa giác $ABCDEF$ có là đa giác đều không?

Lời giải



Ta có $sđ\,\overset{\frown}{AB} = sđ\,\overset{\frown}{BC} = sđ\,\overset{\frown}{CD} = sđ\,\overset{\frown}{DE} = sđ\,\overset{\frown}{EF} = sđ\,\overset{\frown}{FA} = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Xét tam giác AOB cân tại O có $\widehat{AOB} = 60^\circ$ (vì $sđ\,\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$)

$\Rightarrow \Delta AOB$ đều nên $AB = R$ và $\widehat{ABO} = 60^\circ$ (1)

Tương tự với tam giác BOC đều $\Rightarrow \widehat{OBC} = 60°$ và $BC = R\left(2\right)$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{OBC} = 60° + 60° = 120°$ và $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{R}$.

Chứng minh tương tự với các cạnh và các góc còn lại ta có đa giác ABCD có:
$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \mathrm{DE} = \mathrm{EF} = \mathrm{FA} = \mathrm{R}$.

Và các góc $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDE} = \widehat{DEF} = \widehat{EFA} = \widehat{FAB} = 120°$.

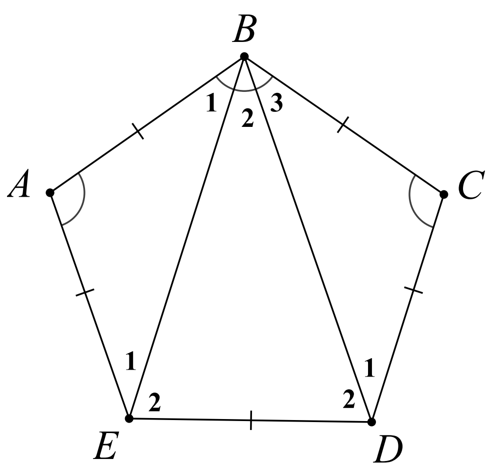
Do đó ABCDEF là một đa giác đều.

Bài toán 6. Cho ngũ giác ABCDE có các cạnh bằng nhau và $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 108°$. Ngũ giác ABCDE có phải là ngũ giác đều không?

Hướng dẫn: Để chứng minh ngũ giác ABCDE đều ta phải chứng minh:

- Các cạnh bằng nhau (giả thiết đã cho).
- Các góc bằng nhau: $\hat{D} = \hat{E} = 108°$.

Lời giải



Ta có: $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \mathrm{DE} = \mathrm{EA}\left(\mathrm{gt}\right)\left(^*\right)$

Xét tam giác ABE có AB = AE (gt)

nên ΔABE cân tại A có $\widehat{A} = 108°\left(\mathrm{gt}\right)$

$$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{E_1} = \frac{180° - \widehat{A}}{2} = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$$

Tương tự với tam giác BCD, ta có: $\widehat{B_3} = \widehat{D_1} = 36°$

Lại có $\widehat{ABC} = \widehat{B_1} + \widehat{B_2} + \widehat{B_3} = 108°$

$\Rightarrow \widehat{B_2} = 108° - \left(\widehat{B_1} + \widehat{B_3}\right) = 108° - \left(36° + 36°\right) = 36°$

Dễ thấy $\Delta ABE = \Delta CBD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \mathrm{BE} = \mathrm{BD}$ hay tam giác EBD cân tại B có $\widehat{B_2} = 36°$

$$\widehat{E}_2 = \widehat{D}_2 = \frac{180° - \widehat{B}_2}{2} = \frac{180° - 36°}{2} = 72°$$

Khi đó $\widehat{AED} = \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = 36° + 72° = 108°$

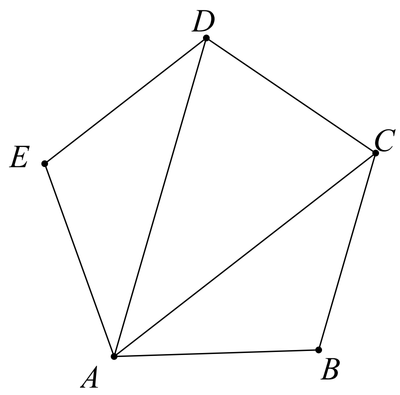
Tương tự $\overset\frown{\mathrm{CDE}} = 108°$

Vậy $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E} = 108°\left(^{**}\right)$

Từ $\left(^{*}\right)$ và $\left(^{**}\right) \Rightarrow$ ngũ giác ABCDE là ngũ giác đều (Các cạnh bằng nhau, các góc bằng nhau).

II. Tính toán

Bài toán 7. Cho ngũ giác đều ABCDE như hình vẽ.



a) Tính tổng các góc trong của tam giác $\mathrm{ABC}, \mathrm{ACD}, \mathrm{ADE}$, từ đó suy ra tóng các góc trong ngũ giác đều ABCED.

b) Tính số đo góc E.

Lời giải

a) Tổng các góc trong của tam giác ABC bằng $180°$.

Tương tự với hai tam giác còn lại ACD và ADE.

Vậy tổng các góc trong của ba tam giác $\mathrm{ABC}, \mathrm{ACD}$ và ADE là: $3.180° = 540°$

$\Rightarrow$ Tổng các góc trong của ngũ giác đều ABCED là $540°$.

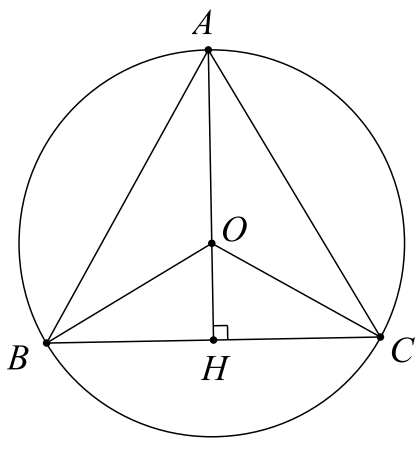
b) Vì ABCED là ngũ giác đều nên tất cả các góc đều bằng nhau nên số đo mỗi góc của ngũ giác đều bằng $\dfrac{540}{5} = 108°$.

Vậy số đo góc E bằng $108°$.

Bài toán 8. Cho hình tròn $(O;R)$.

a) Vẽ hình tam giác đều, hình vuông, hình lục giác đều có các đỉnh nằm trên $(O;R)$.

b) Tính các cạnh của các hình vừa vẽ theo R.

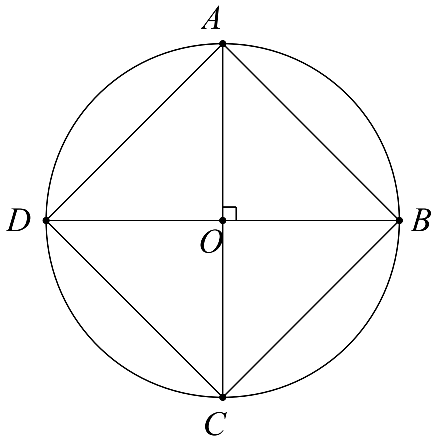


Lời giải

a) - Vẽ tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$

Vẽ đường cao AH, ta có: $AB = AC; OB = OC = R$

Nên A, O, H thuộc đường trung trực của BC vì ΔABC đều nên O là trọng tâm của tam giác.



Ta có $AH = \frac{3}{2}AO = \frac{3}{2}R\,(1)$ (tính chất trọng tâm)

Lại có AH là đường cao của tam giác ABC đều nên $AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{3}{2}R = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{3R}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\cdot R$

Vậy cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$ là $\sqrt{3}$. R.

-Vẽ hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$

Ta có: $AC \perp BD$ (tính chất hai đường chéo hình vuông)

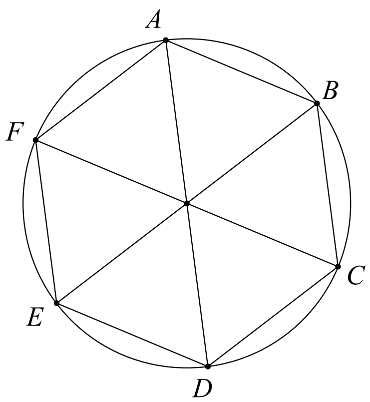
Xét tam giác AOB vuông tại O.

Theo định lí Pythgore, ta có: $AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$

$\Rightarrow AB = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}.$

Vậy cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn $(O;R)$ là $R\sqrt{2}$.

-Vẽ lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$



Vì $ABCDEF$ là lục giác đều $\Rightarrow AB = BC = CD = DE = EF = FA$

$\Rightarrow sđ\overset\frown{AB} = sđ\overset\frown{BC} = sđ\overset\frown{CD} = sđ\overset\frown{DE} = sđ\overset\frown{EF} = sđ\overset\frown{FA}$

$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOF} = \widehat{FOA} = \dfrac{360}{6} = 60°$

Xét tam giác AOB cân tại O có $\widehat{AOB} = 60°$ nên ΔAOB đều $\Rightarrow AB = R$.

Chứng minh tương tự, ta có $BC = CD = DE; EF = FA = AB = R$.

Vậy cạnh của hình lục giác đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$ là R.

Ghi nhớ: Bán kính đường tròn ngoại tiếp là R.

- Độ dài cạnh tam giác đều nội tiếp là $R\sqrt{3}$
- Độ dài cạnh hình vuông nội tiếp là $R\sqrt{2}$.
- Độ dài cạnh hình lục giác đều nội tiếp

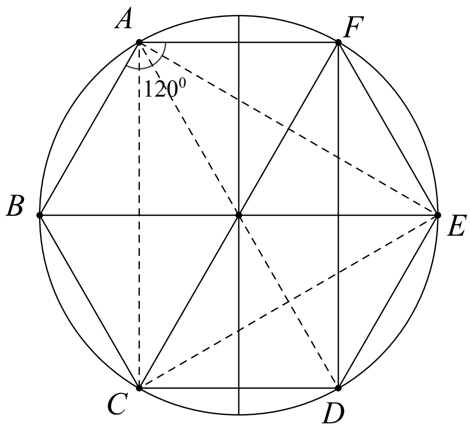
III. Phép quay

Bài toán 9. Cho lục giác đều $ABCDEF$.

a) Tính số đo các góc BCF, BDF, BEF.

b) Gọi O là tâm của lục giác đều. Hãy chỉ ra ba phép quay tâm O giữ nguyên tam giác ACE.

Lời giải



a) Dễ thấy $ABCDEF$ là lục giác đều nên $\widehat{ABF} = \widehat{AFE} = \widehat{FED} = \widehat{EDC} = \widehat{DCB} = \widehat{CBA} = 120°$.

Ta có tứ giác $ABCF$ nội tiếp đường tròn (R) nên $\widehat{BCF} = \widehat{BAF} = 180^\circ$ hay

$\widehat{BCF} + 120° = 180° \Rightarrow \widehat{BCF} = 180° - 120° = 60°$.

Tương tự tứ giác $ABDF$ nội tiếp đường tròn (R) nên $\widehat{BDF} = \widehat{BAF} = 180°$ hay

$\widehat{BDF} + 120° = 180° \Rightarrow \widehat{BDF} = 180° - 120° = 60°$.

Tương tự ta có $\widehat{BEF} = 60°$.

b) Ba đỉnh A, C, E của tam giác đéu ACE chia đường tròn (O) thành ba cung bằng nhau:

$sđ\overset\frown{AC} = sđ\overset\frown{CE} = sđ\overset\frown{EA} = 120°$.

Do đó có 6 phép quay tâm O giữ nguyên tam giác đó là:

Phép quay $120°, 240°$ thuận chiều hoặc $120°$ ngược chiều.

Nhận xét: Có tất cả 6 phép quay $120°, 240°, 360°$ tâm O thuận chiều hoặc ngược chiều kim đồng hồ giữ nguyên tam giác.

Bài toán 10. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Hãy chỉ ra các phép quay biến tam giác thành chính nó.

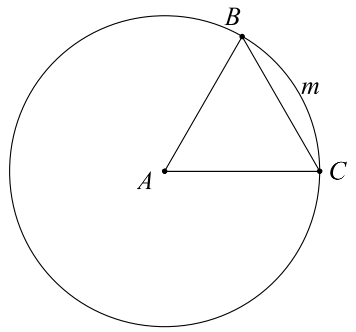
Hướng dẫn: Tương tự câu b, **bài toán 9**, có tất cả 6 phép quay đó là phép quay $120°, 240°, 360°$ tâm O thuận chiều và ngược chiều.

Bài toán 11. Cho tam giác ABC đều như hình vẽ. Điểm B biến thành điểm nào:

a) Phép phép quay thuận chiều $60°$ tâm A

b) Phép phép quay ngược chiều $300°$ tâm A

Lời giải



a) Tam giác ABC đều nên $AB = AC$. Do đó C thuộc đường tròn $(A;AB)$.

Xét đường tròn $(A;AB)$, ta có: $\widehat{BAC} = 60° \Rightarrow sđ\,\overset{\frown}{BmC} = 60°$

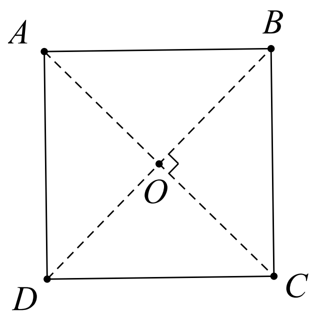
Khi đó điểm B biến thành điểm C qua phép quay thuận chiều $60°$ tâm A.

b) Ta có: $sđ\,\overset{\frown}{BnC} = 360° - sđ\,\overset{\frown}{BmC} = 360° - 60° = 300°$

Khi đó điểm B biến thành điểm C qua phép quay ngược chiếu $300°$ tâm A.

Bài toán 12. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O (hình vẽ). Nêu các phép quay giữ nguyên hình vuông đó.

Lời giải



Ta có bốn điểm A, B, C, D thuộc đường tròn tâm O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Ta có $AC \perp BD$.

Có 8 phép quay giữ nguyên hình vuông $ABCD$ là:

• Phép quay $90°, 180°, 270°, 360°$ tâm O thuận chiều.

• Phép quay $90°, 180°, 270°, 360°$ tâm O ngược chiều.

Bài toán 13. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O như hình vẽ. Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm D thì các điểm B, C, D tương ứng biến thành các điểm nào?

Lời giải

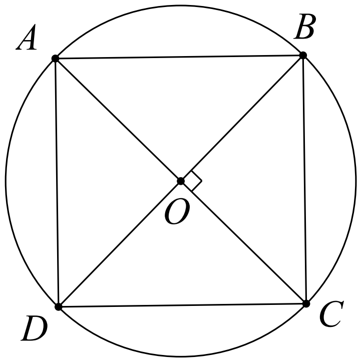
Ta có $ABCD$ là hình vuông nên $OA = OB = OC = OD$ và $AC \perp BD$.

Ta có: $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = 90°$.

Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm D là phép quay $3.90° = 270°$. Khi đó điểm B biến thành điểm A, điểm C biến thành điểm B và điểm D biến thành điểm B.

Bài toán 14. Cho hình vuông nội tiếp đường tròn tâm O. hãy cho biết các phép quay thuận chiều lần lượt $90°, 180°, 270°$ với tâm O sẽ biến các điểm A, B, C, D thành những điểm nào?

Lời giải

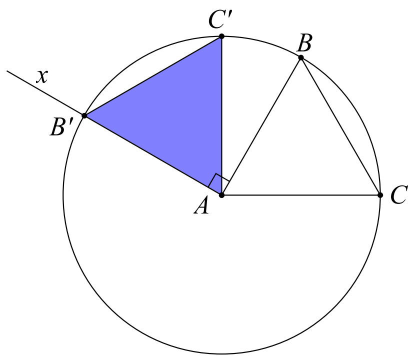


Các phép quay thuận chiều lần lượt là $90°, 180°, 270°$ với tâm O biến các điểm A, B, C, D thành những điểm tương ứng cho bởi bảng sau:

Đỉnh / Phép quay cùng chiều	A	B	C	D
90^0	B	C	D	A
180^0	C	D	A	B
270^0	D	A	B	C

Bài toán 15. Cho tam giác đều, thực hiện phép quay ngược chiều tâm A góc $90°$ ta được tam giác đều. Hãy vẽ tam giác đều đó.

Lời giải



Cách dựng: Phép quay ngược chiêu $90°$ tâm A, biến điểm B biến thành điểm B'.

Xác định điểm B' theo hướng dẫn sau:

Vẽ đường tròn $(A; AB)$ và tia Ax sao cho $\widehat{BAx} = 90°$, tia Ax cắt đường tròn $(A; AB)$ tại điểm B'.

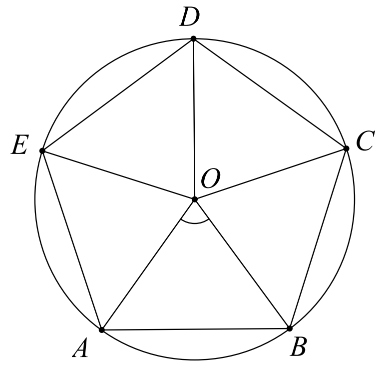
Tương tự ta dựng được điểm C'.

Bài toán 16. Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ có tâm O (Hình vẽ).

a) Phép quay ngược chiêu tâm O biến điểm A thành điểm B thì các điểm B, C, D, E tương ứng biến thành các điểm nào?

b) Chỉ ra ba phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều đã cho.

Lời giải



a) Phép quay ngược chiều $72°$ tâm O biến điểm A, biến B thì các điểm B, C, D, E lần lượt biến thành các điểm C, D, E và A.

b) Ba phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều:

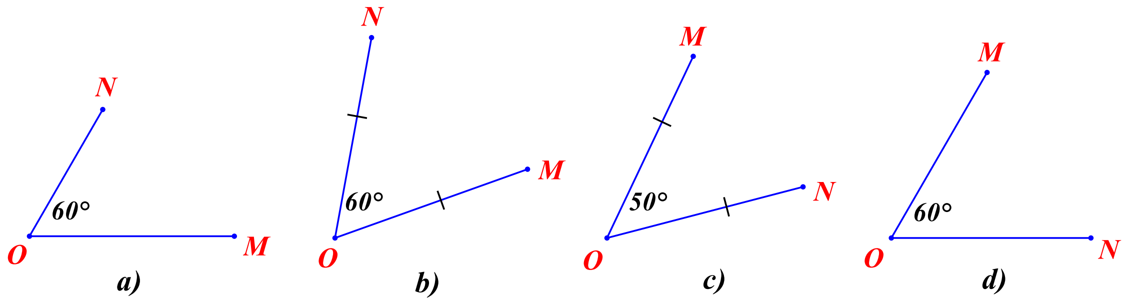
1. Phép quay ngược chiểu 144°;

2. Phép quay ngược chiểu 216°;

3. Phép quay thuận chiểu 72°.

Bạn hãy tìm thêm những phép quay còn lại giữ nguyên hình ngũ giác đểu.

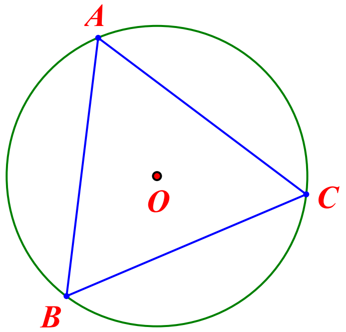
Bài toán 17. Trong các hình dưới đây, hình nào vẽ hai điểm M và N thoả mãn phép quay thuận chiếu 60° tâm O biến điểm M thành điểm N ?



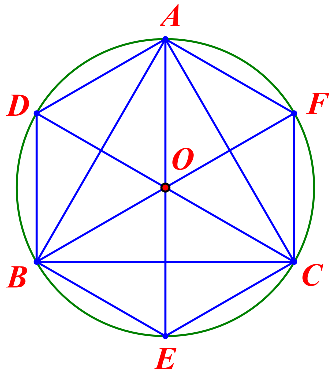
Lời giải

Phép quay thuận chiếu 60° tâm O biến điểm M thành điểm N là hình d, vì ta có $OM = ON$ và $\widehat{MON} = 60^\circ$.

Bài toán 18. Cho tam giác đều ABC nội tiếp dường tròn (O) như hình vẽ. Phép quay ngược chiếu 60° tâm O biến các điểm A, B, C lần lượt thành các điểm D, E, F. Chứng minh. răng ADBECF là một lục giác đều.



Lời giải



Phép quay ngược chiều 60° tâm O biến A thành D.

Ta có: $OD = OA$ và $\widehat{AOD} = 60^\circ$ nên tam giác AOD là tam giác đều $\Rightarrow AD = OA = OD = R$ (R là bán kính đường tròn (O)).

Chứng minh tương tự, ta có: $BE = CF = R \quad \Rightarrow AD = BE = CF = R$ (*)

Tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O), ta có: $OD = OA = OB$ (1)

Lại có $\widehat{AOB} = 120^\circ$ mà $\widehat{AOD} = 60^\circ$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{DOB} = 60^\circ \,(2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow$ Tam giác DOB là tam giác đêu. $\rightarrow$

chứn minh tương tự các tam giác ECC và FOA cũng là tam giác đều

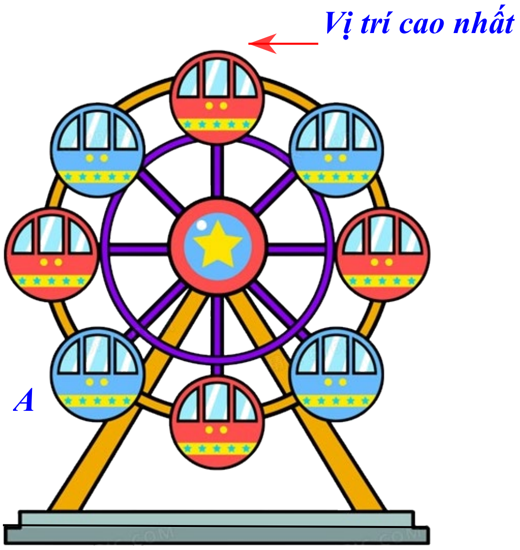
$\Rightarrow DB = EC = EA = R\left({}^{**}\right)$

Từ (*) và $\left({}^{**}\right) \Rightarrow AD = DB = BE = EC = CE = EA\,(= R)$ (3)

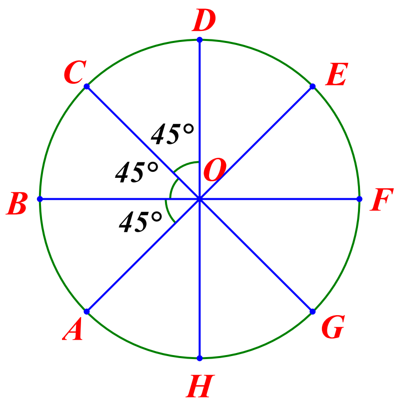
Dễ thấy $\widehat{ADB} = \widehat{DBE} = \widehat{BEC} = \widehat{ECF} = \widehat{CFA} = \widehat{FAD}$ (4)

Từ (3) và $(4) \Rightarrow ADBECF$ là một lục giác đều.

Bài toán 19. Cho vòng quay mặt trời gồm 8 cabin như hình vẽ. Hỏi để cabin A di chuyển đến vị trí cao nhất thì vòng quay phải quay thuận chiều kim đồng hồ quanh tâm bao nhiêu độ?



Lời giải



Ta có một bát giác đều $ABCDEFGH$ nội tiếp trong đường tròn (0), mỗi góc ở tâm là:

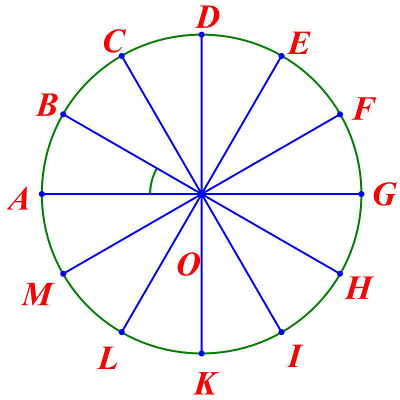
$360^\circ : 8 = 45^\circ$ (Xem hình vẽ).

Theo giả thiết, ta có: $\widehat{AOD} = 45^\circ.3 = 135^\circ$.

Vậy qua phép quay thuận chiều 135° tâm O, cabin A di chuyển đến vị trí cao nhất (điểm D).

Bài toán 20. Vòng trong của mái giếng trời hình hoa sen của nhà ga Bến Thành (Thành phố Hở Chí Minh) có dạng đa giác đều 12 cạnh (Hình vẽ). Hãy chỉ ra bốn phép quay biến đa giác đều đó thành chính nó.

Lời giải



Đa giác đều 12 cạnh $ABCDEFGHIKLM$ nội tiếp đường tròn (O) (Xem hình vẽ).

Ta co: $\widehat{AOB} = \dfrac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

và $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \ldots = 30^\circ$

Và $OA = OB = OC = OD = \ldots$ (bán kính đường tròn ngoại tiếp)

Ta chọn phép quay thuận chiều (hoặc ngược chiều) góc quay $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ biến đa giác đã cho thành chính nó.

HẾT

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

A. TRẮC NGHIỆM

1. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Góc nội tiếp có số đo bằng số đo cung bị chắn.

B. Góc có hai cạnh chứa các dây cung của đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.

C. Góc nội tiếp có số đo bằng một nửa số đo cung bị chắn.

D. Góc có đỉnh nằm trên đường tròn là góc nội tiếp dường tròn đó.

2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một dường tròn có $\widehat{A}-\widehat{C}=100^\circ$. Khảng định nào dưới đây là đúng?

A. $\widehat{A}=80^\circ$.

B. $\widehat{B}=80^\circ$.

C. $\widehat{B}+\widehat{D}=100^\circ$.

D. $\widehat{A}=140^\circ$.

3. Đa giác nào sau đây không nội tiếp một đường tròn?

A. Đa giác đều.

B. Hình chữ nhật.

C. Hình bình hành.

D. Tam giác.

Huớng dẫn - Dáp án

1. Chọn C.

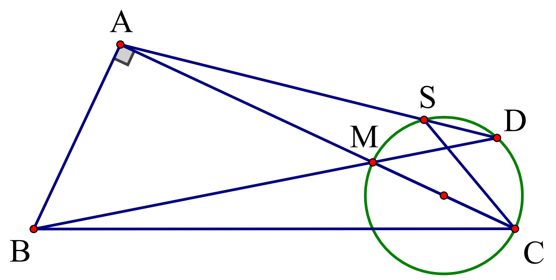
2. Chọn D.

3. Chọn C.

B. TỰ LUẬN

4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên AC lấy một diểm M và dựng đường tròn dường kính MC. Nối BM kéo dài gạp đường tròn tại D. Đường thẳng DA gặp đường tròn tại S. Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc $\widehat{SCB}$.

Lời giải



Trường hợp 1: D nàm trên cung lớn $\overset{\frown}{MS}$.

Ta có $\widehat{SCM}=\widehat{SDM}$ (1) góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{MS}$ của đường tròn dường kính MC).

Dễ thấy $\widehat{MDC}=90^\circ$ (MC là đường kính)

Tương tự $\widehat{BAC}=90^\circ$ (gt)

$\Rightarrow$ Bốn điểm B, A, D, C cùng nằm trên một đường tròn đường kính BC.

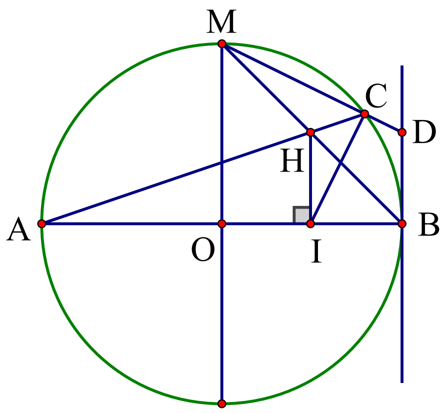
$\Rightarrow \widehat{SDM}=\widehat{ACB}$ (2) (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \widehat{SCM}=\widehat{MCB}$ hay CA là tia phân giác của góc SCB.

Trường hợp 2: D năm trên cung nhỏ MS và Trường hợp $3: D$ trùng với S. (Học sinh tự giải).

5. M ở chính giữa nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên cung nhỏ BM lấy điểm C bất kì. Vẽ tiếp tuyến tại B của (O) cắt MC tại D. Gọi H là giao diểm của MB và AC. Kẻ HI vuông góc với AB. Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc $\widehat{MCI}$.

Lời giải



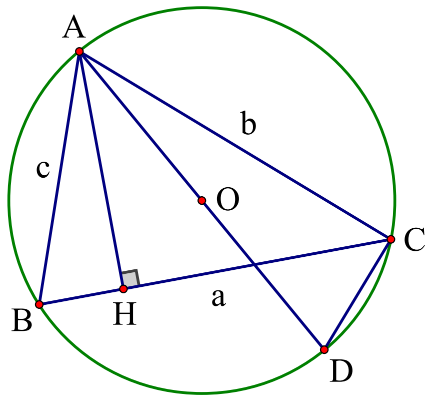
Dễ thấy $\widehat{ACB}=90^{\circ}$ (vì AB là đường kính) $\widehat{HCB}=90^{\circ}$ hay C thuộc đường tròn đường kính HB. Lại có $\widehat{HIB}=90^{\circ}$ (gt) nên I thuộc đường tròn dường kính HB nên bốn điểm C, H, I, B cùng thuộc dường tròn đường kính HB. $\Rightarrow \widehat{HCI}=\widehat{HBI}(1)$ (góc nội tiếp cùng chắn cung IH). Lại có $\widehat{HBI}=\widehat{MCA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MA) $\Rightarrow \widehat{MCA}=\widehat{MBA}$, chứng tỏ CA là tia phân giác của góc $\widehat{MCI}$.

6. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$ dường kính AD, dường cao AH.

a) Chứng minh $\triangle AHB$ và $\triangle ACD$ đồng dạng.

b) Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh tương ứng với các đỉnh A, B, C. Chứng minh: $S_{ABC}=\dfrac{a.b.c}{4R}$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

Lại có $\widehat{ACD}=90^{\circ}$ (AD là dường kính)

Do đó $\triangle AHB \sim \triangle\triangle ACD$ (g.g)

b) $\triangle AHB \sim \triangle ACD \Rightarrow \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AH}{AC}$

$\Rightarrow AH=\dfrac{AB\cdot AC}{AD}=\dfrac{AB\cdot AC}{2R}$

Do do $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AH\cdot BC=\dfrac{1}{2}\dfrac{AB\cdot AC}{2R}\cdot BC=\dfrac{AB\cdot AC\cdot BC}{4R}=\dfrac{abc}{4R}$.

7. Cho tam giác ABC có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC và I là trung điểm của AH. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn tâm I;

b) ME, MF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$.

Lời giải

a) Dễ thấy $\widehat{AEH}=\widehat{AFH}=90^\circ$ (gt).

Tứ giác AEHF có $\widehat{AEH}+\widehat{AFH}=180^\circ$ (gt) nên nội tiếp đường tròn tâm I.

b) Ta có tam giác BEC vuông tại E (gt), EM là trung tuyến

$\Rightarrow EM=BM=CM$ hay $\triangle BME$ cân tại M

$\Rightarrow \widehat{B_2}=\widehat{E_2}$

Lại có H, E thuộc đường tròn tâm I nên $\triangle HIE$ cân tại I

$\Rightarrow \widehat{H_2}=\widehat{E_1}$ mà $\widehat{H_1}=\widehat{H_2}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{E_1}=\widehat{H_2}$

Gọi K là chân đường cao kẻ từ A đến BC, ta có tam giác BKH vuông tại K

$\Rightarrow \widehat{B_2}+\widehat{H_1}=90^\circ$ mà $\widehat{B_2}=\widehat{E_1}$, $\widehat{H_2}=\widehat{E_1}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{E_1}+\widehat{E_2}=90^\circ$ hay $\widehat{IEM}=90^\circ \Rightarrow ME\perp IE$

Chứng tỏ ME tiếp xúc với đường tròn (I) ngoại tiếp tứ giác $AEHF$.

Chứng minh tương tự ta có MF tiếp xúc với (I).

8. Cho tam giác ABC nội tiếp dường tròn (O). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng các tứ giác $ANOP$, $BPOM, CMON$ là các tứ giác nội tiếp.

Lời giải

Ta có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB nên OM, ON, OP lần lượt là các trung tuyến của các tam giác cân BOC, COA và AOB.

Do đó chúng đồng thời là các đường cao của các tam giác cân nêu trên. Dễ dàng ta có $\widehat{ANO}=\widehat{APO}=90^\circ \Rightarrow \widehat{ANO}+\widehat{APO}=180^\circ$

Do đó tứ giác $ANOP$ nội tiếp

Chứng minh tương tự ta có $BPOM$ và $CMON$ nội tiếp

9. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao $AH(H\in BC)$ và nội tiếp dường tròn tâm O có đường kính AM (Hình vẽ). Chứng minh $\widehat{OAC}=\widehat{BAH}$.

Lời giải

Dễ thấy $\widehat{ACM}=90^\circ$ (vì AM là đường kính)

Tam giác ACM vuông tại $C \Rightarrow \widehat{OAC}+\widehat{AMC}=90^\circ$

Lại có tam giác AHB vuông tại H (gt)

$\Rightarrow \widehat{BAH}+\widehat{ABC}=90^\circ$

Mà $\widehat{AMC}=\widehat{ABC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC) $\Rightarrow \widehat{OAC}=\widehat{BAH}$.

10. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a. Góc vuông xAy thay đổi sao cho tia Ax cát đoạn thẳng BC tại M và tia Ay cát đoạn thảng CD kéo dài tại N.

a) Chứng minh hai tam giác ABM và AND bàng nhau;

b) Gọi O là trung điểm của MN. Chứng minh $ABMO$ và $ANDO$ là các tứ giác nội tiếp;

c) Chứng minh ba diểm B,D,O thẳng hàng.

Lời giải

a) Ta có $\widehat{BAM}+\widehat{MAD}=\widehat{BAD}=90^\circ$ (1)

Lại có $Ax\perp Ay$ nên $\widehat{xAy}=90^\circ$ hay $\widehat{MAD}+\widehat{DAN}=90^\circ\,(2)$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow \widehat{BAM}=\widehat{DAN}$ nên hai tam giác vuông ABM và AND bằng nhau theo trường hợp g.c.g. $\Rightarrow AM=AN$.

b) Tam giác AMN vuông cân tại A, có AO là đường trung tuyến nên đồng thời là đường cao hay $AO\perp MN$ hay $\widehat{AOM}=90^\circ$.

Dễ thấy tứ giác $ABMO$ có $\widehat{ABM}=\widehat{AOM}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ABM}+\widehat{AOM}=180^\circ$ nên $ABMO$ là tứ giác nội tiếp

Lại có $\widehat{AON}=\widehat{ADN}=90^\circ$, chứng tỏ bốn điểm A,O,D,N cùng thuộc một đường tròn đường kính AN hay tứ giác $ANDO$ nội tiếp.

c) Ta có tứ giác $ABMO$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{BOM}=\widehat{BAM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BM),

$\widehat{BAM}=\widehat{DAN}$ (cmt)

Lại có tứ giác $ANDO$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{DAN}=\widehat{DON}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DN)

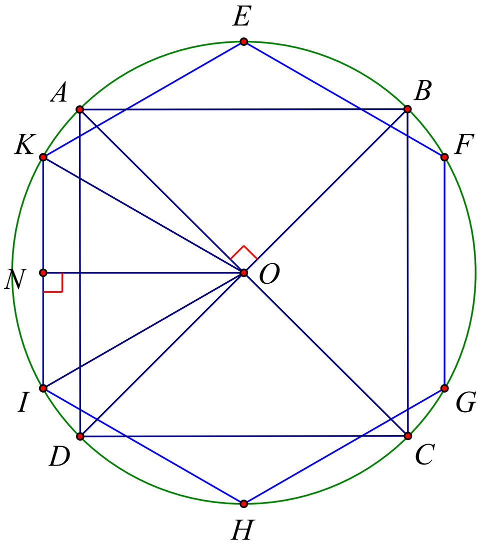
$\Rightarrow \widehat{BOM}=\widehat{DON}$, mà ba điểm M,O,N thẳng hàng (gt)

$\Rightarrow B,D,O$ thẳng hàng.

11. Cho một hình lục giác đều và một hình vuông cùng nội tiếp một đường tròn. Biết rằng hình vuông có cạnh bằng $3cm$. Tính chu vi và diện tích của một hình lục giác đều đã cho.

Lời giải

(Xem hình vẽ).



Ta có tam giác AOB vuông tại O.

Theo định lí Pythagore, ta có: $OA^2 + OB^2 = AB^2$

hay $R^2 + R^2 = 9$

$2R^2 = 9$

$R^2 = \frac{9}{2}$

$R = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\text{cm})$

Ta có cạnh của hình lục giác đều bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp.
Gọi P là chu vi của hình lục giác đều,

$P = 6.\frac{3\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}(\text{cm})$

Xét tam giác đều KOI cạnh $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ nên đường cao $ON = OK.\sin\widehat{OKN} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do đó diện tích tam giác $KOI = \frac{1}{2}.\frac{3\sqrt{2}}{2}.\frac{3\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{8}(\text{cm}^2)$

Diện tích hình lục giác đều là: $S = 6.\frac{18\sqrt{3}}{8} = \frac{27\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^2)$

☙ HẾT ❧

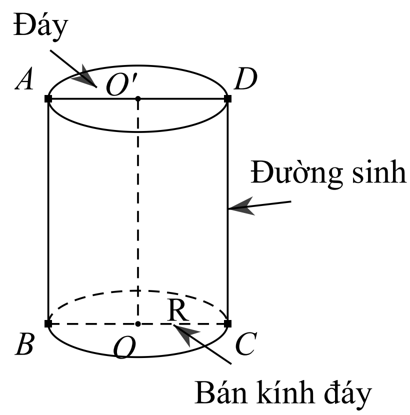
CHƯƠNG X. MỘT SỐ HÌNH KHỐI TRONG THỰC TIỄN

BÀI 31. HÌNH TRỤ VÀ HÌNH NÓN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hình trụ

● Nhận biết

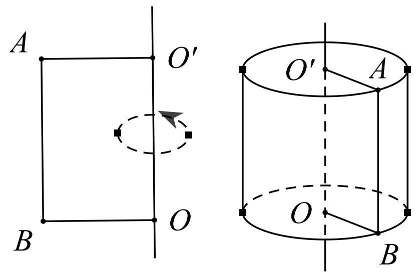


Khi quay hình chữ nhật $O'ABO$ một vòng quanh OO' cố định thì ta được một hình trụ, trong đó:

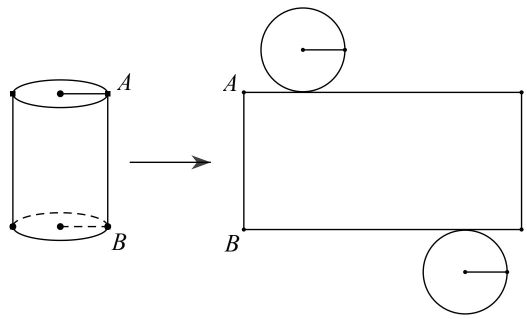
- Hai đáy của hình trụ là hai hình tròn bằng nhau $(O';O'A)$ và $(O;OB)$.

- Mỗi đường sinh là một vị trí của AB khi quay. Vậy hình trụ có vô số đường sinh. $R = O'A = OB$ gọi là bán kính của hình trụ.

- Độ dài của đoạn OO' gọi là chiều cao của hình trụ. Các đường sinh bằng nhau và bằng OO'.



Chú ý: Từ một hình trụ, nếu ta cắt rời hai đáy và cắt theo một đường sinh nào đó rồi trải phẳng ra thì ta được một hình phẳng (gồm hai hình tròn và một hình chữ nhật) như hình vẽ gọi là *hình khai triển của hình trụ* đã cho.



● Diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ

Công thức tính diện tích mặt xung quanh (gọi tắt là diện tích xung quanh, kí hiệu là S_{xq}) của hình trụ như sau: $S_{xq} = 2\pi Rh$

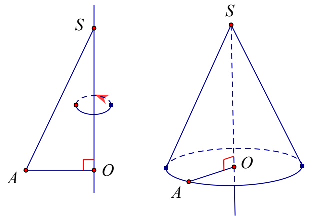
trong đó R là bán kính đáy, h là chiều cao.

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy}$

Thể tích của hình trụ: $V = S_{đáy}.h = \pi R^2 h$

trong đó $S_{đáy}$ là diện tích đáy, R là bán kính, h là chiều cao.

2. Hình nón



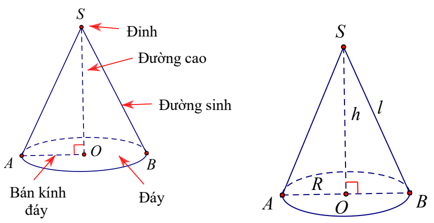
● Khi quay tam giác vuông SOA (vuông ở O) một vòng quanh SO cố định thì ta được một hình nón đỉnh S, trong đó:

- Đáy của hình nón là hình tròn $(O;OA)$, $R = OA$ gọi là bán kính đáy của hình nón.

- Mỗi đường sinh là một vị trí của SA khi quay. Vậy hình nón có vô số đường sinh dài bằng nhau.

- SO gọi là đường cao của hình nón. Độ dài đoạn SO được gọi là chiều cao của hình nón.

● Một số yếu tố của hình nón:



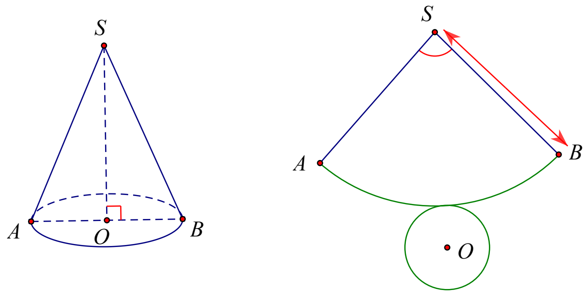
Đỉnh: S.

Chiều cao: $h = SO$.

Đường sinh: $l = SA = SB$.

Bán kính đáy: $r = OA$.

Chú ý: Cho một hình nón. Nếu ta cắt rời đáy và cắt mặt xung quanh của nó theo đường sinh SA rồi trải phẳng ra thì được một hình phẳng (gồm một hình tròn và một hình quạt như hình vẽ gọi là *hình khai triển của hình nón* đã cho).



● Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón

Công thức tính diện tích mặt xung quanh (gọi tắt là diện tích xung quanh, kí hiệu là S_{xq}) của hình nón như sau:

$S_{xq} = \pi rl$,

trong đó r là bán kính đáy, l là độ dài đường sinh.

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}$

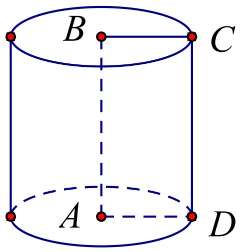
Công thức tính thể tích V hình nón như sau: $V = \frac{1}{3}S_{đáy}.h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$,

trong đó $S_{đáy}$ là diện tích đáy, r là bán kính đáy, h là chiều cao.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Nhận biết hình trụ

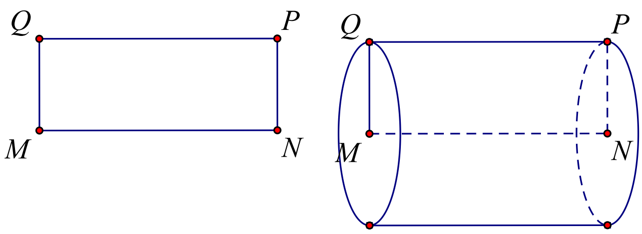
Bài toán 1. Tính chiều cao và bán kính đáy của hình trụ tạo thành khi quay hình chữ nhật $ABCD$ có $CD = 3\text{cm}$, $AD = 2\text{cm}$ quanh cạnh AB (hình vẽ).



Lời giải

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB, ta được hình trụ có chiều cao $CD = 3\text{cm}$ và bán kính đáy $AD = 2\text{cm}$.

Bài toán tương tự. Cho hình chữ nhật $MNPQ$ có $PQ = 4\text{cm}, NP = 2,5\text{cm}$ quay quanh cạnh MN. Chỉ ra mặt đáy, đường sinh và tính chiêu cao, bán kính đáy của hình trụ tạo thành.

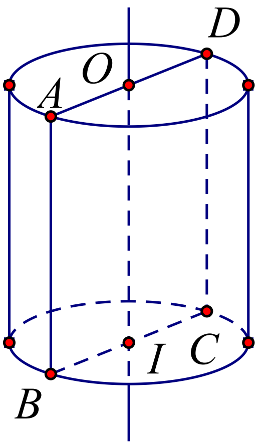


Hướng dẫn

Mặt đáy là hình tròn tâm M và N, bán kính $MQ = NP$, đường sinh PQ.

Chiều cao của hình trụ là $PQ = 4\text{cm}$, bán kính đáy của hình trụ là $NP = 2,5\text{cm}$.

Bài toán 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$, các điểm O, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC. Xét hình trụ được tạo ra khi quay hình chữ nhật $AOIB$ một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa cạnh OI của hình chữ nhật đó (Hình vẽ).



Hãy chỉ ra:

a) Bốn bán kính đáy của hình trụ;

b) Chiều cao của hình trụ;

c) Hai đường sinh của hình trụ.

Lời giải

a) Bán kính đáy của hình trụ: $OA; OD; IB; IC$.

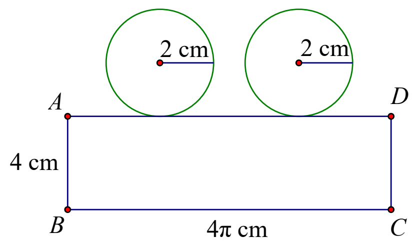
b) Chiều cao của hình trụ: AB.

c) Đường sinh: $AB; CD$.

Bài toán 3. Cho hình khai triển (hình vẽ) đối với hình trụ nhận được. Hãy chỉ ra:

a) Một đường sinh của hình trụ.

b) Độ dài bán kính đáy, chiều cao của hình trụ.

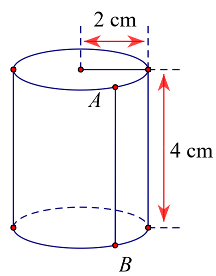


Lời giải

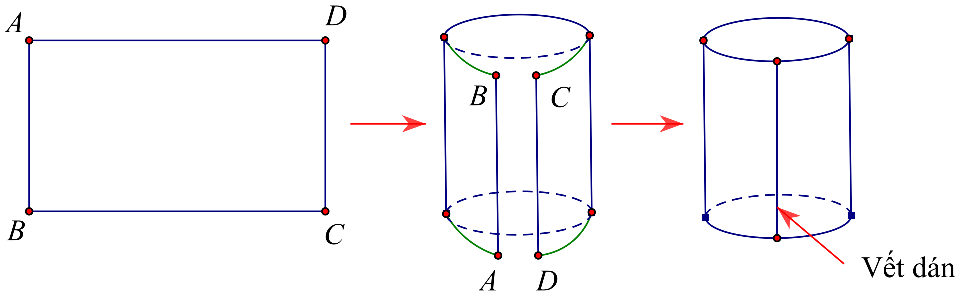
a) Đoạn thẳng AB là một đường sinh của hình trụ.

b) Độ dài bán kính đáy là 2cm.

Chiều cao của hình trụ là 4cm.



Bài toán tương tự. Chuẩn bị một băng giấy cứng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 8\text{cm}$, $BC = 15\text{cm}$. Cuộn băng giấy lại sao cho hai cạnh AB và DC sát vào nhau như hình vẽ (dùng băng keo dán), ta được một hình trụ (không có đáy). Hãy cho biết chiều cao và chu vi đáy của hình trụ đó.



Lời giải

Chiều cao của hình trụ: $AB = 8\text{cm}$.

Chu vi dáy của hình trụ: $BC = 15\text{cm}$.

Nhận xét: Ta có thể tính bán kính của hình trụ:

$$15 = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{15}{2\pi} \approx 2,39(\text{m})$$

II. Diện tích xung quanh - Diện tích toàn phần

Bài toán 4. Tính diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy 2m và chiều cao 3m.

Lời giải

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi.2.3 = 12\pi(\text{m}^2)$.

Bài toán tương tự. Cho một hình trụ có bán kính đáy 4m và chiều cao 10m. Hỏi diện tích xung quanh của hình trụ đó là bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi.4.10 = 80\pi \approx 251,33(\text{m}^2)$

Bài toán 5.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy 3m và chiều cao 7m.

b) Một hình trụ có diện tích xung quanh $32\pi\ \text{cm}^2$ và có độ dài đường sinh là $4\ \text{cm}$. Tính bán kính đáy.

Lời giải

a) Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi.3.7 = 42\pi(\text{cm}^2)$

b) Chiều cao của hình trụ bằng độ dài đường sinh là 4cm.

Ta có: $32\pi = 2\pi Rh = 2\pi.4$

Vậy bán kính đáy của hình trụ là: $R = \dfrac{32\pi}{2\pi.4} = 4(\text{cm})$.

Bài toán 6. Diện tích giấy tối thiểu để quấn quanh một hộp đào ngâm có dạng hình trụ (Hình vẽ) là bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm), biết rằng người ta chỉ quấn một lớp giấy quanh hộp đào?

Lời giải

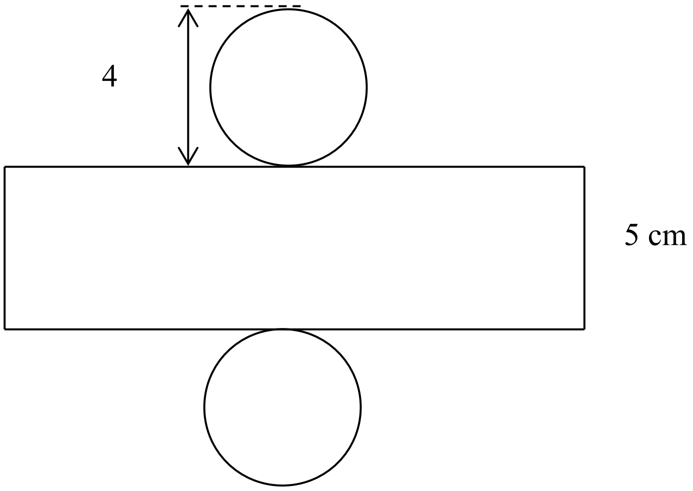
Đường kính đáy hình trụ là 10 mm $(=2R)$

Diện tích xung quanh hình trụ là: $S_{xq}=2\pi Rh=\pi 100.120=12000\pi\approx 3769,91$ (mm)

Vậy diện tích giấy tối thiểu để quấn quanh một hộp đào ngâm có dạng hình trụ là $3769,91$ (mm)

Bài toán 7. Tính diện tích xung quanh của hình trụ triển khai như hình vẽ.

Lời giải



Ta có đường kính đáy của hình trụ là 4 cm $=2R$ và chiều cao 5 cm

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq}=2\pi Rh=10\pi .5=50\pi\left(cm^2\right)$

(Nếu được làm tròn đến cm ta được $S_{xq}\approx 157\left(cm^2\right)$)

Bài toán 8. Bác An muốn sơn mặt xung quanh của một cây cột có dạng hình trụ với đường kính đáy là $30cm$ và chiều cao $350cm$. Chi phí để sơn cây cột đó là 40.000 đồng/1 m^2. Hỏi chi phí bác An cần bỏ ra để sơn mặt xung quanh của cây cột đó là bao nhiêu đồng (lấy $\pi=3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng nghìn).

Lời giải

Hình trụ có đường kính đáy là $30cm=2R$ và chiều cao $350cm$

Nên diện tích xung quanh hình trụ là:

$S_{xq}=2\pi Rh=30.350.\pi=10500\pi$

$=10500.3,14\left(cm^2\right)$

$=32970\left(cm^2\right)$

$=3,297\left(m^2\right)$

Chi phí để sơn cây cột đó là 40.000 đồng/1 m^2 nên chi phí bác An cần bỏ ra để sơn mặt xung quanh của cây cột đó là:

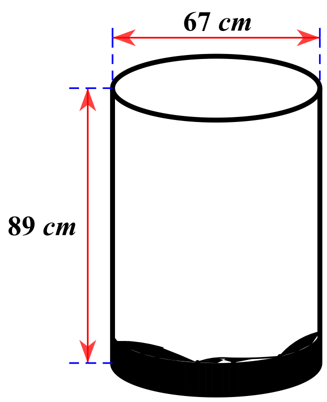
$40.000.3,297=131.880$ đồng

Bài toán 9. Một doanh nghiệp sản xuất vỏ hộp bằng tôn có dạng hình trụ với hai đáy (Hình vẽ). Hình trụ đó có đường kính đáy khoảng $57cm$ và chiều cao khoảng $89cm$. Chi phí để sản xuất vỏ hộp đó khoảng 100000 đồng/1 m^2. Hỏi số tiền mà doanh nghiệp cần chi để sản xuất 1000 vỏ hộp đó là bao nhiêu đồng (lấy $\pi=3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng nghìn).

Hướng dẫn: Cần tính diện tích toàn phần bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.

$S_{TP} = S_{xq} + 2S_D = 2\pi Rh + 2\pi R^2$

Lời giải



Diện tích xung quanh của hình trụ có đường kính đáy $2R = 57cm$ và chiều cao $89cm$ là:

$S_{xq} = 2\pi Rh = 57.89.\pi = 15929,22\left(cm^2\right)$

Diện tích hai đay là: $2\pi R^2 = 2.\left(\frac{57}{2}\right)^2.\pi = 5100,93\left(cm^2\right)$

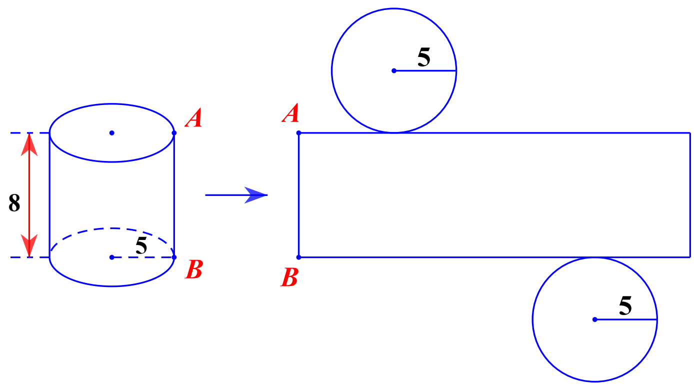
Diện tích toàn phần là: $S_{TP} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$

$$= 15929,22 + 5100,93\left(cm^2\right)$$
$$= 21030,15\left(cm^2\right)$$
$$= 2,103015\left(cm^2\right)$$

Để sản xuất 1000 vỏ hộp cần $2,103015.1000 = 2103,015\left(cm^2\right)$

Chị phí để sản xuất vỏ hộp là 100000 đồng/1 m^2 nên số tiền mà doanh nghiệp cần chi để sản xuất 1000 vỏ hộp là: $2103,015.100000 = 210301500$ đồng.

Bài toán 10. Một hộp hình trụ làm bằng thiếc có bán kính đáy, chiều cao (Hình a). Nếu cát rời hai đáy và cắt dọc theo đường sinh AB của hộp, rồi trải ra mặt phẳng, ta được hình triển khai của hình trụ (Hình b).



a) b)

a) Tính chu vi mỗi đáy của hình trụ.

b) Tính diện tích miếng thiếc hình chữ nhật để làm mặt xung quanh của hộp (diện tích các mối nối không đáng kể)

Lời giải

a) Chu vi mỗi đáy là: $2\pi R = 2.5.\pi = 10\pi\left(cm\right)$.

b) Diện tích miếng thiếc hình chữ nhật để làm mặt xung quanh của hộp là:

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi.5.8 = 80\pi\left(cm\right).$$

Bài toán 11. Phần bên trong của một chiếc thùng có dạng hình trụ với bán kính đáy cao $0,6m$, chiều cao $0,8m$. Người ta muốn sơn mặt bên trong của hình trụ (bao gồm một mặt đáy). Hỏi diện tích cần sơn là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn: Diện tích cần sơn là tổng của hai diện tích sau: Diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy.

Lời giải

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi.0,6.0,8 = \dfrac{24}{25}\pi$

Diện tích mặt đáy là: $S_D = \pi R^2 = \pi.\left(0,6\right)^2 = \dfrac{9}{25}\pi\left(m^2\right)$.

Vậy diện tích cần sơn là: $\dfrac{24}{25}\pi + \dfrac{9}{25}\pi = \dfrac{33}{25}\pi \approx 4,15\left(m^2\right)$.

III. Thể tích hình trụ

Bài toán 12. Tính thể tích hình trụ có bán kính đáy $10m$, chiều cao $15m$.

Lời giải

Thể tích của hình trụ là: $V = \pi r^2 h = \pi.10^2.15 = 1500\pi\left(m^3\right)$.

Bài toán 13. Một khối gỗ có dạng hình trụ với bán kính đáy khoảng $13cm$ và chiều cao khoảng $43cm$. Hỏi thể tích của khối gỗ đó là bao nhiêu xentimét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Thể tích của khối gỗ đó là: $V = \pi r^2 h = \pi.13^2.43 = 7267\pi \approx 22892,95\left(m^3\right)$.

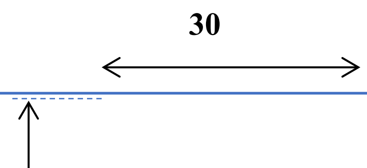
Bài toán 14. Phần bên trong của một cái bể hình trụ có chiều cao $2,1m$ và bán kính đáy $1,5m$. Tính thể tích lượng nước trong bể biết mực nước bằng $\dfrac{2}{3}$ chiều cao của bể (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

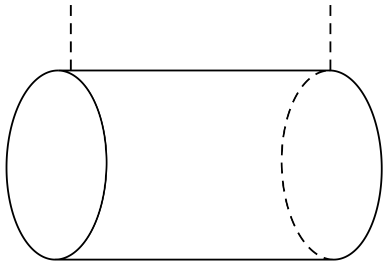
Lời giải

Chiều cao của mực nước: $2,1.\dfrac{2}{3} = 1,4\ \left(m\right)$

Thể tích lượng nước trong bể: $V = \pi r^2 h = \pi.\left(1,5\right)^2.1,4 = \dfrac{63}{20}\pi \approx 9,89601 \approx 10\left(m^3\right)$.

Bài toán 15. Một đường ống nối hai bể cá trong một thủy cung có dạng hình trụ (không có hai đáy), với độ dài (hay chiều cao) là $30m$ và có dung tích 1800000 l (Hình vẽ). Hỏi đường kính đáy của đường ống đó là bao nhiêu mét (lấy $\pi = 3,14$ và kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) ?





Lời giải

$1800000\ (l) = 1800\left(m^3\right)$

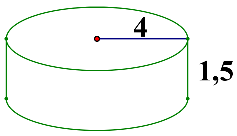
Ta có: $V = \pi R^2 h \Rightarrow 1800 = \pi R^2.30$

$\Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{1800}{30\pi}} \approx 4,377$

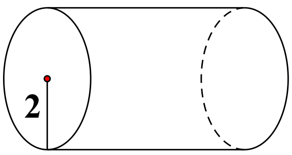
$\Rightarrow 2R = 8,74(m)$.

Đường kính đáy của đường ống là $8,74$ mét.

Bài toán 16. Một khối sắt có bán kính đáy và chiều cao được nung chảy và đúc thành một khối sắt hình trụ mới với bán kính đáy (Hình vẽ).



a)



b)

a) Tính thể tích của khối sắt ban đầu (Hình vẽ a).

b) Tính chiều cao của khối sắt mới, bỏ qua sự hao hụt trong quá trình đúc (Hình vẽ b)

Lời giải

a) Thể tích của khối sắt ban đầu: $V = \pi.4^2.1,5 = 24\pi\left(cm^3\right)$.

b) Thể tích của khối sắt mới bằng thể tích của khối sắt ban đầu.

Gọi h (cm) là chiều cao của khối sắt mới.

Thể tích của khối sắt mới: $V = \pi.2^2.h\left(cm^3\right)$. Ta có $\pi.2^2.h = 24\pi$.

Chiều cao của khối sắt mới: $h = \dfrac{24\pi}{\pi.2^2} = 6(cm)$.

Bài toán 17. Tính chiều cao và thể tích của khối hình trụ có bán kính đáy 5 cm và diện tích xung quanh bằng $30\pi\ \left(cm^2\right)$.

Lời giải

Ta có: $S_{xq} = 2\pi Rh \Rightarrow 30\pi = 2\pi.5.h$

$\Rightarrow h = 2$ (cm)

Ta có: $V = \pi R^2.h = \pi.5^2.3 = 75\pi\ \left(cm^3\right)$.

Bài toán 18. Tính thể tích nhựa cần dùng để sản xuất ống nhựa có kích thước như hình vẽ.

Lời giải

Đường kính phần ngoài của ống nhựa là 3 cm nên bán kính là $1,5\text{ cm}$.

Đường kính phần bên trong của ống nhựa là $3-2.0,3=2,4\text{ cm}$ nên bán kính là $1,2\text{ cm}$.

Thể tích nhựa cần dùng là: $4\pi.\left(1,5^2-1,2^2\right)=\dfrac{81}{25}\pi\approx 10,17876\ \left(\text{cm}^3\right)\approx 10,2\left(\text{cm}^3\right)$.

Bài toán 19. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ có triển khai như hình vẽ. Lấy $\pi=\dfrac{22}{7}$.

Lời giải

Diện tích xung quanh của hình trụ chính là diện tích hình chữ nhật có hai cạnh 44 cm và 20 cm

$S_{xq}=44.20=880\ \left(cm^2\right)$

Thể tích của hình trụ: $V=\pi R^2.h=\dfrac{22}{7}.7^2.20=3080\ \left(cm^3\right)$

Bài toán 20. Một thùng nước có dạng hình trụ với bán kính đáy bằng $0,5\text{ m}$ và chiều cao bằng $1,6\text{ m}$.

a) Tính diện tích xung quanh của thùng nước.

b) Hỏi thùng nước chứa bao nhiêu lít nước?

(Coi chiều dày của thùng không đáng kể và làm tròn kết quả ở cân b đến hàng đơn vị lít).

Lời giải

a) Diện tích xung quanh của thùng nước là: $S_{xq}=2\pi Rh=2\pi.0,5.1,6=\dfrac{8}{5}\pi\ \left(m^2\right)$

b) Thể tích của thùng nước là: $V=\pi R^2.h=\pi.\left(0,5^2\right).1,6=\dfrac{2}{5}\pi\approx 1257\ \left(lit\right)$

Vậy trong thùng nước chứa 1257 lít nước.

Bài toán tương tự. Bác Khôi dự định sơn lại một thùng rác có dạng hình trụ (sơn mặt ngoài và một đáy là nắp) có bán kính đáy bằng 11 cm và chiều cao bằng 30 cm (hình vẽ).

a) Tính diện tích phần cần sơn của thùng rác.

b) Tính thể tích của thùng rác (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^2).

Lời giải

a) Phần cần sơn bao gồm mặt xung quanh và một đáy của hình trụ.

Theo đề bài, ta có: $R=11\text{ cm}$ và $h=30\text{ cm}$.

Do đó: $S_{xq}=2\pi Rh=2\pi.11.30=660\pi\ \left(cm^2\right)$

$S_D=\pi R^2=\pi.11^2=121\pi\ \left(cm^2\right)$

Vậy diện tích phần cần sơn là: $S=S_{xq}+S_D=\left(660+121\right)\pi=781\pi\ \left(cm^2\right)$

b) Thể tích của thùng rác là: $V=S_D.h=121\pi.30=3630\pi\approx 11404\ \left(cm^2\right)$.

Bài toán 21. Pin là nguồn năng lượng phổ biến được sử dụng trong nhiều dụng cụ và thiết bị trong gia đình. Pin AAA (hay pin 3A) là một loại pin khô, thường được dùng trong những thiết bị điện tử cầm tay, chẳng hạn, điều khiển từ xa ti vi, máy nghe nhạc MP3, …Mỗi chiếc pin 3A có dạng hình trụ (hình vẽ), với kích cỡ tiêu chuẩn: chiều cao khoảng $44,5\text{ mm}$ và đường kính khoảng $10,5\text{ mm}$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần (theo đơn vị centimét vuông) và thể tích (theo đơn vị centimét khối) của một chiếc pin 3A (lấy $\pi=3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Đổi: 44,5 mm =4,45 cm;10,5 mm =1,05 cm.

Diện tích xung quanh của viên pin là:

$S_{xq} = 2\pi Rh = 2.3,14.\frac{1,05}{2}.4,45 = 14,67165\left(cm^2\right)$

Diện tích hai đáy: $2S_D = 2.3,14.\left(\frac{1,05}{2}\right)^2 = 1,730925\left(cm^2\right)$

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_D = 14,67165 + 1,730925 \approx 16,4\left(cm^2\right)$

Thể tích của viên pin là: $V = \pi.R^2.h = \pi.\left(\frac{1,05}{2}\right)^2.4,45 \approx 3,9 \ \left(cm^3\right)$.

IV. Hình nón

Bài toán 22. Cho tam giác cân ACD có O là trung điểm cạnh đáy CD. Xét hình nón được tạo ra khi quay tam giác vuông AOC một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa cạnh AO của tam giác vuông đó (Hình vẽ). Quan sát hình vẽ và hãy chỉ ra:

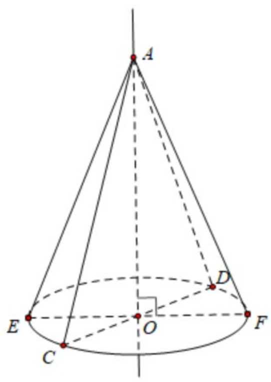
a) Đỉnh của hình nón;

b) Bán kính đáy của hình nón;

c) Chiều cao của hình nón;

d) Đường sinh của hình nón.

Lời giải



a) Đỉnh của hình nón: S.

b) Bán kính đáy của hình nón: OC, OD, OE, OF.

c) Chiều cao của hình nón: AO.

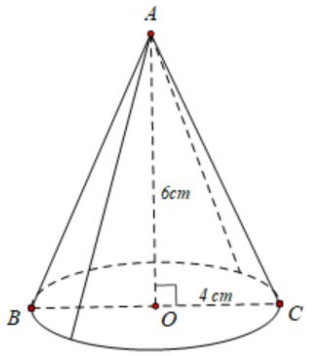
d) Đường sinh của hình nón: AC, AD, AE, AF .

Bài toán 23. Quan sát hình nón (Hình vẽ) và cho biết:

a) Đỉnh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón;

b) Trên hình vẽ có những đường sinh nào và tính độ dài của đường sinh.

Lời giải



a) Hình nón có A đỉnh, chiều cao là $6\,\text{cm}$, bán kính đáy là $4\,\text{cm}$.

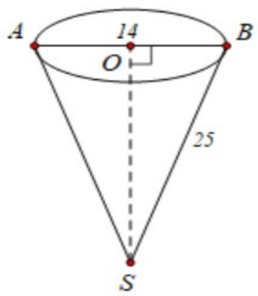
b) Các đường sinh: AB, AC, AD.

Trong tam giác vuông AOC, ta có:

$AC = \sqrt{OC^2 + OA^2}$ (định lý Pythagore)

$AC = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}(\text{cm})$.

Bài toán tương tự. Tính bán kính đáy của hình nón trong hình vẽ bên:



Hướng dẫn:

AB là đường kính đáy, $AB = 14$, nên bán kính đáy là 7

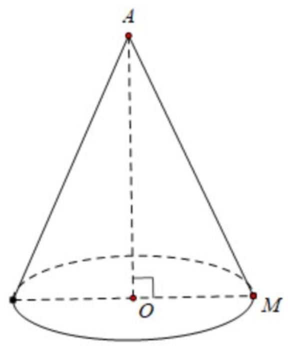
- Trong tam giác vuông SOB, ta có:

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{25^2 + 7^2} = 24.$

Vậy đường cao của hình nón là 24.

Bài toán 24. Chỉ ra đỉnh, bán kính đáy và tính đường sinh của hình nón tạo thành khi quay tam giác AOM vuông tại O có $OA = 3\,\text{cm}$ quanh cạnh OA cố định (Xem hình vẽ).

Lời giải



Hình nón tạo thành có đỉnh A, chiều cao $OA = 4\,cm$, bán kính đáy $OM = 3\,cm$.

Tam giác AOM vuông tại O có:

$AM^2 = AO^2 + OM^2$

$AM^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

$AM = \sqrt{25} = 5(cm)$

Vậy hình nón có dường sinh $AM = 5(cm)$.

Một cách tổng quát, ta có:

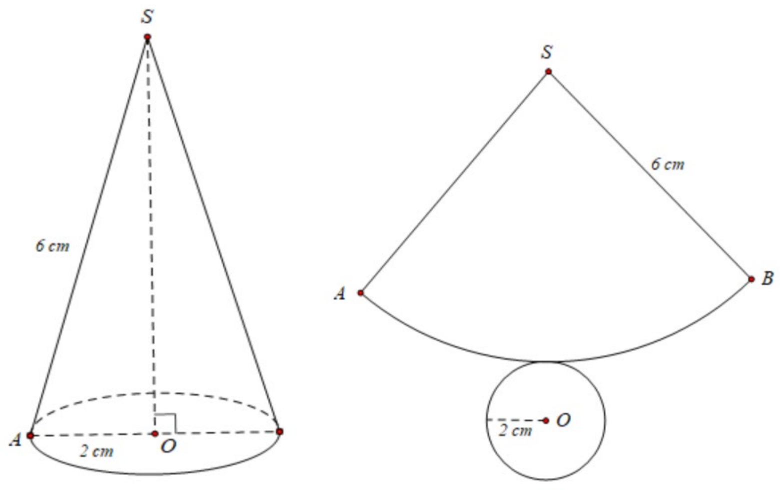
Cho hình nón có bán kính đáy r, chiều cao h và đường sinh n (hình vẽ).

Khi đó $h^2 + r^2 = n^2$.

Bài toán 25. Cắt mặt xung quanh của một hình nón có đường sinh dài $6\,cm$, bán kính đáy $2\,cm$ (Hình vẽ) dọc theo đường sinh SA của nó rồi trải phẳng ra, ta được hình khai triển của hình nón đó (hình a).

a) Tính chu vi đáy của hình nón, từ đó cho biết độ dài cung ứng với hình quạt tròn ở Hình b.

b) Tính diện tích của hình quạt tròn khai triển trong Hình b.



a) b)

Hướng dẫn: Độ dài cung của hình quạt là l, bán kính hình quạt là R, ta có diện tích hình quạt là $S = \frac{lR}{2}$.

Lời giải

a) Chu vi đáy của hình nón: $2\pi R = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$.

Độ dài cung AB của hình quạt là $4\pi(cm)$

b) Diện tích của hình quạt: $S=\frac{lR}{2}=\frac{4\pi .6}{2}=12\pi \left(cm^2\right)$.

Nhận xét:

1) Ta có thể tìm được gooc ở tâm của hình quạt.

Gọi x° là số đo của $\overset\frown{ASB}$ (Hình b). Ta co:

$l=\frac{\pi \cdot R.x}{180}, l=4\pi, R=6\Rightarrow 4\pi =\frac{\pi .6\cdot x}{180}\Rightarrow x=120$.

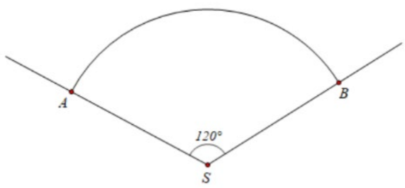
Vậy góc ở tâm của hình quạt là 120°.

2) Diện tích xung quanh của hình nón là diện tích hình quạt.

Bài toán 26. Tạo lập hình nón có bán kính đáy $2cm$ và đường sinh $6cm$.

Hướng dẫn: Xem nhận xét ở bài toán 25.

Lời giải



Diện tích xung quanh của hình nón: $S=\pi rl=\pi \cdot 2.6=12\pi (cm)$

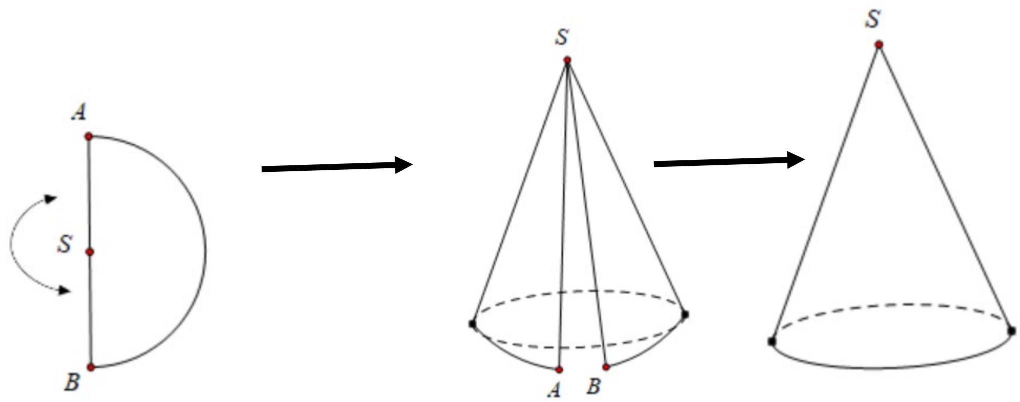
Diện tích xung quanh của hình nón là hình quạt tròn có bán kính $6cm$ và có số đo cung $\mathbf{x}^\circ$.

Ta c6: $\frac{\pi \cdot 6^2\cdot x}{360}=12\pi \Rightarrow x=120$.

***Cách tạo lập hình nón**:* Cắt miếng bìa hình quạt tròn bán kính $6cm$, có góc ở tâm 120°, cuộn miếng bìa tạo thành mặt xung quanh của hình nón (dùng keo dán sao cho $SA;SB$ trùng nhau).

Cắt miếng bìa hình tròn bán kính $2cm$ và dán miếng bìa với mặt xung quanh vừa tạo.

Bài toán tương tự. Cắt một nửa hình tròn bằng giấy cứng, có đường kính $AB=20cm$ và tâm là S. Cuộn nửa hình tròn đó lại sao cho SA và SB sát vào nhau như hình vẽ (dùng băng keo dán), ta được một hình nón đỉnh S. Hãy cho biết độ dài đường sinh và bán kính đáy của hình nón.



Lời giải

- $AB=20cm\Rightarrow SA=SB=10cm$. Vậy đường sinh có độ dài $10cm$.

- Nửa chu vi của hình tròn $(\mathrm{S}):\frac{1}{2}\cdot 20\pi=10\pi(\mathrm{cm})$ Gọi r là bán kính đáy của hình nón, ta có chu vi của đáy là $10\pi(\mathrm{cm})$. Vậy $2\pi \mathrm{r}=10\pi \Rightarrow \mathrm{r}=5(\mathrm{cm})$

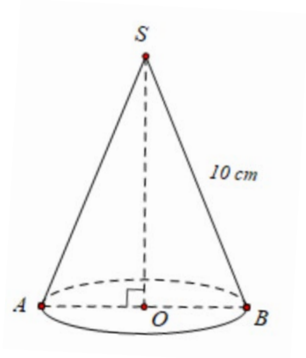
Nhận xét:

Cho hình nón có bán kính đáy $5\,\mathrm{cm}$, đường sinh $10\,\mathrm{cm}$. Tính diện tích hình quạt trong hình khai triển của hình nón.

Hình quạt tròn có số đo cung tương ứng bằng bao nhiêu độ.

Đáp số: $\mathrm{S}_{\mathrm{q}}=\mathrm{S}_{\mathrm{xq}}=50\pi\left(\mathrm{cm}\right)$); Số đo cung là 180°.

Bài toán 27. Cho một hình nón có độ dài đường sinh bằng $10\,\mathrm{cm}$, bán kính đáy bằng $5\,\mathrm{cm}$ (Hình vẽ).



a) Tính diện tích xung quanh của hình nón;

b) Tính thể tích của hình nón.

Lời giải

a) Diện tích xung quanh của hình nón là:

$\mathrm{S}_{\mathrm{xq}}=\pi \mathrm{r}l=\pi.5.10=50\pi\left(\mathrm{cm}^2\right)$.

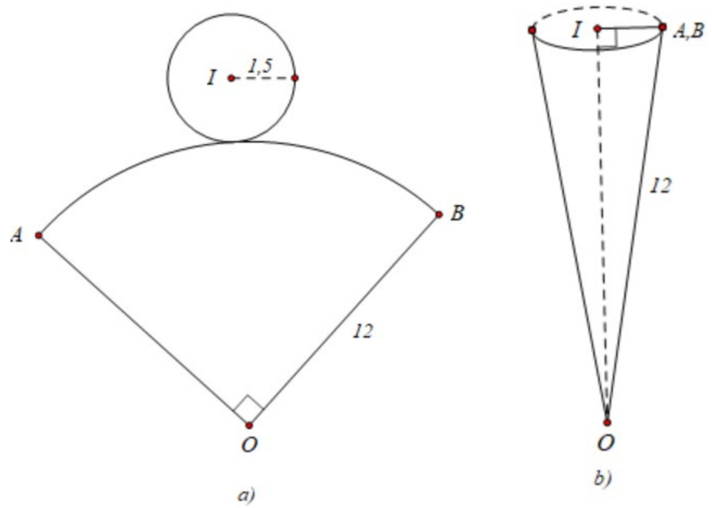
b) Tam giác SOB vuông tại O nên theo định lí Pythagore, ta có:

$\mathrm{OB}^2+\mathrm{SO}^2=\mathrm{SB}^2 \Rightarrow\ 5^2+\mathrm{SO}^2=10^2$

$\Rightarrow\ \mathrm{SO}^2=100-25=75 \Rightarrow\ SO=5\sqrt{3}$

Thể tích của hình nón là: $\mathrm{V}=\frac{1}{3}\pi \mathrm{r}^2\,\mathrm{h}=\frac{1}{3}\pi\cdot 5^2.5\sqrt{3}=\frac{125}{3}\sqrt{3}\cdot\pi\left(\mathrm{cm}^2\right)$.

Bài toán 28. Tạo lập hình nón có bán kính đáy $1,5\,\mathrm{cm}$ và đường sinh $6\,\mathrm{cm}$. Tính thể tích của hình nón vừa tạo lập.



Lời giải

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi.1,5.6 = 9\pi\left(cm^2\right)$.

Mặt xung quanh của hình nón trên là hình quạt tròn bán kính 6cm giới hạn bởi cung x°

Ta có: $\dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot x}{360} = 9\pi$ hay $\dfrac{x}{10} = 9 x = 90$.

Từ đó, ta có thể tạo lập hình nón trên theo các bước sau:

- Cắt một miếng bìa hình quạt tròn bán kính $6\,cm$ giới hạn bởi cung 90° (một phần tư hình tròn bán kính $6\,cm$) và cuộn miếng bìa tạo thành mặt xung quanh của hình nón.
- Cắt một miếng bìa hình tròn bán kính $1,5\,cm$ và dùng băng dính dán miếng bìa này với mặt xung quanh của hình nón vừa tạo.

Ta có chiều cao của hình nón: $h = OI = \sqrt{12^2 - 1,5^2} = \dfrac{9\sqrt{7}}{2}$ (cm)

Thê tích hình nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 1,5^2 \cdot \dfrac{9\sqrt{7}}{2} = \dfrac{27\sqrt{7}}{8}\pi\left(cm^3\right)$.

Bài toán tương tự. Tạo lập hình nón có bán kính đáy $5\,cm$ và đường sinh $12\,cm$. Tính thể tích của hình nón vừa tạo lập.

Lời giải.

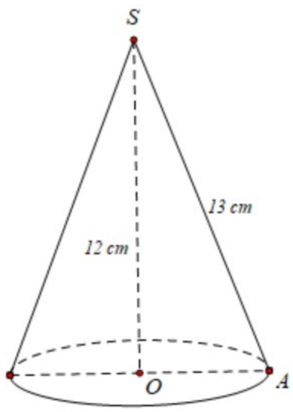
Hình khai triển góm một hình quạt tròn bán kính $R = 12\,cm$, giới hạn bởi cung 150° và một hình tròn bán kính $5\,cm$.

Chiều cao của hình nón: $h = \sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{119}$.

Thể tích của hình nón $V = \dfrac{25\sqrt{119}}{3}\pi\left(cm^3\right)$

Bài toán 29. Tính diện tích xung quanh và thể tích của một hình nón có độ dài đường sinh bằng $13\,cm$ và chiều cao bằng $12\,cm$.

Lời giải



Đường sinh $SA = 13\,cm$; chiều cao $SO = 12\,cm$.

$OA = r$ (bán kính đáy của hình nón)

Ta có $AO = \sqrt{SA^2 - SO^2}$

$= \sqrt{13^2 - 12^2} = 5\text{cm}$ (định lý Pythagore)

$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot 5 \cdot 10 = 65\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Bài toán 30. Cho một hình nón có bán kính đáy là 4cm và độ dài đường sinh là 10cm. Hỏi diện tích xung quanh cuaa hình nón đó là bao nhiêu centimét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Diện tích xung quanh của hình nón là:

$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot 4 \cdot 10 = 40\pi \approx 125,66\left(\text{cm}^2\right)$.

Nhận xét:

1) Ta có thể tính được diện tích mặt đáy của hình quạt khi biết bán kính mặt đáy $S_d = \pi r^2$

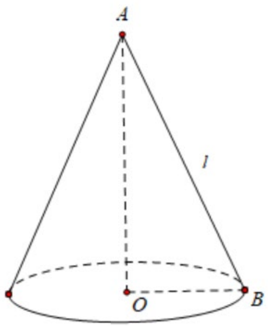
Từ đó diện tích toàn phầ của hình nón:

$S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.

2) Em có thể tính thể tích của hình nón.

Bài toán 31. Tính diện tích xung quanh và thế tích của hình nón (xem hình vẽ, biết $OA = 15\text{cm}, OB = 8\text{cm}$

Lời giải



Tam giác AOB vuông tại O, theo định lí Pythagore, Ta có: $AB^2 = AO^2 + OB^2 = 15^2 + 8^2$

$\Rightarrow AB = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17(\text{cm})$

Vậy đường sinh AB của hình nón đã cho là $17(\text{cm})$.

Do đó diện tích xung quanh của hình nón là:

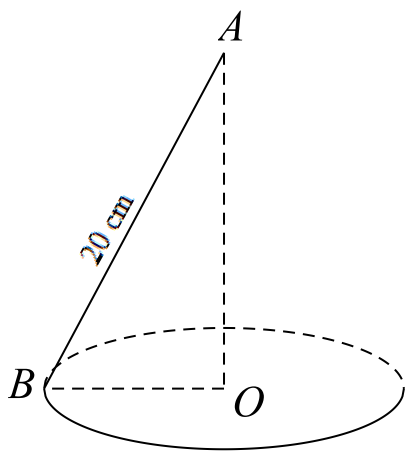
$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot 8 \cdot 17 = 136\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

$T_e \approx 6 : V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 15 = 320\pi\left(\text{cm}^3\right)$

Bài toán 32. Tính chiều cao của một hình nón có đường sinh dài 20cm và diện tích xung quanh bằng $240\pi\,\text{cm}^2$

Lời giải

(Xem hình vẽ)



Ta có diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq} = 240\pi\,\text{cm}^2$ và đường sinh $AB = 20\,\text{cm}$.

Nên $r = \dfrac{S_{xq}}{20\pi} = \dfrac{240\pi}{20\pi} = 12\,(\text{cm})$.

Tam giác AOB vuông tại O, theo định lý Pythagore, ta có: $AB^2 = AO^2 + OB^2$.

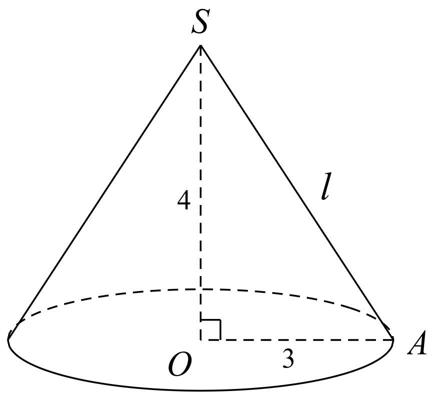
Suy ra: $AO^2 = AB^2 - OB^2$.

Hay $AO = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16\,(\text{cm})$.

Vậy chiều cao của hình nón đã cho là $16\,(\text{cm})$.

Bài toán 33. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón có bán kính đáy $r = 3$ cm, chiều cao $h = 4\,\text{cm}$.

Lời giải



Xét tam giác SOA vuông tại O, theo định lý Pythagore, ta có:

$SA^2 = SO^2 + OA^2 = 4^2 + 3^2$

Suy ra: $SA = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\,(\text{cm})$.

Đường kính của hình nón là $5\,(\text{cm})$

Diện tích xung quanh của hình nón là:

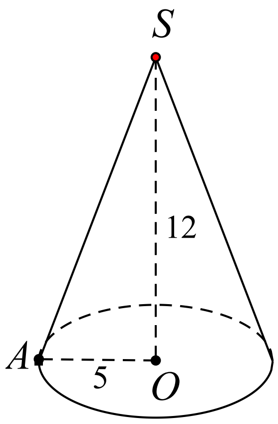
$$S_{xq} = \pi r l = \pi .3.5 = 15\pi\,(\text{cm}^2).$$

Ta có: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi .3^2.4 = 12\pi\,(\text{cm}^3)$.

Bài toán 34. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón có đường kính đáy $d = 10$ m và chiều cao $h = 12$ m (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn: $S = S_{xq} + S_d = \pi rl + \pi r^2$.

Lời giải



Xét tam giác SOA vuông tại O.Theo định lý Pythagore, ta có:

$SA^2 = SO^2 + OA^2 = 12^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$.

Suy ra $SA = \sqrt{12^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2} = 13\ (\text{m})$.

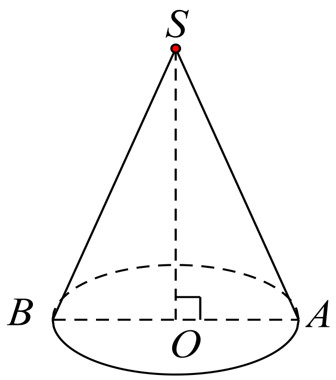
Đường sinh của hình nón $l = SA = 13(\text{m})$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot \frac{10}{2} \cdot 13 = 65\pi\left(\text{cm}^2\right) \approx 204,20\ \left(\text{m}^2\right)$.

Diện tích mặt đáy $S_d = \pi r^2 = \pi\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25\pi \approx 78,54\ \left(\text{m}^2\right)$.

Bài toán 35. Tính diện tích bìa cần dùng (theo centimet vuông) để làm một chiếc mũ sinh nhật có dạng hình nón như hình vẽ với đường kính đáy 22 cm và chiều cao 18 cm (bỏ qua các mép nối và phần thừa, làm tròn đến kết quả centimet vuông).

Lời giải



Bán kính đáy $r=\dfrac{22}{2}=11\left(\text{cm}\right)$.

Tam giác SOA vuông tại O, theo định lý Pythagore, ta có: $SA^2=SO^2+OA^2=18^2+11^2$.

Suy ra $SA=\sqrt{18^2+11^2}=21\left(\text{cm}\right)$.

Đường sinh của hình nón là $l=SA=21\left(\text{cm}\right)$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq}=\pi rl=\pi.11.21=231\pi\left(\text{cm}^2\right)\approx 726\left(\text{cm}^2\right)$.

Bài toán 36. Phần mày lá của một ngôi nhà hình nón (không có đáy) với đường kính đáy khoảng 12 m và độ dài đường sinh khoảng $8,5\text{ m}$ (Hình vẽ). Chi phí để làm phần mái lá đó là $250\ 000$ đồng/ 1m^2. Hỏi tổng chi phí để làm toàn bộ phần mái nhà đó là bao nhiêu đồng lấy $\pi\approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)?

Lời giải

Bán kính đáy $r=\dfrac{12}{2}=6\left(\text{m}\right)$.

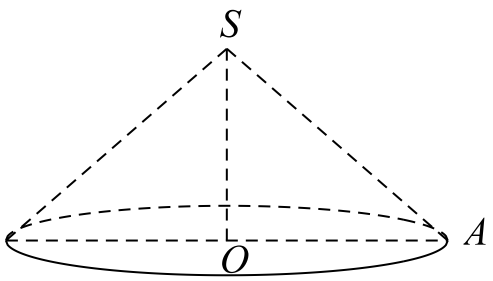
Độ dài đường sinh của hình nón là $l=8,5\left(\text{m}\right)$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq}=\pi rl=\pi\ .\ 6\ .\ 8,5=51\pi\left(\text{m}^2\right)$.

Tổng chi phí để làm toàn bộ phần mái nhà hình nón là: $51\pi\ .\ 250\ 000=12\,750\pi\approx 40\ 055,306$ (đồng).

Bài toán 37. Một chiếc nón lá có dạng hình nón với đường kính đáy khoảng 20 cm. Hỏi diện tích xung quanh của chiếc nón đó bằng bao nhiêu centimet vuông (lấy $\pi \approx 3{,}14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải



Bán kính đáy $r = \dfrac{44}{2} = 22\ (\text{cm})$.

Tam giác SOA vuông tại O, theo định lý Pythagore, ta có: $SA^2 = SO^2 + OA^2 = 20^2 + 22^2$

Suy ra: $SA = \sqrt{20^2 + 22^2} = 2\sqrt{221}\ (\text{cm})$.

Độ dài đường sinh của hình nón là $l = SA = 2\sqrt{221}\ (\text{cm})$.

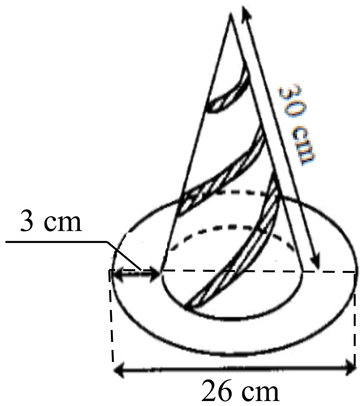
Diện tích xung quanh của hình nón là:

$$S_{xq} = \pi r l = \pi\ .\ 22\ .\ 2\sqrt{221} = 44\sqrt{221}\,\pi\left(\text{cm}^2\right) \approx 2\,054{,}9\left(\text{cm}^2\right).$$

Bài toán 38. Chú Hề trên sân khấu thường có trang phục như Hình a. Mũ của chú Hề có dạng hình nón. Có thể mô phỏng cấu tạo, kích thước chiếc mũ của chú Hề như Hình b.

a) Để phủ kín mặt ngoài của chiếc mũ của chú Hề như hình b cần bao nhiêu cemtimet vuông giấy màu (không tính phần mép dán, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

b) Hỏi thể tích phần có dạng hình nón của chiếc mũ chú hề ở Hình b bằng bao nhiêu centimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



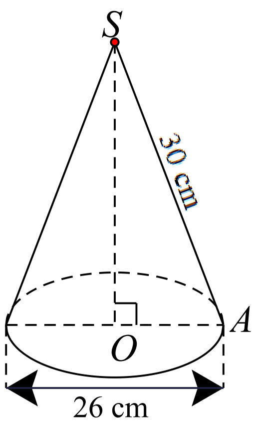
a) b)

Lời giải

a) Đường kính của hình nón là: $26-2\ .\ 3=20\ (\text{cm})$.

Bán kính $r=\dfrac{20}{2}=10\ (\text{cm})$.

Đường sinh là 30 cm (Xem hình vẽ).



Vậy diện tích xung quanh của hình nón là:

$$S_{xq}=\pi rl=\pi\ .\ 10\ .\ 30=300\pi\ (\text{cm}^2)\approx 942,48\ (\text{cm}^2).$$

Để phủ kín mặt ngoài chiếc mũ của chú hề, số giấy màu cần dùng là $\approx 942,48\ (\text{cm}^2)$.

b) Tam giác SOA vuông tại O (xem hình vẽ).

Theo định lý Pythagore, ta có:

$SA^2=SO^2+OA^2=18^2+11^2$

Suy ra $SO=20\sqrt{2}\ (\text{cm})$.

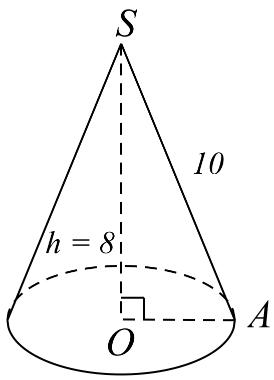
Chiều cao của hình nón $h=SO=20\sqrt{2}\ (\text{cm})$.

Vậy thể tích phần có dạng hình nón của chiếc mũ hề là:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.10^2.20\sqrt{2}\approx 2961,92\ (\text{cm}^3).$$

Bài toán 39. Một hình nón có đường sinh bằng 10 cm và chiều cao bằng 6 cm. Tính thể tích của hình nón.

Lời giải



Tam giác SOA vuông tại O, theo định lí Pythagore ta có:

$SA^2 = SO^2 + OA^2$. Suy ra $OA^2 = SA^2 - SO^2 = 10^2 - 8^2$

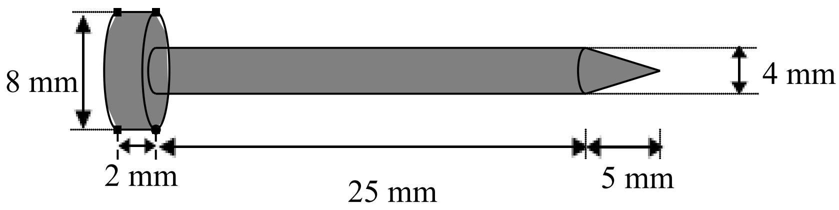
Hay $OA = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\ (\text{cm})$.

Bán kính mặt đáy $r = 6\ (\text{cm})$.

Vậy thể tích của hình nón là:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi .6^2\,.\,8 = 96\pi \approx 301{,}59\ \left(\text{cm}^3\right).$$

Bài toán 40. Thả 10 chiếc đinh có kích thước như hình vẽ vào một cốc nước. Đinh chìm hẳn xuống và nước trong cốc không bị tràn ra ngoài. Hỏi thể tích ước trong cốc tăng lên bao nhiêu mililít (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hướng dẫn: Mỗi chiếc đinh bao gồm ba bộ phận: Hình trụ thứ nhất có đường kính là 8 mm và chiều cao là 2 mm. Hình trụ thứ hai có đường kính là 4 mm và chiều cao là 25 mm. Bộ phận thứ ba là hình nón có đường kính đáy là 4 mm và chiều cao là 5 mm. Ta sẽ lần lượt tính thể tích của từng bộ phận.

Lời giải

Hình trụ thứ nhất có bán kính $R_1 = \frac{8}{2} = 4\text{ mm}$ và chiều cao là 2 mm.

Ta có thể tích $V_1 = \pi R_1^2 h = \ \pi .4_1^2\ .\ 4 = 32\pi\left(\text{mm}^3\right)$.

Hình trụ thứ hai có bán kính $R_2 = \frac{4}{2} = 2\text{ mm}$ và chiều cao là 25 mm.

Ta có thể tích $V_2 = \pi R_2^2 h = \ \pi .2_1^2\ .\ 25 = 100\pi\left(\text{mm}^3\right)$.

Hình nón có đường kính đáy là 4 mm nên bán kính mặt đáy $R_3=\frac{4}{2}=2\text{ mm}$ và chiều cao là 5 mm.

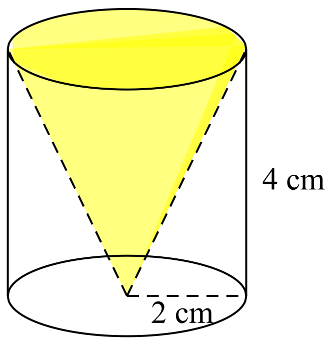
Ta có: $V_3=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.2^2.5=\frac{20}{3}\pi\left(\text{mm}^3\right)$.

Do đó thể tích của chiếc đinh là: $V_1+V_2+V_3=32\pi+100\pi+\frac{20}{3}\pi=\frac{416}{3}\pi\ \left(\text{mm}^3\right)$.

Khi thả 10 chiếc đinh vào cốc nước thì thể tích nước tăng thêm:

$$10.\frac{416}{3}\pi=\frac{4160}{3}\pi\approx 4356,3\ \left(\text{mm}^3\right)\approx 4,3563\ \text{(mililít)}.$$

Bài toán 41. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 1 cm và chiều cao bằng 2 cm. Người ta khoan đi một phần có dạng hình nón như hình vẽ thì thể tích phần còn lại của hình trụ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Thể tích của hình trụ là: $V_1=\pi R^2h=\pi\ .\ 2^2.\ 4=16\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

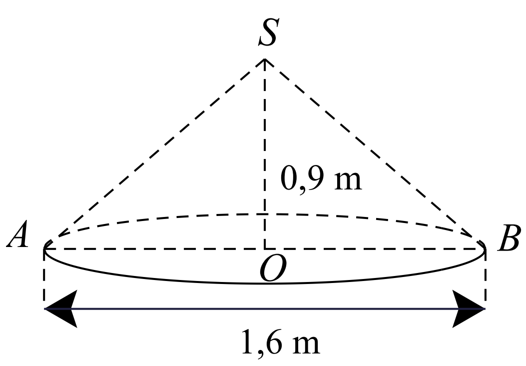
Thể tích phần bị khoan có dạng hình nón là: $V_2=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\ .\ 2^2.\ 4=\frac{16}{3}\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Thể tích phần còn lại là: $V=V_1-V_2=16\pi-\frac{16}{3}\pi=\frac{32}{3}\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Bài toán 42. Người ta đổ muối thu hoạch được trên cách đồng muối thành từng đống cỏ có dạng hình nón với chiều cao khoảng $0,9\text{ m}$ và đường kính đáy khoảng $1,6\text{ m}$. Hỏi mỗi đống có bao nhiêu đềximét khối muối? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Xem hình vẽ.



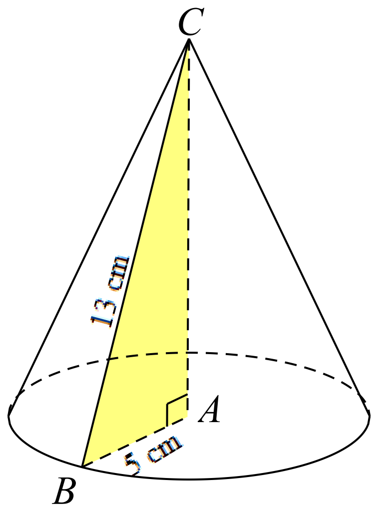
Chiều cao $SO=0,9\text{ m}$;

Đường kính đáy $AB=1,6\text{ m}$.

Ta tìm được bán kính đáy khoảng $0,8$ m.

Vậy thể tích của khối muối: $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\ .\ 0,8^2.\ 0,9=\dfrac{24}{125}\pi\ \left(\mathrm{m}^3\right)\approx 603\left(\mathrm{dm}^3\right)$.

Bài toán 43. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB=5$ cm, $BC=13$ cm. Quay tam giác vuông ABC một vòng xung quanh đường thẳng AC ta được hình nón (hình vẽ). Hỏi thể tích của hình nón đó bằng bao nhiêu centimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm):



Lời giải

Do tam giác ABC vuông tại A.

Theo định lí Pythagore, ta có:

$BC^2=AB^2+AC^2$

Suy ra $AC^2=BC^2-AB^2$.

Do đó $AC^2=13^2-5^2=144$.

Hay $AC=\sqrt{144}=12(\mathrm{cm})$.

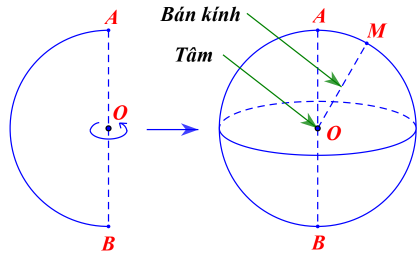
Thể tích của hình nón là:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\ .\ 5^2.\ 12=100\pi\ \approx 314,16\left(\mathrm{cm}^3\right).$$

HẾT

CHƯƠNG X. MỘT SỐ HÌNH KHỐI TRONG THỰC TIỄN
BÀI 32. HÌNH CẦU

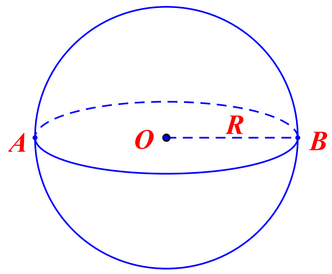
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ



* Khi quay nửa đường tròn đường kính AB cố định của nó,
ta được một mặt cầu.

• Khi quay nửa hình tròn đường kính AB cố định của nó,
ta được một hình cầu.

Tâm và bán kính của nửa đường tròn (hình tròn) cũng là tâm và bán kính của một mặt cầu (hình cầu).



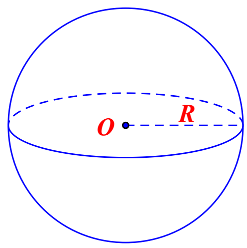
• Một số yếu tố của mặt cầu:

Tâm mặt cầu: O.

Bán kính mặt cầu: R = OB.

• Cắt mặt cầu, hình cầu bởi một mặt phẳng

1. Nếu cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng thì phần chung của mặt phẳng và hình cầu (còn gọi là mặt cắt) là một hình tròn.



2. Nếu cắt một mặt cầu bán kính R bởi một mặt phẳng thì phần
chung của mặt phẳng và mặt cầu là một đường tròn (hình vẽ).

- Khi mặt phẳng đi qua tâm thì đường tròn đó có bán kính R và được gọi là đường tròn lớn.
- Khi mặt phẳng đi qua tâm thì đường tròn đó có bán kính nhỏ hơn R.

• Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu.

Người ta chứng minh được công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu có bán kính R là: $S = 4\pi R^2; V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

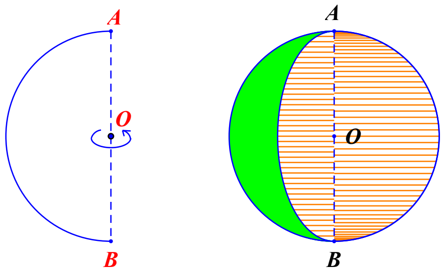
PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Nhận biết hình cầu.

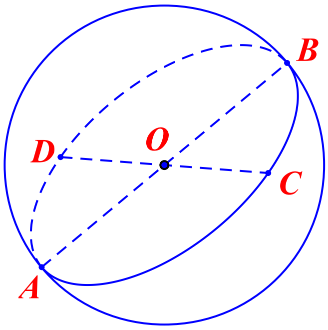
Bài toán 1. Xác định tâm và bán kính của hình cầu tạo thành khi quay nửa hình tròn đường kính AB = 6 cm quanh AB cố định.

Lời giải

a) Tâm O của hình cầu là trung điểm của đoạn thẳng AB. Bán kính của hình cầu đó là: $\mathrm{R} = OA - OB = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3\ (cm)$.



Bài toán 2. Cho một mặt phẳng đi qua tâm O của một hình cầu (Hình vẽ). Quan sát hình vẽ, hãy chỉ ra:



a) Hai đường kính của hình cầu;

b) Bốn bán kính của hình cầu;

c) Hình tròn lớn của hình cầu.

Lời giải

a) Hai đường kính của hình cầu: AB và CD

b) Bốn bán kính của hình cầu: AO; OB; OC; OD.

c) Hình tròn lớn của hình cầu giới hạn bởi đường tròn tâm O đi qua bốn điểm A, B, C, D.

Bài toán 3. Tính chu vi đường tròn thu được khi cắt mặt cầu tâm O bán kính $2,5\ cm$ bởi một mặt phẳng đi qua O.

Lời giải

Khi cắt mặt cầu tâm O bán kính $2,5\ cm$ bởi một mặt phẳng đi qua tâm O, ta được một đường tròn có bán kính 2,5cm.

Chu vi đường tròn thu được: $2\pi.2,5 = 5\pi(cm)$.

Bài toán 4. Cho hình cầu tâm I đường kính 1dm. Khi cắt hình cầu trên bởi một mặt phẳng, ta được một hình tròn có chu vi $\frac{\pi}{2}dm$. Mặt phẳng đó có đi qua tâm I của mặt cầu không? Vì sao?

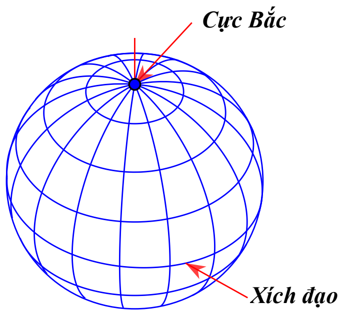
Lời giải

Giả sử mặt phẳng cắt mặt cầu đi qua tâm I, ta được một đường tròn lớn, có bán kính $R = \frac{1}{2} dm.$

Khi đó chu vi của đường tròn lớn sẽ là $\pi dm.$

Ta có: $\frac{\pi}{2} < \pi$ nên mặt phẳng không đi qua tâm I.

Bài toán 5. Trái đất được xem như một hình cầu với bán kính như một hình cầu với bán kính khoảng 6378 km. Nếu coi Xích đạo là đường tròn lớn của hình cầu này thì độ dài đường Xích Đạo là bao nhiêu kilômét?



Lời giải

Chu vi đường tròn lớn là độ dài Xích Đạo.

Ta có: $2\pi.6378 = 12756\pi\left(km\right) \approx 40074\left(km\right)$.

Nhận xét: Biết độ dài Xích Đạo là 40074 (km). Em hãy tính bán kính của Trái Đất.

II. Diện tích mặt cầu.

Bài toán 6. Tính diện tích mặt cầu có bán kính bằng 5 cm.

Lời giải

Diện tích mặt cầu: S= $4\pi R^2 = 4\pi.5^2 = 100\left(cm^2\right)$

Bài toán 7. Khinh khí cầu đầu tiên được phát minh bởi anh em nhà Montgolfier (người pháp)vào năm 1782. Chuyến bay đầu tiên của hai anh em trên khinh khí cầu được thực hiện vào ngày 6 tháng 6 năm 1783 trên bầu trời Place des Cordeliers ở Annonay (nước Pháp) (theo cand.com.vn).

Lời giải

Bán kính của khinh khí cầu: $\frac{11}{2}m = 5,5m.$

Diện tích mặt khinh khí cầu: $S = 4\pi R^2 = 4\pi.5,5^2 = 121\pi\left(cm^2\right) \approx 380(m^2)$

Bài toán 8. Đại dương bao phủ khoảng 71% bề mặt Trái Đất (nguồn: https:/www.usgs.gov/special-topics/water=science-school/science/). Hãy ước tính diện tích của đại dương theo kilômét vuông, biết bán kính Trái Đất khoảng 6378 km (làm tròn kết quả đến hàng triệu)

Lời giải

Diện tích bề mặt của Trái Đất:

S= $4\pi R^2 = 4\pi.6378^2 = 162715536\pi \approx 511185932,5\left(km^2\right)$

Vậy diện tích của đại dương là: $511185932,5.71\% = 362942012\left(km^2\right) \approx 363\ (triệu\ km^2\ )$

Bài toán 9. Một mặt cầu có diện tích là $36cm^2$. Hỏi đường kính của mặt cầu này là bao nhiêu centimét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Ta có: $S = 4\pi R^2$ hay $S = \pi(2R)^2 \Rightarrow 2R = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$.

Vậy đường kính của mặt cầu là: $\sqrt{\dfrac{36}{\pi}} = 3,39(cm)$

Bài toán 10. Bạn Nam được tặng một quả bóng đá có đường kính 24 cm (hình vẽ). Em hãy giúp bạn ấy tính xem cần bao nhiêu mét vuông da để chế tạo quả bóng, giả sử rằng diện tích các mép nối không đáng kể.

Lời giải

Ta có: $\Rightarrow 2R = 24cm$ đường kính

$S = \pi\left(2R\right)^2 = \pi 24^2 = 576\pi \approx 1809,56\left(cm^2\right) \approx 1,8\left(m^2\right)$

Vậy cần: $1,8m^2$ da để chế tạo quả bóng

Bài toán 11. Để dự báo thời tiết, người ta sử dụng các bóng thám không, đó lá một loại bóng bay mang theo các dụng cụ đo thời tiết như đo áp suất khí quyển, nhiệt độ, độ ẩm và tốc độ gió. Giả sử một quả bóng thám không có dạng hình cầu với bán kính 10m. Hỏi diện tích bề mặt của quả bóng thám không đó là bao nhiêu mét vuông (lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Bóng thám không

Lời giải

Diện tích bế mặt của bóng thám: $S = 4\pi R^2; \pi = 3,14;\ R = 10.$

Ta có: $S = 4.3,14.10^2 = 1250(m^2)$

Bài toán 12. Có một quả bóng rổ (loại số 7 cho nam) và một quả bóng tennis (Hình vẽ). Biết rằng diện tích bề mặt của quả bóng rổ khoảng 1884,75 và bán kính của quả bóng rổ gấp khoảng 2 lần đường kính của quả bóng tennis.

Bóng rổ Bóng tennis

Hỏi diện tích bề mặt của quả bóng tennis đó là bao nhiêu centimets vuông (lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

Gọi R, r theo thứ tự là bán kính của quả bóng rổ và quả bóng tennis.

Ta có: $\mathrm{R} = 2.(2r) \Rightarrow 2r = \dfrac{\mathrm{R}}{2} \Rightarrow 4r^2 = \dfrac{\mathrm{R}^2}{4}$

$\Rightarrow 4\pi r^2 = \dfrac{\pi \mathrm{R}^2}{4}$ Hay $4\pi r^2 = \dfrac{4\pi \mathrm{R}^2}{16} \Rightarrow 4\pi r^2 = \dfrac{1884,75}{16} = 117,8.$

Vậy diện tích của quả bóng tennis bằng $117,8\ (cm^2)$.

Cách giải khác:

$\mathrm{S} = 4\pi \mathrm{R}^2$ hay $\mathrm{S} = \pi.(2R)^2 \Rightarrow 2\mathrm{R} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{R}}{\pi}}$ (đường kính của mặt cầu).

Đường kính của quả bóng rổ (kí hiệu R là bán kính).

$2\mathrm{R} = \sqrt{\dfrac{1884,75}{3,14}} \left(S = 117,8\left(cm^2\right); \pi = 3,14\right)$

$\Rightarrow R = 24,5$

Gọi r là bán kính của quả bóng tennis, ta có:

$\mathrm{R} = 2.\left(2r\right) \Rightarrow r = \dfrac{R}{4} \Rightarrow r = \dfrac{2R}{8} = \dfrac{24,5}{8} = \dfrac{49}{16}$

Vậy diện tích bề mặt của quả bóng tennis là:

$\mathrm{S} = 4\pi^2 = 4.3,14.\left(\dfrac{49}{16}\right)^2 = 117,8\left(cm^2\right)$

III. Thể tích hình cầu.

Bài toán 13. Tính thể tích của hình cầu bán kính 6 cm.

Lời giải

Thể tích hình cầu là: $\mathrm{V} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}.\pi.6^3 = 288\pi\left(cm^3\right)$.

Bài toán 14. Một quả bóng rổ (khi bơm căng) có đường kính 24 cm (hình vẽ). Tìm thể tích của quả bóng rổ đó (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Bán kính của quả bóng rổ là: $\frac{24}{2} = 12(cm)$.

Thể tích của quả bóng rổ là: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}.\pi 12^3 = 2340\pi \approx 7238,229474 \approx 7238(cm^3)$

Bài toán tương tự. Thể tích một quả bóng nhựa có dạng hình cầu với đường kính 10cm.

Lời giải

Bán kính của quả bóng nhựa là: $R = \frac{10}{2} = 5(cm)$.

Thể tích của quả bóng nhựa là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}.\pi.5^3 = \frac{500\pi}{3}(cm^3)$.

Bài toán 15. Bán kính Sao Mộc gấp khoảng 11 lần bán kính Trái Đất (nguồn: httpt//solarsystem.nasa.gov/resources/686/solar-system-sizes/). Vậy thể tích Sao Mộc gấp bao nhiêu lần thể tích Trái Đất?

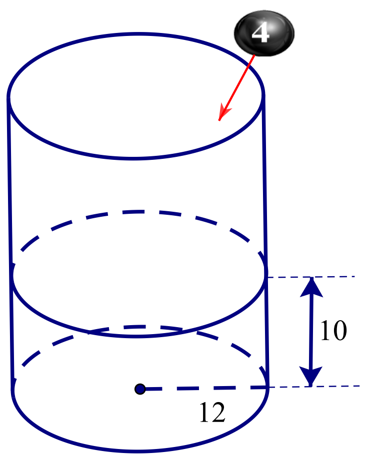
Lời giải

Gọi $R_1; R_2$ lần lượt là bán kính Sao Mộc và bán kính Trái Đất.

Ta có: $R_1 = 11R_2 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 11 \Rightarrow \frac{{R_1}^3}{{R_2}^3} = 11^3 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi {R_1}^3}{\frac{4}{3}\pi {R_2}^3} = 11^3$

Vậy thể tích Sao Mộc gấp 11^3 lần thể tích Trái Đất $(11^3 = 1331)$.

Bài toán 16. Một chiếc cốc hình trụ có phần đáy bên trong là một hình tròn bán kính bằng 12cm. Chiều cao của mực nước trong cốc là 10cm (Hình vẽ).



a) Tính thể tích nước trong cốc.

b) Thả một quả cầu bằng kim loại có bán kính 4cm vào cốc cho đến khi quả cầu chìm hẳn xuống đáy cốc và mực nước đứng trên. Hỏi mực nước trong cốc tăng thêm bao nhiêu centimét?

Lời giải

a) Thể tích nước trong cốc:

$$V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot 12^2 \cdot 10 = 1440\pi (cm^3)$$

(Trong đó diện tích đáy là $\pi.12^2 = 144\pi\left(cm^2\right)$)

b) Thể tích quả cầu kim loại: $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256}{2}\pi\left(cm^3\right)$

Thể tích quả cầu chính là thể tích nước dâng lên.

Ta có mực nước trong cốc tăng thêm: $\frac{256}{2}\pi : 144\pi = \frac{16}{27}$ (cm).

Bài toán tương tự. Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ chứa vừa khít ba quả bóng tennis xếp theo chiều dọc (Hình vẽ). Các quả bóng tennis có dạng hình cầu, đường kính $6,4\,cm$.

a) Tính thể tích hộp dựng bóng (bỏ qua bề dày của vỏ hộp, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^3).

b) Tính thể tích bên trong hộp đựng bóng không bị chiếm bởi ba quả bóng tennis.

Lời giải

a) Chiều cao hộp dựng bóng hình trụ là $h = 6,4 \cdot 3 = 19,2$ (cm)

Bán kính đáy hộp đựng bóng hình trụ là $R_1 = 6,4 : 2 = 3,2$ (cm).

Thể tích đựng bóng hình trụ là:

$V_1 = \pi r R_1^2 h = \pi \cdot 3,2^2 \cdot 19,2 = 618\left(cm^3\right)$

b) Bán kính quả bóng tennis là $R_2 = 6,4 : 2 = 3,2$ (cm)

Thể tích của ba quả bóng tennis có dạng hình cầu là:

$V_2 = 3.\left(\frac{4}{3}\pi R_2^3\right) = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi \cdot 3,2^3\right) \approx 412\left(cm^3\right)$.

Thể tích bên trong hộp đựng bóng không bị chiếm bởi ba quả bóng tennis là:

$V = V_1 - V_2 = 618 - 412 = 206\ \left(cm^3\right)$

HẾT

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG X

A. TRẮC NGHIỆM

1. Khi quay hình chữ nhật ABCD một vòng quanh cạnh AB ta được một hình trụ có bán kính đáy bằng độ dài đoạn thẳng

A. AB. **B.** CD. **C.** AD. **D.** AC.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4\,\text{cm}, BC = 5\,\text{cm}$. Khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh AC ta được một hình nón có chiều cao bằng

A. $4\,\text{cm}$. **B.** $3\,\text{cm}$. **C.** $5\,\text{cm}$. **D.** $9\,\text{cm}$.

3. Diện tích mặt cầu có đường kính $10\,\text{cm}$ là:

A. $10\pi\ \text{cm}^2$. **B.** $400\pi\ \text{cm}^2$. **C.** $50\pi\ \text{cm}^2$. **D.** $100\pi\ \text{cm}^2$.

4. Cho hình nón có bán kính đáy $R = 2\,\text{cm}$, độ dài dường sinh $l = 5\,\text{cm}$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho băng

A. $\dfrac{10\pi}{3}\ \text{cm}^2$. **B.** $\dfrac{50\pi}{3}\ \text{cm}^2$. **C.** $20\pi\ \text{cm}^2$. **D.** $10\pi\ \text{cm}^2$.

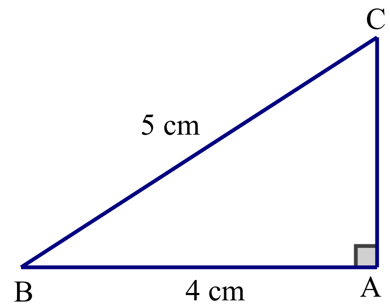
5. Một mặt phẳng đi qua tâm hình cáu, cát hình cảu theo một hình tròn co diện tích $9\pi\text{cm}^2$. Thế tích của hình câu bàng

A. $972\pi\ \text{cm}^2$. **B.** $36\pi\ \text{cm}^2$. **C.** $6\pi\ \text{cm}^2$. **D.** $81\pi\ \text{cm}^2$.

Hướng dẫn - Đáp án

1. Chọn C.

2.



Ta có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (cm) (định lí Pythagore)

Vậy chiều cao của hình nón bằng $3\,\text{cm}$.

Chọn B.

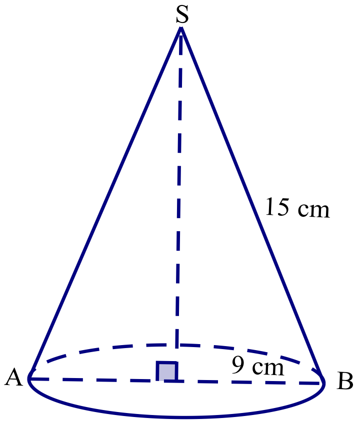
3. $S = 4\pi R^2 = 4\pi 10^2 = 400\pi\ \left(\text{cm}^2\right)$

Chọn B.

4. $S = \pi rl = \pi \cdot 2 \cdot 5 = 10\pi\ \left(\text{cm}^2\right)$

Chọn D.

5.



Ta có: $\pi R^2 = 9\pi \Rightarrow R = 3$ cm .

Vậy thể tích của hình cầu: $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi \left(\text{cm}^3\right)$

Chọn B.

B. TỰ LUẬN

1. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 20cm, chiều cao bằng 30cm.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ;

b) Tính thể tích của hình trụ.

2. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 9cm, độ dài đường sinh bằng 15cm (Hình vẽ).

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón.

b) Tính thể tích của hình nón.

c) Diện tích toàn phần của hình nón bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy. Tính diện tích toàn phần của hình nón đã cho.

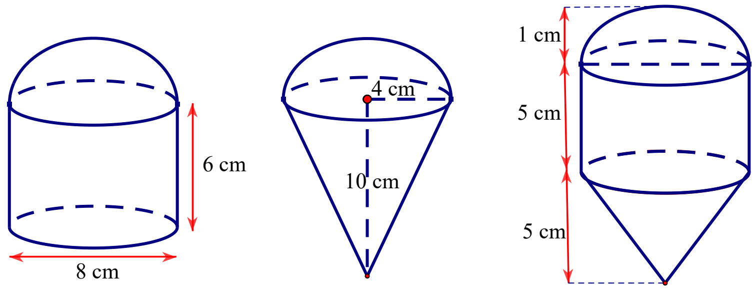
3. Quả bóng rổ sử dụng trong thi đấu có dạng hình cầu với đường kính bằng 24cm. Hãy tính:

a) Diện tích bề mặt quả bóng.

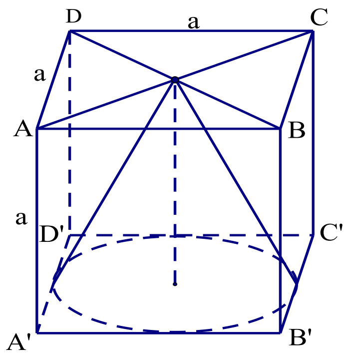
b) Thể tích của quả bóng.

4. Đèn trời có dạng hình trụ không, có một đáy với đường kính đáy bằng $0,8\text{m}$ và thân đèn cao 1m (Hình vẽ). Tính diện tích giấy dán bên ngoài đèn trời.

5. Các hình dưới đây (Xem hình vẽ) được tạo thành từ các nửa hình cầu, hình trụ và hình nón (có cùng bán kính đáy). Tính thể tích của các hình đó theo kích thước đã cho.

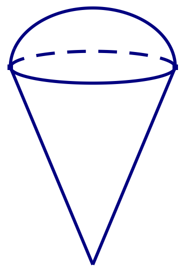


6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính thể tích của hình nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn tiếp xúc với các cạnh của hình vuông $A'B'C'D'$ (hình vẽ).



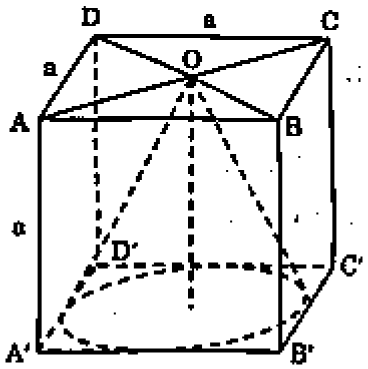
7. Bạn Khôi cho một hòn đá cảnh vào trong một bể nuôi cá hình trụ có đường kính đáy bằng $20\,\text{cm}$ thì nước trong bể dâng lên $3\,\text{cm}$. Hỏi hòn đá cảnh đó có thể tích bằng bao nhiêu?

8. Một chiếc kem ốc quế gồm hai phần: Phần phía dưới dạng hình nón có chiều cao gấp đôi bán kính đáy, phần trên là nửa hình cầu có đường kính bằng nửa đường kính đáy của hình tròn phía dưới (hình vẽ). Thể tích phần kem phía trên bằng $200\,\text{cm}^3$. Tính thể tích của cả chiếc kem.



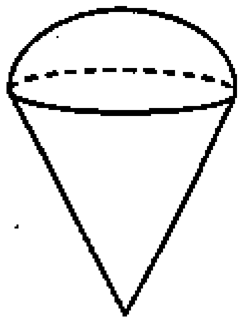
9. Mái nhà hát Cao Văn Lầu và Trung tâm triển lãm Văn hoá Nghệ thuật tỉnh Bạc Liêu có hình dáng ba chiếc nón lá lớn nhất Việt Nam (Hình vẽ). Tính diện tích một mái nhà hình nón có đường kính bằng $45\,\text{m}$ và chiều cao bằng $24\,\text{m}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của m^2).

6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính thể tích của hình nón có dỉnh là tâm O của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn tiếp xúc với các cạnh của hình vuông $A'B'C'D'$ (hình vẽ).



7. Bạn Khôi cho một hòn đá cảnh vào trong một bê nuôi cá hình trụ có dường kính đáy bằng 20 cm thì nước trong bể dâng lên 3 cm . Hỏi hòn đá cảnh đó có thể tích bàng bao nhiêu?

8. Một chiếc kem ốc quế góm hai phân: Phân phía dưới dạng hình nón có chiếu cao gấp đôi bán kính đáy, phấn trên là nửa hình cấu có đường kính bằng nửa dường kính dáy của hình tròn phía dưới (hình vẽ). Thể tích phán kem phía trên bàng $200\,cm^3$. Tính thể tích của cả chiếc kem.



9. Mai nhà hát Cao Văn Lầu và Trung tâm triển lãm Văn hoá Nghệ thuật tỉnh Bạc Liêu có hình dáng ba chiếc nón lá lớn nhất Việt Nam (Hình vẽ). Tính diện tích một mái nhà hình nón có dường kính bằng 45 m và chiêu cao bàng 24 m (làm tròn kết quả dến hàng đơn vị của m^2).

Hướng dẫn giải

1. a) Ta có: $S_{xq} = 2\pi Rh$; $R = 20\,cm$; $h = 30\,cm$.

$\Rightarrow S_{xq} = 2\pi \cdot 20.30 = 120\pi\left(cm^2\right)$.

b) Ta có: $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 20^2 \cdot 30 = 12000\pi\left(cm^3\right)$.

2. a) Ta có: $S_{xq} = 2\pi rl$; $r = 9$ cm; $l = 15$ cm .

$\Rightarrow S_{xq} = \pi \cdot 9.15 = 135\pi\ \left(cm^2\right)$.

b) $S_{đáy} = \pi r^2 = \pi \cdot 9^2 = 81\pi\ \left(cm^2\right)$.

Vậy $S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = 135\pi + 81\pi = 216\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

3. Xem Bài toán 14, Bài toán 32.

a) Diện tích bề mặt quả bóng: $576\pi\ \left(\text{cm}^2\right)$.

b) Thể tích của quả bóng: $\text{V} = \dfrac{4}{3}\pi\text{R}^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = 2304\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

4. Ta tính S_{xq} và $\text{S}_{\text{đáy}}$ (một đáy) là phần diện tích giấy dán bên ngoài đèn trời.

Đường kính $2\text{R} = 0,8(\text{m}) \Rightarrow \text{R} = 0,4(\text{m})$

$\text{S}_{\text{xq}} = 2\pi\text{rh};\ \text{R} = 0,4\ (\text{m});\ \text{h} = 1\ (\text{m})$

$\Rightarrow \text{S}_{\text{xq}} = 2\pi \cdot 0,4 \cdot 10 = 8\pi\left(\text{m}^2\right)$

$\text{S}_{\text{đáy}} = \pi\text{r}^2 = \pi \cdot 0,4^2 = 0,16\pi\ \left(\text{m}^2\right)$.

Vậy phần diện tích giấy dán bên ngoài đèn trời là:

$8\pi + 0,16\pi = 8,16\pi\left(\text{m}^2\right)$

5. Hình a). Nửa hình cầu có thể tích:

$\text{V}_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi\text{R}^3;\ \text{R} = \dfrac{8}{2} = 4\ (\text{cm})$

$\Rightarrow \text{V}_1 = \dfrac{2}{3}\pi \cdot 4^3 = \dfrac{128}{3}\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$

Hình trụ có thể tích:

$\text{V}_2 = \pi \cdot \text{R}^3\,\text{h};\ \text{R} = 4\ (\text{cm});\ \text{h} = 6\ (\text{cm})$

$\Rightarrow \text{V}_2 = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 96\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$

Vậy thể tích của hình a):

$\text{V} = \text{V}_1 + \text{V}_2 = \dfrac{128}{3}\pi + 96\pi = \dfrac{416}{3}\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$

- Hình b) Đáp án $90\pi\left(cm^3\right)$

- Hình c). Nửa hình cầu bán kính 1 cung có thể tích:

$\text{V}_1 = 4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \dfrac{2}{3}\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$

- Hình trụ có thể tích: $\text{V}_2 = \pi \cdot 1^2 \cdot 5 = 5\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$

- Hình nón có thể tích: $\text{V}_3 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 5 = \dfrac{5}{3}\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$

Vậy $\text{V} = \text{V}_1 + \text{V}_2 + \text{V}_3 = \dfrac{2}{3}\pi + 5\pi + \dfrac{5}{3}\pi = \dfrac{22}{3}\pi\left(\text{cm}^3\right)$

6. Đáy hình nón là đường tròn nội tiếp hình vuông cạnh a nên bán kính đường tròn bằng $\dfrac{a}{2}$, chiều cao của hình nón bằng cạnh hình lập phương và bằng a .

Thể tích hình nón: $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot a=\frac{\pi a^2}{12}$ (đvtt).

7. Thể tích hòn đá chính là thể tích dâng lên $3\,\text{cm}$ trong bể.

Ta có: $V=\pi R^2 h$; $R=\frac{20}{2}=10(\text{cm})$; $h=3\,\text{cm}$

$\Rightarrow V=\pi\cdot 10^2\cdot 3=300\pi\left(\text{cm}^2\right)$

8. Phần nửa hình cầu có thể tích: $V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi R^3$

$\Rightarrow \frac{2}{3}\pi R^3=200\Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{300}{\pi}}$

Thể tích phần hình nón: $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt[3]{\frac{300}{\pi}}\right)^2\cdot 2\sqrt[3]{\frac{300}{\pi}}=200\left(\text{cm}^3\right)$

Thể tích của cả chiếc kem: $300+200=500\left(\text{cm}^3\right)$.

9. $2R=45\Rightarrow R=\frac{45}{2}$.

$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{45}{2}\right)^2\cdot 24=4050\left(\text{cm}^2\right)$

** cs HẾT ≈**