Chương I. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bài 1. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

- Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là hệ thức dạng .

$$ax+by=c\left(1\right)$$

trong đó a,b và c là các số đã biết $a\neq 0$ hoặc $b\neq 0$

- Nếu tại $x=x_0$ và $y=y_0$, ta có $ax_0+by_0=c$ là một khẳng định đúng thì cặp số $\left(x_0\,;y_0\right)$được gọi là một nghiệm của phương trình $\left(1\right)$

Nhận xét: Trong mặt phẳng toạ độ, tập hợp các điểm có toạ độ $\left(x;y\right)$ thoả mãn phương trình bậc nhất hai ẩn $ax+by=c$ là một đường thẳng.

2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

- Một cặp gồm hai phương trình bậc nhất hai ẩn $ax+by=c$ và $a'x+b'y=c'$ được gọi là một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Ta thường viết hệ phương trình đó dưới dạng:

$$\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$$

- Mỗi cặp số $\left(x_0\,;y_0\right)$được gọi là một nghiệm của hệ $\left(1\right)$ *nếu nó đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ* $\left(1\right)$.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Nghiệm của phương trình $ax+by=c$

Bài toán 1. Cho phương trình $x-y=2$

a) Cặp số $\left(\sqrt{2}+1,\sqrt{2}-1\right)$ có phải là nghiệm của phương trình hay không.

b) Tìm m để cặp số $\left(1,m+2\right)$ (1; m + 2) là một nghiệm của phương trình.

Hướng dẫn: Cặp số $\left(x_0\,;y_0\right)$ là một nghiệm của phương trình $ax+by=c\Leftrightarrow$ đẳng thức $ax_0+by_0=c$ luôn đúng.

Lời giải

a) Thay $x=\sqrt{2}+1;y=\sqrt{2}-1$ vào phương trình $x-y=2$, ta có:

$\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)=2\Leftrightarrow\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2$ (luôn đúng)

Vậy cặp số$\left(\sqrt{2}+1,\sqrt{2}-1\right)$ là một nghiệm của phương trình.

b) Thay $x=1$ và $y=m+2$ vào phương trình $x-y=2$, ta được:

$$1-\left(m+2\right)=2\Leftrightarrow m=-3$$

Nhận xét: Cặp số $(1;2)$ không là một nghiệm của phương trình đã cho vì: $1-2=2$ (không đúng).

Bài toán 2. Tìm m để cặp số $(1,1)$ là một nghiệm của phương trình $(m-1)x+(m+1)y=1$

Cặp số $\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$ có phải là một nghiệm của phương trình hay không?

Lời giải

Thay $x=1$ và $y=1$ vào phương trình đã cho, ta được:

$$(m-1).1+(m+1).1=1 \Leftrightarrow 2m=1 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$$

Thay $x=\frac{-1}{2}$ và $x=\frac{1}{2}$ vào phương trình đã cho, ta được:

$$\frac{-1}{2}(m-1)+\frac{1}{2}(m+1)=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2}m+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}=1$$ (luôn đúng vợi mọi m).

Vậy cặp số $\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$ là một nghiệm của phương trình.

Bài toán 3. Xác định một phương trình bậc nhất hai ẩn số, biết hai nghiệm là cặp số $(3;5)$ và cặp số $(0,-2)$.

Hướng dẫn: Phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng $ax+by=c$. Thay các giá trị $x;y$ đã cho vào phương trình, ta tìm được a,b,c.

Lời giải

Phương trình bậc nhất hai ẩn đã có dạng $ax+by=c$.

• Nếu $a=0;b\neq 0$, ta có: $by=c$

Thay $y=5$ và (1), ta được: $5b=c \Rightarrow \frac{c}{b}=5$.

Thay $y=-2$ vào (1), ta được: $-2b=c \Rightarrow \frac{c}{b}=-2$.

Vì $5\neq -2$. Ta không xác định được phương trình.

• Nếu $a\neq 0;b=0$. Ta co: $ax=c$.

Tương tự: $\frac{c}{a}=3$ và $\frac{c}{a}=0$ (không thỏa mãn).

• Nếu $a \neq 0; b \neq 0$, ta đưa về bài toán: Viết phương trình đường thẳng $(d): y = mx + n$ qua hai điểm $(3;5)$ và $(0;-2)$.

Điểm $(0;-2) \in (d) \Rightarrow -2 = m.0 + n \Rightarrow n = -2$.

Khi đó $y = mx - 2$. Lại có $(3;5) \in (d) \Rightarrow 5 = m.3 - 2 \Rightarrow m = \frac{7}{3}$.

Vậy $y = \frac{7}{3}x - 2 \Leftrightarrow 7x - 3y - 6 = 0$.

Ta được một phương trình bậc nhất hai ẩn: $7x - 3y - 6 = 0$ nhận cặp số $(3;5)$ và $(0;-2)$ là nghiệm.

Bài toán 4. Cho hai phương trình $x + y = 2$ và $x - 2y = -1$. Tìm một cặp số $(x;y)$ là nghiệm chung của hai phương trình.

Hướng dẫn: Đưa về bài toán tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng.

Lời giải

Nghiệm chung $(x;y)$ của hai phương trình là tọa độ giao điểm (nếu có) của hai đường thẳng

$$x + y = 2 \text{ và } x - 2y = -1$$

Viết lại phương trình dưới dạng: $x = 2 - y$ và $x = 2y - 1$.

Phương trình tung độ giao điểm của hai đường thẳng

$$2 - y = 2y - 1 \Leftrightarrow y = 1$$

Từ đó, tìm được: $x = 1$

Vậy nghiệm chung của hai phương trình là cặp số $(1;1)$

Nhận xét: Có thể tìm x trước từ đó phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng được viết dưới dạng quen thuộc ở chương II

$$y = 2 - x \text{ và } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

• Biểu thị x qua y, ta lập phương trình tung độ giao điểm.

Bài toán 5. Chứng tỏ rằng phương trình $3x - 2y = 1$ luôn nhận cặp số dạng $(2m+1;3m+1)$ là nghiệm khi m thay đổi.

Lời giải

Thay $x = 2m + 1$ và $y = 3m + 1$ vào phương trình đã cho, ta được

$3(2m+1) - 2(3m+1) = 1 \Leftrightarrow 6m + 3 - 6m - 2 = 1$ (luôn đúng).

Vậy cặp số $(2m+1;3m+1)$ là nghiệm của phương trình.

Bài toán sau được giải tương tự:

- Chứng tỏ rằng cặp số $(4m+1;3m)$ là nghiệm của phương trình:

  $3x-4y=3$, khi m thay đổi.

- Tìm cặp số nguyên $(x;y)$ là nghiệm của phương trình $x-2y=4$.

Lời giải

Đặt $y=t;t\in Z$, ta có: $x-2t=4\Rightarrow x=4+2t;t\in Z$

Vậy cặp số $(4+2t;t);t\in Z$ là nghiệm nguyên của phương trình $x-2y=4$.

Bài toán 6. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $2x-3y=1$.

Hướng dẫn: Có thể viết: $2x=3y+1$ là số chẵn khi $x\in Z$, từ đó dẫn đến y là số lẻ.

Đặt $y=2t+1,t\in Z$

Ta tìm được x

Lời giải

Cách 1. Ta có: $2x-3y=1\Leftrightarrow 2x=1+3y$.

Với $x\in Z\Rightarrow 2x$ là số chẵn $\Rightarrow y$ phải là số lẻ, ta đặt $y=2t+1;t\in Z$.

Vậy $x=3t+2,t\in Z$.

Ta dược cặp số $(x;y)=(2+3t;1+2t)$ là nghiệm nguyên của phương trình.

Cách 2. Ta có: $2x-3y=1\Leftrightarrow x=\dfrac{3y+1}{2}\Leftrightarrow x=y+\dfrac{y+1}{2}$

Đặt $\dfrac{y+1}{2}=t\in Z\Rightarrow y=-1+2t;t\in Z$.

Vậy $x=-1+2t=t\Leftrightarrow x=-1+3t;t\in Z$.

Ta có cặp số $(x;y)=(-1+3t;-1+2t),t\in Z$ là nghiệm nguyên của phương trình.

Bài toán tương tự:

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $4x+3y=2$.

Lời giải

Ta có $4x+3y=2\Leftrightarrow y=\dfrac{-4x+2}{3}\Leftrightarrow y=-x+\dfrac{2-x}{3}$.

Đặt $\dfrac{2-x}{3}=t;t\in Z\Rightarrow 2-x=3t\Rightarrow x=2-3t;t\in Z$.

Vậy $y = -(2-3t)+t \Rightarrow y = -2+4t$.

Ta có cặp số $(x;y) = (2-3t;-2+4t), t \in Z$ là nghiệm nguyên của phương trình.

II. Biểu diễn tập nghiệm của phương trình $ax+by=c$.

Bài toán 7: Viết công thức nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $3x-y=6$.

Hướng dẫn: Áp dụng công thức nghiệm tổng quát của phương trình $ax+by=c$ là:

$$\begin{cases} x \in R \\ y = \dfrac{c-ax}{b} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y \in R \\ x = \dfrac{c-by}{a} \end{cases}$$

Lời giải

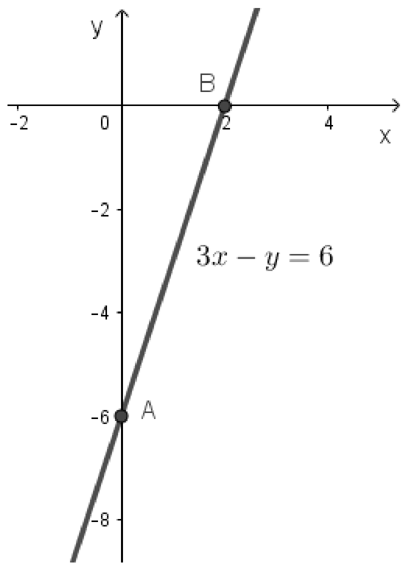
• Ta có: $3x-y=6 \Leftrightarrow y=3x-6$

Vậy công thức nghiệm tổng quát là: $\begin{cases} x \in R \\ y = 3x-6 \end{cases}$

Vẽ đường thẳng $y=3x-6$.

• Bảng giá trị:

x	0	2
$y=3x-6$	-6	0



Đường thẳng $y=3x-6$ qua hai điểm $A(0;-6)$ và $B(2;0)$ (xem hình vẽ).

Nhận xét: Công thức nghiệm tổng quát cũng có thể viết dưới dạng như sau:

Ta có: $3x-y=6 \Leftrightarrow x = \dfrac{6+y}{3}$

Vậy công thức nghiệm tổng quát là: $\begin{cases} y \in R \\ x = \dfrac{6+y}{3} \end{cases}$

Bài toán 8. Viết công thức nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $2x + 0y = 4$.

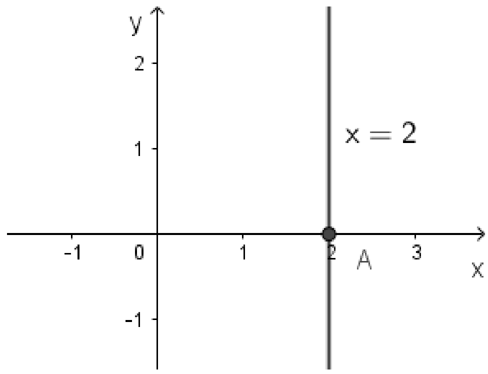
Hướng dẫn: Đường thẳng $x = 2$ qua điểm $(2;0)$ và song song với Oy,

Lời giải

Ta có $2x + 0y = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy công thức nghiệm tổng quát: $\begin{cases} y \in R \\ x = 2 \end{cases}$

Đường thẳng $x = 2$ qua điểm $A(2;0)$ và song song với Oy.



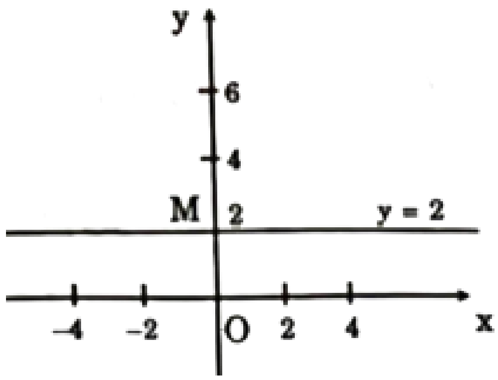
Bài toán tương tự:

Viết công thức nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $0x + 2y = 4$.

Lời giải

Ta có $0x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = 2$.

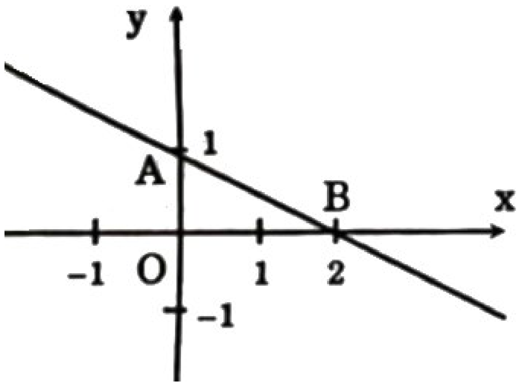
Công thức nghiệm tổng quát: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 \end{cases}$



Đường thẳng $y=2$ qua điểm $M(0;2)$ và song song với Ox.

Bài toán 9. Cho đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn trên hình vẽ.

Hãy viết một phương trình bậc nhất hai ẩn.



Hướng dẫn: Viết phương trình đường thẳg qua hai điểm $A(0;1)$ và $B(2;0)$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng (d) qua A,B có dạng $y=ax+b$; Mà $A(0;1)$ và $B(2;0)$.

$A\in(d)\Rightarrow 1=a\cdot 0+b\Rightarrow b=1$

Vậy phương trình (d) lúc này có dạng: $y=ax+1$.

Lai có $B\in(d)\Rightarrow 0=a.2+1\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$.

Vậy phương trình đường thẳng $(d): y=-\frac{1}{2}x+1\Leftrightarrow x+2y=2$.

Nhận xét: Ta có thể viết công thức nghiệm tổng quát như sau: $\begin{cases} y\in\mathbb{R} \\ x=2-2y \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=-\frac{1}{2}x+1 \end{cases}$

Bài toán 10. Cho các phương trình $2x+y=1$ và $2x-y=-5$.

Vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của mỗi phương trình rồi tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đó.

Hướng dẫn: Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng.

Lời giải

Ta viết lại:

$2x+y=1\Leftrightarrow y=-2x+1$

$2x-y=-5\Leftrightarrow y=2x+5$

Bảng giá trị:

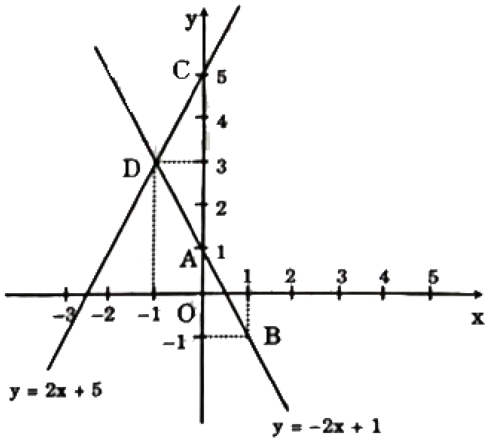
x	0
$y=-2x+1$	1

Đường thẳng $(d): y=-2x+1$ qua hai điểm $A(0;1)$ và $B(1;-1)$.

Bảng giá trị:

x	0	-1
$y=2x+5$	5	3

Đường thẳng $(d'): y=2x+5$ qua hai điểm $C(0;5)$ và $D(-1;3)$.



Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (d) và (d')

$-2x+1=2x+5 \Leftrightarrow 4x=-4 \Leftrightarrow x=-1$

Thay $x=-1$ vào phương trình $y=2x+5 \Rightarrow y=2(-1)+5=3$.

Vậy tọa độ giao điểm của ((d) và ((d') là điểm $M(-1;3)$.

Bài toán 11. Dùng hai cái can loại 5 lít và 2 lít. Làm thế nào để đong được 11 lít dầu hỏa từ một thùng dầu.

Hướng dẫn: Xét phương trình $5x+2y=11$.

Lời giải

Gọi $x, y \in \mathbb{Z}$ là số lần đong bằng can 5 lít và 2 lít:

Ta có phương trình $5x+2y=11$.

$$\Leftrightarrow 2y=11-5x \Leftrightarrow y=5-2x+\frac{1-x}{2}$$

$y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{2} \in \mathbb{Z}$ với $x \in \mathbb{Z}$.

Đặt $\dfrac{1-x}{2}=t \in \mathbb{Z} \Rightarrow x=1-2t$

Chẳng hạn, cho $t=0 \Rightarrow x=1$ và $y=3$, Ta có: $5.1+2.3=11$

Ta đong đầy can 5 lít và 3 lần đong đầy can 2 lít.

Cho $t=1 \Rightarrow x=-1$ và $y=8$, ta có: $5.(-1)+2.8=11$

8 lần đong đầy can 2 lít được 16 lít, lại đổ vào can 5 lít, còn lại 11 lít. (5 lít đổ trở lại thùng dầu).

Bài toán tương tự:

Dùng loại ống dẫn nước $4m$ và $6m$ để lắp đặt một đoạn đường ống dài $100m$. Hỏi dùng bao nhiêu ống mỗi loại và không phải cắt đi một ống nào?

Hướng dẫn: Xét phương trình

$$4x+6y=100 \Leftrightarrow 2x+3y=50 \Leftrightarrow x=25-y-\frac{y}{2}\ x\in\mathbb{N} \Leftrightarrow \begin{cases} y\in\mathbb{N} \\ \frac{y}{2}\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Đặt $\frac{y}{2}=t$, ta co: $\begin{cases} x=25-3t \\ y=2t; t\in\mathbb{N} \end{cases}$

Vì $x\in\mathbb{N} \Rightarrow 0\le t\le 8, t\in\mathbb{N}$

Chẳng hạn: $t=5 \Rightarrow x=10$ và $y=10$.

Vậy lấy 10 ống mỗi loại.

Bài toán 12. Xác định hệ số góc và tung độ gốc của đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $2x-3y=6$.

Hướng dẫn: Đưa về dạng $y=ax+b \Rightarrow a$ là hệ số góc và b là tung độ gốc.

Lời giải

Ta có: $2x-3y=6 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x-2$

Vậy hệ số góc của đường thẳng là $a=\frac{2}{3}$; tung độ gốc là $b=-2$.

Bạn có thể vẽ đường thẳng $2x-3y=6$.

Bài toán 13. Tìm điểm cố định mà họ đường thẳng $(d): mx+y=m-1$ luôn đi qua khi m thay đổi.

Lời giải

Gọi $(x_0; y_0)$) là điểm cố định mà họ đường thẳng (d) luôn đi qua, khi m thay đổi.

Ta có: $mx_0+y_0=m-1; \forall m \Leftrightarrow (x_0-1)m+y_0+1=0; \forall m$

Phương trình bậc nhất của m có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-1=0 \\ y_0+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=-1 \end{cases}$

Vậy điểm cố định cần tìm là $(1;-1)$.

III. Nghiệm của hộ phương trình bộc nhất hai ẩn

Bài toán 14. Tìm a,b để hệ phương trình $\begin{cases} ax-y=5 \\ bx+ay=4 \end{cases}$ có một nghiệm là $(x;y)=(2;-1)$.

Hướng dẫn: Thay $x=2$ và $y=-1$ vào hệ và tìm a,b.

Lời giải

Vì $(x;y)=(2;-1)$ là một nghiệm của hệ, nên thay $x=2$ và $y=-1$ vào hệ, ta được:

$$\begin{cases} 2a+1=5 \\ 2b\pm a=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$$

Bạn có thể giải bài toán sau:

1. Tìm m,n để hệ phương trình: $\begin{cases} mx+4y=2 \\ mx+ny=5 \end{cases}$ có một nghiệm $(x;y)=(2;-1)$

2. Tương tự với hệ: $\begin{cases} mx-y=1 \\ x+y=n \end{cases}$ và nghiệm $(x;y)=(-1;0)$.

Bài toán 15. Không cần vẽ hình, cho biết số nghiệm của mỗi hệ phương trình

a) $\begin{cases} y=3-2x \\ y=3x-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x-y=3 \\ x-\dfrac{1}{3}y=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} y=2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

Lời giải

a) Đường thẳng $y=3-2x$ có hệ số $a_1=-2$.

Đường thẳng $y=3x-1$ có hệ số $a_2=3$.

$\Rightarrow a_1 \neq a_2$ nên 2 đường thẳng cắt nhau.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

b) Viết lại hệ: $\begin{cases} y=3x-3 \\ y=3x-3 \end{cases}$

Hai đường thẳng trùng nhau. Vậy hệ có vô số nghiệm.

c) Viết lại hệ: $\begin{cases} y=2x-3 \\ x+2=0 \end{cases}$

Đường thẳng $x+2=0$ song song voi trục tung, đường thẳng $y=2x-3$ có hệ số góc $a=2$ nên hai đường thẳng cắt nhau.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

d) Viết lại hệ $\begin{cases} y=2 \\ y=-2x+1 \end{cases}$

Đường thẳng $y=2$ có hệ số $a_1=0$; đường thẳng $y=-2x+1$ có hệ số $a_2=-2\neq 0$

$\Rightarrow$ hai đường thẳng cắt nhau.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 16. Tìm m để hệ sau vô nghiệm.

a) $\begin{cases} 4x-y=3 \\ mx+3y=5 \end{cases}$;   b) $\begin{cases} x-y=1 \\ mx+y=m-2 \end{cases}$

Hướng dẫn: Viết các phương trình dưới dạng $y=ax+b$ và xét điều kiện để hai đường thẳng song song.

Lời giải

a) Hệ được viết lại: $\begin{cases} y=4x-3 \\ y=-\dfrac{m}{3}x+\dfrac{5}{3} \end{cases}$

Hai đường thẳng song song $\Leftrightarrow \begin{cases} 4=-\dfrac{m}{3} \\ -3\neq \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m=-12$.

b) Hệ được viết lại: $\begin{cases} y=x-1 \\ y=-mx+m-2 \end{cases}$

Hai đường thẳng song song $\Leftrightarrow \begin{cases} 1=-m \\ -1\neq m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ -1\neq -1-2 \text{ (đúng)} \end{cases}$

Vậy hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow m=-1$.

Bài toán 17. Tìm m để hệ sau có vô số nghiệm.

a) $\begin{cases} 4x-y=3 \\ mx+y=-3 \end{cases}$;   b) $\begin{cases} x+2y=m \\ 3x+6y=12 \end{cases}$

Hướng dẫn: Hệ vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ hai đường thẳng trùng nhau.

Lời giải

a) Hệ viết lại như sau: $\begin{cases} y=4x-3 \\ y=-mx-3 \end{cases}$

Hệ vô số nghiệm khi và chỉ khi hai đường thẳng trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} 4=-m \\ -3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow m=-4$

b) Hệ viết lại như sau: $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{m}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2}x+2 \end{cases}$

Hệ vô số nghiệm khí và chỉ khi hai đường thẳng trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{m}{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow m=4$

Bài toán 18. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất.

a) $\begin{cases} (2m-1)x+y=5 \\ 3x-y=m \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y=1 \\ mx-y=m+2 \end{cases}$.

Hướng dẫn: Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ hai đường thẳng cắt nhau.

Lời giải

a) Hệ viết lại như sau: $\begin{cases} y=(1-2m)x+5 \\ y=3x-m \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hai đường thẳng cắt nhau $\Leftrightarrow 1-2m\neq 3 \Leftrightarrow m\neq -1$.

b) Hệ viết lại như sau: $\begin{cases} y=-x+1 \\ y=mx-m-2 \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hai đường thẳng cắt nhau $\Leftrightarrow -1\neq m$ hay $m\neq -1$.

Bài toán 19. Cho phương trình $3x-4y=7$.

Hãy tìm một phương trình để cùng với một phương trình trên lập thành một hệ có nghiệm duy nhất, có vô số nghiệm, vô nghiệm.

Hướng dẫn: Viết phương trình cho về dạng $y=ax+b$.

Tìm phương trình đường thẳng cắt đường thẳng đã cho hoặc trùng với đường thẳng đã cho hoặc song song với đường thẳng đã cho.

Lời giải

Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng: $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{7}{4}$.

Đường thẳng $y=x+1$ cắt đường thẳng đã cho; ta có hệ $\begin{cases} y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{7}{4} \\ y=x+1 \end{cases}$

Hệ này có nghiệm duy nhất .

Tương tự hệ $\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 6x-8y=14 \end{cases}$

Hệ có vô số nghiệm vì hai đường thẳng trùng nhau.

Hệ $\begin{cases}3x-4y=7\\3x-4y=5\end{cases}$

Vô nghiệm vì hai đường thẳng song song.

IV. Minh họa hình học tập nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Bài toán 20. Cho hệ phương trình $\begin{cases}3x+y=5\\5x-y=11\end{cases}$.

a) Minh họa hình học tập nghiệm của hệ phương trình trên .

b) Tìm nghiệm của hệ.

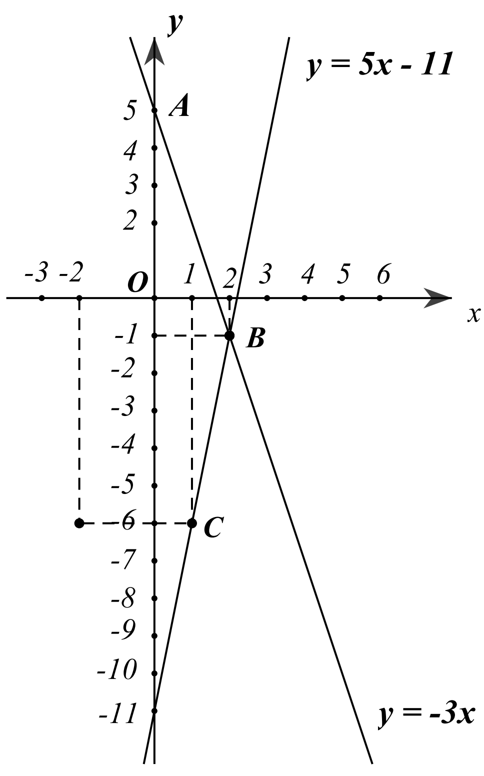
Hướng dẫn: Viết mỗi phương trình dưới dạng $y=ax+b$.

Vẽ các đường thẳng trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

Tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của hai đường thẳng.

Lời giải:

a) Viết lại hệ dưới dạng : $\begin{cases}y=-3x+5\\y=5x-11\end{cases}$



Bảng giá trị:

x	0	2
$y=-3x+$	5	-1

Đường thẳng (d):

$y=-3x+5$ qua hai điểm $A(0;5)$ và $B(2;-1)$.

Bảng giá trị:

x	1	2
$y=5x-1$	-6	-1

Đường thẳng (d'): $y=5x-11$ qua hai điểm $C(1;-6)$ và $B(2;-1)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (d').

$-3x+5=5x-11 \Leftrightarrow 8x=16 \Leftrightarrow x=2$

Thay $x=2$ vào phương trình $y=-3x+5$, ta được :

$y=(-3)\cdot 2+5 \Rightarrow y=-1$.

Vậy hệ có nghiệm: $(x;y)=(2;-1)$.

Chú ý: Có thể xác định nghiệm của hệ từ đồ thị đã vẽ. (Bạn hãy xem bài toán dưới đây)

Bài toán 21. Minh hoạ hình học tập nghiệm của hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+0y=12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y=6 \\ 0x-5y=10 \end{cases}$

Hướng dẫn: Viết phương trình dưới dạng $y=ax+b$ hoặc $y=b$ hoặc $x=c$.

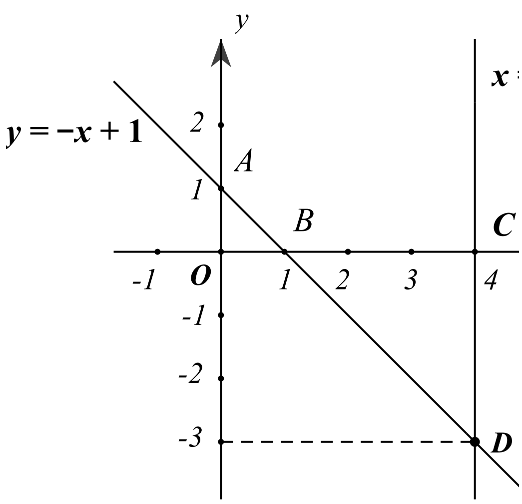
Lời giải:

a) Viết lại hệ dưới dạng:

$\begin{cases} y=-x+1 \\ x=4 \end{cases}$

Bảng giá trị:

x	0	1
$y=-x+1$	1	0



Đường thẳng (d) : $y=-x+1$ qua hai điểm $A(0;1)$ và $B(1;0)$.

Đường thẳng (d'): $x=4$ song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm $C(4;0)$.

Nhận xét: Ta có thể xét bài toán: "Dùng đồ thị xác định nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+0y=12 \end{cases}$

Từ đồ thị đã vẽ, ta thấy giao điểm của (d) và (d') là $D(4;-3)$ là duy nhất.

Thử lại : Thay $x=4$ và $y=-3$, ta được: $\begin{cases} 4+(-3)=1 \\ 3.4+0.(-3)=12 \end{cases}$

Các đẳng thức đều đúng.

Vậy $(x;y)=(4;-3)$ là nghiệm duy nhất.

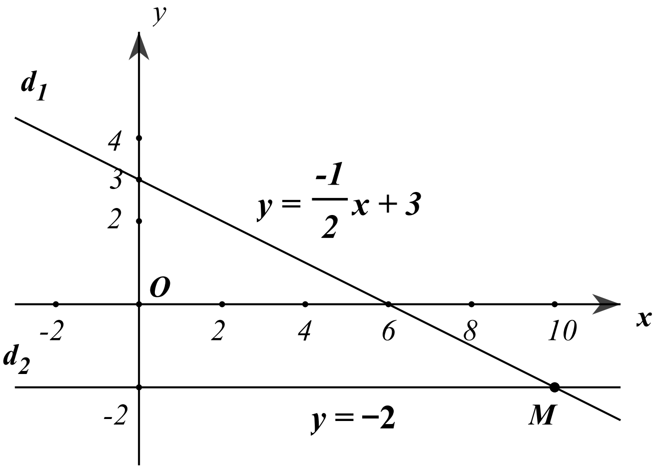
Cách khác: Xét phương trình tung độ giao điểm của (d) và (d'):

$$-y+1=4 \Leftrightarrow y=-3$$

b) Viết lại hệ dưới

$$\begin{cases} y=-\dfrac{x}{2}+3 \\ y=-2 \end{cases}$$

Minh họa hình học (xem hình vẽ)



Chú ý: Xác định nghiệm của hệ: Giao điểm của hai đường thẳng là $M(10;-2)$.

Thay $x=10$ và $y=-2$ vào hệ ta được:

$$\begin{cases} 10+2.(-2)=6 \\ 0.10-5.(-2)=10 \end{cases}$$

Các đẳng thức trên đều đúng.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $(x;y)=(10;-2)$.

Cách khác : Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2):

$$-\frac{x}{2}+3=-2 \Leftrightarrow -x+6=-4 \Leftrightarrow x=10$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $(x;y)=(10;-2)$.

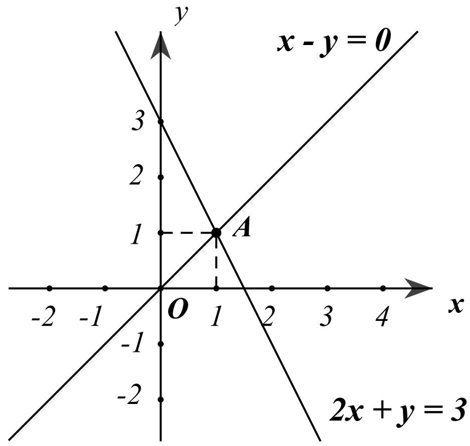
Bài toán 22. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba đường thẳng $d_1: 2x+y=3$;

$d_3: x-y=0; d_3:\ x+y=2$. Chứng tỏ rằng ba đường thẳng đã cho đồng quy.

Hướng dẫn: Xét hệ $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-y=0 \end{cases}$ và minh họa hình học tập nghiệm và tìm tọa độ giao điểm của

d_1 và d_2. Chứng tỏ tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 thuộc d_3.

Lời giải:



Xét hệ : $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-y=0 \end{cases}$

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ hai đường thẳng $2x+y=3$ và $x-y=0$ (xem hình vẽ).

Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm $A(1;1)$.

Thử lại: Thay $x=1$ và $y=1$ vào hệ, ta được đẳng thức đúng: $\begin{cases} 2.1+1=3 \\ 1-1=0 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;1)$.

Lại có toạ độ $A(1;1)$ nghiệm đúng phương trình $d_3: x+y=2$ $(1+1=2$, luôn đúng).

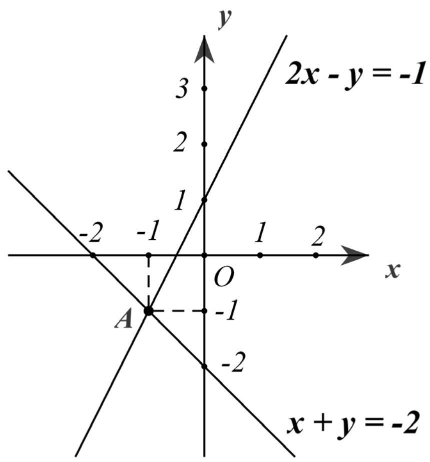
Vậy ba đường thẳng đồng quy.

Bài toán 23. Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy: $d_1: 2x-y=-1$;

$d_2: x+y=-2; d_3: 2x+y=-m$.

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 22.

Lời giải:



Xét hệ : $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ x+y=-2 \end{cases}$

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ hai đường thẳng : $d_1: 2x-y=-1$ và $d_2: x+y=-2$.

(xem hình vẽ).

Hai dường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $A(-1;-1)$.

Thử lại: Thay tọa độ $A: x=-1$ và $y=-1$

ta được các đẳng thức đúng:

$$\begin{cases} 2.(-1)-(-1)=-1 \\ (-1)+(-1)=-2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ: $(x;y)=(-1;-1)$.

d_1, d_2, d_3 đồng quy $\Leftrightarrow A\in(d_3) \Leftrightarrow 2.(-1)+(-1)=-m \Leftrightarrow m=3$.

Bài 2. GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương pháp thế:

Cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

1.Phương pháp thế

Bước 1: Từ một phương trình của hệ, biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại của hệ để được phương trình chỉ còn chứa một ẩn.

Bước 2: Giải phương trình một ẩn vừa nhận được, từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.

2. Phương pháp cộng đại số

Cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số:

Để giải một hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có hệ số của cùng một ẩn nào đó trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau, ta có thể làm như sau:

Bước 1: Cộng hoặc trừ từng vế của hai phương trình trong một hệ để được phương trình chỉ còn chứa một ẩn.

Bước 2: Giải phương trình một ẩn vừa nhận được, từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Phương pháp thế

Bài toán 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x+y=5 & (1) \\ 3x-2y=11 & (2) \end{cases}$.

Lời giải:

Từ phương trình (1), ta có: $y=5-2x \quad (3)$

Thay vào phương trình (2), ta được: $3x-2(5-2x)=11$

Giải phương trình (4): $3x-2(5-2x)=11$

$$\begin{aligned} 3x-10+4x &= 11 \\ 7x &= 21 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Thay giá trị $x=3$ vào phương trình (3), ta có:

$y=5-2\cdot 3=-1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(3;-1)$.

Bài toán tương tự

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x-3y=2 \\ -2x+5y=1 \end{cases}$.

Bài toán 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3x+12y=-5 & (1) \\ x+4y=3 & (2) \end{cases}$

Lời giải:

Từ phương trình (2), ta có; $x=3-4y \quad (3)$

Thay vào phương trình (1), ta được: $3(3-4y)+12y=-5 \quad (4)$

Giải phương trình (4): $3(3-4y)+12y=-5$

$$\begin{aligned} 9-12y+12y &= -5 \\ 0y &= -14 \end{aligned}$$

Do đó phương trình (4) vô nghiệm.

Vậy hệ phuoong trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét: Ta có thể viết phương trình (1) về dạng: $x+4y=-\frac{5}{3}$.

Khi đó, hệ có dạng: $\begin{cases} x+4y=-\frac{5}{3} \\ x+4y=3 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán tương tự:

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} -2x+4y=5 \\ -x+2y=1 \end{cases}$.

Đáp số: Hệ phương trình vô nghiệm.

Bài toán 3. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 12x-4y=-16 & (1) \\ 3x-y=-4 & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Từ phương trình (2), ta có: $y=3x+4$ (3)

Thay vào phương trình (1), ta được: $12x-4(3x+4)=-16$ (4)

Giải phương trình (4): $12x-4(3x+4)=-16$

$$12x-12x-16=-16$$
$$0x=0.$$

Do đó phương trình (4) vô số nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm: $(x;3x+4)$ với x tuỳ ý $,x\in R$.

Nhận xét: Ta có thể viết phương trình (1) về dạng: $3x-y=-4$.

Do đó, hệ phương trình đã cho có thể viết về dạng: $\begin{cases} 3x-y=-4 \\ 3x-y=-4 \end{cases}$

Vì vậy , nghiệm của hệ phương trình đã cho cũng là nghiệm của phương trình $3x-y=-4$.

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm: $\begin{cases} x\in R \\ y=3x+4 \end{cases}$.

Bài toán tương tự:

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x-3y=4 \\ -2x+6y=-8 \end{cases}$

Đáp số: Hệ có vô số nghiệm: $(3y+4;y)$ với y ý tuỳ ý ; $y\in R$.

Ta có thể trình bày cách giải như các bài toán đây :

Bài toán 4. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế.

a) $\begin{cases} 4x+y=2 \\ 8x+3y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=2 \\ 3x-2y=9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{2}x-\sqrt{3}y=1 \\ x=-\sqrt{3}y+\sqrt{2} \end{cases}$

Hướng dẫn: a) Từ phương trình $4x+y=2 \Rightarrow y=2-4x$.

Thế y vào phương trình còn lại, ta tìm x.

b) Ta có $x-y=2 \Rightarrow x=2+y$. Thế x vào phương trình thứ hai.

c) Thế x từ phương trình thứ hai vào phương trình đầu.

Lời giải

a) Ta có $\begin{cases}4x+y=2\\8x+3y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2-4x\\8x+3\left(2-4x\right)=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2-4x\\-4x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{4}\\y=1\end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;\,y\right)=\left(\dfrac{1}{4};\,1\right)$.

b) ta có $\begin{cases}x-y=2\\3x-2y=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2+y\\3\left(2+y\right)-2y=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2+y\\y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;\,y\right)=\left(5;\,3\right)$

c) ta có $\begin{cases}\sqrt{2}x-\sqrt{3}y=1\\x=-\sqrt{3}y+\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2}\left(-\sqrt{3}y+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}y=1\\x=-\sqrt{3}y+\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}\end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;\,y\right)=\left(1;\,\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}\right)$.

Bài toán 5: Tìm các hệ số *a; b* biết rằng hệ phương trình:

a) $\begin{cases}ax+by=-5\\bx-ay=-5\end{cases}$ có nghiệm là $\left(1;-2\right)$

b) $\begin{cases}2x+by=-4\\bx=ay=-5\end{cases}$ có nghiệm là $\left(1;-2\right)$.

Hướng dẫn: Thế $x=1$ và $y=-2$ vào hệ, ta được hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là *a* và *b*.

Lời giải

a) Thế $x=1$ và $y=-2$ vào hệ, ta được

$\begin{cases}a-2b=-5\\b+2a=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2b-5\\b+2\left(2b-5\right)=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2b-5\\5b=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=1\\a=2b-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-3\\b=1\end{cases}$

b) Thế $x=1$ và $y=-2$ vào hệ, ta được

$\begin{cases}2-2b=-4\\-2b-a=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=3\\\left(-2\right)\cdot 3-a=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$.

Bài toán 6. Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm $A\left(2;\,1\right)$ và $B\left(1;2\right)$.

Hướng dẫn: Phương trình đường thẳng có dạng $y=ax+b\ \left(a\neq 0\right)$.

$A\in d\Rightarrow 1=2a+b$
$B\in d\Rightarrow 2=1a+b$

Ta có hệ $\begin{cases}2a+b=1\\a+b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a+b=1\\b=2-a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a+2-a=1\\b=2-a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$.

Vậy đường thẳng $\left(d\right)$ đi qua *A, B* là $y=-x+3$.

Bài toán tương tự :

Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm :

a) $P\left(-2;\,5\right)$ và $Q\left(3;-4\right)$ b) $M\left(3;\,4\right)$ và $N\left(-2;5\right)$

Bài toán 7. Tìm *m* để hệ sau có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} x+my=1 & (1) \\ mx-3my=2m+3 & (2) \end{cases}.$$

Hướng dẫn: Từ $(1)\Rightarrow x=1-my$. Thế *x* vào (2) và biện luận phương trình bậc nhất theo ẩn *y*.

Lời giải

Từ $(1)\Rightarrow x=1-my$. Thế *x* vào (2), ta được:

$m\left(1-my\right)-3my=2m+3\Leftrightarrow\left(m^2+3m\right)y=-m-3\left(*\right)$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow m^2+3m\neq 0\Leftrightarrow m\left(m+3\right)\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0 \text{ và } m\neq -3$$

Nhận xét : 1) Ta có thể xét bài toán : Tìm *m* để hệ vô nghiệm.

Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m^2+3m=0 \\ m+3\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\left(m+3\right)=0 \\ m+3\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow m=0.$$

Hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m^2+3m=0 \\ m+3=0 \end{cases}\Leftrightarrow m=-3.$$

2) Ta có thể giải cách khác bằng việc xét vị trí tương đối của hai đường thẳng cho bởi phương trình (1) và (2) (bạn hãy xem ở **§** 2 . Hệ phương trình).

Tìm *m* để hệ sau có vô số nghiệm $\begin{cases} 3x-2y=6 & (1) \\ mx+y=-3 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Từ $(2)\Rightarrow y=-mx-3$. Thế *y* vào phương trình (1) ta được :

$3x-2\left(-mx-3\right)=6\Leftrightarrow\left(2m+3\right)x=0\ \ (*)$

Hệ đã cho có vô số nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow 2m+3=0\Leftrightarrow m=-\frac{3}{2}.$$

Nhận xét : a) Ta có thể đưa về xét điều kiện để hai đường thẳng cho bởi phương trình (1) và (2) trùng nhau.

b) Ta con có bài toán : Tìm *m* để hệ có nghiệm duy nhất.

(Đáp số $m\neq-\dfrac{3}{2}$)

Bài toán 8. Tìm m để hệ sau vô nghiệm $\begin{cases} x+2y=3 & (1) \\ mx-4y=-5 & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Từ $(1) \Rightarrow x = 3-2y$. Thế x vào phương trình (2), ta được :

$m(3-2y)-4y=-5 \Leftrightarrow (2m+4)y = 5+3m \quad (*)$

Hệ đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+4=0 \\ 3m+5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m \neq -\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m=-2$$

Nhận xét : Bài toán tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 2m+4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$.

Bài toán 9. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} mx-y=-1 & (1) \\ x+my=-2 & (2) \end{cases}$.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp thế. Ta có $mx-y=-1 \Rightarrow y=mx+1$. Thế vào phương trình (2).

Lời giải

Từ $(1) \Rightarrow y = mx+1$. Thế y vào (2), ta có :

$x+m(mx+1)=-2 \Leftrightarrow (m^2+1)x = -m-2 \quad (*)$

Vì $m^2+1>0, \forall m \in \mathbb{R}$, ta được $(*) \Leftrightarrow x = \dfrac{-m-2}{m^2+1}$.

Từ đó tìm được $y = \dfrac{-2m+1}{m^2+1}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;\, y) = \left(\dfrac{-m-2}{m^2+1}; \dfrac{-2m+1}{m^2+1}\right)$.

Bài toán 10. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=1 & (1) \\ x+my=2 & (2) \end{cases}$.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp thế.

Lời giải

Từ $(1) \Rightarrow y = 1-mx$. Thế y vào (2), ta được :

$x+m(1-mx)=2 \Leftrightarrow (1-m^2)x = 2-m \quad (*)$.

Trường hợp 1 : $1-m^2 \neq 0 \Leftrightarrow (1-m)(1+m) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Ta có $(*) \Leftrightarrow x = \dfrac{2-m}{1-m^2}$

Từ đó tìm được $y = \dfrac{2m-1}{m^2-1}$.

Hệ có nghiệm duy nhất $\left(x;\, y\right) = \left(\dfrac{2-m}{1-m^2};\, \dfrac{2m-1}{m^2-1}\right)$

Trường hợp 2 : $1-m^2=0 \Leftrightarrow \left(1-m\right)\left(1+m\right)=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$

+ Nếu $m=1$, ta có hệ $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$. Hệ vô nghiệm (vì hai đường thẳng song song).

+ Nếu $m=-1$, ta có hệ $\begin{cases} -x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x-y=2 \end{cases}$. Hệ này cũng vô nghiệm.

Bài toán 11: Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} x+my=4 & \left(1\right) \\ mx-y=2 & \left(2\right) \end{cases}$.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp thế.

Lời giải

Từ $\left(1\right) \Rightarrow x=4-my$. Thế *x* vào $\left(2\right)$, ta được:

$m\left(4-my\right)-y=2 \Leftrightarrow \left(m^2+1\right)y=4m-2 \;\; \left(*\right)$.

Vì $m^2+1>0, \forall m \in \mathbb{R}$. Vậy $\left(*\right)$ có nghiệm duy nhất $y=\dfrac{4m-2}{m^2+1}$.

Từ đó tìm được $x=\dfrac{2m+4}{m^2+1}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(x;\, y\right)=\left(\dfrac{2m+4}{m^2+1};\, \dfrac{4m-2}{m^2+1}\right)$.

Bài toán 12. Tìm *m* để hệ sau có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện

$x>0$ và $y>0$: $\begin{cases} mx+4y=6 & \left(1\right) \\ x+my=3 & \left(2\right) \end{cases}$.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp thế để tìm *x; y* qua *m*. Giải các bất phương trình $x>0$ và $y>0$.

Lời giải

Từ $\left(2\right) \Rightarrow x=3-my$. Thế *x* vào $\left(1\right)$, ta được

$m\left(3-my\right)+4y=6 \Leftrightarrow \left(4-m^2\right)y=6-3m \;\; \left(*\right)$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $\left(*\right)$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow 4-m^2 \neq 0 \Leftrightarrow \left(2-m\right)\left(2+m\right) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ và $m \neq -2$.

Khi đó, ta có $y=\dfrac{6-3m}{4-m^2}=\dfrac{3\left(2-m\right)}{\left(2-m\right)\left(2+m\right)}=\dfrac{3}{2+m}$

Thế $y=\dfrac{3}{2+m}$ vào phương trình $x=3-my$, ta được $x=3-\dfrac{3m}{2+m}=\dfrac{6}{2+m}$.

Vậy $m \neq \pm 2$, hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{6}{m+2} \\ y = \dfrac{3}{m+2} \end{cases}$.

Xét điều kiện $x > 0;\ y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2+m} > 0 \\ \dfrac{6}{m+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$.

Vậy $m > -2$ và $m \neq 2$.

Bài toán 13. Tìm tất cả các số nguyên *m* để hệ sau có nghiệm duy nhất với $x;\ y$ đều là số nguyên:

$$\begin{cases} mx + y = 1 & (1) \\ x + my = 2 & (2) \end{cases}.$$

Hướng dẫn: Dùng phương pháp thế và tìm $m \in \mathbb{Z}$ sao cho $x \in \mathbb{Z}$ và $y \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Từ $(2) \Rightarrow x = 2 - my$. Thế *x* vào phương trình (1), ta được:

$m(2 - my) + y = 1 \Leftrightarrow (1 - m^2)y = 1 - 2m\ \ (*)$.

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất

$1 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow (1 - m)(1 + m) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq -1$.

Vậy $(*) \Leftrightarrow y = \dfrac{2m - 1}{m^2 - 1}$.

Thế *y* vào phương trình $x = 2 - my$, ta được $x = \dfrac{m - 2}{m^2 - 1}$.

Nếu $x \in \mathbb{Z};\ y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + y \in \mathbb{Z}$

Ta có $x + y = \dfrac{3(m - 1)}{m^2 - 1} = \dfrac{3}{m + 1}$; $x + y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m + 1$ là ước của 3.

(với $m \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m + 1 = \pm 1 \\ m + 1 = \pm 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 2 \\ m = -4 \end{array}\right.$.

Thử lại:

+ $m = 0 \Rightarrow (x;\ y) = (2;\ 4)$ (nhận)

+ $m = -2 \Rightarrow (x;\ y) = \left(\dfrac{-4}{3};\ \dfrac{-5}{3}\right)$ (loại)

+ $m = 2 \Rightarrow (x;\ y) = (0;\ 1)$ (nhận)

+ $m = -4 \Rightarrow (x;\ y) = \left(\dfrac{-2}{5};\ \dfrac{-3}{5}\right)$ (loại)

Vậy $m = 0$ hoặc $m = 2$.

Bài toán 14. Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{y-1} = 1 \\ \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{y-1} = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn: Đặt $X = \dfrac{1}{x}; Y = \dfrac{1}{y}$. Ta gọi là phương pháp đặt ẩn phụ.

Lời giải

a) Điều kiện: $x \neq 0$ và $y \neq 0$. Đặt $X = \dfrac{1}{x}; Y = \dfrac{1}{y}$ $(X \neq 0; Y \neq 0)$.

Ta có hệ: $\begin{cases} X - Y = 1 \\ 3X + 4Y = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} X = 1 + Y \\ 3(1+Y) + 4Y = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} Y = \dfrac{2}{7} \\ X = 1 + Y \end{cases}$

$\begin{cases} X = \dfrac{9}{7} \\ Y = \dfrac{2}{7} \end{cases}$. Ta tìm được $\begin{cases} x = \dfrac{7}{9} \\ y = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất: $(x\,;y) = \left(\dfrac{7}{9}; \dfrac{7}{2}\right)$.

b) Điều kiện: $x \neq 2$ và $y \neq 1$. Đặt $u = \dfrac{1}{x-2}; v = \dfrac{1}{y-1}$.

Ta có hệ: $\begin{cases} u + v = 1 \\ 2u - 3v = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} u = 1 - v \\ 2(1-v) - 3v = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} u = 1 - v \\ v = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} u = \dfrac{4}{5} \\ v = \dfrac{1}{5} \end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{1}{y-1} = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

$$\begin{cases} x-2=\dfrac{5}{4} \\ y-1=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{13}{4} \\ y=6 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $(x\,;\,y)=\left(\dfrac{13}{4};6\right)$.

Bài toán 15. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2x^2+3y=1 \\ 3x^2-2y=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x^2+y^2=5 \\ x^2-3y^2=1 \end{cases}$

Hướng dẫn: a) Dùng phương pháp đặt ẩn phụ: $u=x^2$.

b) Đặt $u=x^2; v=y^2$

Lời giải

a) Đặt $u=x^2; u>0;$ ta có hệ: $\begin{cases} 2u+3y=1 \\ 3u-2y=2 \end{cases}$

$$\begin{cases} y=\dfrac{3u-2}{2} \\ 2u+3y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{3u-2}{2} \\ 2u+3\cdot\dfrac{3u-2}{2}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{3u-2}{2} \\ y=\dfrac{8}{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{8}{13} \\ y=-\dfrac{1}{13} \end{cases}$$

Ta tìm được hai nghiệm của hệ: $(x\,;\,y)=\left(\pm\sqrt{\dfrac{8}{13}};-\dfrac{1}{13}\right)$.

b) Đặt $u=x^2; v=y^2\,(u\ge 0; v\ge 0)$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} 3u+v=5 \\ u-3v=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 5 - 3u \\ u - 3v = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 5 - 3u \\ u - 3(5 - 3u) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 5 - 3u \\ 10u = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \dfrac{8}{5}\ (\text{tm}) \\ v = \dfrac{1}{5}\ (\text{tm}) \end{cases}$$

Ta được bốn nghiệm: $(x\,;\,y) = \left(\pm\sqrt{\dfrac{8}{5}}\,;\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Chú ý Lấy các tổ hợp về dấu của $x;y$, ta có bốn nghiệm, không phải hai nghiệm. Để tránh nhầm lẫn, ta viết bốn nghiệm:

$$(x\,;\,y) = \left(-\sqrt{\frac{8}{5}}\,;-\sqrt{\frac{1}{5}}\right);\left(-\sqrt{\frac{8}{5}}\,;\sqrt{\frac{1}{5}}\right);\left(\sqrt{\frac{8}{5}}\,;-\sqrt{\frac{1}{5}}\right);\left(\sqrt{\frac{8}{5}}\,;\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$$

II. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

Bài toán 16. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -5x + 2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2\sqrt{2y} = \sqrt{5} \\ \sqrt{2}x + y = 1 - \sqrt{10} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \left(1+\sqrt{2}\right)x + \left(1-\sqrt{2}\right)y = 5 \\ \left(1+\sqrt{2}\right)x + \left(1+\sqrt{2}\right)y = 3 \end{cases}$

Hướng dẫn: Dùng phương pháp cộng đại số. (xem phần A). Tìm BCNN của 2 và 5 (là hệ số của số hạng chứa x).

Lời giải

a) Ta co: $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -5x + 2y = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 10x - 15y = 10 \\ -10x + 4y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -11y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{16}{11} \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{13}{11} \\ y = -\dfrac{16}{11} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm: $(x\,;y) = \left(-\dfrac{13}{11};-\dfrac{16}{11}\right)$.

Chú ý: Ta tìm BCNN của 2 và 5 là 10. Vậy phải nhân hai vế phương trình đầu tiên với 5 ; nhân hai vế phương trình thứ hai với 2 và cộng vế với vế hai phương trình vừa tìm được.

b) Ta có $\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} \\ \sqrt{2}x + y = 1 - \sqrt{10} \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{2}x - 4y = \sqrt{10} \\ \sqrt{2}x + y = 1 - \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y = 1 - 2\sqrt{10} \\ x = 2\sqrt{2}y + \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{1 - 2\sqrt{10}}{5} \\ x = \dfrac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm: $(x\,;y) = \left(\dfrac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{2};\dfrac{1 - 2\sqrt{10}}{5}\right)$

Chú ý: Ta đã nhân hai vế phương trình thứ nhất với $\sqrt{2}$.

c) Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được:

$$2\sqrt{2}y = -2$$

$$y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$$

Thay $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ vào phương trình $\left(1+\sqrt{2}\right)x + \left(1-\sqrt{2}\right)y = 5$ ta được $x = \dfrac{7\sqrt{2} - 6}{2}$

Hệ có nghiệm: $(x\,;y) = \left(\dfrac{7\sqrt{2} - 6}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Bài toán 17. Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm.

a) $A(1;2)$ và $B(2;1)$.

b) $A(1;3)$ và $B(3;2)$.

Hướng dẫn: Phương trình đường thẳng có dạng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

Lời giải

a) Phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

Vì $A \in (d)$ nên $2 = a + b$

Vì $B \in (d)$ nên $1 = 2a + b$

Ta có hệ phương trình bậc nhất hai ẩn a và b là $\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=1 \end{cases}$

Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được: $-a = 1$ nên $a = -1$.

Thay $a = -1$ vào phương trình $a + b = 2$ hay $-1 + b = 2$ nên $b = 3$.

Phương trình đường thẳng (d) qua A, B là $y = -x + 3$.

b) Phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

Vì $A \in (d)$ nên $a + b = 3$

Vì $B \in (d)$ nên $3a + b = 2$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+b=3 \\ 3a+b=2 \end{cases}$

Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được: $-2a = 1$ nên $a = -\dfrac{1}{2}$.

Thế $a = -\dfrac{1}{2}$ vào phương trình $a + b = 3$, ta có:

$-\dfrac{1}{2} + b = 3$ nên $b = \dfrac{7}{2}$

Phương trình đường thẳng (d) qua A, B là $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$.

Chú ý: Ta có thể viết theo cách biến đổi tương đương.

Bài toán 18. Tìm m để đường thẳng $y = mx + 2$ đi qua giao điểm của hai đường thẳng: $(d_1): 2x + 3y = 7$ và $(d_2): 3x + 2y = 13$

Hướng dẫn: Tìm tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) bằng cách lập hệ:

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x+2y=13 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được nghiệm $(x; y)$.

Từ đó tìm được m.

Lời giải

Tọa độ giao điểm (nếu có) của (d_1) và (d_2) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x+2y=13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+6y=14 \\ 9x+6y=39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x=25 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$$

$\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$

Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là điểm $M(5;-1)$.

Đương thẳng $y = mx + 2$ qua $M(5;-1)$ nên $-1 = 5m + 2$ hay $m = -\dfrac{3}{5}$.

Chú ý: Ta có thể biểu diễn y qua x từ hai phương trình (d_1) và (d_2) và lập phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) như đã làm ở chương 2 .

Bài toán 19. Tìm m để ba đường thẳng đồng quy:

(d_1) $5x + 11y = 8$, (d_2) $10x - 7y = 74$, (d_3) $4mx + (2m-1)y = m + 2$.

Hướng dẫn: Tìm tọa độ giao diểm A của (d_1) và (d_2).

Thay tọa độ A vào phương trình (d_3).

Lời giải

Tọa độ giao điểm A (nếu có) của (d_1) và (d_2) thỏa mãn hệ:

$\begin{cases} 5x + 11y = 8 \\ 10x - 7y = 74 \end{cases}$

$\begin{cases} 10x + 22y = 16 \\ 10x - 7y = 74 \end{cases}$

$\begin{cases} 29y = -58 \\ 5x + 11y = 8 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -2 \\ 5x + 11y = 8 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases}$

Vậy $A(6;-2)$.

$(d_1);(d_2);(d_3)$ đồng quy khi và chỉ khi (d_3) qua A.

Thay tọa độ $A(6;-2)$ vào phương trình (d_3); ta được:

$(4m)\cdot 6 + (2m-1)\cdot(-2) = m + 2$ nên $m = 0$

Bài toán 20. Tìm m để hệ có nghiệm $(x;y)$ duy nhất thỏa mãn điều kiện $x + y > 0$.

$\begin{cases} mx + y = m \\ (m-1)x - y = 2 \end{cases}$

Hướng dẫn:Dùng phương pháp cộng đại số, tìm x, y.

Lời giải

Cộng vế với vế hai phương trình của hệ, ta được.

$$(2m-1)x = m + 2 \quad (*)$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất nên $2m-1\neq 0$ hay $m\neq\frac{1}{2}$.

Ta tìm được: $x=\frac{m+2}{2m-1}$.

Thế $x=\frac{m+2}{2m-1}$ vào phương trình $mx+y=m$.

$\frac{m(m+2)}{2m-1}+y=m$

$y=\frac{m^2-3m}{2m-1}$

Vậy $x+y=\frac{m^2-2m+2}{2m-1}=\frac{(m-1)^2+1}{2m-1}$

Vì $x+y>0$ nên $\frac{(m-1)^2+1}{2m-1}>0$

$2m-1>0$ (Vì $(m-1)^2+1>0,\forall m$).

$m>\frac{1}{2}$

Kết hợp với điều kiện $m\neq\frac{1}{2}$, ta lấy $m>\frac{1}{2}$.

Nhận xét: hệ vô nghiệm khi phương trình $\left(^*\right)$ vô nghiệm nên $m=\frac{1}{2}$.

Bài toán 21. Tìm m để hệ sau vô nghiệm $\begin{cases}mx+3y=1\\-2mx+y=5\end{cases}$.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp cộng đại số đưa về phương trình ẩn x.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}mx+3y=1\\-2mx+y=5\end{cases}$

$\begin{cases}mx+3y=1\\6mx-3y=-15\end{cases}$

Cộng vế vợi vế hai phương trình, ta được: $7mx=-14$

$mx=-2\left(^*\right)$

Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình $\left(^*\right)$ vô nghiệm

Nên $\begin{cases}m=0\\-2\neq 0\end{cases}$ hay $m=0$

Nhận xét: Hệ có nghiệm duy nhất khi $m\neq 0$.

Bài toán 22. Giải và biện luận hệ phương trình sau: $\begin{cases}(m+5)x+3y=1\\mx+2y=-4\end{cases}$.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp cộng đại số, đưa về phương trình một ẩn x.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}(m+5)x+3y=1\\ mx+2y=-4\end{cases}$

$\begin{cases}(2m+10)x+6x=2\\ 3mx+6x=-12\end{cases}$

Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được: $(10-m)x=14$

Trường hợp 1: $10-m\neq 0$ nên $m\neq 10$

Ta có: $(^*)$ ta có $x=\dfrac{14}{10-m}$

Ta tìm được: $y=\dfrac{5m+20}{m-10}$

Hệ có nghiệm duy nhất: $(x\,;y)=\left(\dfrac{14}{10-m};\dfrac{5m+20}{m-10}\right)$

Trường hợp 2: $10-m=0$ nên $m=10$.

Phương trình $(^*)$ vô nghiệm khi hệ vô nghiệm.

Đáp số: $m\neq 10$. Hệ có nghiệm duy nhất: $(x\,;y)=\left(\dfrac{14}{10-m};\dfrac{5m+20}{m-10}\right)$

+ $m=10$ hệ vô nghiệm

Bài toán 23. Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx-y=2m+1\\ 3x+2y=2m+7\end{cases}$.

a) Giải và biện luận hệ phương trình trên.

b) Tìm m để hệ có nghiệm thỏa mãn điều kiện $x+y>0$.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp cộng đại số đưa về phương trình ẩn x.

Lời giải

a) Ta có $\begin{cases}mx-y=2m+1\\ 3x+2y=2m+7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2mx-2y=4m+2\\ 3x+2y=2m+7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2m+3)x=6m+9\,(1)\\ mx-y=2m+1\end{cases}$

- Nếu $2m+3\neq 0\Leftrightarrow m\neq-\dfrac{3}{2}$. Ta có (1) $\Leftrightarrow x=\dfrac{6m+9}{2m+3}$.

Thế x vào (2), ta tìm được $y=\dfrac{2m^2+m-3}{2m+3}=\dfrac{(m-1)(2m+3)}{2m+3}=m-1$

- Nếu $2m+3=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{2}$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow 0x=0$ (luôn đúng)

(2) $\Leftrightarrow y=-\dfrac{3}{2}x+2$. Hệ vô số nghiệm: $\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ y=-\dfrac{3}{2}x+2\end{cases}$

b) Từ kết quả phần a , ta có:

- Nếu $m\neq-\dfrac{3}{2}$, ta có $x=3; y=m-1$.

$\Rightarrow x+y=m+2$. Vậy $x+y>0 \Leftrightarrow m+2>0 \Leftrightarrow m>-2\left(m\neq -\frac{3}{2}\right)$.

- Nếu $m=-\frac{3}{2} \Rightarrow x+y=-\frac{x}{2}+2$.

$x+y>0 \Leftrightarrow \frac{-x}{2}+2>0 \Leftrightarrow x<4$

Hệ có vô số nghiệm (x ; y); với $y=-\frac{x}{2}+2$ và $x<4$, ta có $x+y>0$.

Đáp số: Hệ có nghiệm $(x;y)$ và $x+y>0 \Leftrightarrow m>-2$.

Bài toán 24. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y=4-m \\ 2x+y=3m+3 \end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho.

b) Tìm m để hệ có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện x^2+y^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp cộng đại số.

Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases} x-2y=4-m \\ 2x+y=3m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=4-m \\ 4x+2y=6m+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m+2 \\ y=m-1 \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(m+2;m-1)$.

b) Ta có: $x^2+y^2=(m+2)^2+(m-1)^2=2m^2+2m+5=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\geq\frac{9}{2}$

Vậy x^2+y^2 đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{9}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Bài toán 25. Giải và biện luận hệ phương trình (theo tham số a).

$$\begin{cases} ax+ay=a^2 \\ x+ay=2 \end{cases}$$

Hướng dẫn: Dùng phương pháp cộng đại số.

Lời giải

Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được $(a-1)x=a^2-2\ \left(^*\right)$

Nếu $a-1\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 1$. Ta có: $\left(^*\right) \Leftrightarrow x=\frac{a^2-2}{a-1}$.

Thế x vào phương trình $x+ay=2$, ta được: $\frac{a^2-2}{a-1}+ay=2 \Leftrightarrow ay=\frac{-a^2+2a}{a-1}(**)$

- Nếu $a\neq 0$, ta có: $(**) \Leftrightarrow y=\frac{2-a}{a-1}$

Vậy $a\neq 1$ và $a\neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất: $(x;y)=\left(\frac{a^2-2}{a-1};\frac{2-a}{a-1}\right)$

- Nếu $a=0$. Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases}0x+0y=0\\x+0y=2\end{cases}\Leftrightarrow x=2$

Hệ có vô số nghiệm: $\begin{cases}x=2\\y\in\mathbb{R}\end{cases}$

- Nếu $a=1$, hệ đã cho trở thành: $\begin{cases}x+y=1\\x+y=2\end{cases}$

Hệ vô nghiệm.

Đáp số: - Nếu $a\neq 0$ và $a\neq 1$. Hệ có nghiệm duy nhất

$$(x;y)=\left(\frac{a^2-2}{a-1};\frac{2-a}{a-1}\right)$$

- Nếu $a=0$. Hệ có vô số nghiệm: $\begin{cases}x=2\\y\in\mathbb{R}\end{cases}$
- Nếu $a=1$. Hệ vô nghiệm.

Bài toán 26. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases}\dfrac{-3}{x-y}+\dfrac{2}{2x+y}=-2\\[2mm]\dfrac{4}{x-y}-\dfrac{10}{2x+y}=2\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{x+3}-2\sqrt{y+1}=2\\2\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}=4\end{cases}$

Hướng dẫn: a) Đặt ẩn phụ: $u=\dfrac{1}{x-y};v=\dfrac{2}{2x+y}$

b) Đặt $X=\sqrt{x+3};Y=\sqrt{y+1}$

Lời giải

a) Điều kiện $x-y\neq 0$ và $2x+y\neq 0$.

Đặt $u=\dfrac{1}{x-y};v=\dfrac{2}{2x+y}$, ta có hệ: $\begin{cases}-3u+v=-2\\4u-5v=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-15u+5v=-10\\4u-5v=2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-11u=-8\\-3u+2v=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{8}{11}\\[2mm]v=\dfrac{2}{11}\end{cases}$$

Vậy $\begin{cases}\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{8}{11}\\[2mm]\dfrac{2}{2x+y}=\dfrac{2}{11}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x-8y=11\\2x+y=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x-8y=11\\-8x-4y=-44\end{cases}$

b) Điều kiện $x+3\geq 0$ và $y+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -3$ và $y\geq -1$.

Đặt $X=\sqrt{x+3};Y=\sqrt{y+1}$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} X-2Y=2 \\ 2X+Y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X-2Y=2 \\ 4X+2Y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5X=10 \\ 2X+Y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=2 \\ Y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}=2 \\ \sqrt{y+1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4 \\ y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Bài toán 27. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2y}{y+2}=3 \\ \dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{y}{y+2}=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{2x+7}{x+2}+\dfrac{2}{y-1}=7 \\ -\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3y+2}{y-1}=6 \end{cases}$

Hướng dẫn: a) Đặt $u=\dfrac{x}{x-1}; v=\dfrac{y}{y+2}$

b) $\dfrac{2x+7}{x+2}=\dfrac{2x+4+3}{x+2}=\dfrac{2(x+2)+3}{x+2}=2+\dfrac{3}{x+2}$

$\dfrac{3y+2}{y-1}=3+\dfrac{5}{y-1}$. Đặt $X=\dfrac{1}{x+2}; Y=\dfrac{1}{y-1}$

Lời giải

a) Đặt $u=\dfrac{x}{x-1}(x\neq 1); v=\dfrac{y}{y+2}(y\neq -2)$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u+2v=3 \\ 2u-v=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+2v=3 \\ 4u-2v=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u=-5 \\ 2u-v=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ v=2 \end{cases}$$

Trở lại hệ phương trình x, y :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x-1}=-1 \\ \dfrac{y}{y+2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-x+1 \\ y=2y+4; x\neq 1; y\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-4 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm: $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};-4\right)$.

b) Hệ đã cho được viết lại dưới dạng:

$$\begin{cases} 2+\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{2}{y-1}=7 \\ -\dfrac{2}{x+2}+3+\dfrac{5}{y-1}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{x+2}+\dfrac{2}{y-1}=5 \\ -\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{5}{y-1}=3 \end{cases}$$

Đặt $X=\dfrac{1}{x+2}(x\neq -2); Y=\dfrac{1}{y-1}(y\neq 1)$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}3X+2Y=5\\-2X+5Y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6X+4Y=10\\-6X+15Y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}19Y=19\\-2X+5Y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=1\\Y=1\end{cases}$$

Trở lại hệ hai ẩn x, y :

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+2}=1\\\dfrac{1}{y-1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=1\\y-1=1(x\neq-2;y\neq1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$$

Hệ có nghiệm $(x;y)=(-1;2)$

Bài toán 28. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases}m|x|-y=m\\|x|+my=1\end{cases}$.

Hướng dẫn: Đặt $u=|x|; u\geq 0$.

Lời giải

Đặt $u=|x|;u\geq0$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases}mu-y=m\\u+my=1\end{cases}$

$+m=0$. Hệ có dạng: $\begin{cases}y=0\\u=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\y=0\end{cases}$.

$+m\neq0$. Ta có: $\begin{cases}mu-y=m\\u+my=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2u-my=m^2\\u+my=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m^2+1)u=m^2+1\\mu-y=m\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u=1\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|=1\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\y=0\end{cases}$

Đáp số: Hệ có nghiệm $(x;y)=(1;0);(-1;0),\forall m$.

Nhận xét: Ta có thể giải hệ trên bằng phương pháp thế.

Bài toán 29. Tìm các hệ số x, y trong phản ứng hoá học đã được cân bằng sau:

$$3Fe+xO_2\rightarrow yFe_3O_4$$

Lời giải

Vì số nguyên tử của Fe và O ở cả hai vế của phương trình phản ứng phải bằng nhau nên có hệ phương trình:

$$\begin{cases}3=3y\\2x=4y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$$

BÀI 3. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Các bước giải một bài toán bằng cách lập hệ phương trình:

Bước 1: Lập hệ phương trình:

- Chọn ẩn số (thường chọn hai ẩn số) và đặt điều kiện thích hợp cho các ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải hệ phương trình.

Bước 3: Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm tìm được của hệ phương trình, nghiệm nào thoả mãn, nghiệm nào không thoả mãn điều kiện của ẩn, rồi kết luận.

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Bài toán về chu vi, diện tích các hình

Bài toán 1. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 34 m, nếu tăng chiều ải thêm 3 m và tăng chiều rộng thêm 2 m thì diện tích tăng thêm 45 m^2. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Hướng dẫn: Hình chữ nhật có nửa chu vi bằng tổng chiều dài và chiều rộng; diện tích bằng tích chiều dài và chiều rộng. Đặt hai ẩn x và y là độ dài chiều dài và chiều rộng. Điều kiện $x > y > 0$.

Lời giải

Gọi x và y lần lượt là chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Điều kiện: $x > y > 0; x, y$ tính bằng mét.

Nửa chu vi hình chữ nhật bằng $x + y$. Theo đề ra, chu vi lúc ban đầu là 34 m, nên ta có phương trình $x + y = \frac{34}{2} \Leftrightarrow x + y = 17$.

Diện tích lúc đầu là $xy\left(\text{m}^2\right)$.

Vỉ tăng chiều dài thêm 3 m, tăng chiều rộng thêm 2 m ta có diện 1lch lúc này sẽ là $(x+3)\cdot(y+2)\cdot\left(\text{m}^2\right)$.

Theo giả thiết, ta có phương trình: $(x+3)(y+2) = xy + 45$

Theo bài ra, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ (x+3)(y+2) = xy + 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 17 \\ 2x + 2y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 34 \\ 2x + 3y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x + y = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 12 \end{cases}$$

(thoả mãn điều kiện $x > y > 0$)

Trả lời: Chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn là 12 (m) và 5 (m).

Bài toán 2. Một hình chữ nhật có chu vi 140 m. Ba lần chiều rộng lớn hơn chiều dài là 10 m. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

Hướng dẫn: Đặt x, y là chiều dài và chiều rộng $(x > y > 0)$.

Lập hệ hai ẩn biểu thị mối liên hệ giữa chiều dài, chiều rộng và chu vi.

Lời giải

Gọi $x,\ y$ là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ($x > y > 0$, x, y tính bằng m).

Chu vi là 140 m, nên ta có phương trình: $2(x+y)=140 \Leftrightarrow x+y=70$

Ba lần chiều rộng lớn hơn chiều dài là 10 m, nên ta có phương trình: $3y-x=10$

Vậy, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=70 \\ 3y-x=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=80 \\ x+y=70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=20 \\ x=50 \end{cases} \text{(TMĐK)}$$

Trả lời: Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật là $50\ (\text{m})$ và $20\ (\text{m})$.

Bài toán 3. Nếu tăng gấp đôi chiều dài và giảm chiều rộng đi một nửa thì chu vi một hình chữ nhật sẽ tăng thêm 180 m. Nếu tăng gấp đôi chiều rộng và giảm chiều dài đi một nửa thì chu vi một hình chữ nhật tăng 120 m. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

Lời giải

Gọi $x,\ y$ là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ($x>y>0$, x,y tính bằng m).

Chu vi hình chữ nhật là $2(x+y)$.

Nếu tăng chiều dài gấp đôi ta được $2x\ (\text{m})$; giảm chiều rộng đi một nửa, ta được $\frac{y}{2}\ (\text{m})$.

Chu vi hình chữ nhật lúc này là $2\left(2x+\frac{y}{2}\right)$.

Ta có phương trình $2\left(2x+\frac{y}{2}\right)-2(x+y)=180$

Nếu tăng gấp đôi chiều rộng và giảm chiều dài đi một nửa, tương tự ta có phương trình

$2\left(2y+\frac{x}{2}\right)-2(x+y)=120$

Vậy, ta có hệ : $\begin{cases} 2\left(2x+\frac{y}{2}\right)-2(x+y)=180 \\ 2\left(2y+\frac{x}{2}\right)-2(x+y)=120 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=180 \\ -x+2y=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y=360 \\ -x+2y=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=480 \\ 2x-y=180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=160 \\ y=140 \end{cases} \text{(TMĐK)}$$

Trả lời: Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật là $160\ (\text{m})$ và $140\ (\text{m})$.

II. Tìm chữ số của số tự nhiên

Bài toán 4. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng tổng của hai chữ số ấy bằng 12 và khi thay đổi thứ tự hai chữ số thì được một số lớn hơn số cũ là 18.

Hướng dẫn: Một số có hai chữ số có dạng $\overline{xy}=10x+y$, $0<x\le 9, x\in\mathbb{N};\ 0\le y\le 9, y\in\mathbb{N}$.

Lời giải

Gọi $x,\ y$ lần lượt là chữ số hàng chục và hàng đơn vị của số đã cho $(0<x,y<9;\ x,y\in\mathbb{N})$.

Số đã cho có dạng $\overline{xy}=10x+y$, hai chữ số viết theo thứ tự ngược lại có dạng $\overline{yx}=10y+x$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=12 \\ (10y+x)-(10x+y)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=12 \\ y-x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=7 \end{cases} \text{(TMĐK)}$$

Trả lời: Số đã cho là 57.

Bài toán 5. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng tổng của hai chữ số ấy bằng 12 và chữ số hàng chục gấp đôi chữ số hàng đơn vị.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là chữ số hàng chục và hàng đơn vị của số tự nhiên $(0 < x < 9; 0 < y \le 9;\ x, y \in \mathbb{N})$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=12 \\ -x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=12 \\ x+y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=8 \end{cases} \text{(TMĐK)}$$

Vậy số cần tìm là 84.

Bài toán 6. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 7. Nếu chia số đó cho số tạo thành bằng cách viết theo thứ tự ngược lại, ta được thương là 3 và số dư là 5.

Hướng dẫn: Số tự nhiên có hai chữ số có dạng $\overline{xy} = 10x + y$, $0 < x \le 9, x \in \mathbb{N};\ 0 \le y \le 9, y \in \mathbb{N}$.

Chia số a cho b được thương là q và dư r, ta có $a = bq + r$ $(0 \le r < b)$.

Lời giải

Gọi $x,\ y$ lần lượt là chữ số hàng chục, hàng đơn vị của số đã cho $(0 < x, y \le 9;\ x > y;\ x, y \in \mathbb{N})$.

Chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 7, ta có phương trình: $x = y + 7$.

Lấy số đó cho số tạo thành bằng cách viết theo thứ tự ngược lại, ta được thương là 3 và số dư là 5 nên ta có phương trình: $10x + y = 3(10y + x) + 5$

Vậy, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x=y+7 \\ 10x+y=3(10y+x)+5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=7 \\ 7x-29y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x-7y=49 \\ 7x-29y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22y=44 \\ x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=9 \end{cases} \text{(TMĐK)}$$

Trả lời: Vậy số đã cho là 92.

III. Toán chuyển động đều

Bài toán 7. Hai xe cùng khởi hành một lúc tại hai điểm A và B cách nhau $60\,\text{km}$. Nếu đi ngược chiều thì gặp nhau sau 1 giờ; nếu đi cùng chiều thì xe đi nhanh sẽ đuổi kịp xe đi chậm sau 3 giờ. Tìm vận tốc mỗi xe?

Hướng dẫn: Quãng đường (S); vận tốc (v); thời gian (t), ta có: $S = v.t$

Lời giải

Gọi x, y theo thứ tự là vận tốc của xe đi nhanh và xe đi chậm $(x > y > 0)$; x, y tính bằng km/h

- Sau 1 giờ hai xe đi ngược chiều gặp nhau, ta có phương trình $x + y = 60$.
- Sau 3 giờ hai xe đi được $3x$ (km) và $3y$ (km). Xe đi nhanh phải đi hết đoạn đường AB và còn đuổi kịp xe đi chậm, nên ta có phương trình $3x - 3y = 60$.

Vậy, ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 3x - 3y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 60 \\ x - y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 80 \\ x + y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \end{cases} \text{(TMĐK)}$$

Trả lời: Xe đi nhanh có vận tốc là 40 (km/h); xe đi chậm có vận tốc là 20 (km/h).

Bài toán 8. Một ô tô đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy mỗi giờ nhanh hơn dự định 10 km thì đến nơi sớm hơn dự định 3 giờ, nếu xe chạy chậm lại mỗi giờ 10 km thì đến nơi chậm 5 giờ. Tính vận tốc dự định và quãng đường AB.

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $S = v.t$ (S là quãng đường; v là vận tốc; t là thời gian)

Đặt ẩn: x là vận tốc dự định, y là thời gian dự định.

Lời giải

Gọi x (km/h) là vận tốc dự định của ô tô; y (h) là thời gian dự định để ô tô đi từ A đến B.

Điều kiện: $x > 0, y > 0$.

Quãng đường AB dài xy (km).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy = (x+10)(y-3) \\ xy = (x-10)(y+5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = xy - 3x + 10y - 30 \\ xy = xy + 5x - 10y - 50 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 10y = -30 \\ 5x - 10y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 80 \\ 3x - 10y = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 15 \end{cases} \text{(TMĐK)}$$

Trả lời: Vận tốc dự định của ô tô là 40 (km/h); quãng đường AB dài $40.15 = 600$ (km).

Bài toán 9. Một ô tô đi trên quãng đường AB với vận tốc 50 km/h; rồi tiếp tục đi từ B đến C với vận tốc 45 km/h. Biết quãng đường AC là 165 km và thời gian đi từ A đến B ít hơn thời gian đi từ B đến C là $\frac{1}{2}$ giờ. Tính thời gian ô tô đi trên hai quãng đường AB và BC.

Hướng dẫn: Đặt x là thời gian ô tô đi từ A đến B; y là thời gian ô tô đi từ B đến C.

Lời giải

Gọi x (h) là thời gian ô tô đi từ A đến B; y (h) là thời gian ô tô đi từ B đến C.

Điều kiện: $x > 0, y > 0$.

Khi đó, quãng đường AB là $50x$ (km), quãng đường BC là $45y$ (km).

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}50x+45y=165\\ y-x=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}50x+45y=165\\ -50x+50y=25\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}95y=190\\ y-x=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2\\ x=\dfrac{3}{2}\end{cases} \text{(TMĐK)}$$

Trả lời: Thời gian ô tô đi từ A đến B hết $\frac{3}{2}$ giờ; thời gian ô tô đi từ B đến C hết 2 giờ.

IV. Toán về công việc làm chung

Bài toán 10. Hai người làm chung trong 4 ngày thì xong công việc. Nếu người thứ nhất là một mình trong 9 ngày rồi người thứ hai đến cùng làm tiếp trong 1 ngày nữa thì xong công việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc?

Hướng dẫn:

Nếu một người làm trong 5 ngày thì xong một công việc thì trong 1 ngày người đó chỉ làm được $\frac{1}{5}$ công việc. (Năng suất trong 1 ngày được xét giống như vận tốc trong chuyển động đều).

Đặt ẩn: x là số ngày người thứ nhất làm một mình xong công việc, ta tính 1 ngày người đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc; y là số ngày người thứ hai làm một mình xong công việc, ta cũng có 1 ngày người đó làm được $\frac{1}{y}$ công việc. (Số 1 ta gọi là "quy về đơn vị").

Lời giải

Gọi x (ngày) là số ngày người thứ nhất làm một mình xong công việc.

$\Rightarrow$ 1 ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc.

Gọi y (ngày) là số ngày người thứ hai làm một mình xong công việc.

$\Rightarrow$ 1 ngày người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

Điều kiện: $x>0,\ y>0$.

Vậy cả hai người làm chung trong 1 ngày được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ (công việc), ta có phương trình:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4} \qquad (1)$$

Người thứ nhất là một mình trong 9 ngày rồi người thứ hai đến cùng làm tiếp trong 1 ngày nữa thì xong công việc, ta có phương trình: $\frac{10}{x}+\frac{1}{y}=1 \qquad (2)$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{10}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \end{cases}$

Đặt: $u=\dfrac{1}{x}$; $v=\dfrac{1}{y}$, ta có hệ: $\begin{cases} u+v=\dfrac{1}{4} \\ 10u+v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u=\dfrac{3}{4} \\ 10u+v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=12 \\ v=\dfrac{1}{6} \end{cases}$

Vậy: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=6 \end{cases}$

Trả lời: Người thứ nhất làm một mình trong 12 ngày xong công việc; người thứ hai làm một mình trong 6 ngày xong công việc.

Chú ý: Phương trình: $\dfrac{10}{x}+\dfrac{1}{y}=1$ biểu thị số phần công việc cả hai người làm chung (người thứ nhất làm trong 10 ngày, người thứ hai chỉ làm trong 1 ngày. Số 1 ở vế phải biểu thị cho một đơn vị công việc đã hoàn thành (tổng các phần công việc của hai người làm xong công việc); ở Tiểu học, ta gọi là "quy về đơn vị".

Bài toán 11. Hai người cùng làm chung một công việc trong 16 ngày thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 ngày và người thứ hai làm 6 ngày thì chỉ hoàn thành một phần tư công việc. Hỏi nếu làm riêng mỗi người làm trong bao lâu thì xong?

Hướng dẫn: Xem lời giải Bài toán 10.

Lời giải

Gọi x (ngày), y (ngày) lần lượt là số ngày người thứ nhất và người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc.

Điều kiện: $x>0,\ y>0$.

Như vậy, 1 ngày người thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm được $\dfrac{1}{y}$ công việc, do đó hai người làm một ngày được $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ công việc.

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{16} \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Đặt: $u=\dfrac{1}{x}$; $v=\dfrac{1}{y}$ $(u>0, v>0)$, ta có hệ: $\begin{cases} u+v=\dfrac{1}{16} \\ 3u+6v=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Giải hệ, ta được $u=\dfrac{1}{24}$; $v=\dfrac{1}{48}$.

Từ đó, ta tìm được $x = 24, y = 48$ (thỏa mãn điều kiện $x > 0,\ y > 0$).

Trả lời: Người thứ nhất làm một mình trong 24 ngày; người thứ hai làm một mình trong 48 ngày thì xong công việc.

Đặt $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$ $(u > 0\ ,\ v > 0)$ ta có hệ: $\begin{cases} u + v = \frac{1}{16} \\ 3u + 6v = \frac{1}{4} \end{cases}$

Giải hệ, ta được: $u = \frac{1}{24}; v = \frac{1}{48}$.

Từ đó, ta tìm được: $x = 24$; $y = 48$ (thỏa mãn điều kiện $x > 0$, $y > 0$).

Trả lời: Người thứ nhất làm một mình trong 24 ngày; người thứ hai làm một mình trong 48 ngày thì xong công việc.

Bài toán 12. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể (không có nước) trong 49 giờ 48 phút thì đầy bể.

Nếu mở vòi thứ nhất trong 3 giờ và vòi thứ hai trong 4 giờ thì được $\frac{3}{4}$ bể nước. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu sẽ đầy bể.

Hướng dẫn:

Đặt ẩn: x , y là thời gian vòi thứ nhất, thứ hai chảy riêng đầy bể (x , y tính bằng giờ).

Trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể; vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

(Bài toán được xét như bài toán 11).

Lời giải

Gọi x , y thứ tự là số giờ để vòi thứ nhất, vòi thứ hai chảy riêng đầy bể $(x > 0\ ,\ y > 0)$.

Ta có 4 giờ 48 phút $= \frac{24}{5}$ giờ

Mỗi giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể); và thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ (bể) và cả hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (bể).

Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{24}{5}}$ hay $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$

Vòi thứ nhất chảy 3 giờ; vòi thứ hai chảy 4 giờ được $\frac{3}{4}$ bể, ta có phương trình: $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3}{4}$

Vậy, ta có hệ: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$

Đặt $u = \frac{1}{x}; v = \frac{1}{y}$ $(u > 0\ ,\ v > 0)$.

Ta có hệ: $\begin{cases} u+v=\dfrac{5}{24} \\ 3u+4v=\dfrac{3}{4} \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} 3u+3v=\dfrac{5}{8} \\ 3u+4v=\dfrac{3}{4} \end{cases}$ hay $\begin{cases} u=\dfrac{1}{12} \\ v=\dfrac{1}{8} \end{cases}$

Ta tìm được: $x=12; y=8$ (thỏa mãn điều kiện $x>0$, $y>0$.

Trả lời: Vòi thứ nhất chảy một mình trong 12 giờ đầy bể, vòi thứ hai chảy một mình trong 8 giờ đầy bể.

Bài toán 13. Hai người cùng làm chung một công việc trong 15 giờ thì được $\dfrac{1}{6}$ công việc. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 12 giờ; người thứ hai trong 20 giờ thì cả hai làm được $\dfrac{1}{5}$ công việc. Hỏi mỗi người làm riêng thì trong bao lâu sẽ xong?

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 12 .

Lời giải

Gọi x, y là thời gian để người thứ nhất và người thứ hai làm riêng xong công việc $(x>0\ ,\ y>0)$, x ; y tính bằng giờ; trong 1 giờ người thứ hai là x được $\dfrac{1}{y}$ công việc, người thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 15\cdot\dfrac{1}{x}+15\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \\ 12\cdot\dfrac{1}{x}+20\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5} \end{cases}$

Đặt $u=\dfrac{1}{x}; v=\dfrac{1}{y}$ $(u>0,\ v>0)$, ta có hệ:

$$\begin{cases} 15u+15v=\dfrac{1}{6} \\ 12u+20v=\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60u+60v=\dfrac{2}{3} \\ 60u+100v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40v=\dfrac{1}{3} \\ 12u+20v=\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{1}{120} \\ u=\dfrac{1}{360} \end{cases}.$$

Ta tìm được: $x=360$; $y=120$.

Trả lời: Người thứ nhất làm một mình trong 360 giờ thì xong công việc, người thứ hai làm một mình trong 120 giờ thì xong công việc.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A. TRẮC NGHIỆM

1. Cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 5x+7y=-1 \\ 3x+2y=-5 \end{cases}$?

A. $(-1\,;1)$. B. $(-3\,;2)$. C. $(2\,;-3)$. D. $(5\,;5)$.

2. Trên mặt phẳng toạ độ xOy, cho các điểm $A(1\,;2)$; $B(5\,;6)$; $C(2\,;3)$; $D(-1\,;-1)$. Đường thẳng $4x-3y=-1$ đi qua hai điểm nào trong các điểm đã cho?

A. A và B; B. B và C; C. C và D; D. D và A.

3. Hệ phương trình $\begin{cases} 1,5x-0,6y=0,3 \\ -2x+y=-2 \end{cases}$

A. Có nghiệm là $(0\,;-0,5)$. B. Có nghiệm là $(1\,;0)$.

C. Có nghiệm là $(-3\,;-8)$. D. Vô nghiệm.

4. Hệ phương trình $\begin{cases} 0,6x+0,3y=1,8 \\ 2x+y=-6 \end{cases}$

A. Có một nghiệm. B. Vô nghiệm.

C. Có vô số nghiệm. D. Có hai nghiệm là $(1\,;0)$.

Hướng dẫn - Đáp số

1. Dùng MTCT.

Chọn B.

2. Chọn C.

3. Chọn C.

4. Hệ viết lại dưới dạng: $\begin{cases} 2x+y=6 \\ 2x+y=-6 \end{cases}$. Vậy hệ vô nghiệm.

Chọn B.

B. TỰ LUẬN

1. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2x+5y=10 \\ \dfrac{2}{5}x+y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0,2x+0,1y=0,3 \\ 3x+y=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x-y=\dfrac{1}{2} \\ 6x-4y=2 \end{cases}$

2. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 0,5x+2y=-2,5 \\ 0,7x-3y=8,1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 5x-3y=-2 \\ 14x+8y=19 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2(x-2)x+3(1+y)=-2 \\ 3(x-2)x-2(1+y)=-3 \end{cases}$

3. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \sqrt{2}x-\sqrt{3}y=-1 \\ \left(1+\sqrt{3}\right)x-\sqrt{2}y=\sqrt{2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x-3y=-10 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{5y}{4}=2 \end{cases}$

4. Tìm a để hệ phương trình: $\begin{cases} 2x-3=0 \\ x+(a-1)y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

5. Hai người cùng làm một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 6 giờ; người thứ hai làm trong 3 giờ thì cả hai người làm được $\dfrac{2}{3}$ công việc. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì trong bao lâu sẽ xong.

6. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 140 m. Ba lần chiều rộng lớn hơn chiều dài là 10 m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

7. Hai loại quặng chứa 75% và 50% sắt. Tính khối lượng của mỗi llọi quặng đem trộn để được 25 tấn quặng có chứa 66% sắt.

8. Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc $35\,(\text{km/h})$ thì đến chậm 2 giờ. Nếu xe chạy voi vận tốc $50\,(\text{km/h})$ thì đến sớm 1 giờ.

Tính quãng đường và thời gian dự định đi lúc đầu.

9. Hai năm trước đây, tuổi của anh gấp đôi tuổi của em, còn 8 năm trước đây gấp 5 lần tuổi em.

Hỏi hiện nay anh và em bao nhiêu tuổi?

Hướng dẫn - Đáp số

1. a) $\begin{cases} 2x+5y=10 \\ \dfrac{2}{5}x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5y=10 \\ 2x+5y=5 \end{cases}$

Hệ vô nghiệm.

b) Đáp số: $(x\,;y)=(2;1)$.

c) $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x-y=\dfrac{1}{2} \\ 6x-4y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=1 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

Hệ có vô số nghiệm: $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=\dfrac{3x-1}{2} \end{cases}$.

2. a) Dùng phương pháp cộng đại số: Đáp số: $(3\,;-2)$.

b) Đáp số: $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right)$.

c) Dùng phương pháp đặt ẩn phụ:

$u=x-2$; $v=1+y$. Ta có hệ: $\begin{cases} 2u+3v=-2 \\ 3u-2v=-3 \end{cases}$

Ta tìm được: $\begin{cases} u=-1 \\ v=0. \end{cases}$

Đáp số: $(x\,;y)=(1\,;-1)$.

3. a) Ta có $\begin{cases} \sqrt{2}x-\sqrt{3}y=-1 \\ \left(1+\sqrt{3}\right)x-\sqrt{2}y=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\sqrt{6}y=-\sqrt{2} \\ \left(3+\sqrt{3}\right)x-\sqrt{6}y=\sqrt{6} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(1+\sqrt{3}\right)x=\sqrt{6}+\sqrt{2} \\ \sqrt{2}x-\sqrt{3}y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất: $\left(\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\right)$.

b) Ta có: $\begin{cases} 4x-3y=-10 \\ 2x+5y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=-10 \\ 4x+10y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13y=26 \\ 4x-3y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất: $(-1\,;2)$.

4. Ta có: $\begin{cases} 2x-3=0 \\ ax+(a-1)y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ ax+(a-1)y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ (a-1)y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}a\ (*) \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a-1\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 1$.

5. 7 giờ 12 phút $=\dfrac{36}{5}$ giờ

Gọi $x\,,y$ là thời gian để người thứ nhất và người thứ hai làm một mình xong công việc $(x>0\,,\ y>0)$ ($x\,,\ y$ tính theo giờ).

Một giờ người thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc, một giờ người thứ hai làm được $\dfrac{1}{y}$ công việc.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{36} \\ \dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Đặt $u=\dfrac{1}{x}\,;\ v=\dfrac{1}{y}\ (u>0\,,\ v>0)$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{5}{36} \\ 6u+3v=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u+3v=\dfrac{15}{36} \\ 6u+3v=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u=\dfrac{1}{4} \\ u+v=\dfrac{5}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{12} \\ v=\dfrac{1}{18} \end{cases}$$

Vậy $x=12;\ y=18$.

Trả lời: Người thứ nhất làm một mình trong 12 giờ; người thứ hai làm một mình trong 18 giờ thì xong công việc.

6. Gọi x,y lần lượt là chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn $(x>0\,;\ y>0)$; ($x\,,\ y$ tính bằng m). Chu vi là $140\ \mathrm{m}$, nên ta có phương trình:

$2(x+y)=140 \Leftrightarrow x+y=70$.

Ba lần chiều rộng lớn hơn chiều dài 10 m, nên ta có phương trình $3y-x=10$

Vậy, ta có hệ. $\begin{cases} x+y=70 \\ 3y-x=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=80 \\ x+y=70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=20 \\ x=70-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=50 \\ y=20 \end{cases}$

Trả lời: Chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn lần lượt là 50 m và 20 m.

7. Gọi x, y là khối lượng của mỗi loại quặng chứa 75% và 50% sắt ($x>1$; $y>0$ (x, y tính bằng tấn).
Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=25 \\ 75\%x+50\%y=25.66\% \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=25 \\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}y=\dfrac{33}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=25 \\ 3x+2y=66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=50 \\ 3x+2y=66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ x+y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=9 \end{cases}$$

Trả lời:

Loại quặng 75% sắt cần 16 (tấn);

Loại quặng 50% sắt cần 9 (tấn).

8. Gọi $x(\text{km})$ là quãng đường $AB(x>0); y(\text{km}/\text{h})$ là vận tốc dự định của ô tô $(y>0)$.

Thời gian dự định đi hết quãng đường AB là $\frac{x}{y}(\text{h})$.

Nếu đi vận tốc 35 km/h thì thời gian đi lúc này là $\frac{x}{35}(\text{h})$.

Nếu đi vận tốc $50(\text{km}/\text{h})$ thì thời gian là $\frac{x}{50}(\text{h})$.

Theo bài ra, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x}{35}-\dfrac{x}{y}=2 \\ \dfrac{x}{y}-\dfrac{x}{50}=1 \end{cases}$

Cộng vế với vế (1) và (2), ta được:

$\frac{x}{35}-\frac{x}{50}=3 \Leftrightarrow 15x=5250 \Leftrightarrow x=350$ (Nhận)

Thế $x=350$ vào (1), ta tìm được $y=43,75$ (nhận).

Trả lời: Quãng đường AB dài $350(\text{ km })$; thời gian dự định là $\frac{350}{43,75}=8$ (giơ).

9. Gọi x, y lần lượt là tuổi của người anh và người em($x > y > 0$ và $x \in \mathbb{N}$; $y \in \mathbb{N}$).

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x-2=2(y-2) \\ x-8=5(y-8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-2 \\ x-5y=-32 \end{cases}$

Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được $3y = 30 \Leftrightarrow y = 10$.

Thế $y = 10$ vào phương trình (*), ta có $x - 2.10 = -2 \Leftrightarrow x = 18$.

Vậy tuổi của hai anh em là 10 và 18 .

Chương II. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình tích

Để giải phương trình tích $(ax+b)(cx+d)=0$, ta giải phương trình $ax+b=0$ và $cx+d=0$. Sau đó lấy tất cả các nghiệm của chúng.

Ta có thể viết: $(ax+b)(cx+d)=0 \Leftrightarrow ax+b=0$ hoặc $cx+d=0$.

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

- Điều kiện xác định của một phương trình:

Đối với phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta thường đặt điều kiện cho ẩn tất cả các mẫu thức trong phương trình đều khác 0 và gọi đó là điều kiện xác định (viết tắt là ĐKXĐ) của phương trình.

- Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu:

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu ta thường thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa tìm được.

Bước 4 (Kết luận): Trong các giá trị tìm được của ẩn ở Bước 3, giá trị nào thoả mãn điều kiện xác định chính là nghiệm của phương trình đã cho.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Phương trình tích

Bài toán 1. Giải phương trình:

a) $3x(x-1)-2(x-1)=0$

b) $x^2-4-(x+5)(2-x)=0$

c) $2x^3+4x^2=x^2+2x$

Hướng dẫn: Biến đổi tương đương đưa về dạng $A(x)\cdot B(x)=0$.

Lời giải

a) Ta có

(1) $\Leftrightarrow 3x(x-1)-2(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(3x-2)=0$

$\Leftrightarrow x-1=0$ hoặc $3x-2=0$

$\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=\frac{2}{3}$

Phương trình (1) có tập nghiệm: $S=\left\{1;\frac{2}{3}\right\}$.

b) Ta có

$(2) \Leftrightarrow (x-2)(x+2)+(x+5)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2+x+5)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(2x+7)=0$

$\Leftrightarrow x-2=0$ hoặc $2x+7=0$

$\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=-\frac{7}{2}$

Phương trình (2) có tập nghiệm: $\text{S}=\left\{2;-\frac{7}{2}\right\}$.

c) Ta có

$(3) \Leftrightarrow 2x^2(x+2)-(x^2+2x)=0$

$\Leftrightarrow 2x^2(x+2)-x(x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(2x^2-x)=0$

$\Leftrightarrow x(x+2)(2x-1)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x+2=0$ hoặc $2x-1=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-2$ hoặc $x=\frac{1}{2}$

Phương trình (3) có tập nghiệm: $S=\left\{0;-2;\frac{1}{2}\right\}$.

Bài toán 2. Giải phương trình:

a) $x^3-1=x^2-x$ (1)

b) $(2x-5)^2-x^2-4x-4=0$ (2)

c) $(x-2)(x^2+3x-2)-x^3+8=0$ (3)

d) $(x-3)^2-9=0$ (4)

Lời giải

a) Ta có

$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)-x(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+1)=0$

$\Leftrightarrow x-1=0$ hoặc $x^2+1=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ($x^2+1=0$ vô nghiệm vì $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1>0$)

Phương trình (1) có tập nghiệm: $S=\{1\}$.

b) Ta có

(2) $\Leftrightarrow (2x-5)^2-(x+2)^2=0$

$\Leftrightarrow (2x-5+x+2)(2x-5-x-2)=0$

$\Leftrightarrow (3x-3)(x-7)=0$

$\Leftrightarrow 3x-3=0$ hoặc $x-7=0$

$\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=7$

Phương trình (2) có tập nghiệm: $S=\{1;7\}$.

c) Ta có

$(3) \Leftrightarrow (x-2)(x^2+3x-2)-(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+3x-2-x^2-2x-4)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-6)=0$

$\Leftrightarrow x-2=0$ hoặc $x-6=0$

$\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=6$

Phương trình (3) có tập nghiệm: $S=\{2;6\}$.

d) Ta có

(4) $\Leftrightarrow (x-3)^2-3^2=0$

$\Leftrightarrow (x-3+3)(x-3-3)=0$

$\Leftrightarrow x(x-6)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x-6=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=6$

Phương trình (4) có tập nghiệm: $S=\{0;6\}$.

Bài toán 3. Giải phương trình:

a) $x^2+x-12=0$ $\quad(1)$

b) $x^2+3x+2=0$ $\quad(2)$

c) $2x^3+3x^2-8x-12=0$ $\quad(3)$

d) $x^3-4x^2-x+4=0$ $\quad(4)$

Hướng dẫn: Phân tích đa thức ở vế trái thành nhân tử ta đưa về phương trình tích.

Lời giải

a) Ta có (1) $\Leftrightarrow x^2-3x+4x-12=0$

$\Leftrightarrow x(x-3)+4(x-3)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+4)=0$

$\Leftrightarrow x-3=0$ hoặc $x+4=0$

$\Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=-4.$

Phương trình (1) có tập nghiệm: $S=\{3;-4\}$.

b) Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2+x+2x+2=0$

(2) $\Leftrightarrow x(x+1)+2(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x+1=0$ hoặc $x+2=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=-2$

Phương trình (2) có tập nghiệm: $S=\{-1;-2\}$.

c) Ta có: (3) $\Leftrightarrow 2x^3-8x+3x^2-12=0$

$\Leftrightarrow 2x(x^2-4)+3(x^2-4)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-4)(2x+3)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(2x+3)=0$

$\Leftrightarrow x-2=0$ hoặc $x+2=0$ hoặc $2x+3=0$

$\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=-2$ hoặc $x=-\dfrac{3}{2}$

Phương trình (3) có tập nghiệm: $S=\left\{2;-2;-\dfrac{3}{2}\right\}$.

d) Ta có: (4) $\Leftrightarrow \left(x^3-4x^2\right)-\left(x-4\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2\left(x-4\right)-\left(x-4\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-4\right)\left(x^2-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-4\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow x-4=0$ hoặc $x-1=0$ hoặc $x+1=0$

$\Leftrightarrow x=4$ hoặc $x=1$ hoặc $x=-1$

Phương trình $\left(4\right)$ có tập nghiệm: $S=\left\{4;1;-1\right\}$.

Bài toán 4. Giải phương trình:

a) $x^3-x^2-x-2=0$ $\quad(1)$ $\qquad$ b) $x^4-3x^3+3x^2-x=0$ $\quad(2)$

Hướng dẫn: Phân tích vế trái thành nhân tử.

Lời giải

a) Ta có $\left(1\right)$ $\Leftrightarrow x^3-2x^2+x^2-2x+x-2=0$

$\Leftrightarrow x^2\left(x-2\right)+x\left(x-2\right)+\left(x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x^2+x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow x-2=0$ hoặc $x^2+x+1=0$

$\Leftrightarrow x=2$ (vì $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ nên phương trình $x^2+x+1=0$ vô nghiệm)

Phương trình $\left(1\right)$ có tập nghiệm: $S=\left\{2\right\}$.

b) Ta có

(2) $\Leftrightarrow x\left(x^3-3x^2+3x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow x(x-1)^3=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x-1=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$

Phương trình $\left(2\right)$ có tập nghiệm: $S=\left\{0;1\right\}$

Bài toán 5. Giải phương trình:

a) $x^4+2x^3-4x-4=0$ $\quad\left(1\right)$ $\qquad$ b) $x^4+6x^2+8=0$ $\quad(2)$

c) $x^3+6x^2+11x+6=0$ $\quad\left(3\right)$

Lời giải

a) Ta có (1) $\Leftrightarrow \left(x^4-4\right)+\left(2x^3-4x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)+2x\left(x^2-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2\right)\left(x^2+2x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x^2+2x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{2}=0$ hoặc $x+\sqrt{2}=0$ hoặc $x^2+2x+2=0$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ hoặc $x=-\sqrt{2}$

(Vì $x^2+2x+2=x^2+2x+1+1=(x+1)^2+1>0$ nên phương trình $x^2+2x+2=0$ vô nghiệm)

Phương trình (1) có tập nghiệm: $S=\left\{\sqrt{2};-\sqrt{2}\right\}$.

b) Ta có

(2) $\Leftrightarrow x^4+2x^2+4x^2+8=0$

$\Leftrightarrow x^2\left(x^2+2\right)+4\left(x^2+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+2\right)\left(x^2+4\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2+2=0$ hoặc $x^2+4=0$

(hai phương trình cuối cùng đều vô nghiệm vì $x^2\geq 0\Rightarrow x^2+2>0$, $x^2+4>0$)

Phương trình $\left(2\right)$ có tập nghiệm: $\mathrm{S}=\varnothing$.

c) Ta có

$\left(3\right)$ $\Leftrightarrow x^3+x^2+5x^2+5x+6x+6=0$

$\Leftrightarrow x^2\left(x+1\right)+5x\left(x+1\right)+6\left(x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left[\left(x^2+3x\right)+\left(2x+6\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(x+3\right)\left(x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow x+1=0$ hoặc $x+3=0$ hoặc $x+2=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=-3$ hoặc $x=-2$

Phương trình $\left(3\right)$ có tập nghiệm: $S=\left\{-1;-3;-2\right\}$.

Bài toán 6. Giải phương trình:

a) $\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2+2x+3\right)-2=0$ (1)

b) $\left(2x^2+3x-1\right)^2-5\left(2x^2+3x+3\right)+24=0$ (2)

c) $\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)-24=0$ (3)

Hướng dẫn:

a) Nhận xét về các biểu thức: x^2+2x+2 và x^2+2x+3

Ta đặt: $t=x^2+2x+2 \Rightarrow x^2+2x+3=t+1$

Ta gọi là phương pháp đặt ẩn phụ.

Lời giải

a) Đặt: $t=x^2+2x+2 \Rightarrow x^2+2x+3=t+1$

Ta có phương trình: $t(t+1)-2=0$

$\Leftrightarrow t^2+t-2=0$

$\Leftrightarrow t^2-1+t-1=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t+1)+t-1=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t+2)=0$

$\Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=-2$

+ Với $t=1$, ta có: $x^2+2x+2=1$

$\Leftrightarrow (x+1)^2=0$

$\Leftrightarrow x+1=0$

$\Leftrightarrow x=-1$

+ Với $t=-2$, ta có: $x^2+2x+2=-2$

$\Leftrightarrow x^2+2x+4=0$ vô nghiệm vì $x^2+2x+4=(x+1)^2+3>0$ với mọi x

Phương trình đã cho có tập nghiệm: $S=\{-1\}$

b) Đặt: $t=2x^2+3x-1 \Rightarrow 2x^2+3x+3=t+4$

Ta có phương trình: $t^2-5(t+4)+24=0$

$\Leftrightarrow t^2-5t+4=0$

$\Leftrightarrow t^2-4t-t+4=0$

$\Leftrightarrow t(t-4)-(t-4)=0$

$\Leftrightarrow (t-4)(t-1)=0$

$\Leftrightarrow t-4=0$ hoặc $t-1=0$

$\Leftrightarrow t=4$ hoặc $t=1$

+ Nếu $t=4$, ta có: $2x^2+3x-1=4 \Leftrightarrow 2x^2+3x-5=0$

$\Leftrightarrow 2x(x-1)+5(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x+5)=0$

$\Leftrightarrow x-1=0$ hoặc $2x+5=0$

$\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=\dfrac{-5}{2}$

+ Nếu $t=1$, ta có: $2x^2+3x-1=1 \Leftrightarrow 2x^2+3x-2=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+4x-x-2=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(2x-1)=0$

$\Leftrightarrow x+2=0$ hoặc $2x-1=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=\dfrac{1}{2}$

Phương trình (2) đã cho có tập nghiệm: $S=\left\{-2;\frac{1}{2}\right\}$

c) Ta có: (3) $\Leftrightarrow [(x+1)(x+4)]\left[(x+2)(x+3)\right]-24=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)-24=0$

Đặt $t=x^2+5x+4 \Rightarrow x^2+5x+6=t+2$

Ta có phương trình: $t(t+2)-24=0$

$\Leftrightarrow t^2+2t-24=0$

$\Leftrightarrow t^2+2t+1-25=0$

$\Leftrightarrow (t+1)^2-25=0$

$\Leftrightarrow (t+1-5)(t+1+5)=0$

$\Leftrightarrow (t-4)(t+6)=0$

$\Leftrightarrow t=4$ hoặc $t=-6$

+ Nếu $t=4$, ta có: $x^2+5x+4=4 \Leftrightarrow x^2+5x=0$

$\Leftrightarrow x(x+5)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-5$

+ Nếu $t=-6$, ta có: $x^2+5x+4=-6 \Leftrightarrow x^2+5x+10=0$

$\Leftrightarrow (x+\frac{5}{2})^2+\frac{15}{4}=0$

Phương trình này vô nghiệm vì vế trái luôn dương với mọi x.

Phương trình (3) đã cho có tập nghiệm: $S=\{0;-5\}$

Bạn hãy giải bài toán sau:

Giải phương trình: $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)-40=0$

(*Gợi ý*: Ta có: $(x+1)(x+5)=x^2+6x+5$

$(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$

Đặt $t=x^2+6x+5$

II. Phương tình có tham số

Bài toán 7. Cho phương trình: $x^3+x^2+mx-4=0$

a) Tìm m biết phương trình có một nghiệm là $x=-2$.

b) Giải phương trình với m vừa tìm được ở câu a).

Lời giải

a) Vì $x=-2$ là nghiệm của phương trình đã cho nên thay $x=-2$ vào phương trình, ta được

$(-2)^3+(-2)^2+m(-2)-4 = 0$

$\Leftrightarrow -8+4-2m-4 = 0$

$\Leftrightarrow m=-4$

b) Với $m=-4$, ta có phương trình: $x^3+x^2-4x-4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x+1)-4(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-4)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x+1 = 0$ hoặc $x-2 = 0$ hoặc $x+2 = 0$

$\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x = 2$ hoặc $x=-2$

Phương trình đã cho có tập nghiệm: $S=\{-1;2;-2\}$

Bài toán 8. Cho phương trình: $4x^2+4mx+m^2-25=0$

a) Tìm các giá trị của m biết phương trình có một nghiệm $x=-2$
b) Giải phương trình với mỗi giá trị tìm được câu a).

Lời giải

a) Vì $x=-2$ là nghiệm của phương trình đã cho nên thay $x=-2$ vào phương trình ta được:

$$\begin{aligned}4(-2)^2+4m(-2)+m^2-25 &= 0\\ \Leftrightarrow 16-8m+m^2-25 &= 0\\ \Leftrightarrow m^2-8m-9 &= 0\\ \Leftrightarrow m^2-9m+m-9 &= 0\\ \Leftrightarrow m(\text{m}-9)+(m-9) &= 0\\ \Leftrightarrow \text{(m-9)(m+1)=0}\\ \Leftrightarrow m=9 \text{ hoặc } m=-1\end{aligned}$$

b)
+ Nếu $m=9$, ta có phương trình:

$$\begin{aligned}&4x^2+36x+81-25=0\\ &\Leftrightarrow (2x+9)^2-5^2 = 0\\ &\Leftrightarrow (2x+9-5)(2x+9+5) = 0\\ &\Leftrightarrow (2x+4)(2x+14) = 0\\ &\Leftrightarrow x=-2 \text{ hoặc } x=-7\end{aligned}$$

Vậy với $m=9$, phương trình có tập nghiệm: $S=\{-2;-7\}$

+ Nếu $m=-1$, ta có phương trình:

$$\begin{aligned}&4x^2-4x+1-25=0\\ &\Leftrightarrow (2x-1)^2-5^2 = 0\\ &\Leftrightarrow (2x-1+5)(2x-1-5) = 0\\ &\Leftrightarrow (2x+4)(2x-6) = 0\\ &\Leftrightarrow 2x+4=0 \text{ hoặc } 2x-6=0\\ &\Leftrightarrow x=-2 \text{ hoặc } x=3\end{aligned}$$

Vậy với $m=-1$, phương trình có tập nghiệm: $S=\{-2;3\}$

III. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Bài toán 9. Giải phương trình

a) $\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{4}{x^2-4}$ (1) b) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{4}{x^2+2x-3}=0$ (2)

c) $\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{3}{x^2-6x+5}=\dfrac{5}{x-1}$ (3) d) $\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{1-2x}{x^2+x}=\dfrac{1}{x+1}$ (4)

Hướng dẫn:
- Tìm ĐKXĐ
- Tìm MTC
- Quy đồng và khử mẫu

Lời giải

a) Ta có: $x^2-4=(x-2)(x+2)$

ĐKXĐ: $x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)\neq 0$

$\Leftrightarrow x-2\neq 0$ và $x+2\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq 2$ và $x\neq -2$

MTC: x^2-4

Ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{x^2-4}-\frac{(x-2)^2}{x^2-4}=\frac{4}{x^2-4}$

Khử mẫu ta được:

$x^2+4x+4-x^2+4x-4=4$

$\Leftrightarrow 8x=4 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Tập nghiệm của (1): $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Chú ý: $x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$ và $x\neq -2$ không được viết:

$\Leftrightarrow x\neq 2$ hoặc $x\neq -2$

b) Ta có: $x^2+2x-3\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)\neq 0$

$\Leftrightarrow x-1\neq 0$ và $x+3\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq 1$ và $x\neq -3$

MTC: $(x-1)(x+3)$

Ta có (2) $\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+3)}-\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+3)}+\frac{4}{(x-1)(x+3)}=0$

Khử mẫu ta được: $x^2+3x+x+3-x^2+x-2x+2+4=0$

$\Leftrightarrow 3x=-9 \Leftrightarrow x=-3$ (không thỏa mãn ĐKXĐ)

Tập nghiệm của (2): $S=\{\varnothing\}$

c)Ta có $x^2-6x+5 = (x-1)(x-5)$

ĐKXĐ: $(x-1)(x-5)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1;\ x\neq 5$

MTC: $(x-1)(x-5)$

Ta có (3) $\Leftrightarrow \frac{x-1}{(x-1)(x-5)}-\frac{3}{(x-1)(x-5)}=\frac{5(x-5)}{(x-1)(x-5)}$

Khử mẫu ta được: $x-1-3=5(x-5)$

$-4x=-21$

$x=\frac{21}{4}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Tập nghiệm của phương trình (3) : $S=\left\{\frac{21}{4}\right\}$

d)Ta có $x^2+x=x(x+1)$

ĐKXĐ: $x(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0;\ x\neq -1$

MTC: $x(x+1)$

Ta có (4) $\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)}+\frac{1-2x}{x(x+1)}=\frac{x}{x(x+1)}$

Khử mẫu ta được: $x^2+x-x-1+1-2x=x \Leftrightarrow x^2-3x=0$

$\Leftrightarrow x(x-3)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=3$

Vì $x\neq 0$ nên ta lấy nghiệm $x=3$

Tập nghiệm của (4): $S=\{3\}$

Bài toán 10. Giải phương trình:

a) $\frac{1}{x-1}+\frac{2x^2-5}{x^3-1}=\frac{4}{x^2+x+1}$ (1)

b) $\frac{2}{x-1}-\frac{3x^2}{x^3-1}=\frac{x}{x^2+x+1}$ (2)

c) $\dfrac{-7x^2+4}{x^3+1}=\dfrac{5}{x^2-x+1}-\dfrac{1}{x+1}(3)$

Lời giải

a) Ta có : $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

ĐKXĐ: $(x-1)(x^2+x+1)\neq 0$

$x\neq -1$ (vì $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ với mọi x thuộc R)

MTC: $(x-1)(x^2+x+1)$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}+\dfrac{2x^2-5}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{4(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

Khử mẫu ta được: $x^2+x+1+2x^2-5=4x-4$

$\Leftrightarrow 3x^2-3x=0$

$\Leftrightarrow 3x(x-1)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x-1=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$

Đối chiếu với điều kiện $x\neq -1$, ta lấy nghiệm $x=0$

Tập nghiệm của (1): $S=\{0\}$

b) Ta có: $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

ĐKXĐ: $(x-1)(x^2+x+1)\neq 0$

$x\neq -1$ vì $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ với mọi x thuộc R

MTC: $(x-1)(x^2+x+1)$

Quy đồng khử mẫu, ta được:

$2.(x^2+x+1)-3x^2=x(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x+2-3x^2=x^2-x$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x+x-2=0$

$\Leftrightarrow (x-2).(2x+1)=0$

$\Leftrightarrow x-2=0$ hoặc $2x+1=0$

$\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=-\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Tập nghiệm của (2): $S=\left\{2;-\dfrac{1}{2}\right\}$

c)Ta có: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

ĐKXĐ: $x+1\neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -1$ (vì $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x thuộc R)

MTC: $(x+1)(x^2 - x + 1)$

Quy đồng khử mẫu ta được

$$-7x^2 + 4 = 5.(x+1) - (x^2 - x + 1)$$
$$-7x^2 + 4 = 5x + 5 - x^2 + x - 1$$
$$-6x^2 - 6x = 0$$
$$-6x(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow x = 0$ (không thỏa mãn ĐKXĐ) hoặc $x = -1$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Tập nghiệm của (3): $S = \{0\}$

Bài toán 11. Giải phương trình

a) $\frac{13}{(x-3)(2x+7)} + \frac{1}{2x+7} = \frac{6}{x^2-9}$ (1)

b) $\frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+8x+15} = \frac{1}{6}$ (2)

c) $\frac{2}{4-x^2} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$ (3)

Lời giải

a) Ta có: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

ĐKXĐ: $x+3 \neq 0; x-3 \neq 0$ và $2x+7 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq -3; x \neq 3 \text{ và } x \neq -\frac{7}{2}$$

MTC: $(x+3)(x-3)(2x+7)$

Quy đồng và khử mẫu, ta được:

$13(x+3) + x^2 - 9 = 6(2x+7)$

$13x + 39 + x^2 - 9 = 12x + 42$

$x^2 + x - 12 = 0$

$(x+4)(x-3) = 0$

$x = -4$ hoặc $x = 3$

Đối chiếu với ĐKXĐ, ta lấy $x = -4$ làm nghiệm

Vậy tập nghiệm của (1) là $S = \{-4\}$.

b) Ta có: $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3); x^2 + 8x + 15 = (x+5)(x+3)$

ĐKXĐ: $x+1 \neq 0; x+3 \neq 0$ và $x+5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1; -3; -5$.

MTC: $(x+1)(x+3)(x+5)$

Quy đồng và khử mẫu ta được:

$6(x+5)+(x+1)=(x+1)(x+3)(x+5)$

$x^3+9x^2+11x-21=0$

$x^3-1+9x^2-9+11x-11=0$

$(x-1)(x^2+x+1+9x+9+11)=0$

$(x-1)(x^2+10x+21)=0$

$(x-1)(x+7)(x+3)=0$

$x-1=0$ hoặc $x+7=0$ hoặc $x+3=0$

$x=1$ hoặc $x=-7$ hoặc $x=-3.$

Đối chiếu $ĐKXĐ$, ta lấy: $x=1; x=-7$ làm nghiệm

Vậy tập nghiệm của (2) là $S=\{1;-7\}$

Cách giải khác: ĐKXĐ: (xem cách giải trên)

Ta có (2) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{(x+1)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+5)}=\dfrac{1}{6}$

$\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{6}$

$\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{6}$

Quy đồng và khử mẫu ta được: $x^2+6x-7=0$

$x^2-x+7x-7=0$

$x(x-1)+7(x-1)=0$

$(x-1)(x+7)=0$

$x=1$ hoặc $x=-7$

c) Ta có:

$x^2-2x=x(x-2)$

$x^2+2x=x(x+2)$

$4-x^2=-(x-2)(x+2)$

ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 2$ và $x \neq -2$

MTC: $x(x-2)(x+2)$

Quy đồng và khử mẫu, ta được: $-2x+x+2=(x-4)(x-2)$

$-x+2=x^2-6x+8$

$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$\Rightarrow x-2=0$ hoặc $x-3=0$

$x=2$ hoặc $x=3$

Đối chiếu với ĐKXĐ, ta lấy $x=3$ làm nghiệm của (3)

Vây tâp nghiệm của (3) là: $S=\{3\}$.

Bài toán 12. Giải phương trình

a) $\dfrac{1}{4x^2-12x+9}-\dfrac{3}{9-4x^2}=\dfrac{4}{4x^2+12x+9}$ (1)

b) $\dfrac{1}{x^2+5x+6}+\dfrac{1}{x^2+7x+12}+\dfrac{1}{x^2+9x+20}+\dfrac{1}{x^2+11x+30}=\dfrac{1}{8}$ (2)

Hướng dẫn: Phân tích các mẫu thức thành nhân tử, (ở phương trình (2) xem cách giải của bài toán 11).

Lời giải

a) Ta có:

$4x^2+12x+9=(2x+3)^2$

$9-4x^2=-(4x^2-9)=-(2x+3)(2x-3)$

$4x^2-12x+9=(2x-3)^2$

ĐKXĐ: $2x+3\neq 0$ và $2x-3\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq -\dfrac{3}{2}$ và $x\neq \dfrac{3}{2}$

MTC: $(2x+3)^2(2x-3)^2$

Quy đồng và khử mẫu ta được:

$(2x+3)^2+3(4x^2-9)=4(2x-3)^2$

$4x^2+12x+9+12x^2-27=4(4x^2-12x+9)$

$60x=54$

$x = \dfrac{9}{10}$

Đối chiếu với ĐKXĐ, ta lấy $x = \dfrac{9}{10}$

Vậy tập nghiệm của (1) là $S = \left\{\dfrac{9}{10}\right\}$.

b) Ta có:

$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$

$x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5)$

$x^2 + 11x + 30 = (x+5)(x+6)$

ĐKXĐ: $x \neq -2; -3; -4; -5; -6$

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) + \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+5}\right) + \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6}\right) = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{8}$$

$8(x+6) - 8(x+2) = (x+2)(x+6)$

$x^2 + 8x - 20 = 0$

$x^2 + 10x - 2x - 20 = 0$

$x(x+10) - 2(x+10) = 0$

$(x+10)(x-2) = 0$

$x + 10 = 0$ hoặc $x - 2 = 0$

$x = -10$ hoặc $x = 2$

Đối chiếu ĐKXĐ, ta thấy $x = -10$ và $x = 2$ đều thoả mãn.

Vậy tập nghiệm của (2) là $S = \{-10; 2\}$.

Nhận xét:

+) Bạn có thể giải phương trình sau theo cách trên:

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{2x+1}{x(x+4)}$$

+) Bạn hãy đặt ra vài bài toán tương tự như bài toán 4b).

Bài toán 13. Giải và biện luận phương trình sau:

a) $\frac{x+m}{x-1}=\frac{x+3}{x-2}$ (1) b) $m-5+\frac{2m+5}{x-2}=0$ (2)

c) $\frac{2m-2}{x-1}=m-1$ (3)

Hướng dẫn: Xem tóm tắt cách giải ở phần A .

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x-1\neq 0$ và $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ và $x\neq 2$

MTC: $(x-1)(x-2)$

Quy đồng và khử mẫu, ta được:

$(x+m)(x-2)=(x+3)(x-1)$

$x^2-2x+mx-2m=x^2-x+3x-3$

$(m-4)x=2m-3$ (*)

+ Nếu $m-4=0 \Leftrightarrow m=4$

Ta có (*) $\Leftrightarrow 0x=5$ (vô nghiệm)

+ Nếu $m-4\neq 0 \Rightarrow m\neq 4$

Ta có $(*) \Leftrightarrow x=\frac{2m-3}{m-4}$

Vì $x\neq 1$ và $x\neq 2 \Rightarrow \frac{2m-3}{m-4}\neq 1$ và $\frac{2m-3}{m-4}\neq 2$

$\Rightarrow m\neq -1$ và $2m-3\neq 2m-8$

$\Rightarrow m\neq -1$

Đáp số:

+) $m\neq -1$ và $m\neq 4$. Tập nghiệm của (1): $S=\left\{\frac{2m-3}{m-4}\right\}$.

+) $m=-1$ hoặc $m=4$. Tập nghiệm của (1): $S=\varnothing$.

b) ĐKXĐ: $x\neq 2$. Khi đó, ta có:

(2) $\Rightarrow (m-5)(x-2)+2m+5=0 \Leftrightarrow (m-5)x=-15$ $(*)$

+ Nếu $m\neq 5$. Ta có $(*) \Leftrightarrow x=\frac{-15}{m-5}$

Vì $x\neq 2 \Rightarrow \frac{-15}{m-5}\neq 2$ $(m\neq 5)$

$-15\neq 2m-10$

$m\neq -\frac{5}{2}$

Đáp số: +) $m=-\frac{5}{2}$ hoặc $m=5$. Tập nghiệm của (2): $S=\varnothing$.

+) Nếu $m\neq 5$ và $m\neq -\frac{5}{2}$. Tập nghiệm của (2): $S=\left\{\frac{15}{5-m}\right\}$.

c) ĐKXĐ: $\mathbf{x}\neq 1$
Quy đồng và khử mẫu, ta được:

$$2m-2=(m-1)(x-1)\Leftrightarrow (m-1)x=3m-3\ (*)$$

+ Nếu $m-1=0\Leftrightarrow m=1$
Ta có $(*)\Leftrightarrow 0x=0$ (luôn đúng với mọi x)

+ Nếu $m-1\neq 0\Leftrightarrow m\neq 1$
Ta có $(*)\Leftrightarrow x=3$

Đáp số: + Nếu $m=1$. Tập nghiệm của (3): $S=\mathbf{R}$

+ Nếu $m\neq 1$. Tập nghiệm của (3): $S=\{3\}$.

Bài toán 14. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm:

$$\frac{1-x}{x-m}+\frac{x-2}{x+m}=\frac{2(x-m)-2}{m^2-x^2}$$

Hướng dẫn: Tìm ĐKXĐ và đưa phương trình về dạng $ax+b=0$, xét $a=0$.

Lời giải

Ta có: $m^2-x^2=-(x^2-m^2)=-(x-m)(x+m)$
ĐKXĐ: $x+m\neq 0$ và $x-m\neq 0\Leftrightarrow x\neq \pm m$
Quy đồng và khử mẫu, ta được:

$$(1-x)(x+m)+(x-2)(x-m)=2-2(x-m)$$

$$(2m-1)x=m-2(*)$$

+ Nếu $2m-1=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

Ta có $(*)\Leftrightarrow 0x=\frac{-3}{2}$ (vô nghiệm)

+ Nếu $m\neq \frac{1}{2}$, ta có $(\ *)\Leftrightarrow x=\frac{m-2}{2m-1}$

Xét $x=m\Leftrightarrow \frac{m-2}{2m-1}=m\Leftrightarrow m-2=2m^2-m$

$$2m^2-2m+2=0\Rightarrow m^2-m+1=0$$

$\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$ (không xảy ra vì vế trái luôn dương)

Xét $x=-m \Leftrightarrow \dfrac{m-2}{2m-1}=-m \Leftrightarrow m-2=-2m^2+m$

$\Leftrightarrow \mathrm{m}^2=1 \Leftrightarrow \mathrm{m}=\pm 1$

Đáp số: Phương trình vô nghiệm khi $\mathrm{m}=\dfrac{1}{2}$ hoặc $\mathrm{m}=\pm 1$.

Nhận xét: Qua cách giải trên, ta có phương trình đã cho có nghiệm khi $\mathrm{m}\neq\dfrac{1}{2}$ và $\mathrm{m}=\pm 1$.

(Phương trình có nghiệm $x=\dfrac{m-2}{2m-1}$).

Bài toán 15. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\dfrac{x}{x-m}-\dfrac{2m}{x+m}=\dfrac{8m^2}{x^2-m^2}$.

Lời giải

Ta có: $x^2-m^2=(x-m)(x+m)$

ĐKXĐ: $x-m\neq 0$ và $x+m\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm m$

Quy đồng và khử mẫu, ta được:

$x(x+m)-2m(x-m)=8m^2$

$x^2-mx-6m^2=0$

$x^2+2mx-3mx-6m^2=0$

$x(x+2m)-3m(x+2m)=0$

$(x+2m)(x-3m)=0$

$x+2m=0$ hoặc $x-3m=0$

$x=-2m$ hoặc $x=3m$

Nếu $-2m\neq m$ và $-2m\neq -m \Rightarrow m\neq 0$

Tương tự: $3m\neq \pm m \Rightarrow m\neq 0$

Phương trình có nghiệm $(x=-2m; x=3m)$ khi $m\neq 0$

Nhận xét: với $\mathrm{m}=0$ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 5. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH CHẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Bất đẳng thức

- **Nhắc lại thứ tự trên tập số thực**
  Trên tập số thực, với hai số a và b có ba trường hợp sau:
  a) Số a bằng số b, kí hiệu $a = b$;
  b) Số a lớn hơn số b, kí hiệu $a > b$;
  c) Số a nhỏ hơn số b, kí hiệu $a < b$.
  ✓ Số a lớn hơn hoặc bằng số b, tức là $a > b$ hoặc $a = b$, kí hiệu $a \geq b$.
  ✓ Số a nhỏ hơn hoặc bằng số b, tức là $a < b$ hoặc $a = b$, kí hiệu $a \leq b$.
- **Khái niệm bất đẳng thức**
  Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b, a \geq b, a \leq b$) là bất đẳng thức và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.
  Chú ý: Hai bất dảng thức $1 < 2$ và $-3 < -2$ (hay $6 > 3$ và $8 > 5$) được gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều. Hai bất đẳng thức $1 < 2$ và $-2 > -3$ (hay $6 > 3$ và $5 < 8$) được gọi là hai bất đẳng thức ngược chiều.
- **Tính chất bắc cầu:** Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$.
  Chú ý: Tương tự, các thứ tự lớn hơn ($>$), lớn hơn hoặc bằng ($\geq$), nhỏ hơn hoặc bằng ($\leq$) cũng có tính chất bắc cầu.

2. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

Khi cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức ta được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.
Với ba số a, b, c, ta có:

✓ Nếu $a < b$ thì $a + c \leq b + c$;
✓ Nếu $a \leq b$ thì $a + c \leq b + c$;
✓ Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$;
✓ Nếu $a \geq b$ thì $a + c \geq b + c$.

3. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

- Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương, ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Với ba số a, b, c và $c > 0$, ta có:

✓ Nếu $a < b$ thì $ac < bc$;
✓ Nếu $a \leq b$ thì $ac \leq bc$;
✓ Nếu $a > b$ thì $ac > bc$;
✓ Nếu $a \geq b$ thì $ac \geq bc$.

- Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm, ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

Với ba số a,b,c và $c<0$, ta có:

- ✓ Nếu $a<b$ thì $ac>bc$;
- ✓ Nếu $a\le b$ thì $ac\ge bc$;
- ✓ Nếu $a>b$ thì $ac<bc$;
- ✓ Nếu $a\ge b$ thì $ac\le bc$.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

Bài toán 1.

a) Nếu $x>y$. Chứng minh rằng $x+y>2y$.

b) Cho $a>b$. Chứng minh rằng $2a+b>a+2b$.

Hướng dẫn: Áp dụng tính chất $a>b\Rightarrow a+c>b+c$.

Lời giải

a) Ta có: $x>y\Rightarrow x+y>y+y$ hay $x+y>2y$

b) Ta có: $a>b\Rightarrow a+a>b+a$

$\Rightarrow 2a>b+a$

$\Rightarrow 2a+b>b+a+b$

Hay $2a+b>2b+a$ (đpcm).

Bài toán 2. Với m bất kì, chứng tỏ:

a) $1+m<2+m$;

b) $m-1<m$;

c) $m(m+2)<(m+1)^2$.

Hướng dẫn: Ta có thể dùng phép biến đổi tương đương và áp dụng tính chất ở phần A.

Lời giải

a) Ta luôn có: $1<2\Rightarrow 1+m<2+m$ (đpcm).

b) Ta có: $-1<0\Leftrightarrow -1+m<0+m$

hay $m-1<m$ (đpcm).

c) Ta có $m(m+2)<(m+1)^2$

$\Leftrightarrow m^2+2m<m^2+2m+1$

$\Leftrightarrow 0<1$ (luôn đúng)

Bạn có thể viết:

Ta có: $0<1\Rightarrow m^2+2m+0<m^2+2m+1$

$\Rightarrow m(m+2)<(m+1)^2$ (đpcm).

Bài toán 3.

a) Chứng minh rằng: $(x+1)^2 \geq 4x$;

b) Chứng minh rằng: $x^2+y^2+2 \geq 2(x+y)$;

c) Chứng minh rằng: $(x-y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$.

Hướng dẫn: Áp dụng tính chất A và biến đổi tương đương.

Lời giải

a) Ta có:

$(x+1)^2 \geq 4x$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1 \geq 4x$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+(-4x) \geq 4x+(-4x)$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$)

Nhận xét: Phép biến đổi trên, ta có thể thấy đó là việc "chuyển vế một số hạng thì đổi dấu".

b) Ta có: $x^2+y^2+2 \geq 2(x+y)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2 \geq 2x+2y$

$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-2y+1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$)

c) Ta có: $(x-y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \leq 2x^2+2y^2$

$\Leftrightarrow 0 \leq 2x^2+2y^2-x^2+2xy-y^2$

$\Leftrightarrow 0 \leq x^2+2xy+y^2$

$\Leftrightarrow 0 \leq (x+y)^2$ (luôn đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$)

Bài toán 4.

a) Chứng minh rằng nếu $x+4y=1$ thì $5(x^2+4y^2) \geq 1$.

b) Chứng minh rằng nếu $x+y=1$ thì $2(x^2+y^2) \geq 1$.

Hướng dẫn: a) Ta có $x+4y=1 \Rightarrow x=1-4y$.

Thay x vào bất đẳng thức cần chứng minh và biến đổi tương đương.

Lời giải

a) Ta có: $x+4y=1\Rightarrow x=1-4y$

Thay x vào bất đẳng thức $5\left(x^2+4y^2\right)\geq 1$ ta có:

$5\left[(1-4y)^2+4y^2\right]\geq 1$

$\Leftrightarrow 5\left(1-8y+16y^2+4y^2\right)\geq 1$

$\Leftrightarrow 5\left(20y^2-8y+1\right)\geq 1$

$\Leftrightarrow 100y^2-40y+5\geq 1$

$\Leftrightarrow 100y^2-40y+5-1\geq 0$

$\Leftrightarrow 100y^2-40y+4\geq 0$

$\Leftrightarrow (10y-2)^2\geq 0$ (luôn đúng).

b) Ta có: $x+y=1\Rightarrow y=1-x$

Thay y vào bất đẳng thức $2\left(x^2+y^2\right)\geq 1$ ta được:

$2\left[x^2+(1-x)^2\right]\geq 1$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2+1-2x+x^2\right)\geq 1$

$\Leftrightarrow 2x^2+2-4x+2x^2\geq 1$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+2-1\geq 1-1$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2\geq 0$ (luôn đúng).

Bài toán 5.

a) Chứng minh rằng: $(x+y)^2\leq 2\left(x^2+y^2\right)$.

b) Cho $x^2+y^2=1$, chứng tỏ $(x+y)^2\leq 2$.

Hướng dẫn: a) Biến đổi tương đương.

b) Áp dụng bất đẳng thức ở câu a).

Lời giải

a) Ta có: $(x+y)^2\leq 2\left(x^2+y^2\right)$

$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2\leq 2x^2+2y^2$

$\Leftrightarrow 0\leq 2x^2+2y^2-x^2-2xy-y^2$

$\Leftrightarrow 0\leq x^2-2xy+y^2$

$\Leftrightarrow 0\leq (x-y)^2$ (luôn đúng).

b) Thay $x^2+y^2=1$ vào bất đẳng thức ở câu a), ta được: $(x+y)^2\leq 2.1\Leftrightarrow (x+y)^2\leq 2$.

Bài toán 6.

a) Chứng minh rằng: $(2x+y)^2 \le 5\left(x^2+y^2\right)$.

b) Chứng minh rằng: $(x+y)^2 \ge 4xy$.

Hướng dẫn: Biến đổi tương đương.

Lời giải

a) Ta có: $(2x+y)^2 \le 5\left(x^2+y^2\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2+4xy+y^2 \le 5x^2+5y^2$

$\Leftrightarrow 0 \le 5x^2+5y^2-4x^2-4xy-y^2$

$\Leftrightarrow 0 \le x^2-4xy+4y^2$

$\Leftrightarrow 0 \le (x-2y)^2$ (luôn đúng).

b) Ta có: $(x+y)^2 \ge 4xy$

$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2 \ge 4xy$

$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2-4xy \ge 0$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ (luôn đúng).

II. So sánh hai số

Bài toán 7. Cho $a-b=5$. So sánh a và b.

Hướng dẫn: Ta có $a-b=5 \Leftrightarrow a=b+5$

Đưa về so sánh b và $b+5$.

Lời giải

Ta có: $a-b=5 \Rightarrow a=5+b$

Ta thấy: $0<5 \Rightarrow b+0<b+5$

$\Rightarrow b<b+5$ hay $b<a$.

Bài toán 8.

a) So sánh a và $a+1$.

b) Cho $x+1<y+1$. So sánh x và y.

Lời giải

a) Ta có: $0<1 \Rightarrow 0+a<1+a$ hay $a<a+1$

b) Ta có: $x+1<y+1$

$\Rightarrow x+1-1<y+1-1$

$\Rightarrow x<y$

Bài toán 9.

a) So sánh $4x^2-4x+5$ và 4.

b) So sánh x^2+2x+3 và 2.

Hướng dẫn: Đưa về tổng hoặc hiệu bình phương.

Lời giải

a) Ta có: $4x^2-4x+5=4x^2-4x+1+4=(2x-1)^2+4$

Vì $(2x-1)^2\ge 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2+4\ge 0+4=4$

Vậy $4x^2-4x+5\ge 4$

(Dấu "=" xảy ra khi $x=\dfrac{1}{2}$).

b) Ta có: $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$

Vì $(x+1)^2\ge 0 \Rightarrow (x+1)^2+2\ge 0+2=2$

Vậy $x^2+2x+3\ge 2$

(Dấu "=" xảy ra khi $x=-1$).

Từ kết quả bài toán trên, ta có bài toán sau:

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$M_1=4x^2-4x+5$.

$M_2=x^2+2x+3$.

III. Bài toán cực trị (Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức)

Bài toán 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $A=x^2-4x+5$;

b) $B=x^2+y^2-2x-2y+2$;

c) $C=x^2+2y^2+2xy+6y+9$.

Hướng dẫn: Xem Lời giải bài toán 6 và 9.

Lời giải

a) Ta có: $A=(x-2)^2+1\ge 1$ (vì $(x-2)^2\ge 0$, với mọi $x\in\mathbb{R}$)

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 1.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

b) Ta có $B=(x-1)^2+(y-1)^2\ge 0$ (xem bài toán 6)

Vậy giá trị nhỏ nhất của B bằng 0.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x-1=0$ và $y-1=0$

$\Leftrightarrow x=y=1$.

c) Ta có: $C=(x+y)^2+(y+3)^2\ge 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C bằng 0.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+y=0$ và $y+3=0$

$\Leftrightarrow x=3$ và $y=-3$.

Ta còn có thể tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$M=x^2+2y^2+2xy+6y+10.$

Bài toán 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$M=x^2+y^2$ biết $x+y=1$.

Hướng dẫn: Xem bài toán 4.

Lời giải

Ta có: $x+y=1\Rightarrow y=1-x$

Thay y vào biểu thức M, ta được:

$M=x^2+(1-x)^2$

$=x^2+1-2x+x^2=S+0\le +1$

$=2x^2-2x+1$

$=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\ge\dfrac{1}{2}\left(vì\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\ge 0\right)$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng $\dfrac{1}{2}$.

Dấu “=" xảy ra $\Leftrightarrow x-\dfrac{1}{2}=0$ và $y=1-x$

$\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$

Bài toán 12. Cho $x>0; y>0$ và $x^2+y^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A=x+y$

Hướng dẫn: Xem lời giải bài 5.

Lời giải

Theo kết quả bài toán $5a)$ ta có: $(x+y)^2\le 2\left(x^2+y^2\right)$

Vì $x^2+y^2=2\Rightarrow(x+y)^2\le 2.2=4$

$\Rightarrow x+y\le 2$ (vì $x>0; y>0$)

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 2.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+y=2$ và $x^2+y^2=2$

(ta tìm được: $x=y=1$)

Nhận xét: Ta có thể xét không cần điều kiện $x>0, y>0$.

IV. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

Bài toán 13. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a > b$ thì $2a - 3 > 2b - 4$.

b) Nếu $a > 1$ thì $a^2 - a > 0$.

c) Nếu $0 < x < 1$ thì $x^2 < x$.

Hướng dẫn: Áp dụng tính chất: $a < b$ và $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

$$a > b \text{ và } b > c \Rightarrow a < c.$$

Lời giải

a) Ta có: $2 > 0$ và $a > b \Rightarrow 2a > 2b$ (nhân 2 vế với 2)

$$\Rightarrow 2a - 3 > 2b - 3$$

Lại có: $-3 > -4 \Rightarrow 2b - 3 > 2b - 4$

Vậy $2a - 3 > 2b - 3$ và $2b - 3 > 2b - 4$

$\Rightarrow 2a - 3 > 2b - 4$ (đpcm)

b) Ta có: $a > 1$ và $1 > 0 \Rightarrow a > 0$

Vậy $a > 1$ và $a > 0 \Rightarrow a.a > 1.a$

$\Rightarrow a^2 > a$

$\Rightarrow a^2 - a > a - a = 0$

$\Rightarrow a^2 - a > 0$ (đpcm).

c) Từ giả thiết ta có: $x > 0$ và $x < 1$

$\Rightarrow x.x < x$ (nhân hai vế với $x > 0$)

$\Rightarrow x^2 < x$ (đpcm).

Nhận xét:

+) Với $0 < x < 1$ tương tự ta chứng minh được:

$$x^3 < x^2; x^4 < x^3$$

Vậy: $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < \ldots < x^4 < x^3 < x^2 < x < 1$

+) Với $x > 1$, ta có: $1 < x < x^2 < x^3 < x^4 < \cdots$

Bài toán 14. Cho $a > b > 0$. Chứng minh $a^2 > b^2$.

Hướng dẫn: Áp dụng tính chất: $c > 0$ và $a > 0 \Rightarrow ac > bc$ và tính chất bắc cầu.

Lời giải

Ta có $a > b$ và $a > 0 \Rightarrow a.a > ab$ hay $a^2 > ab$

Tương tự: $a > b$ và $b > 0 \Rightarrow ab > bb$ hay $ab > b^2$

Vậy $a^2 > ab$ và $ab > b^2 \Rightarrow a^2 > b^2$ (đpcm)

Nhận xét: Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$$a > b > 0 \Rightarrow a^3 > b^3; a^4 > b^4;\ v.v...$$

Bài toán 15.

a) Cho $a < b$. Chứng minh $2 - 3a > 1 - 3\ b$.

b) Cho $a > b$. Chứng minh $2(1-a) < 2(1-b)$.

Lời giải

a) Ta có $a < b$ và $-3 < 0 \Rightarrow -3a < -3b \Rightarrow 1 - 3a > 1 - 3b$

Lại có $2 > 1 \Rightarrow 2 - 3a > 1 - 3a$

Vậy $2 - 3a > 1 - 3a$ và $1 - 3a > 1 - 3b$

$\Rightarrow 2 - 3a > 1 - 3b$ (đpcm).

b) Ta có $a > b$ và $-1 < 0$

$\Rightarrow -a < -b$

$\Rightarrow 1 - a < 1 - b$

$\Rightarrow 2(1-a) < 2(1-b)$ (đpcm).

Bài toán 16. Cho $a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$

Lời giải

Ta có $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ (1)

Lại có $c < d \Rightarrow c + b < d + b$ (2)

Từ (1) và (2) theo tính chất bắc cầu, ta có:

$a + c < b + d$ (đpcm)

Nhận xét: Tính chất này có thể phát biểu như sau:

"Ta có thể cộng vế với vế hai bất đẳng thức cùng chiều:

$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$

Hoặc $a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

Bài toán 17. Cho a, b, c, d là các số dương $a > b$ và $c > d$.

Chứng minh rằng $ac > bd$.

(Ta có thể viết: Nếu $a > b > 0$ và $c > d > 0$ thì $ac > bd$: Nhân vế với vế hai bất đẳng thức cùng chiều với điều kiện các vế đều dương).

Lời giải

Ta có $a > b$ và $c > 0 \Rightarrow ac > bc$ (1)

Lai có $c > d$ và $b > 0 \Rightarrow bc > bd$ (2)

Từ (1) và (2), theo tính chất bắc cầu, ta có: $ac > bd$ (đpcm).

Nhận xét: Nếu $0 < a < b$ và $0 < c < d$ thì $ac < bd$ (chứng minh tương tự).

Bài toán 18.

a) Cho $a>0$ và $b>0$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$.

b) Cho $0<a<b$ và $c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$.

c) Cho $a>b>0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

d) Cho $a>0;b>0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$.

Hướng dẫn: Có thể biến đổi tương đương.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{ab}\ge 2$

vì $a>0$ và $b>0 \Rightarrow ab>0$ nên ta có:

$$\frac{a^2+b^2}{ab}\ge 2 \Leftrightarrow ab\frac{a^2+b^2}{ab}\ge 2.ab$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0$$

$\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$ (luôn đúng)

b) Ta có: $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c} \Leftrightarrow \frac{a}{b}(b+c)<\frac{a+c}{b+c}(b+c)$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+c)}{b}\cdot b<(a+c)b$$

$$\Leftrightarrow a(b+c)<(a+c)b$$

$$\Leftrightarrow a(b+c)<(a+c)b$$

$\Leftrightarrow ac<bc$ (vì $c>0$)

$\Leftrightarrow a<b$ (luôn đúng, theo giả thiết $0<a<b$)

Nhận xét: Ta có thể làm nhanh hơn, bằng cách "nhân chéo".

Ta có: $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c} \Leftrightarrow a(b+c)<b(a+c)$ (vì $b>0;b+c>0$)

$$\Leftrightarrow ab+ac<ab+bc$$

$$\Leftrightarrow ac<bc$$

$$\Leftrightarrow a<b.$$

c) Ta có: $\frac{1}{a}<\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a}.\ b<\frac{1}{b}.\ b$ (vì $b>0$)

$\Leftrightarrow \frac{b}{a}<1$

$\Leftrightarrow \frac{b}{a}\cdot a<1.a$ (vì $a>0$)

$\Leftrightarrow b<a$ (luôn đúng vì theo giả thiết $a>b>0$).

d) Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$

$\Leftrightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 4$ (vì $a>0;b>0\Rightarrow a+b>0$)

$\Leftrightarrow a\cdot\frac{1}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+b\cdot\frac{1}{b}\le 4$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\ge 4$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ (đây là bài toán a))

Nhận xét: Ta có thể viết: $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 4$ $(a>0;b>0)$.

Bài toán 19. Cho $\frac{a}{b}<\frac{c}{a}$; $b>0$; $d>0$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

Lời giải

Ta chứng minh $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$

Thật vậy: $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$

$\Leftrightarrow a(b+d)<b(a+c)$(vì $b>0;d>0\Rightarrow b+d>0$)

$\Leftrightarrow ab+ad<ba+bc$

$\Leftrightarrow ad<bc$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ (vì $b>0$; $d>0$ và giả thiết đã cho)

Chứng minh tương tự: Với $b>0$, $d>0$, ta có $\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

Bài toán 20. Cho $2x+1<2y+1$. So sánh x và y?

Hướng dẫn: Dùng phép biến đổi tương đương.

Lời giải

Ta có $2x+1<2y+1 \Leftrightarrow 2x+1-1<2y+1-1$

$\Leftrightarrow 2x<2y$

$\Leftrightarrow 2x\cdot\dfrac{1}{2}<2y\cdot\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x<y$.

Bài toán 21. Cho $1-3a\ge 1-3b$. So sánh a và b?

Hướng dẫn: Biến đổi tương đương.

Lời giải

Ta có: $1-3a\ge 1-3b \Leftrightarrow -3a\ge -3b$ $\Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{3}\right)(-3a)\le\left(-\dfrac{1}{3}\right)(-3b)$ $\Leftrightarrow a\le b$

Bài toán 22. So sánh a,b biết: $2a+5<2b+5$.

Lời giải

Ta có: $2a+5<2b+5 \Leftrightarrow 2a<2b$

$\Leftrightarrow a<b$.

Bài toán 23. Số a là số âm hay dương, nếu: $-3a>-5a$?

Lời giải

Nếu $a<0$ và $-5<-3 \Rightarrow -5a>-3a$

Trái giả thiết: $-3a>-5a$

Nếu $a=0 \Rightarrow (-3).0=(-5).0$ (không đúng)

Vậy $a>0$ (lúc đó ta luôn có $-5<-3 \Rightarrow -5a>-3a$)

Bài toán 24. Cho $x>0, x\ne 1$. So sánh $x+\dfrac{1}{x}$ và 2.

Hướng dẫn: Cho $x=3 \Rightarrow 3+\dfrac{1}{3}>2$.

Ta chứng minh: $x+\dfrac{1}{x}\ge 2\ (x>0)$.

Lời giải

Ta chứng minh $x+\dfrac{1}{x}>2\ \left(x>0, x\neq 1\right)$

Ta có: $x+\dfrac{1}{x}\geq 2\Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{x}\geq 2$

$\Leftrightarrow x^2+1\geq 2x\ \left(\text{vì } x>0\right)$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\geq 0$ (luôn đúng)

Vì $x\neq 1\Rightarrow \left(x-1\right)^2>0\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}>2$.

Nhận xét: Bài toán sau đây cũng được xét tương tự:

So sánh $\dfrac{4x^2+1}{x}$ và 4 (với $x>0$).

V. BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Bài toán 25. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x+\dfrac{1}{x}$; với $x>0$.

Hướng dẫn: Xem bài toán 24.

Lời giải

Theo bài toán 11, ta có với $x>0: x+\dfrac{1}{x}\geq 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 2.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$

Tương tự: $\dfrac{4x^2+1}{x}\geq 4\ \left(x>0\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2+1\geq 4x$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(2x-1\right)^2\geq 0$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Bài toán 26. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{-x^2+2x-5}$.

Hướng dẫn: $-x^2+2x-5=-\left(x^2-2x+1\right)-4=-4-\left(x-1\right)^2\leq -4$

Lời giải

Ta có: $P=\dfrac{1}{-4-(x-1)^2}=\dfrac{-1}{(x-1)^2+4}$

Vì $(x-1)^2+4\geq 4\Rightarrow \dfrac{1}{(x-1)^2+4}\leq \dfrac{1}{4}\Rightarrow \dfrac{-1}{(x-1)^2+4}\geq -\dfrac{1}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\dfrac{1}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Bài toán 27. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$.

Hướng dẫn: Từ $x+y=1\Rightarrow y=1-x$. Thế y vào biểu thức P.

Lời giải

Ta có: $x+y=1\Rightarrow y=1-x$.

Thế vào P, ta được: $P=x^2+(1-x)^2$

$$=2x^2-2x+1$$

$$=2\left(x^2-x\right)+1$$

$$=2\left[\left(x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\right]+1$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ và $x+y=1\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$

Bạn có thể xét bài toán sau:

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=4x^2+y^2$ với $4x+y=1$.

(Ta có $4x+y=1\Rightarrow y=1-4x$.

Thay y vào P, ta được: $P=4x^2+(1-4x)^2=20x^2-8x+1$

$\Rightarrow 5P\geq 1\Rightarrow P\geq\dfrac{1}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{1}{5}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5}$ và $y=\dfrac{1}{5}$)

(Bạn cần suy nghĩ một chút để xét $5P$).

Bài toán 28. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{(x+1)^2};x>0$.

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2\geq 4ab$.

(Xem bài toán 3a) §1 Liên hệ giữa thứ tự phép cộng: $\left(x+1\right)^2\geq 4x$

Lời giải

Ta có: $\left(x+1\right)^2\geq 4x$ (Xem bài toán 3.a; §1)

Vì $x>0\Rightarrow\dfrac{\left(x+1\right)^2}{x}\geq 4\Rightarrow\dfrac{x}{\left(x+1\right)^2}\leq\dfrac{1}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{1}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$

Nhận xét: Bạn có thể suy nghĩ để tìm cách chứng minh: $\dfrac{x}{\left(x+1\right)^2}\leq\dfrac{1}{x}$ (với $x>0$)

Cách khác: Đặt $y=x+1\Rightarrow P=\dfrac{y-1}{y^2}$.

Bài toán sau: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{\left(x+1\right)^2}{x}$ $\left(x>0\right)$.

Lời giải như sau: $P=\dfrac{x^2+2x+1}{x}=x+2+\dfrac{1}{x}$.

Ta có $x+\dfrac{1}{x}\geq 2\Rightarrow P=x+\dfrac{1}{2}+2\geq 4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 4.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$

Bạn hãy giải bài toán sau:

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{4x^2+1}{x}$ $\left(x>0\right)$

Lời giải

$$P=\frac{4x^2-4x+1+4x}{x}=\frac{(2x-1)^2}{x}+4\geq 4$$

Vì $x>0$ và $\left(2x-1\right)^2\geq 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 4.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Bài toán 29. Chứng minh rằng: $xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4}$

Hướng dẫn: Biến đổi tương đương.

Lời giải

Ta có: $xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow 4xy \le (x+y)^2$

$\Leftrightarrow 4xy \le x^2 + 2xy + y^2$

$\Leftrightarrow 0 \le x^2 - 2xy + y^2$

$\Leftrightarrow 0 \le (x-y)^2$ (luôn đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Nhận xét:

+ Cho $x + y = S$ (không đổi), ta có kết quả: Nếu hai số có tổng không đổi thì tích của chúng đạt giá trị lớn nhất khi hai số bằng nhau.

+ Cho hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng đạt giá trị nhỏ nhất khi hai số bằng nhau.

Áp dụng:

Cho hình chữ nhật có chu vi $20(\text{m})$, tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn: Gọi x là chiều dài của hình chữ nhật,

chiều rộng sẽ là: $\dfrac{20}{2} - x = 10 - x$ (10 m là nửa chu vi hình chữ nhật)

Diện tích hình chữ nhật là: $(10-x)x$

Vậy tích $(10-x)x$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow 10 - x = x$

$\Leftrightarrow 2x = 10$

$\Leftrightarrow x = 5$

Khi $x = 5 \Rightarrow 10 - x = 5$

Vậy trong các hình chữ nhật có chu vi 10 m (không đổi) thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

* Cho $x > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + \dfrac{1}{x}$

Ta có : $x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$ (không đổi)

Vậy $x + \dfrac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$

Vì $x>0$, nên ta lấy $x=1$.

Giá trị nhỏ nhất của $x+\frac{1}{x}$ bằng 2 (với $x=1$).

Bài toán tương tự:

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2\left(1-x^2\right)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q=\frac{x^2+1}{x}(x>0)$.

Bài 6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất một ẩn.

• Bất phương trình dạng $ax+b<0$ (hoặc $ax+b>0, ax+b\le 0, ax+b\ge 0$) trong đó a,b là hai số đã cho, $a\ne 0$ được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn x.

• Nghiệm của bất phương trình:

- Số x_0 là một nghiệm của bất phương trình $A(x)<B(x)$ nếu $A(x_0)<B(x_0)$ là khẳng định đúng.

- Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình đó.

2. Cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

• Bất phương trình bậc nhất một ẩn $ax+b<0\,(a\ne 0)$ được giải như sau:

$$ax+b<0$$
$$ax<-b.$$

- Nếu $a>0$ thì $x<-\dfrac{b}{a}$.

- Nếu $a<0$ thì $x>-\dfrac{b}{a}$.

Chú ý: Các bất phương trình $ax+b>0, ax+b\le 0, ax+b\ge 0$ được giải tương tự.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Giải bất phương trình

Bài toán 1. Giải bất phương trình:

a) $x-5>4$ (1) b) $8x+2<7x-1$ (2)

c) $-3x>-4x+1$ (3) d) $3x+4>2x+3$ (4)

Lời giải

a) Ta có (1) $\Leftrightarrow x>4+5 \Leftrightarrow x>9$.

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $x>9$.

b) Ta có (2) $\Leftrightarrow 8x-7x<-1-2 \Leftrightarrow x<-3$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $x<-3$.

c) Ta có (3) $\Leftrightarrow 4x-3x>1 \Leftrightarrow x>1$

Vậy nghiệm của bất phương trình (3) là $x>1$.

d) Ta có (4) $\Leftrightarrow 3x-2x>-4+3 \Leftrightarrow x>-1$

Vậy nghiệm của bất phương trình (4) là $x>-1$.

Bài toán 2. Giải bất phương trình:

a) $-4x<12$ (1) b) $-x>2$ (2)

c) $3x<4$ (3) d) $5-2x\ge 0$ (4)

e) $2-5x\le 27$ (5) f) $3-4x\ge 31$ (6)

Lời giải

a) Ta có (1) $\Leftrightarrow (-4x):(-4) > 12:(-4) \Leftrightarrow x > -3$

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $x > -3$.

b) Ta có (2) $\Leftrightarrow (-x)\ :\ (-1) < 2\ :\ (-1) \Leftrightarrow x < -2$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $x < -2$.

c) Ta có (3) $\Leftrightarrow x < \dfrac{4}{3}$

Vậy nghiệm của bất phương trình (3) là $x \le \dfrac{4}{3}$.

d) Ta có (4) $\Leftrightarrow -2x \ge -5$.

$$\Leftrightarrow (-2\text{x}):(-2) \le (-5):(-2)$$

$$\Leftrightarrow \text{x} \le \frac{5}{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (4) là $x \le \dfrac{5}{2}$.

e) Ta có $(5) \Leftrightarrow -5x \le 27-2$

$$\Leftrightarrow -5x:(-5) \ge 25:(-5)$$
$$\Leftrightarrow x \ge -5$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (5) là $x \ge -5$

f) Ta có $(6) \Leftrightarrow -4x \ge 31-3$

$$\Leftrightarrow -4x:(-4) \le 28:(-4)$$
$$\Leftrightarrow x \le -7$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (6) là $x \le -7$

Bài toán 3. Giải bất phương trình:

a) $\dfrac{2}{3}x > -6 \qquad (1)$

b) $3 - \dfrac{1}{4}x > 2 \qquad (2)$

c) $6 - \dfrac{3}{5}x < 4 \qquad (3)$

d) $\dfrac{6-4x}{5} \le 1 \qquad (4)$

Lời giải

a) Ta có $(1) \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}x.\dfrac{3}{2} > -6.\dfrac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow -x > -9$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $-x > -9$

b) Ta có $(2) \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x > 2-3$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{4}x\right).(-4) < (-1).(-4)$

$\Leftrightarrow x < 4$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $x < 4$

c) Ta có $(3) \Leftrightarrow -\frac{3}{5}x < 4-6$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{3}{5}x\right).\left(-\frac{5}{3}\right) > (-2).\left(-\frac{5}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x > \frac{10}{3}$

Vậy nghiệm của bất phương trình (3) là $x > \frac{10}{3}$

d) Ta có $(4) \Leftrightarrow 5.\frac{6-4x}{5} \le 5.1$

$\Leftrightarrow 6-4x \le 5$

$\Leftrightarrow -4x \le -1$

$\Leftrightarrow -4x:(-4) \ge (-1):(-4)$

$\Leftrightarrow x \ge \frac{1}{4}$

Vậy nghiệm của bất phương trình (4) là $x \ge \frac{1}{4}$

Bài toán 4. Giải bất phương trình:

a) $\frac{1-2x}{4} - 2 < \frac{1-5x}{8} \quad (1)$

b) $3 - \frac{1}{4}x > 2 \quad (2)$

Hướng dẫn: Quy đồng mẫu thức ở cả hai vế

Lời giải

a) Ta có $(1) \Leftrightarrow \frac{2(1-2x)-2.8}{8} < \frac{1-5x}{8}$

$\Leftrightarrow 2-4x-16 < 1-5x$

$\Leftrightarrow 5x-4x < 1+14$

$\Leftrightarrow x < 15$

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $x < 15$

b) Ta có $(2) \Leftrightarrow \frac{3(x-1)-12}{12} > \frac{4(x+1)+8.12}{12}$

$\Leftrightarrow 3x-3-12>4x+4+96$
$\Leftrightarrow 3x-4x>100+15$
$\Leftrightarrow -x>115$
$\Leftrightarrow -x.(-1)<115.(-1)$
$\Leftrightarrow x<-115$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $\Leftrightarrow x<-115$

Bài toán 5. Giải bất phương trình:

a) $2x+1>2(x+1)$ (1) b) $5+5x<5(x+2)$ (2)

c) $3(x-2)(x+2)<3x^2+x$ (3) d) $(x+4)(5x-1)>5x^2+16x+2$ (4)

Hướng dẫn: Rút gọn và đưa về dạng $ax+b>0$ hoặc $ax+b<0$

Lời giải

a) Ta có $(1)\Leftrightarrow 2x+1>2x+2$

$\Leftrightarrow 2x-2x>2-1$
$\Leftrightarrow 0x>1(sai)$

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn bất phương trình đã cho.

b) Ta có $(2)\Leftrightarrow 5+5x<5x+10$

$\Leftrightarrow 5x-5x<10-5$
$\Leftrightarrow 0x<5(luôn\ đúng\ \forall x\in\mathbb{R})$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là tập hợp $\mathbb{R}$

c) Ta có $(3)\Leftrightarrow 3(x^2-4)<3x^2+x$

$\Leftrightarrow 3x^2-12<3x^2+x$
$\Leftrightarrow -12<x$
$\Leftrightarrow x>-12$

Vậy nghiệm của bất phương trình (3) là $x>-12$

d) Ta có $(4)\Leftrightarrow 5x^2+20x-x-4>5x^2+16x+2$

$\Leftrightarrow 19x-16x>2+4$
$\Leftrightarrow 3x>6$
$\Leftrightarrow x>6:3$
$\Leftrightarrow x>2$

Vậy nghiệm của bất phương trình (4) là $x>2$

Bài toán 6. Tìm x, sao cho:

a) $(x-1)x<0$ (1) b) $(x-2)(x-5)>0$ (2)

c) $\dfrac{x+2}{x-3}>0$ (3) d) $\dfrac{x+1}{x+5}>0$ (4)

Hướng dẫn: Ta xét dấu một tích hoặc một thương. Không nhân hai nhị thức ở bài a); b). Không nhân hai vế với mẫu bài c); d).

Lời giải

a) *Trường hợp 1:* $x>0$ và $x-1<0 \Leftrightarrow x>0$ và $x<1 \Leftrightarrow 0<x<1$.

Trường hợp 2: $x<0$ và $x-1>0 \Leftrightarrow x<0$ và $x>1$ (không tồn tại x)

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $0<x<1$

b) *Trường hợp 1:* $x-2>0$ và $x-5>0 \Leftrightarrow x>2$ và $x>5 \Leftrightarrow x>5$.

Trường hợp 2: $x-2<0$ và $x-5<0 \Leftrightarrow x<2$ và $x<5 \Leftrightarrow x<2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $x>5$ hoặc $x<2$

c) *Trường hợp 1:* $x+2<0$ và $x-3>0$

$x<-2$ và $x>3$ (không tồn tại x)

Trường hợp 2: $x+2>0$ và $x-3<0$

$x>-2$ và $x<3$

$\Leftrightarrow -2<x<3$

Vậy nghiệm của bất phương trình (3) là $-2<x<3$

d) Tương tự b).

Vậy nghiệm của bất phương trình (4) là $x>-1$ hoặc $x<-5$

Bài toán 7. Với giá trị nào của x thì:

a) Giá trị phân thức $\frac{5-2x}{6}$ lớn hơn giá trị phân thức $\frac{5x-2}{3}$?

b) Giá trị phân thức $\frac{1,5-x}{5}$ nhỏ hơn giá trị phân thức $\frac{4x+5}{2}$?

Hướng dẫn: a) Tìm x sao cho $\frac{5-2x}{6}>\frac{5x-2}{3}$

Lời giải

a) Xét bất phương trình $\frac{5-2x}{6}>\frac{5x-2}{3}$ $(*)$

Ta có $(*) \Leftrightarrow \frac{5-2x}{6}>\frac{2(5x-2)}{6}$

$\Leftrightarrow 5-2x>10x-4$

$\Leftrightarrow -2x-10x>-5-4$

$\Leftrightarrow -12x>-9$

$\Leftrightarrow x<\frac{-9}{-12} \Leftrightarrow x<\frac{3}{4}$

Đáp số: $x<\frac{3}{4}$

b) Xét bất phương trình $\frac{1,5-x}{5}<\frac{4x+5}{2}$ $(*)$

Ta có $(*) \Leftrightarrow \frac{2(1,5-x)}{10}<\frac{5(4x+5)}{10}$

$\Leftrightarrow 3-2x<20x+25$
$\Leftrightarrow -2x-20x<25-3$
$\Leftrightarrow -22x<22$
$\Leftrightarrow x>\frac{22}{-22} \Leftrightarrow x>-1$

Đáp số: $x>-1$

II. Bài toán có tham số

Bài toán 8.

a) Tìm m để phương trình $x-3=2m+4$ có nghiệm dương?

b) Tương tự phương trình $2x-5=m+8$ có nghiệm âm?

Hướng dẫn: Giải phương trình bậc nhất một ẩn.

Lời giải

a) Ta có $x-3=2m+4 \Leftrightarrow x=2m+7$

Xét $x>0 \Leftrightarrow 2m+7>0 \Leftrightarrow m>-\frac{7}{2}$

b) Ta có $2x-5=m+8 \Leftrightarrow 2x=m+13 \Leftrightarrow x=\frac{m+13}{2}$

Xét $x<0 \Leftrightarrow \frac{m+13}{2}<0 \Leftrightarrow m+13<0 \Leftrightarrow m<-13.$

Bài toán 9. Giải và biện luận bất phương trình:

$$m(x-m)>x-1 \quad (*)$$

Hướng dẫn: Đưa về dạng $ax+b>0$.

Lời giải

Ta có $(*) \Leftrightarrow mx-m^2>x-1 \Leftrightarrow mx-x>m^2-1$

$\Leftrightarrow (m-1)x>m^2-1 \quad (**)$

+) *Trường hợp 1:* $m-1>0 \Leftrightarrow m>1$

Ta có $(*) \Leftrightarrow x>\frac{m^2-1}{m-1} \Leftrightarrow x>m+1$

+) *Trường hợp 2:* $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$

Ta có $(*) \Leftrightarrow 0x>0$ (không tồn tại x)

+) *Trường hợp 3:* $m-1<0 \Leftrightarrow m<1$

Ta có $(*) \Leftrightarrow x < \dfrac{m^2-1}{m-1} \Leftrightarrow x < m+1$

Đáp số: $\bullet\, m>1$: Tập nghiệm của $(*): S = \{x | x > m+1\}$

$\bullet\, m=1$: Tập nghiệm của $(*): S = \varnothing$

$\bullet\, m<1$: Tập nghiệm của $(*): S = \{x | x < m+1\}$

Nhận xét: Bất phương trình $ax+b>0$, ta phải xét ba trường hợp: $a<0$; $a=0$ hoặc $a>0$

* Bạn có thể giải bài toán sau:

Giải và biện luận bất phương trình: $mx+1 \geq mx+m^2$

Bài toán 10. Một ngân hàng áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 12 tháng là $7,5\%$ năm. Bà Ngân dự kiến gửi một khoản tiền vào ngân hàng này và cần số tiền lãi hàng năm ít nhất là 50 triệu để chi tiêu. Hỏi số tiền bà Ngân cần gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

Lời giải

Gọi x (triệu đồng) là số tiền bà Ngân cần gửi tiết kiệm. Ta có số tiền lãi gửi tiết kiệm x (triệu đồng) trong một năm là $0,075x$ (triệu đồng)

Muốn có số tiền lãi ít nhất là 50 triệu đồng/ năm thì ta phải có:

$0,075x \geq 50$

$x \geq 50 : 0,075$

$x \geq 666,(6)$

Vậy bà Ngân cần gửi ngân hàng ít nhất 667 triệu đồng.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

A. TRẮC NGHIỆM:

1. Nghiệm của bất phương trình $-2x+1<0$ là:

A. $x<\frac{1}{2}$. **B.** $x>\frac{1}{2}$. **C.** $x\le\frac{1}{2}$. **D.** $x\ge\frac{1}{2}$.

2. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x}{2x+1}+\frac{3}{x-5}=\frac{x}{(2x+1)(x-5)}$ là:

A. $x\ne-\frac{1}{2}$. **B.** $x\ne-\frac{1}{2}$ và $x\ne-5$.

C. $x\ne-5$. **D.** $x\ne-\frac{1}{2}$ hoặc $x\ne5$.

3. Phương trình $x-1=m+4$ có nghiệm lớn hơn 1 với:

A. $m\ge-4$. **B.** $m\le4$. **C.** $m>-4$. **D.** $m<-4$.

4. Nghiệm của bất phương trình $1-2x\ge2-x$ là:

A. $x>\frac{1}{2}$. **B.** $x<\frac{1}{2}$. **C.** $x\le-1$. **D.** $x\ge-1$.

5. Cho a > b. Khi đó ta có:

A. $2a>3b$. **B.** $2a>2b+1$. **C.** $5a+1>5b+1$. **D.** $-3a<-3b-3$.

Hướng dẫn - Đáp số

1. $-2x+1<0\Leftrightarrow1<2x\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

Chọn B.

Cách khác: $-2x+1<0\Leftrightarrow-2x<-1$

$(-2x):(-2)>(-1):(-2)$

$\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

2. ĐKXĐ: $2x+1\ne0$ và $x-5\ne0$

$\Leftrightarrow x\ne-\frac{1}{2}$ và $x\ne5$

Chọn D.

3. $x-1=m+4\Leftrightarrow x=m+4+1\Leftrightarrow x=m+5$

Xét $m+5>1\Leftrightarrow m>-4$.

Chọn C.

4. $1-2x\ge2-x\Leftrightarrow-x\ge1\Leftrightarrow x\le-1$

Chọn C.

5. $a>b\Rightarrow5a>5b\Rightarrow5a+1>5b+1$

Chọn C.

B. TỰ LUẬN

1. Giải các phương trình sau:

a) $(3x-1)^2-(x+2)^2=0$;   b) $x(x+1)=2(x^2-1)$.

2. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{2}{x+5}=\dfrac{x^2}{x^2-25}$;   b) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x}{x^2-x+1}=\dfrac{3}{x^3+1}$

3. Cho a < b, hãy so sánh:

a) $a+b+5$ với $2b+5$;   b) $-2a-3$ với $-(a+b)-3$.

4. Giải các bất phương trình:

a) $2x+3(x+1)>5x-(2x-4)$;   i) $(x+1)(2x-1)<2x^2-4x+1$.

5. a) Chứng minh ràng: nếu $x>0$ và $y>0$ thì $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\ge 2$.

b) Chứng minh bất đẳng thức: $a^4+1\ge a(a^2+1)$

6. Giải bất phương trình:

a) $(x+2)^2+3(x+1)\ge x^2-4$ (1)   b) $\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}\le x-\dfrac{x-3}{4}$ (2)

7. Giải bất phương trình:

a) $(x+1)(2x-2)-3>-5x-(2x+1)(3-x)$ (1)

b) $(x-3)^2+4(2-x)>x(x+7)$ (2)

8. a) Cho $-3a>2a$. Chứng tỏ a âm.

b) Cho $2x+y=5$. Chứng tỏ $x^2+y^2\ge 5$.

9. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=|2-x|+3$.

10. Giải bất phương trình:

a) $\dfrac{x-1}{x+1}>0$;   b) $\dfrac{x-2}{x-1}<0$.

Hướng dẫn giải

1. a) $(3x-1)^2-(x+2)^2=0$

$\Leftrightarrow [(3x-1)-(x+2)]\cdot[(3x-1)+(x+2)]=0$

$\Leftrightarrow (2x-3)(4x+1)=0$

$\Leftrightarrow 2x-3=0$ hoặc $4x+1=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ hoặc $x=-\dfrac{1}{4}$.

b) $x(x+1)=2(x^2-1)$

$\Leftrightarrow x(x+1)-2(x-1)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left[x-2(x-1)\right]=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(2-x)=0$

$\Leftrightarrow x+1=0$ hoặc $2-x=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=2$

2. a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 5$. Khi đó:

$\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{2}{x+5}=\dfrac{x^2}{x^2-25}$. MTC: x^2-25

$\Leftrightarrow x(x+5)-2(x-5)=x^2$

$\Leftrightarrow x^2+5x-2x+10=x^2$

$\Leftrightarrow 3x=-10 \Leftrightarrow x=-\dfrac{10}{3}$ (nhận)

Phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{10}{3}$.

b) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x}{x^2-x+1}=\dfrac{3}{x^3+1}$ (*)

MTC: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

ĐKXĐ: $x^3+1 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Khi đó:

(*) $\Leftrightarrow (x^2-x+1)-x(x+1)=3$

$\Leftrightarrow x^2-x+1-x^2-x=3$

$\Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1$ (loại)

Vậy phương trình (*) vô nghiệm.

3. a) Ta có: $a<b \Rightarrow a+b<b+b \Rightarrow a+b<2b$

$$\Rightarrow a+b+5<2b+5.$$

b) Ta có: $a<b \Rightarrow -a>-b$

$\Rightarrow -a-a>-b-a$

$\Rightarrow -2a>-(a+b)$

$\Rightarrow -2a-3>-(a+b)-3$

4. a) $2x+3(x+1)>5x-(2x-4)$

$\Leftrightarrow 2x+3x+3>5x-2x+4$

$\Leftrightarrow 2x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x>\frac{1}{2}$.

b) $x+1)(2x-1)<2x^2-4x+1$

$\Leftrightarrow 2x^2-x+2x-1<2x^2-4x+1$

$\Leftrightarrow 5x<2$

$\Leftrightarrow x<\frac{2}{5}$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x<\frac{2}{5}$

5. a) Ta có: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy}\geq 2 \Leftrightarrow xy\frac{x^2+y^2}{xy}\geq 2xy$ (vì $x>0$ và $y>0 \Rightarrow xy>0$)

$\Leftrightarrow x^2+y^2\geq 2xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$ (luôn đúng)

b) Ta có: $a^4+1\geq a(a^2+1)$

$\Leftrightarrow a^4+1\geq a^3+a$

$\Leftrightarrow a^4-a^3+1-a\geq 0$

$\Leftrightarrow a^3(a-1)-(a-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)(a^3-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2(a^2+a+1)\geq 0$

Ta thấy $a^2+a+1=a^2+2a\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4}=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0$

Vì $a^2+a+1>0$ với mọi $a\in\mathbb{R}$, $(a-1)^2\ge 0$ với mọi $a\in\mathbb{R}$.
Vậy $(a-1)^2\left(a^2+a+1\right)\ge 0$ với mọi $a\in\mathbb{R}$.

6. a) $(1)\Leftrightarrow x^2+4x+4+3x+3\ge x^2-4$

$\Leftrightarrow 7x+7\ge -4$

$\Leftrightarrow 7x\ge -11$

$\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{11}{7}$

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $x\ge -\dfrac{11}{7}$

b) (2) $\Leftrightarrow 6(x-1)-4(x-2)\le 12x-3(x-3)$

$\Leftrightarrow 6x-6-4x+8\le 12x-3x+9$

$\Leftrightarrow 2x+2\le 9x+9$

$\Leftrightarrow -7x\le 7$

$\Leftrightarrow x\ge -1$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $x\ge -1$.

7.a) (1) $\Leftrightarrow 2x^2-2x+2x-2-3>-5x-\left(6x+2x^2+3-x\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2-5\ge -5x-6x+2x^2-3+x$

$\Leftrightarrow 10x\ge 2$

$\Leftrightarrow x\ge \dfrac{1}{5}$

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $x\ge \dfrac{1}{5}$.

b) (2) $\Leftrightarrow x^2-6x+9+8-4x>x^2+7x$

$\Leftrightarrow -17x>-17$

$\Leftrightarrow x<\dfrac{-17}{-17}$

$\Leftrightarrow x<1$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $x<1$.

8. a) Ta có: $-3a>2a\Rightarrow -3a-2a>0\Rightarrow -5a>0\Rightarrow a<0$

b) Vì $2x+y=5\Rightarrow y=5-2x$

Vậy $x^2+y^2=x^2+(5-2x)^2$

$=x^2+25-20x+4x^2$

$=5x^2-20x+25$

$=5\left(x^2-4x+4\right)+5$

$=5(x-2)^2+5\geq 5$ (vì $(x-2)^2\geq 0$)

Dấu "=" xảy ra *khi* $x=2, y=1$.

9. Ta có $|2-x|\geq 0$ với mọi $x\Rightarrow |2-x|+3\geq 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 3.

Dấu "=" xảy ra khi $2-x=0\Leftrightarrow x=2$.

10. a) Trường hợp 1: $x-1>0$ và $x+1>0\Rightarrow x>1$ và $x>-1\Rightarrow x>1$.

Trường hợp 2: $x-1<0$ và $x+1<0\Rightarrow x<1$ và $x<-1\Rightarrow x<-1$.

Vậy $x>1$ hoặc $x<-1$.

b) Trường hợp 1: $x-2>0$ và $x-1<0$

$\Leftrightarrow x>2$ và $x<1$ (vô nghiệm)

Trường hợp 2: $x-2<0$ và $x-1>0\Leftrightarrow x<2$ và $x>1\Leftrightarrow 1<x<2$

Đáp số: $1<x<2$.

Chương III. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA

Bài 7. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Căn bậc hai

* Căn bậc hai của số thực không âm a là số thực x sao cho $x^2 = a$.
Nhận xét:

- Số âm không có căn bậc hai;
- Số 0 có một căn bậc hai duy nhất là 0;
- Số dương a có đúng hai căn bậc hai đối nhau là $\sqrt{a}$ (căn bậc hai số học của a) và $-\sqrt{a}$.

* Tính chất của căn bậc hai: $\sqrt{a^2} = |a|$ với mọi số thực a.

2. Căn thức bậc hai:

* Định nghĩa
Căn thức bậc hai là biểu thức có dạng $\sqrt{A}$, trong đó A là một biểu thức đại số. A được gọi là biểu thức lấy căn hoặc biểu thức dưới dấu căn.
$\sqrt{A}$ xác định khi A lấy giá trị không âm, ta thường viết là $A \ge 0$. Ta nói $A \ge 0$ là điều kiện xác định (hay điều kiện có nghĩa) của $\sqrt{A}$.

* Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$
Tương tự như căn bậc hai của một số thực không âm, với A là một biểu thức, ta cũng có:

+ Với $A \ge 0$, ta có $\sqrt{A} \ge 0, (\sqrt{A})^2 = A$;

+ $\sqrt{A^2} = |A|$

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tìm căn bậc hai của một số

Bài toán 1. Tìm các căn bậc hai của $4; \dfrac{16}{9}; 3$.

Lời giải

Ta có: $4 > 0$ nên 4 có hai căn bậc hai là 2 và -2 vì $2^2 = 4$ và $(-2)^2 = 4$

Ta có: $\dfrac{16}{9} > 0$ nên $\dfrac{16}{9}$ có hai căn bậc hai là $\dfrac{4}{3}$ và $-\dfrac{4}{3}$ vì $\left(\pm\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$.

Ta có $3 > 0$ nên 3 có hai căn bậc hai là $\sqrt{3}$ và $-\sqrt{3}$. Vì $(\pm\sqrt{3})^2 = 3$.

Bài toán 2. Giải phương trình:

a) $x^2 = 4$; b) $x^2 = 2$; c) $x^2 = -2$; d) $x^2 = 0$.

Hướng dẫn: Nghiệm của phương trình $x^2 = a$ (với $a \ge 0$) là các căn bậc hai của a.

Lời giải

a) Ta có $4>0$ nên 4 có hai căn bậc hai là 2 và -2 vì $(\pm 2)^2=4$.

Vậy $x^2=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Tập nghiệm của phương trình $x^2=4$ là $S=\{-2;2\}$.

b) Ta có $2>0$ nên 2 có hai căn bậc hai là $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$ vì $(\pm\sqrt{2})^2=2$.

Vậy $x^2=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Tập nghiệm của phương trình $x^2=2$ là $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$.

c) Ta có: $-2<0$ nên -2 không có căn bậc hai $\Rightarrow$ phương trình $x^2=-2$ vô nghiệm.

Vậy $S=\varnothing$.

d) Ta có $x^2=0 \Rightarrow x=0$.

Tập nghiệm phương trình $x^2=0$ là $S=\{0\}$.

(Bạn đừng nhầm với $S=\varnothing$ và $S=\{0\}$).

Ta có thể giải cách khác nhau sau, chẳng hạn.

* $x^2=4 \Leftrightarrow x^2-2^2=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

* $x^2=2 \Rightarrow x^2-2=0 \Rightarrow x^2-(\sqrt{2})^2=0 \Rightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bài toán 3. Tìm căn bậc hai số học của số sau:

a) 144; b) $\frac{16}{9}$; c) $1,21$; d) $(-1,69)^2$.

Hướng dẫn: Gọi x (không âm) là căn bậc hai số học của số a, ta có: $x^2=a$, ta đưa về bài toán 2 .

Lời giải

a) Gọi $x(x\ge 0)$ là căn bậc hai số học của 144, ta có: $144>0$, nên 144 có một căn số học là 12, ta viết: $\sqrt{144}=12$ vì $12^2=144$.

b) Ta có: $\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$ vì $\begin{cases} \frac{4}{3}>0 \\ \left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9} \end{cases}$.

c) Ta có: $\sqrt{1,21}=1,1$ vì $\begin{cases} 1,1>0 \\ (1,1)^2=1,21 \end{cases}$.

d) Ta có $\sqrt{(-1,69)^2}=\sqrt{(1,69)^2}=1,69$ vì $1,69>0$.

II. Phương trình dạng: $\sqrt{A}=B$

Cách giải: $\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \begin{cases} B\ge 0 \\ A=B^2 \end{cases}$.

(Thực chất của vấn đề là ta đã bình phương hai vế, vì $(\sqrt{A})^2=A$).

Bài toán 4. Giải phương trình:

a) $\sqrt{x}=3$; b) $\sqrt{x-2}=1$; c) $\sqrt{x}=x$; d) $\sqrt{6-4x+x^2}=x+4$.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{x}=3 \Rightarrow \begin{cases} 3\ge 0 \text{ (luôn đúng)} \\ x=3^2 \end{cases} \Rightarrow x=9$. Tập nghiệm: $S=\{9\}$.

b) Ta có $\sqrt{x-2}=1 \Rightarrow \begin{cases} 1\ge 0 \text{ (luôn đúng)} \\ x-2=1 \end{cases} \Rightarrow x=3$. Tập nghiệm: $S=\{3\}$.

c) Ta có $\sqrt{x}=x \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x(x-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$. Tập nghiệm: $S=\{0;1\}$

.

d) Ta có $\sqrt{6-4x+x^2}=x+4 \Rightarrow \begin{cases} x+4\ge 0 \\ 6-4x+x^2=(x+4)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ 6-4x+x^2=x^2+8x+16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ 12x=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ x=-\dfrac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow x=-\dfrac{5}{6}$. Tập nghiệm: $S=\left\{-\dfrac{5}{6}\right\}$

.

Bài toán 5. Giải phương trình:

a) $\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1}=0$; b) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x^2+5x+4}=0$.

Hướng dẫn: Ta đưa về dạng $\sqrt{A}=\sqrt{B}$

Ta có $\begin{cases} \sqrt{B}\ge 0 \\ A=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B\ge 0 \\ A=B \end{cases}$.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1}=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-1}=\sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x^2-1=x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-x=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x(x-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x=0 \vee x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x=0 \vee\ x=1 \end{cases} \Rightarrow x=1$.

Tập nghiệm: $S=\{1\}$.

Chú ý: Ta có thể xét $\sqrt{A}=\sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A\ge 0 \\ A=B^2 \end{cases}$, nhưng ở bài toán này, ta không nên đặt $x^2-1\ge 0$.

Ta xét bài toán b) sau đây:

b) Ta có: $\sqrt{x+4}-\sqrt{x^2+5x+4}=0 \quad \Rightarrow \sqrt{x+4}=\sqrt{x^2+5x+4} \quad \Rightarrow \begin{cases} x+4\ge 0 \\ x^2+5x+4=x+4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ x^2+4x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ x(x+4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ x=0 \vee x+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ x=0 \vee x=-4 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4 \end{array}\right.$.

Tập nghiệm: $S=\{-4;0\}$.

Ta có thể xét bài toán tương tự sau đây: $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}=0$

Vì $\sqrt{x^2-1}\ge 0$ và $\sqrt{x-1}\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}\ge 0$.

Vậy $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ \sqrt{x-1}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Rightarrow x=1$.

Bạn hãy giải phương trình sau:

1) $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x-3}=0$ Đáp số: $x=3$

2) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x-1}=0$ Đáp số: $x=1$

3) $\{x-2<1=\sqrt{1}$ Đáp số: $x=4$.

III. Tìm điều kiện xác định của biểu thức

Bài toán 6. Tìm x để cho căn thức sau có nghĩa.

a) $\sqrt{-2x+1}$ b) $\sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$ c) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}$ d) $\sqrt{\dfrac{-3}{x^2+1}}$

Hướng dẫn: $\sqrt{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A\ge 0$; $\dfrac{1}{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A\ne 0$.

Lời giải

a) $\sqrt{-2x+1}$ xác định(có nghĩa) $\Rightarrow -2x+1\ge 0 \Rightarrow 2x\le 1 \Rightarrow x\le \dfrac{1}{2}$.

b) $\sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$ xác định $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+2}\ge 0 \\ x+2\ne 0 \end{cases} \Rightarrow x+2>0 \Rightarrow x>-2$.

c) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}$ xác định $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\ge 0 \\ x^2\ne 0 \end{cases} \Rightarrow x\ne 0$.

d) $\sqrt{\dfrac{-3}{x^2+1}}$ xác định $\Rightarrow \dfrac{-3}{x^2+1}\ge 0$ (không tồn tại).

Bài toán 7. Tìm x để căn thức sau có nghĩa.

a) $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ b) $\sqrt{x(1-x)}$ c) $\sqrt{\dfrac{1+x}{2-x}}$

Hướng dẫn: Ta tìm điều kiện cho tất cả các căn bậc hai xác định.

Lời giải

a) $\sqrt{x}$ và $\sqrt{1-x}$ xác định $\Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 1-x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \le x \le 1$

b) $\sqrt{x(1-x)}$ xác định $\Rightarrow x(1-x) \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 1-x \ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \le 0 \\ 1-x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \le 0 \\ x \ge 1 \end{cases}$ (vô lí)

$\Rightarrow 0 \le x \le 1$

c) $\sqrt{\dfrac{1+x}{2-x}}$ xác định $\Rightarrow \dfrac{1+x}{2-x} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+x \ge 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 1+x \le 0 \\ 2-x < 0 \end{cases} \Rightarrow -1 \le x < 2$

Bài toán 8. Tìm x để biểu thức sau xác định :

a) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$ b) $\sqrt{x^2-1}$ c) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 2.

Lời giải

a) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$ xác định $\Rightarrow (x-1)(x-3) \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x-3 \ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-1 \le 0 \\ x-3 \le 0 \end{cases} \Rightarrow x \ge 3$ hoặc $x \le 1$

b) $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{(x-1)(x+1)}$

Vậy $\sqrt{x^2-1}$ xác định $\Rightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-1 \le 0 \\ x+1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow x \ge 1$ hoặc $x \le -1$

c) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ xác định $\Rightarrow \dfrac{x-1}{x-2} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-1 \le 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$ hoặc $x \le 1$

IV. Rút gọn biểu thức

Bài toán 9. Rút gọn:

a) $A = \sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$ b) $B = \sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$ c) $C = \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} - \sqrt{3}$

Hướng dẫn: Áp dụng hằng đẳng thức: $\sqrt{A^2} = |A|$.

Lời giải

a) Ta có : $A = \left|\sqrt{3}-2\right| = -\left(\sqrt{3}-2\right)$; vì $\sqrt{3}-2 < 0$

Vậy $A = 2-\sqrt{3}$.

b) Ta có : $B = \left|2-\sqrt{5}\right| = -\left(2-\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}-2$;(vì $2-\sqrt{5} < 0$).

c) Ta có: $C = \left|\sqrt{3}-1\right| - \sqrt{3} = \left(\sqrt{3}-1\right) - \sqrt{3} = -1$ (vì $\sqrt{3}-1 > 0$).

Bài toán 10. Rút gọn:

a) $A=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ b) $B=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

c) $C=\sqrt{23+8\sqrt{7}}-\sqrt{7}$ d) $D=\sqrt{11-6\sqrt{2}}-3+\sqrt{2}$

Hướng dẫn: a) Ta có $3+2\sqrt{2}=1+2.1.\sqrt{2}+2 \quad =1^2+2.1.\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$

$\Rightarrow \sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)2}=\left|1+\sqrt{2}\right|=1+\sqrt{2}$.

(Các biểu thức khác được làm tương tự).

Lời giải

a) Ta có : $A=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}-\sqrt{2-2\sqrt{2}+1} \quad =\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+2.\sqrt{2}.1+1^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}.1+1^2}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} \quad =\left|\sqrt{2}+1\right|-\left|\sqrt{2}-1\right|=\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)=2$

b) Ta có: $B=\sqrt{4-2.2\sqrt{3}+3}+\sqrt{4+2.2\sqrt{3}+3} \quad =\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$

$=\left|2-\sqrt{3}\right|+\left|2+\sqrt{3}\right|=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$

c) Ta có: $C=\sqrt{16+2.4.\sqrt{7}+7}-\sqrt{7} \quad =\sqrt{\left(4+\sqrt{7}\right)^2}-\sqrt{7}=\left|4+\sqrt{7}\right|-\sqrt{7} \quad =4+\sqrt{7}-\sqrt{7}=4$

d) Ta có: $D=\sqrt{9-2.3\sqrt{2}+2}-3+\sqrt{2} \quad =\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}-3+\sqrt{2}=\left|3-\sqrt{2}\right|-3+\sqrt{2}$

$=3-\sqrt{2}-3+\sqrt{2}=0$

Bài toán 11. Rút gọn biểu thức: a) A = $\sqrt{x^2-12x+36}-x$

b) B = $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}$ c) C = $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

Hướng dẫn:

a) ta có: $x^2-12x+36=\left(x-6\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\left(x-6\right)^2}=\left|x-6\right|$

b), c) Đưa các biểu thức trong một dấu căn trở thành bình phương của một tổng hoặc một hiệu.

Lời giải

a) Ta có: A = $\sqrt{\left(x-6\right)^2}-x=\left|x-6\right|-x \quad \Rightarrow \begin{cases} x-6-x, \text{ nếu } x\ge 6 \\ -\left(x-6\right)-x, \text{ nếu } x<6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6, \text{ nếu x} \ge 6 \\ \text{6-2x, nếu } x<6 \end{cases}$

b) Ta có: B = $\sqrt{\left(x-2\right)-2\sqrt{x-2}.1+1}+\sqrt{x-2+2\sqrt{-2}.1+1}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-2}+1\right)^2}=\left|\sqrt{x-2}-1\right|+\left|\sqrt{x-2}+1\right|$

Trường hợp 1:

Nếu $\sqrt{x-2}-1\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x-2}\ge 1 \Rightarrow x-2\ge 1 \Rightarrow x\ge 3$, ta có B = $\sqrt{x-2}-1+\sqrt{x-2}+1=2\sqrt{x-2}$

Trường hợp 2:

Nếu $\sqrt{x-2}-1\le 0\Rightarrow x-2<1\Rightarrow 0\le x-2<1\Rightarrow 2\le x<3$ Ta có:

$B=-\left(\sqrt{x-2}-1\right)+\left(\sqrt{x-2}+1\right)=2$

Vậy: Nếu $x\ge 3$, ta có $B=2\sqrt{x-2}$

Nếu $2\le x<3$ ta có $B=2$

c) Ta có $C=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|$

Trường hợp 1:

Nếu $\sqrt{x-1}-1\ge 0\Rightarrow x\ge 2$ Ta có $C=2\sqrt{x-1}$

Trường hợp 2:

Nếu $\sqrt{x-1}-1<0\Rightarrow \sqrt{x-1}<\sqrt{1}\Rightarrow 0\le x-1<1\Rightarrow 1\le x<2$

Ta có: $C=\sqrt{x-1}+1-\left(\sqrt{x-1}-1\right)=2$

Vậy: Nếu $x\ge 2$ ta có $C=2\sqrt{x-1}$

Nếu $1\le x<2$ ta có $C=2$

Cách giải khác: (đối với bài toán c).

Đặt $u=\sqrt{x-1}\Rightarrow\begin{cases}u>0\\u^2=x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u\ge 0\\x=u^2+1\end{cases}$

Khi đó, ta có: $C=\sqrt{u^2+1+2u}+\sqrt{u^2+1-2u}=\sqrt{(u+1)^2}+\sqrt{(u-1)^2}=|u+1|+|u-1|$

Trường hợp 1:

Nếu $u-1\ge 0\Rightarrow u\ge 1\Rightarrow \sqrt{x-1}\ge 1\Rightarrow x\ge 2$ Ta có: $C=2u=2\sqrt{x-1}\,(u\ge 0\Rightarrow u+1>0)$

Trường hợp 2:

Nếu $u-1<0\Rightarrow u<1\Rightarrow \sqrt{x-1}<1$

$u\ge 0\Rightarrow \sqrt{x-1}\ge 0\Rightarrow x\ge 1\Rightarrow \sqrt{x-1}<1\Rightarrow x-1<1\Rightarrow x<2$

Vậy $1\le x<2$

Ta có: $C=u+1-(u-1)=2$

(Bạn có thể giải lại bài toán b, theo cách này)

Bài toán 12. Tính giá trị của biểu thức

a) $A=-4x-2+\sqrt{9x^2-6x+1}$, với $x=2014$

b) $B=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+4x+4}$, với $x=2015$

Hướng dẫn: Đưa biểu thức dưới dấu căn trở thành bình phương một tổng hoặc một hiệu và áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$.

Lời giải

a) Ta có: $A=-4x-2+\sqrt{(3x-1)^2}=-4x-2+|3x-1|$

Thay $x=2014$ vào biểu thức trên, ta được:

$A=-4.2014-2+|3.2014-1|=-4.2014-2+3.2014-1=-2014-3=-2017$

b) Ta có: $B=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+2)^2}=|x-2|+|x+2|$

Thay $x=2015$ vào biểu thức trên, ta được:
$B=|2015-2|+|2015+2|=2015-2+2015+2=4030$

V. Giải phương trình

Bài toán 13. Giải phương trình

a) $\sqrt{x^2}=5$ b) $\sqrt{25x^2}=10$ c) $\sqrt{9x^2}=2x+1$ d) $\sqrt{x^2+6x+9}=3x-1$

Hướng dẫn: Biến đổi biểu thức dưới dấu căn trở thành bình phương của một tổng hoặc một hiệu và áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{x^2}=5\Rightarrow |x|=5\Rightarrow \begin{cases}5\ge 0\ (\text{luôn đúng})\\ x=\pm 5\end{cases}\Rightarrow x=\pm 5$

Tập hợp nghiệm: $S=\{-5;5\}$.

b) Ta có: $\sqrt{25x^2}=10\Rightarrow \sqrt{(5x)^2}=10\Rightarrow |5x|=10\Rightarrow \begin{cases}10\ge 0\ (\text{luôn đúng})\\ 5x=\pm 10\end{cases}\Rightarrow x=\pm 2$

Tập hợp nghiệm: $S=\{-2;2\}$.

c) Ta có: $\sqrt{9x^2}=2x+1\Rightarrow \sqrt{(3x)^2}=2x+1\Rightarrow |3x|=2x+1\ (*)$

Điều kiện $2x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge \frac{-1}{2}$

Khi đó: (*) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}3x=2x+1\\ 3x=-(2x+1)\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{-1}{5}\left(\text{thoả mãn điều kiện } x\ge \frac{-1}{2}\right)\end{array}\right.$

Tập hợp nghiệm: $S=\left\{-\frac{1}{5};1\right\}$.

VI. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức

Bài toán 14: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

a) $\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-4x+4}$ b) $\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}}$

Hướng dẫn: Áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$

và $|A|+|B|\ge|A+B|$ dấu $"="$ xảy ra $\Rightarrow AB\ge 0$ (A và B cùng dấu hoặc bằng 0).

Lời giải

a) Ta có: $A=|x|+|x-2|=|x|+|2-x|\ge|x+(2-x)|=2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 2.

Dấu $"="$ xảy ra, chẳng hạn $x=0$

(Khi đó thoả mãn điều kiện $x(2-x)\ge 0$)

Chú ý: Ta không cần tìm hết tất cả các giá trị của x thoả mãn $x(2-x)\ge 0$. Nếu ta có: $x(2-x)\ge 0\Rightarrow 0\le x\le 2$).

Ta có thể giải cách khác.

Ta có $A=|x|+|x+2|$

Trường hợp 1:

Nếu $x\ge 2\Rightarrow A=x+x-2=2x-2$

Với $x\ge 2\Rightarrow 2x\ge 4\Rightarrow 2x-2\ge 2$

Giá trị nhỏ nhất của A bằng 2.

Trường hợp 2:

Nếu $0\le x<2\Rightarrow A=x-(x-2)=2$

Trường hợp 3: Nếu $x<0\Rightarrow A=-x-(x-2)=-2x+2$

Vì $x<0\Rightarrow -2x>0\Rightarrow -2x+2>2$

Vậy kết hợp các kết quả của ba trường hợp, ta có: giá trị nhỏ nhất của A bằng 2.

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=0$

b) Ta có: $B=\left|\sqrt{x-3}+1\right|+\left|\sqrt{x-3}+3\right|$

Điều kiện: $x-3\ge 0\Rightarrow x\ge 3$ khi đó biểu thức trong các dấu giá trị tuyệt đối đều dương.

Ta có: $B=\sqrt{x-3}+1+\sqrt{x-3}+3=2\sqrt{x-3}+4$

Vì $x\ge 3\Rightarrow 2\sqrt{x-3}\ge 0\Rightarrow 2\sqrt{x-3}+4\ge 4$

Vậy giải trị nhỏ nhất của B bằng 4.

Dấu $"="$ xảy ra $\Rightarrow x=3$.

Chú ý: Từ kết quả trên, ta có bài toán giải phương trình:

$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}}=4$.

Chương III. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA

BÀI 8. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khai căn bậc hai và phép nhân

Liên hệ giữa phép khai căn bậc hai và phép nhân:

Với A, B là các biểu thức không âm, ta có: $\sqrt{A}.\sqrt{B}=\sqrt{AB}$.

Chú ý: Kết quả trên có thể mở rộng cho nhiều biểu thức không âm, chẳng hạn:

$\sqrt{A}.\sqrt{B}.\sqrt{C}=\sqrt{A.B.C}\left(\text{với } A\ge 0;\ B\ge 0;\ C\ge 0\right)$.

2. Khai căn bậc hai và phép chia

Liên hệ giữa phép khai căn bậc hai và phép chia:

Nếu A, B là các biểu thức với $A\ge 0, B>0$ thì $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\sqrt{\dfrac{A}{B}}$.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Khai căn bậc hai của một tích

Bài toán 1. Tính:

a) $\sqrt{90.4,9}$ b) $\sqrt{12,1.360}$ c) $\sqrt{2,5.14,4}$ d) $\sqrt{2^4.(-3)^2}$

Hướng dẫn: Áp dụng quy tắc khai căn một tích:

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}\ (a\ge 0, b\ge 0), \left(\sqrt{A}\right)^2=\sqrt{A^2}=A\left(A\ge 0\right)$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{90.4,9}=\sqrt{9.49}=\sqrt{9}.\sqrt{49}=3.7=21$

b) Ta có: $\sqrt{12,1.360}=\sqrt{121.36}=\sqrt{121}.\sqrt{36}=11.6=66$

c) Ta có: $\sqrt{2,5.14,4}=\sqrt{36}=6$

Cách khác: $\sqrt{2,5.14,4}=\sqrt{5.144.\dfrac{1}{100}}=5.12.\dfrac{1}{10}=6$

d) Ta có: $\sqrt{2^4.(-3)^2}=\sqrt{\left(2^2\right)^2}.\sqrt{(-3)^2}=4.|-3|=12$

Bài toán 2. Rút gọn rồi tính:

a) $\sqrt{25^2-24^2}$ b) $\sqrt{17^2-8^2}$ c) $\sqrt{117^2-108^2}$ d) $\sqrt{6,8^2-3,2^2}$ e) $\sqrt{21,8^2-18,2^2}$

Hướng dẫn: Áp dụng hằng đẳng thức: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{25^2-24^2}=\sqrt{(25-24)(25+24)}=\sqrt{1.49}=7$

b) Ta có: $\sqrt{17^2-8^2}=\sqrt{(17-8)(17+8)}=\sqrt{9.25}=3.5=15$

c) Ta có: $\sqrt{117^2-108^2}=\sqrt{(117-108)(117+108)}=\sqrt{9.225}=3.15=45$

d) Ta có: $\sqrt{6,8^2-3,2^2}=\sqrt{(6,8-3,2)(6,8+3,2)}=\sqrt{3,6.10}=\sqrt{36}=6$

e) Ta có: $\sqrt{21,8^2-18,2^2}=\sqrt{(21,8-18,2)(21,8+18,2)}=\sqrt{3,6.40}=\sqrt{36}.\sqrt{4}=6.2=12$

Bài toán 3. Rút gọn:

a) $A=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ b) $B=\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ c) $C=\sqrt{8+2\sqrt{15}}-\sqrt{5}$

Hướng dẫn: Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\ge 0, b\ge 0)$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{3-2.\sqrt{3.2}+2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}.\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

b) Ta có: $B=\sqrt{5+2\sqrt{5.2}+2}+\sqrt{5-2\sqrt{5.2}+2}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2.\sqrt{5}.\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-2.\sqrt{5}.\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}=\left|\sqrt{5}+\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right|=2\sqrt{5}$

c) Ta có $C=\sqrt{5+2\sqrt{5.3}+3}-\sqrt{5}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2.\sqrt{5}.\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{5}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{5}=\left|\sqrt{5}+\sqrt{3}\right|-\sqrt{5}=\sqrt{3}$

II. Nhân các căn bậc hai

Bài toán 4. Tính:

a) $A=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ b) $B=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

c) $C=\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}$ d) $D=\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}$

Hướng dẫn: Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai:

$$\sqrt{A}.\sqrt{B}=\sqrt{A.B}\ \ (A\ge 0;\ B\ge 0)$$

Các bài b), c), d) ta phải bình phương hai vế, rồi sau đó khai căn bậc hai.

Lời giải

a) Ta có $A=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3-2}=1$

b) Nhận xét $\sqrt{3}-\sqrt{2}>0\Rightarrow\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}>0$; $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}>0$.

Vậy $B>0$.

Ta xét $B^2=\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2$

$=\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2+2\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\left(\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right).\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\quad =2\sqrt{3}+2.1$ (xem bài toán a)

$=2+2\sqrt{3}\qquad \Rightarrow B=\sqrt{2+2\sqrt{3}}$

c) Nhận xét: $C>0$.

Ta xét $C^2=\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2\quad =\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2+2\sqrt{4+\sqrt{7}}.\sqrt{4-\sqrt{7}}+\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$

$=4+\sqrt{7}+2\sqrt{\left(4+\sqrt{7}\right).\left(4-\sqrt{7}\right)}+4-\sqrt{7}\quad =8+2\sqrt{16-7}=8+2\sqrt{9}\quad =8+6=14$

$\Rightarrow C=\sqrt{14}$

d) Nhận xét $D<0$ vì $\sqrt{3-\sqrt{5}}<\sqrt{3+\sqrt{5}}$

Ta xét $D^2=\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2\quad =\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2-2\sqrt{3-\sqrt{5}}.\sqrt{3+\sqrt{5}}+\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$

$=3-\sqrt{5}-2\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right).\left(3+\sqrt{5}\right)}+3+\sqrt{5}\quad =6-2\sqrt{9-5}=6-2.2=2$

$\Rightarrow D=-\sqrt{2}$ (vì $D<0$).

Chú ý: Các biểu thức $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ và $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ được gọi là hai biểu thức liên hợp.

Bài toán 5. Tính: a) $A=\left(\sqrt{6}+\sqrt{10}\right).\sqrt{4-\sqrt{15}}$ b) $B=\left(3+\sqrt{5}\right).\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right).\sqrt{3-\sqrt{5}}$

c) $C=\left(4+\sqrt{15}\right).\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right).\sqrt{4-\sqrt{15}}$

Hướng dẫn: Áp dụng cả hai quy tắc khai căn một tích và nhân các căn bậc hai.

Lời giải

a) Ta có: $A=\left(\sqrt{6}+\sqrt{10}\right).\sqrt{4-\sqrt{15}}=\left(\sqrt{3.2}+\sqrt{5.2}\right).\sqrt{4-\sqrt{15}}$

$=\left(\sqrt{3}.\sqrt{2}+\sqrt{5}.\sqrt{2}\right).\sqrt{4-\sqrt{15}}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right).\sqrt{2}.\sqrt{4-\sqrt{15}}$

$=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right).\sqrt{2\left(4-\sqrt{15}\right)}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right).\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

$=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right).\sqrt{5-2\sqrt{5}.\sqrt{3}+3}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right).\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=5-3=2$

b) Ta có: $B=\left(3+\sqrt{5}\right).\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right).\sqrt{3-\sqrt{5}}\quad =\left(3+\sqrt{5}\right).\left(\sqrt{5}-1\right).\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{5}}$

$=\left(3+\sqrt{5}\right).\left(\sqrt{5}-1\right).\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=\left(3+\sqrt{5}\right).\left(\sqrt{5}-1\right).\left(\sqrt{5}-1\right)\quad =\left(3+\sqrt{5}\right).\left(\sqrt{5}-1\right)^2$

$$=\left(3+\sqrt{5}\right).\left(6-2\sqrt{5}\right) \quad =2\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)=2\left(9-5\right)=2.4=8.$$

c) Ta có: $C=\left(4+\sqrt{15}\right).\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right).\sqrt{4-\sqrt{15}} \quad =\left(4+\sqrt{15}\right).\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right).\sqrt{2}.\sqrt{4-\sqrt{15}}$

$$=\left(4+\sqrt{15}\right).\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right).\sqrt{8-2\sqrt{15}} \quad =\left(4+\sqrt{15}\right).\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2=\left(4+\sqrt{15}\right).\left(8-2\sqrt{15}\right)$$

$$=2\left(4+\sqrt{15}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)=2\left(16-15\right)=2.1=2.$$

III. Phân tích thành nhân tử

Bài toán 6. Phân tích thành nhân tử

a) $A=\sqrt{xy}+2\sqrt{x}-3\sqrt{y}-6 \quad \left(x\ge 0;\ y\ge 0\right)$ b) $B=ab+b\sqrt{a}+\sqrt{a}+1$

c) $C=a-3\sqrt{ab}+2b$ d) $D=2x-7\sqrt{xy}+5y$

Hướng dẫn: Áp dụng quy tắc khai căn một tích: $\sqrt{AB}=\sqrt{A}.\sqrt{B}$ và các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử đã học ở lớp 8: Nhóm các số hạng, dùng hằng đẳng thức, thêm bớt một vài số hạng để làm xuất hiện nhân tử chung.

Lời giải

a) Ta có: $A=\sqrt{xy}+2\sqrt{x}-3\sqrt{y}-6=\sqrt{x}\left(\sqrt{y}+2\right)-3\left(\sqrt{y}+2\right)=\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{y}+2\right)$

b) Ta có: $B=ab+b\sqrt{a}+\sqrt{a}+1=\left[\left(\sqrt{a}\right)^2b+b\sqrt{a}\right]+\left(\sqrt{a}+1\right)$

$$=b\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)+\left(\sqrt{a}+1\right)=\left(\sqrt{a}+1\right)\left(b\sqrt{a}+1\right)$$

c) Ta có: $C=a-3\sqrt{ab}+2b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\sqrt{a}.\sqrt{b}-2\sqrt{a}.\sqrt{b}+2\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-2\sqrt{b}\right)$

d) Ta có: $D=2x-7\sqrt{xy}+5y=2\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}.\sqrt{y}-5.\sqrt{x}.\sqrt{y}+5\left(\sqrt{y}\right)^2$

$$=2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)-5\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}-5\sqrt{y}\right)$$

Bài toán 7. Phân tích thành nhân tử

a) $A=a-\sqrt{a}-6$ b) $B=\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}$ c) $C=x\sqrt{x}+y\sqrt{y}$

Hướng dẫn: Xem cách giải bài toán 6

Lời giải

a) Ta có: $A=a-\sqrt{a}-6=\left(\sqrt{a}\right)^2+2\sqrt{a}-3\sqrt{a}-6$

$$=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+2\right)-3\left(\sqrt{a}+2\right)=\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-3\right) \ ; \quad \left(a\ge 0\right)$$

b) Ta có: $B=\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{b}\right)^3$

$$=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a^2}+\sqrt{a}.\sqrt{b}+\sqrt{b^2}\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right); \quad \left(a\ge 0;\ b\ge 0\right)$$

c) Ta có: $C = x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = \left(\sqrt{x}\right)^3 + \left(\sqrt{y}\right)^3$

$$= \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x^2} - \sqrt{x}.\sqrt{y} + \sqrt{y^2}\right) = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x - \sqrt{xy} + y\right); \quad (x \ge 0; \quad y \ge 0)$$

IV. Chứng minh một đẳng thức

Bài toán 8.

a) Cho $\sqrt{x+5} + \sqrt{8-x} = 5 \quad (1)$ Chứng minh rằng $\sqrt{(x+5)(8-x)} = 6$. $\quad (-5 \le x \le 8)$

b) Cho $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1 \quad (2)$ Chứng minh rằng $\sqrt{x - x^2} = 0$. $\quad (0 \le x \le 1)$

Hướng dẫn: Bình phương hai vế đẳng thức đã cho và tính tích của hai căn thức.

Lời giải

a) Bình phương hai vế của đẳng thức (1) ta được

$\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{8-x}\right)^2 = 25 \quad \Rightarrow x+5+2\sqrt{x+5}.\sqrt{8-x}+8-x = 25$

$\Rightarrow \sqrt{(x+5)(8-x)} = 25-13 \quad \Rightarrow \sqrt{(x+5)(8-x)} = 6$ (đpcm)

Chú ý: Em có thể giải bài toán sau:

1) Cho $\sqrt{x+5}+\sqrt{8-x} = 5$ Hãy tính $\sqrt{(x+5)(8-x)}$ và $\sqrt{-x^2+3x+40}$.

(Ta có $(x+5)(8-x) = -x^2+3x+40$)

2) Cho $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$. Hãy tính $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}$.

Nhân hai vế của đẳng thức $\sqrt{x+5}-\sqrt{x} = 1$ với $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}$ (là biểu thức liên hợp của $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}$).

Điều kiện $x \ge 0 \Rightarrow x+5 > 0 \Rightarrow \sqrt{x+5}+\sqrt{x} > 0$.

Ta có: $\sqrt{x+5}-\sqrt{x} = 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right) = \sqrt{x+5}+\sqrt{x} \\ x \ge 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+5-x = \sqrt{x+5}+\sqrt{x} \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{x} = 5 \end{cases}$

Vậy $\sqrt{x+5}+\sqrt{x} = 5$.

Bạn hãy giải bài toán sau:

Cho $\sqrt{25-x^2} - \sqrt{15-x^2} = 2$. Tính $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$. (Đáp số $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2} = 5$).

b) Bình phương hai vế đẳng thức (2) ta được:

$\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow x+2\sqrt{x}.\sqrt{1-x}+1-x = 1 \Rightarrow \sqrt{x(1-x)} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-x^2} = 0$. (đpcm)

Chú ý: Ta có thể giải bài toán sau:

Giải phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1$. (Đáp số $x=1$)

Bài toán 9. Cho $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1 \quad (*)$ Chứng minh rằng $x+y=0$.

Hướng dẫn:

Nhân hai vế của đẳng thức $(*)$ lần lượt với các biểu thức liên hợp của $x+\sqrt{1+x^2}$ và $y+\sqrt{1+y^2}$

Sau đó nghĩ đến việc làm xuất hiện tổng $x+y$ bằng cách cộng hai vế.

Lời giải

Với $x=0$ và $y=0$ suy ra $x+y=0$.

Giải sử $x\neq 0$, nhân hai vế của đẳng thức $(*)$ với $\sqrt{1+x^2}-x$, ta được

$$\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=\sqrt{1+x^2}-x$$

$$\Rightarrow\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=\sqrt{1+x^2}-x \qquad (**)$$

Tương tự, nhân hai vế của đẳng thức $(*)$ với $\sqrt{1+y^2}-y$, ta được

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\sqrt{1+y^2}-y \qquad (***)$$

Cộng $(**)$ với $(***)$ ta được

$$x+y+\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}-x-y \Rightarrow 2(x+y)=0\Rightarrow x+y=0.$$ (đpcm)

V. Giải phương trình

Bài toán 10. Giải phương trình

a) $\sqrt{4x-20}+\sqrt{x+5}-\frac{1}{3}\sqrt{9x-45}=4 \quad (1)$

b) $\sqrt{16-32x}-\sqrt{12x}=\sqrt{3x}+\sqrt{9-18x} \quad (2)$

c) $\sqrt{x^2-9}-\sqrt{4x-12}=0 \quad (3)$

Hướng dẫn: a) Áp dụng quy tắc khai căn một tích $\sqrt{AB}=\sqrt{A}.\sqrt{B}\ (A\geq 0;\ B\geq 0)$ và công thức

$$\sqrt{a}=b\Leftrightarrow\begin{cases}b\geq 0\\ a=b^2\end{cases}$$

Lời giải

a) $(1)\Rightarrow\sqrt{4(x-5)}+\sqrt{x-5}-\frac{1}{3}\sqrt{9(x-5)}=4 \quad \Rightarrow\sqrt{4}.\sqrt{x-5}+\sqrt{x-5}-\frac{1}{3}\sqrt{9}.\sqrt{x-5}=4$

$$\Rightarrow 2.\sqrt{x-5}+\sqrt{x-5}-\sqrt{x-5}=4\Rightarrow 2.\sqrt{x-5}=4\Rightarrow\sqrt{x-5}=2\Rightarrow\begin{cases}2\geq 0\\ x-5=4\end{cases}\Rightarrow x=9$$

b)Ta có $(2)\Rightarrow\sqrt{16(1-2x)}-\sqrt{4.3x}=\sqrt{3x}+\sqrt{9(1-2x)}$

$$\Rightarrow 4\sqrt{1-2x}-2\sqrt{3x}=\sqrt{3x}+3\sqrt{1-2x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-2x}=3\sqrt{3x} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 1-2x=9.3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=\dfrac{1}{29} \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1}{29}$$

c) Ta có $(3)\Rightarrow \sqrt{(x-3)(x+3)}-\sqrt{4(x-3)}=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3}\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0 & (*) \\ x\ge 3 & (**) \end{cases}$

Giải $(*)$ ta được $\sqrt{x-3}=0$ hoặc $\sqrt{x+3}=2$

$x=3$ hoặc $x=1$.

Kết hợp với $(**)$ suy ra $x=3$.

Bài toán 11. Giải phương trình:

a) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x}=1$ b) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$ c) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5$

Hướng dẫn:

Bình phương hai vế với điều kiện cần thiết và rút gọn, ta được phương trình chứa một căn thức.

Lời giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 0 \\ 1-x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow 0\le x\le 1$

Bình phương hai vế phương trình (1) ta được:

$$1-x+2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}+x=1 \Rightarrow 2\sqrt{(1-x)x}=0 \Rightarrow \sqrt{(1-x)x}=0 \Rightarrow (1-x)x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x=0 \\ x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện, ta có tập hợp nghiệm: $S=\{0;1\}$.

b) Ta có: (2) $\Rightarrow \sqrt{x+5}=1+\sqrt{x}$ (*)

$$\Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x+5=(1+\sqrt{x})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x+5=1+2\sqrt{x}+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2\sqrt{x}=4 \end{cases} \Rightarrow x=4$$

- Cách giải khác (Dùng biểu thức liên hợp)

Nhân hai vế của phương trình (2) vơi $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}$

(Với điều kiện $x\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x+5}+\sqrt{x}>0$), ta có:

$$(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})=\sqrt{x+5}+\sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x+5})^2-(\sqrt{x})^2=\sqrt{x+5}+\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5(**)$$

Cộng vế vợi vế (*) và (**), ta được:

$2\sqrt{x+5}=6 \Rightarrow \sqrt{x+5}=3 \Rightarrow x+5=9 \Rightarrow x=4$ (thỏa mãn điều kiện $x\ge 0$)

VI. Chứng minh đẳng thức

Bài toán 12. Chứng minh rằng: $|ax+by|\le\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$ với mọi $a,b,x,y\in R$

Bất đẳng thức Bunyakovsky.

Hướng dẫn: Bình phương hai vế bất đẳng thức cần chứng minh và biến đổi tương đương.

Lời giải

Ta có: $|ax+by| \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow (ax+by)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$

$\Rightarrow a^2x^2+2abxy+b^2y^2 \le a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

$\Rightarrow (ay-bx)^2 \ge 0$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với mọi a, b, x, y thuộc $\mathbb{R}$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow ay-bx=0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}, x\ne 0, y\ne 0$

(với $x=0$ và $y=0$, bất đẳng thức luôn đúng).

Bài toán 13. Chứng minh rằng $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$ với $a\ge 0; b\ge 0$.

Hướng dẫn: Bình phương hai vế và rút gọn như bài toán 12 .

Lời giải

Ta co: $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)} \Rightarrow a+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+b \le 2(a+b)$

$\Rightarrow a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b \ge 0 \Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$ (luôn dúng).

Nhận xét: Ta có thê áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ở trên như sau:

Ta có: $1\cdot\sqrt{a}+1\cdot\sqrt{b} = |1\cdot\sqrt{a}+1\cdot\sqrt{b}| \le \sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{a+b}$

$\Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2}\cdot\sqrt{a+b} \Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$ (dpcm).

Bài toán 14. So sánh $\sqrt{x+y}$ và $\sqrt{x}+\sqrt{y} (x>0, y>0)$.

Hướng dẫn: Ta chứng minh $\sqrt{x+y} < \sqrt{x}+\sqrt{y}$ bằng cách bình phương hai vế như đã làm ở bài toán 12 và 13 .

Lời giải

Với $x>0, y>0$, ta co: $\sqrt{x+y} < \sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\Rightarrow x+y < (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \Rightarrow x+y < x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y$

$\Rightarrow 2\sqrt{xy} > 0$ (luôn đúng với $x>0, y>0$)

Nhận xét: Bạn hãy để ý các kết quả đã biết sau đây:

$\sqrt{x\cdot y} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{y} \quad (x\ge 0, y\ge 0)$

$\sqrt{x+y} < \sqrt{x}+\sqrt{y} (x>0, y>0)$

Bài toán 15. So sánh:

a) $\sqrt{3}+2$ và $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ và $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{2014}+\sqrt{2016}$ và $2\sqrt{2015}$

Lời giải

a) Ta co: $(\sqrt{3}+2)^2 = 3+2\cdot\sqrt{3}\cdot 2+4 = 7+4\sqrt{3}.$

Lại có: $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}+6+2 = 8+2\sqrt{12} = 8+2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = 8+4\sqrt{3}$

vì $7<8 \Rightarrow 7+4\sqrt{3} < 8+4\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3}+2)^2 < (\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 \Rightarrow \sqrt{3}+2 < \sqrt{2}+\sqrt{6}$

b) Ta có: $\sqrt{2}+\sqrt{3} < \sqrt{10}$

$\Rightarrow (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 < 10 \Rightarrow 2+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+3 < 10 \Rightarrow 2\sqrt{6} < 5 \Leftrightarrow (2\sqrt{6})^2 < 25 \Rightarrow 24 < 25$ (luôn dúng).

c) Ta có: $\sqrt{2014}+\sqrt{2016} < 2\sqrt{2015}$

$\Rightarrow (\sqrt{2014}+\sqrt{2016})^2 < 4.2015 \Rightarrow 2014+2.\sqrt{2014}.\sqrt{2016}+2016 < 8060 \Rightarrow 2\sqrt{2014.2016} < 4030$

$\Rightarrow \sqrt{2014.2016} < 2015 \Rightarrow 2014.2016 < 2015^2 \Rightarrow 4060224 < 4060225$

Ta có thể chứng minh bài toán tổng quát sau:

Vơi $n\in\mathbb{N}$, ta luôn có: $\sqrt{n}+\sqrt{n+2} < 2\sqrt{n+1}$

Bài toán 16.

a) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\mathrm{A}=\sqrt{\mathrm{x}-2}+\sqrt{\mathrm{y}-1}$, với $\mathrm{x}+\mathrm{y}=5$.

Huớng dẫn: a) Xét giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của y^2.

b) Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky.

Lời giải

a) Với điều kiện: $x\ge 0$ và $1-x\ge 0 \Leftrightarrow 0\le x\le 1$

Khi đó $y>0$. Ta xét y^2 :

$y^2 = x+2\sqrt{x(1-x)}+1-x \Leftrightarrow y^2 = 1+2\sqrt{x(1-x)}$

Vì $\sqrt{x(1-x)}\ge 0 \Rightarrow 1+\sqrt{x(1-x)}\ge 1$

Vậy $y^2\le 1 \Rightarrow y\ge 1$

Giá trị nhỏ nhất của y bằng 1 .

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Lại có: $\sqrt{x(1-x)} = \sqrt{-x^2+x} = \sqrt{-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} \le \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Vậy: $y^2 \ge 1+2\cdot\frac{1}{2} = 2 \Rightarrow y\le\sqrt{2}$

Giá trị lớn nhất của y bằng $\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Cách khác:

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=|1\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{1-x}|\le\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{1-x})^2}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow y\le\sqrt{2}$ (tiếp tục như cách giải trên)

b) Điều kiện: $2\le x\le 4$.

Theo bất dảng thức Bunyakovsky, ta có:

$1.\ \sqrt{x-2}+1\cdot\sqrt{4-x}\le\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{x-2})^2+(\sqrt{4-x})^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$

$\Rightarrow y\le 2$. Vậy giá trị lớn nhất của y bằng 2 .

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{1}=\frac{\sqrt{4-x}}{1}\Leftrightarrow x-2=4-x\Leftrightarrow x=3$

c) Điều kiện $x\ge 2$ và $y\ge 1$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$1.\ \sqrt{x-2}+1\cdot\sqrt{y-1}\le\sqrt{1^2+1^2}+\sqrt{x-2+y-1}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x+y-3}$

Vì $x+y=5\Rightarrow A\le\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-3}=2$

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 2 .

Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x-2}=\sqrt{y-1}\\ x+y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$.

Bài toán 17. Tìm x, biết:

a) $\sqrt{9x}-\sqrt{36x}+\sqrt{121x}<8$ b) $\sqrt{x-1}+5\sqrt{4x-4}-\sqrt{9x-9}<4$ c) $\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x-2}>0$

Hướng dẫn: Áp dụng quy tắc khai căn một tích.

Lời giải

a) (1) $\Rightarrow 3\sqrt{x}-6\sqrt{x}+11\sqrt{x}<8\ \Rightarrow 8\sqrt{x}<8\Rightarrow\sqrt{x}<1\Rightarrow 0\le x<1$.

b) (2) $\Rightarrow\sqrt{x-1}+10\sqrt{x-1}-3\sqrt{x-1}<4\ \Rightarrow 8\sqrt{x-1}<4\Rightarrow\sqrt{x-1}<\frac{1}{2}\ \Rightarrow\begin{cases}x-1\ge 0\\ x-1<\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow 1\le x<\frac{5}{4}$

c) (3) $\Rightarrow\sqrt{x-2}(\sqrt{x+2}-1)>0$

Điều kiện: $x-2>0(x-2=0$: không thỏa mãn) $\Rightarrow x>2$.

Khi đó: (3) $\Rightarrow\sqrt{x+2}-1>0\Rightarrow\sqrt{x+2}>1\Rightarrow x+2>1\Rightarrow x>-1$ (luôn thỏa mãn với $x>2$)

Vậy $x>2$.

VII. Liên hệ giữa phép khai căn bậc hai và phép chia

Bài toán 1. Tính: a) $\sqrt{\dfrac{6,4}{8,1}}$ b) $\sqrt{\dfrac{0,25}{1,44}}$ c) $\sqrt{2\dfrac{2}{49}}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{\dfrac{6,4}{8,1}}=\sqrt{\dfrac{64}{81}}=\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}}=\dfrac{8}{9}$.

b) Ta có: $\sqrt{\dfrac{0,25}{1,44}}=\sqrt{\dfrac{25}{144}}=\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{144}}=\dfrac{5}{12}$.

c) Ta có: $\sqrt{2\dfrac{2}{49}}=\sqrt{\dfrac{100}{49}}=\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{49}}=\dfrac{10}{7}=1\dfrac{3}{7}$.

Bài toán 2. Rút gọn biểu thức:

a) $A=\dfrac{y}{x}\sqrt{\dfrac{x^2}{y^4}}$, vỡi $x>0, y\neq 0$ b) $B=2a^2\sqrt{\dfrac{b^4}{4a^2}}, a<0$ c) $C=5ab\sqrt{\dfrac{25a^2}{b^6}}, a<0, b>0$

Lời giải

a) Ta có: $A=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^4}}=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{|x|}{y^2}$

Vî $x>0\Rightarrow |x|=x$. Vậy $A=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{x}{y^2}=\dfrac{1}{y}(y\neq 0)$

b) Ta có $B=2a^2\sqrt{\dfrac{b^4}{4a^2}}=2a^2\cdot\dfrac{b^2}{2|a|}$

c) Ta có: $C=5ab\sqrt{\dfrac{25a^2}{b^6}}=5ab\dfrac{5\cdot|a|}{|b^3|}$

Vi $a<0\Rightarrow |a|=-a; b>0\Rightarrow |b^3|=b^3$. Vâyy $C=5ab\dfrac{-5a}{b^3}=-\dfrac{25a^2}{b^2}$

Bài toán 3. Rút gọn

a) $A=\sqrt{\dfrac{4a^2+12a+9}{b^2}}$ với $a>-\dfrac{3}{2}$; $b<0$

b) $B=(x-y).\sqrt{\dfrac{xy}{(x-y)^2}}$ với $x<y<0$.

c) $C=(2x-y).\sqrt{\dfrac{4}{4x^2-4xy+y^2}}$

Lời giải

a) Ta có: $A=\sqrt{\dfrac{4a^2+12a+9}{b^2}}=\dfrac{\sqrt{(2a+3)^2}}{\sqrt{b^2}}=\dfrac{|2a+3|}{|b|}$

Vì $a > -\dfrac{3}{2} \Rightarrow 2a > -3 \Rightarrow 2a+3 > 0 \Rightarrow |2a+3| = 2a+3$;

$b < 0 \Rightarrow |b| = -b$

Vậy $A = \dfrac{2a+3}{-b} = -\dfrac{2a+3}{b}$

b) Ta có: $B = (x-y).\sqrt{\dfrac{xy}{(x-y)^2}} = (x-y).\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{(x-y)^2}} = (x-y).\dfrac{\sqrt{xy}}{|x-y|}$

Vì $x < y \Rightarrow x-y < 0 \Rightarrow |x-y| = -(x-y)$.

Vậy $B = (x-y).\dfrac{\sqrt{xy}}{-(x-y)} = -\sqrt{xy}$ (với $x < y < 0 \Rightarrow xy > 0$)

c) Ta có: $C = (2x-y).\sqrt{\dfrac{4}{4x^2-4xy+y^2}} = (2x-y).\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{(2x-y)^2}} = \dfrac{2(2x-y)}{|2x-y|} = \begin{cases} 2, nêu' 2x > y \\ -2, nêu' 2x < y \end{cases}$

Bài toán 4. Tính:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$ c) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{60}}$

Lời giải

a) Ta có: $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\dfrac{2}{18}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$

b) Ta có: $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\dfrac{3}{27}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$

c) Ta có: $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{60}} = \sqrt{\dfrac{15}{60}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

Bài toán 5. Tính:

a) $A = \left(2\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + 4\sqrt{80}\right) : \sqrt{5}$;

b) $B = \sqrt{\dfrac{2}{5}} + \dfrac{8}{\sqrt{10}} - \dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

c) $C = \sqrt{\dfrac{7}{2}} - \dfrac{7\sqrt{2}-2\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} + \dfrac{7}{\sqrt{14}}$

Lời giải

a) Ta có :

$$A=\left(2\sqrt{20}-3\sqrt{45}+4\sqrt{80}\right):\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{20}}{\sqrt{5}}-\frac{3\sqrt{45}}{\sqrt{5}}+\frac{4\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$$

$$=2\sqrt{\frac{20}{5}}-3\sqrt{\frac{45}{5}}+4\sqrt{\frac{80}{5}}=2\sqrt{4}-3\sqrt{9}+4\sqrt{16}=4-9+16=11$$

b) Ta có :

$$B=\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{8}{\sqrt{10}}-\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2+8}{\sqrt{10}}-\left(\sqrt{10}-1\right)=\frac{10}{\sqrt{10}}-\left(\sqrt{10}-1\right)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{10}\right)^2}{\sqrt{10}}-\sqrt{10}+1=\sqrt{10}-\sqrt{10}+1=1$$

c) Ta có :

$$C=\sqrt{\frac{7}{2}}-\frac{7\sqrt{2}-2\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}+\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}-\sqrt{14}+\frac{7}{\sqrt{14}}=\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}+\frac{7}{\sqrt{14}}\right)-\sqrt{14}$$

$$=\frac{7+7}{\sqrt{14}}-\sqrt{14}=\sqrt{14}-\sqrt{14}=0$$

Bài toán 6. Rút gọn biểu thức :

a) $A=\left(3\sqrt{a^2b}-4\sqrt{ab^2}+5ab\right):\sqrt{ab}$ với $a>0;b>0$.

b) $B=\left(\sqrt{x^2y}+\sqrt{xy^2}-2\sqrt{xy}\right):\sqrt{xy}$ (với $x>0;y>0$).

Lời giải

a) Ta có: $A=\left(3\sqrt{a^2b}-4\sqrt{ab^2}+5ab\right):\sqrt{ab}$ $=\dfrac{3\sqrt{a^2b}}{\sqrt{ab}}-\dfrac{4\sqrt{ab^2}}{\sqrt{ab}}+\dfrac{5ab}{\sqrt{ab}}$

$$=3\sqrt{\frac{a^2b}{ab}}-4\sqrt{\frac{ab^2}{ab}}+5\sqrt{\frac{(ab)^2}{ab}}\quad=3\sqrt{a}-4\sqrt{b}+5\sqrt{ab}$$

b) Ta có: $\mathrm{B}=\sqrt{\dfrac{x^2y}{xy}}+\sqrt{\dfrac{xy^2}{xy}}-2\sqrt{\dfrac{xy}{xy}}=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}-2=|x|+|y|-2$

Vì $x,y>0\Rightarrow|x|=x;|y|=y$

Vậy $\mathrm{B}=x+y-2$

Bài toán 7: Rút gọn biểu thức:

a) $\mathrm{A}=\dfrac{x+\sqrt{xy}}{y+\sqrt{xy}}(x>0,y>0)$

b) $\mathrm{B}=\dfrac{\sqrt{x^2y}+\sqrt{xy^2}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}(x>0,y>0)$

c) $C=\dfrac{\sqrt{am}+\sqrt{bn}-\sqrt{an}+\sqrt{bm}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}(a,b,m,n>0)$

Hướng dẫn: Phân tích các tử số. mẫu số thành nhân tử và rút gọn.

Lời giải:

a) Ta có: $A=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{x}\sqrt{y}}{\left(\sqrt{y}\right)^2+\sqrt{x}\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

b) Ta có: $B=\dfrac{\left(\sqrt{x^2}\sqrt{y}+\sqrt{x}\sqrt{y^2}\right)+\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)(\sqrt{xy}+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{xy}+1$

c) Ta có: $C=\dfrac{\sqrt{am}+\sqrt{bn}-\sqrt{an}+\sqrt{bm}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$=\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{m}-\sqrt{n})+\sqrt{b}(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=(\sqrt{m}-\sqrt{n})$

Bài toán 8. Rút gọn biểu thức:

a) $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}(x>0,x\neq 1)$

b) $B=\dfrac{4-4\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-35}+\dfrac{2}{\sqrt{x}-7}-\dfrac{3}{\sqrt{x}+5}(x\geq 0,x\neq 49)$

c) $C=\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}:\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}(x>0,y>0,x\neq y)$

Hướng dẫn: Tìm mẫu thức chung, quy đồng các phân thức và thực hiện các phép toán về phân thức

Lời giải

a) Ta có: $A=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

Cách khác:

Ta có thể đặt $u=\sqrt{x};u\geq 0\Rightarrow u^2=x$

Ta được: $A=\dfrac{u}{u-1}-\dfrac{2u-1}{u^2-u}$

(Đến đây ta làm phép toán về phân thức đã biết ở lớp 8, bạn hãy tự làm tiếp)

* Nếu cho $x=3$, ta có bài toán: Tính:

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{2\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}$. (Ta cũng có thể cho x một giá trị khác).

b) Ta có: $x-2\sqrt{x}-35=x+5\sqrt{x}-7\sqrt{x}-35$

$=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+5\right)-7\left(\sqrt{x}+5\right)$

$=\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-7\right)$

Vậy $B=\frac{4-4\sqrt{x}+2(\sqrt{x}+5)-3(\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-7)}$

$=\frac{4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}+10-3\sqrt{x}+21}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-7)}=\frac{-5\sqrt{x}+35}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-7)}=\frac{-5(\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-7)}=\frac{-5}{\sqrt{x}+5}$

Nhận xét: Ta có thể đặt $u=\sqrt{x},u\geq 0\Rightarrow x=u^2$ và đưa về biểu thức sau:

$B=\frac{4-4u}{u^2-2u-35}+\frac{2}{u-7}-\frac{3}{u+5}$ (Tiếp tục như bài toán a)

Từ kết quả $B=\frac{-5}{\sqrt{x}+5}(x\geq 0,x\neq 49)\Rightarrow B<0$, ta có bài toán:

Cho $B=\frac{4-4\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-35}+\frac{2}{\sqrt{x}-7}-\frac{3}{\sqrt{x}+5}$

1) Chứng tỏ rằng $B<0$ với $x\geq 0;x\neq 49$.

2) Tìm các giá tri x sao cho B nhận giá trị nguyên.

(Đáp số $x=0$)

c) Ta có: $C=\frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{xy}}:\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\quad=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2=x-y$

Bài toán 9. Giải phương trình:

a) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=2$ (1) b) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=2$ (2)

Hướng dẫn: Áp dụng quy tắc chia hai căn thức bậc hai và công thức:

$$\sqrt{A}=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\geq 0\\A=B^2\end{cases}$$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ (với điều kiện $x+1\geq 0$ và $x-1>0$)

$\Rightarrow x\geq -1$ và $x>1\Rightarrow x>1$)

Vậy (1) $\Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ 2\ge 0 \text{ (luôn đúng)} \\ \dfrac{x+1}{x-1}=4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x+1=4(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x+1=4x-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ 3x=5 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

b) Ta có: $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=2 \Rightarrow \begin{cases} 2\ge 0 \\ \dfrac{x-1}{x+1}=4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=4(x+1) \\ x+1\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ne -1 \\ 3x=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ne -1 \\ x=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{5}{3}$$

Chú ý: Phương trình (2) có dạng $\sqrt{A}=B$, ta chỉ đặt điều kiện $B\ge 0$, không cần đặt ra $A\ge 0$.

Bài toán 10. Giải phương trình:

a) $\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{x-1}}=x+3 \quad (1)$ b) $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{\sqrt{x-3}}=x-1 \quad (2)$

Hướng dẫn: Áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\sqrt{\dfrac{A}{B}}$, với điều kiện $A\ge 0$ và $B>0$

Lời giải

Ta có $x^2+2x-3=x^2-x+3x-3=x(x-1)+3(x-1)=(x-1)(x+3)$

Biến đổi vế trái của phương trình (1), ta được:

$$\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}}=\sqrt{x+3}$$

(với $(x-1)(x+3)\ge 0$ và $x-1>0 \Rightarrow x>1$)

Vậy với $x>1$, ta có: (1) $\Rightarrow \sqrt{\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}}=x+3$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3}=x+3 \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x+3=(x+3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x+3=1 \end{cases}$$

(vì $x>1 \Rightarrow x+3>0$, ta chia hai vế phương trình trên cho $x+3$)

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3=1 \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x>1 \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

Tập hợp nghiệm của (1): $S=\varnothing$

b) Ta có: $x^2-4x+3=x^2-3x-x+3=x(x-3)-(x-3)=(x-3)(x-1)$

Điều kiện: $\begin{cases}x^2-4x+3\ge 0\\ x-3>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-3)(x-1)>0\\ x-3>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-3>0\\ x-1>0\end{cases} \Rightarrow x>3$

Vậy $(2)\Rightarrow \begin{cases}x>3\\ \sqrt{\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}}=x-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>3\\ \sqrt{\dfrac{(x-3)(x-1)}{x-3}}=x-1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}x>3\\ \sqrt{x-1}=x-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>3\\ x-1=(x-1)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>3\\ x-1=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>3\\ x=2\end{cases}$

Phương trình (2) vô nghiệm.
Tập hợp nghiệm của (2): $S=\varnothing$.

Chú ý: Bạn hãy xem cách giải phương trình sau: $\sqrt{\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}}=x-1$ *(*)*

Lời giải:

Ta có $\left(^*\right)\Rightarrow \begin{cases}x-1\ge 0\\ \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=(x-1)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ \dfrac{(x-3)(x-1)}{x-3}=(x-1)^2\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ x\ne 3\\ x-1=(x-1)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ x\ne 3\\ \left[\begin{array}{l}x-1=0\\ x-2=0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=1\,;x=2.$

(Ta không cán đặt điều kiện $\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}\ge 0$, mà chỉ cần đặt $x-1\ge 0$).

Bài toán 11. Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{\dfrac{-1}{x-1}}<1$ b) $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}}>1$

Hướng dẫn: a) Áp dụng công thức $\sqrt{A}<B\Leftrightarrow 0<A<B^2$.
b) Áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai.
Lời giải:

a) Ta có: (1) $\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{-1}{x-1}\ge 0\\ -\dfrac{1}{x-1}<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-1<0\\ \dfrac{1}{1-x}<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1-x>0\\ \dfrac{1}{1-x}<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1-x>0\\ 1<1-;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<1\\ x<0\end{cases} \Rightarrow x<0$

b) Ta co: (2) $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{x-2}}>1 \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}}>1\\ x>2\end{cases}$

$x-2>0\Rightarrow x>2\Rightarrow (x-2)(x+2)>0\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x+2}>1\\ x>2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+2>1\\ x>2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>-1\\ x>2\end{cases} \Rightarrow x>2$

Ta có thể giải bài toán tương tự sau: $\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}>1$ (*)

(Ta có: $\left(^*\right) \Rightarrow \dfrac{x^2-4}{x-2}>1 \Rightarrow \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}>1 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x+2>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x>-1 \end{cases}$

Bài toán 12. Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{\dfrac{16}{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$, với $0<x<2$ (1)

b) $\sqrt{\dfrac{x^2-16}{x-3}}-\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$, với $3<x<8$ (2)

c) $(x+3)\dfrac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{8-x}} \geq 0$ (3)

Hướng dẫn:

a) $\sqrt{\dfrac{16}{2-x}}=\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{2-x}}=\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}$

b) Điều kiện $x-3>0$ nên ta có thể nhân hai vế của (2) với $\sqrt{x-3}>0$.

c) Đặt điều kiện $6-x \geq 0$ và $8-x>0 \Rightarrow x \leq 6 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{8-x}} \geq 0$

Lời giải:

a) Ta có: (1) $\Rightarrow \dfrac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2 \Rightarrow \begin{cases} 2-x>0 \\ 4-(\sqrt{2-x})^2<2\left(\sqrt{x-2}\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ 4-(2-x)<2\sqrt{2-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x+2<2\sqrt{2-x}\ (*) \end{cases}$$

$(*) \Rightarrow x^2+8x+16-20<0 \Rightarrow (x+4)^2<20 \quad \Rightarrow \sqrt{(x+4)^2}<\sqrt{20} \Rightarrow |x+4|<\sqrt{20}$

$$\Rightarrow -\sqrt{20}<x+4<\sqrt{20} \quad \Rightarrow -4-\sqrt{20}<x<\sqrt{20}-4$$

Kết hợp điều kiện $0<x<2$, ta lấy $0<x<2$.

b) Điều kiện $x-3>0 \Rightarrow x>3$

Từ (2) $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-16}{x-3}}+(\sqrt{x-3})^2 \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-16 \geq 0 \\ \sqrt{x-3}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+x-3>5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-16 \geq 0 \\ x>3 \\ \sqrt{x^2-16}>8-x(*) \end{cases}$

Với $x<8 \Rightarrow 8-x>0$

Bình phương hai vế bất phương trình (*), ta được:

$$\begin{cases} 3<x<8 \\ x^2-16>(8-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \geq 3<x<8 \\ x^2-16>64-16x+x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3<x<8 \\ 16x>80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3<x<8 \\ 16x>80 \end{cases} \Rightarrow 5<x<8$$

c) Điều kiện: $\begin{cases} 6-x \ge 0 \\ 8-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 6 \\ x < 8 \end{cases} \Rightarrow x \le 6$. Khi đó $\dfrac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{8-x}} \ge 0$

Vậy (3) $\Rightarrow \begin{cases} x \le 6 \\ x+3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 6 \\ x \ge -3 \end{cases} \Rightarrow -3 \le x \le 6$

Bạn hãy tự giải các bài toán sau:

Tìm x, biết:

a) $(x+3)\sqrt{\dfrac{6-x}{8-x}} \ge 0$ b) $(x+2)\sqrt{\dfrac{4-x}{5-x}} < 0$

Hướng dẫn: a) Điều kiện $\dfrac{6-x}{8-x} \ge 0 \Rightarrow x > 8$ hoặc $x \le 6$

Khi đó $\sqrt{\dfrac{6-x}{8-x}} \ge 0$. Từ đó $(1) \Rightarrow x+3 \ge 0 \Rightarrow x \ge -3$

Vậy $-3 \le x \le 6$ hoặc $x > 8$

b) Đáp số: $x < -2$.

Bài toán 13. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a}{\sqrt{a-1}} \ge 2$, với a > 1 b) $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2$ c) $\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}} \ge 1$

Hướng dẫn: Dùng phép biến đổi tương đương hoặc áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai.

Lời giải:

a) Ta có với $a > 1 \Rightarrow a-1 > 0 \Rightarrow \sqrt{a-1} > 0$

$$\frac{a}{\sqrt{a-1}} \ge 2 \Rightarrow a \ge 2\sqrt{a-1} \Rightarrow a-1 \ge 2\sqrt{a-1}-1 \Rightarrow (\sqrt{a-1})^2 - 2\sqrt{a-1}+1 \ge 0 \Rightarrow (\sqrt{a-1}-1)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng $\forall a > 1$.

Dấu " = " xảy $ra \Leftrightarrow \sqrt{a-1}-1=0 \Leftrightarrow a=2$

Cách giải khác, ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{a-1}} \ge 2 \quad \Rightarrow \frac{a-1+1}{\sqrt{a-1}} \ge 2 \Rightarrow \frac{(\sqrt{a-1})^2+1}{\sqrt{a-1}} \ge 2 \Rightarrow \sqrt{a-1}+\frac{1}{\sqrt{a-1}} \ge 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\sqrt{a-1}$ và $\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}$ ta có.

$$\sqrt{a-1}+\frac{1}{\sqrt{a-1}} \ge 2\cdot\sqrt{\sqrt{a-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a-1}}} = 2 \ (dpcm)$$

(Có thể đặt $t=\sqrt{a-1} \Rightarrow t^2 = a-1$, ta chứng minh: $I+^2x+\dfrac{t^2+1}{t} \ge 2, \forall t > 0$)

Nhận xét: 1) Từ bất đẳng thức đã cho: $\frac{a}{\sqrt{a-1}} \geq 2$, ta suy ra $\frac{\sqrt{a-1}}{a} \leq \frac{1}{2}; \forall a > 1$

2) Tương tự, ta còn có: $\frac{\sqrt{b-2}}{b} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}; \forall b > 2$

Từ (1) và (2), ta có bài toán: Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{a-1}}{a} + \frac{\sqrt{b-2}}{b} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \forall a > 1; b > 2$.

b) Ta có: $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2 \Rightarrow x^2+2 \geq 2\sqrt{x^2+1}$, vì $x^2 \geq 0, \forall x$

$\Rightarrow x^2+1 > 0, \forall x \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 + 1 \geq 2\sqrt{x^2+1} \quad \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2 \geq 0$ (luôn đúng, $\forall x$)

Cách giải khác:

Đặt $u = \sqrt{x^2+1}$; vì $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 \Rightarrow u > 0 \Rightarrow u^2 = x^2+1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng:

$$\frac{u^2+1}{u} \geq 2 \Rightarrow u^2+1 \geq 2u \textit{ (vì } u > 0\textit{)} \Rightarrow u^2+1-2u > 0 \Rightarrow (u-1)^2 \geq 0 \textit{ (luôn đúng)}$$

c) Đặt $u = \sqrt{4x^2+1}; u > 0 \Rightarrow u^2 = 4x^2+1 \Rightarrow 4x^2 = u^2-1 \quad \Rightarrow 2x^2 = \frac{u^2-1}{2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{\frac{u^2-1}{2}+1}{u} \geq 1 \Rightarrow \frac{u^2+1}{2u} \geq 1 \Rightarrow u^2+1 \geq 2u \textit{ (vò } u > 0\textit{)} \Rightarrow (u-1)^2 \geq 0 \textit{ (luôn đúng)}$$

Cách giải khác, ta có: $\frac{2x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}} \geq 1$

$$\Rightarrow \frac{4x^2+2}{\sqrt{4x^2+1}} \geq 2 \Rightarrow \frac{4x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{4x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} \geq 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\sqrt{4x^2+1}$ và $\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$ ta có đpcm.

Bài toán 14.

a) Tìm giá trị lơn nhất của biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x-1}}{x}, x > 1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R}$

Hướng dẫn: Xem bài toán 13.

Lờ giải

a) Ta chứng minh được $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}, \forall x > 1$ (theo bài toán 13, a)

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy $ra \Rightarrow \sqrt{x-1}=1 \Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2$.

Ta còn có: $\frac{\sqrt{y-2}}{2} \le \frac{1}{2\sqrt{2}}, y>2$ (xem bài toán 13; b)

Bạn hãy giải bài toán sau:
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$A=\frac{\sqrt{x-1}}{x}+\frac{\sqrt{y-2}}{y}\left(x\ge 1; y\ge 2\right)$ $\qquad$ $B=\frac{\sqrt{x-1}}{x}+\frac{\sqrt{y-2}}{y}+\frac{\sqrt{z-3}}{z}\left(x\ge 1; y\ge 2; z\ge 3\right)$

$C=\frac{xy\sqrt{z-2}+yz\sqrt{x-3}+zx\sqrt{y-4}}{x>z}\left(x\ge 3; y\ge 4; z\ge 2\right)$ $\qquad$ $D=\frac{a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}}{ab}\left(a\ge 1; b\ge 1\right)$

Đáp số: $maxA=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}; maxB=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}$; $maxC=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{4}; maxD=1$

Bài toán 15.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{\sqrt{ab}}$, (với $a>0, b>0$) 1

b) Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác và $P=\frac{a+b+c}{2}$ (nửa chu vi)

Chứng minh rằng: $\qquad$ a) $\sqrt{(p-a)(p-b)}\le\frac{c}{2}$ $\qquad$ b) $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\ge\frac{4}{c}$

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy.

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\frac{1}{a}$ và $\frac{1}{b}$, ta có:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}=2\frac{1}{\sqrt{ab}}$ (dpcm)

(Ta có thể biến đổi tương đương như sau:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \frac{a+b}{ab}\ge\frac{2}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \frac{a+b}{\sqrt{ab}}\ge 2 \Rightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$

b) Ta có:

$p-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{a+b+c-2a}{2}=\frac{b+c-a}{2}>0$

- Tương tự: $\mathrm{p-b>0}$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$\sqrt{(p-a)(p-b)}\le\frac{p-a+p-b}{2}=\frac{2p-a-b}{2}=\frac{a+b+c-a-b}{2}=\frac{c}{2}$

- Tương tư:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{(p-a)(p-b)}}\ge \frac{2}{\sqrt{(p-a)(p-b)}}$$

Theo chứng minh trên, ta có:

$$\sqrt{(p-a)(p-b)}\le \frac{c}{2} \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(p-a)(p-b)}}\ge \frac{2}{c}$$

Vậy $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\ge \frac{4}{c}$

Nhận xét: Từ các kết quả trên, ta có thể giải bài toán sau:

$$(p-a)(p-b)(p-c)\le \frac{abc}{8}$$

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

(với a, b, c là độ dài ba canh của tam giác, p là nửa chu vi).

Bài 9. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

- Nếu a là một số và b là một số không âm thì $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$.

- Chú ý: Phép biến đổi trên gọi là phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

- Nếu a và b là hai số không âm thì $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$.

- Nếu a là số âm và b là số không âm thì $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$.

Chú ý: Các phép biến đổi trên gọi là phép đưa thừa số vào trong dấu căn.

3. Trục căn thức ở mẫu

- Với các biểu thức A, B và $B > 0$, ta có $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$.

- Với các biểu thức A, B, C mà $\mathrm{A} \ge 0, \mathrm{A} \ne \mathrm{B}^2$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A}+B} = \frac{C(\sqrt{A}-B)}{A-B^2}, \frac{C}{\sqrt{A}-B} = \frac{C(\sqrt{A}+B)}{A-B^2}.$$

- Với các biểu thức A, B, C mà $A \ge 0, B > 0, A \ne B$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A+B}; \frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}.$$

4. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

Khi rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần phối hợp các phén tính (cộng, trừ, nhân, chia) và các phép biến đổi đã học (đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn, khử mẫu của biểu thức lấy căn, trục căn thức ở mẫu).

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Bài toán 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{180\mathrm{x}^2}; \mathrm{x} < 0$ b) $\sqrt{25x^3}; x \ge 0$ c) $\sqrt{9a^2 b}; a \ge 0; b \ge 0$ d) $\sqrt{72x^4 y^2}; y < 0$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{180\mathrm{x}^2} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2.5\mathrm{x}^2} = 2.3|x|\sqrt{5}$ vì $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$.

Vậy $\sqrt{180x^2} = -6x\sqrt{5}$.

b) Ta có: $\sqrt{25x^3} = \sqrt{5^2 \cdot x^2 x} = 5|x| \cdot \sqrt{x}$ vì $x \ge 0 \Rightarrow |x| = x$.

Vậy $\sqrt{25x^3} = 5x\sqrt{x}$.

c) Ta có: $\sqrt{9a^2 b} = \sqrt{3^2 a^2 b} = 3|a|\sqrt{b}$ vì $a \ge 0 \Rightarrow |a| = a$.

Vậy $\sqrt{9a^2b}=3a\sqrt{b}$.

d) Ta có: $\sqrt{72x^4y^2}=\sqrt{2^3\cdot 3^2x^4y^2}=\sqrt{2^3\cdot 3^2\left(x^2\right)^2y^2}=6x^2|y|\sqrt{2}$ vì $y<0\Rightarrow |y|=-y$

Vậy $\sqrt{72x^4y^2}=-6x^2y\sqrt{2}$.

Bài toán 2. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $A=\sqrt{22+12\sqrt{2}}$ b) $B=\sqrt{32+12\sqrt{7}}$ c) $C=\sqrt{18-6\sqrt{5}}$

Hướng dẫn:

a) Áp dụng phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn: $\sqrt{A^2\cdot B}=|A|\sqrt{B};\ B\ge 0$

Ta viết $22+12\sqrt{2}=2(11+6\sqrt{2})=2\left(3^2+2.3\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2\right)$

Lời giải

a) Ta có: $A=\sqrt{2\left(3^2+2.3\sqrt{2}+2\right)}=\sqrt{2\cdot(3+\sqrt{2})^2}=|3+\sqrt{2}|\cdot\sqrt{2}=(3+\sqrt{2})\sqrt{2}$

b) Ta có: $B=\sqrt{2(16+6\sqrt{7})}=\sqrt{2(9+2\cdot 3\cdot\sqrt{7}+7)}=\sqrt{2(3+\sqrt{7})^2}=\left|3+\sqrt{7}\right|\sqrt{2}=(3+\sqrt{7})\sqrt{2}$

c) Ta có: $C=\sqrt{3(6-2\sqrt{5})}=\sqrt{3(1-2.1\cdot\sqrt{5}+5)}=\sqrt{3(1-\sqrt{5})^2}=\left|1-\sqrt{5}\right|\sqrt{3}=(\sqrt{5}-1)\sqrt{3}$

(Vì $1-\sqrt{5}<0\Rightarrow\left|1-\sqrt{5}\right|=-(1-\sqrt{5})=\sqrt{5}-1$).

Bài toán 3. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $A=\sqrt{\dfrac{8}{x^2-4xy+4y^2}}$ với $x<2y$ b) $B=\dfrac{1}{1-5x}\sqrt{3x^2\left(25x^2-10x+1\right)}$ với $0\le x<\dfrac{1}{5}$

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 1, sau khi đưa thừa số ra ngoài dấu căn, ta rút gọn nếu được.

Lời giải

a) Ta có: $A=\sqrt{\dfrac{4.2}{(x-2y)^2}}=\dfrac{2}{|x-2y|}\sqrt{2}$, vì $x<2y\Rightarrow x-2y<0$

$\Rightarrow|x-2y|=-(x-2y)=2y-x$

Vậy: $A=\dfrac{2\sqrt{2}}{2y-x}$.

b) Ta có: $B=\dfrac{1}{1-5x}\cdot\sqrt{3x^2(5x-1)^2}=\dfrac{1}{1-5x}|x|\cdot|5x-1|\sqrt{3}$

$x\ge 0\Rightarrow|x|=x$;

$x<\dfrac{1}{5}\Rightarrow 5x<1\Rightarrow 5x-1<0\ \Rightarrow|5x-1|=-(5x-1)=1-5x$

Vậy $B=x\sqrt{3}$.

Bài toán 4. Rút gọn biểu thức:

a) $A=\sqrt{9a}-\sqrt{16a}+\sqrt{49a}$ với $a\ge 0$. b) $B=5\sqrt{1+x}+\sqrt{4x+4}-\sqrt{9+9x}$ với $x\ge -1$.

Hướng dẫn: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn và rút gọn.

Lời giải

a) Ta có: $A=3\sqrt{a}-4\sqrt{a}+7\sqrt{a}=6\sqrt{a}$ (với $a\ge 0$).

b) Ta có: $B=5\sqrt{1+x}+\sqrt{4(1+x)}-\sqrt{9(1+x)}=5\sqrt{1+x}+2\sqrt{1+x}-3\sqrt{1+x}=4\sqrt{1+x}$.

Bài toán 5. Rút gọn:

a) $A=\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}$ với $(a>0;\ b>0)$

b) $B=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{xy})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x-y)\left(\sqrt{x^3}+x\right)}$ với $(x>0; y>0, x\ne y)$.

Hướng dẫn:

Áp dụng: $\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2\cdot a}=|a|\sqrt{a}$ hoặc $\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2\cdot a}=a\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2\sqrt{a}=(\sqrt{a})^3$

Lời giải

a) Ta có:

$$A=\frac{\sqrt{a^2a}+\sqrt{b^2b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=\frac{|a|\sqrt{a}+|b|\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}$$

$$=\frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}$$

$$=a-2\sqrt{ab}+b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$

- Bạn có thể giải bài toán tương tự:

* Rút gọn biểu thức

1) $\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt{ab}$; $(a>0, b>0)$

2) $\dfrac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}$; $(a>0, b>0, a\ne b)$

Chú ý:

Ta có $\dfrac{2a(1-a)}{2(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})(1+a)}=\dfrac{a}{1+a}$

b) Với $x>0, y>0, x\ne y$, ta có:

$$B=\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{xy})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x-y)\left(\sqrt{x^3}+x\right)}=\frac{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x-y)(x\sqrt{x}+x)}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}(x-y)}{x(x-y)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

II. Đưa thừa số vào trong dấu căn

Bài toán 6. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $-3\sqrt{5}$ d) $-4\sqrt{2}$

Hướng dẫn:

Áp dụng $A\sqrt{B}=\sqrt{A^2B}\ (A\ge 0, B\ge 0)$; $A\sqrt{B}=-\sqrt{A^2B}\ \left(A<0, B\ge 0\right)$.

Lời giải

a) $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{18}$ b) $2\sqrt{6}=\sqrt{2^2\cdot 6}=\sqrt{24}$

c) $-3\sqrt{5}=-\sqrt{3^2.5}=-\sqrt{45}$ d) $-4\sqrt{2}=-\sqrt{4^2\cdot 2}=-\sqrt{32}$

Bài toán 7. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) a$\sqrt{13}$, $a<0$ b) a$\sqrt{\frac{7}{a}}$; $a>0$ c) $x\sqrt{\frac{-23}{x}}$; $x<0$ d) $2x\sqrt{\frac{y}{2x}}$; $x>0,\ y\ge 0$

Hướng dẫn:

Áp dụng $A\sqrt{B}=\sqrt{A^2B}(A\ge 0,\ B\ge 0)$; $A\sqrt{B}=-\sqrt{A^2B}\ \left(A<0;\ B\ge 0\right)$

Lời giải

a) Ta có, với $a<0\Rightarrow a\sqrt{13}=-\sqrt{13a^2}$.

b) Ta có, với $a>0\Rightarrow a\sqrt{\frac{7}{a}}=\sqrt{\frac{7a^2}{a}}=\sqrt{7a}$.

c) Ta có, với $x<0\Rightarrow x\sqrt{\frac{-23}{x}}=-\sqrt{\frac{-23(x)^2}{x}}=-\sqrt{-23x}$

d) Ta có, với $x>0, y\ge 0\Rightarrow \sqrt{\frac{(2x)^2y}{2x}}=\sqrt{2xy}$.

Ta có thể xét bài toán sau:

1) Đưa thừa số vào trong dấu căn: $2x\sqrt{\frac{y}{2x}}$.

Trước hết, ta tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa: $\frac{y}{2x}\ge 0\Leftrightarrow \begin{cases} xy\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}$

Trường hợp 1: $x>0$ và $y>0$, ta có: $2x\sqrt{\frac{y}{2x}}=\sqrt{\frac{(2x)^2.y}{2x}}=\sqrt{2xy}$. (Xem bài toán d).

Trường hợp 2: $x<0$ và $y\le 0$, ta có: $2x\sqrt{\frac{y}{2x}}=-\sqrt{\frac{(2x)^2y}{2x}}=-\sqrt{2xy}$

2) Đưa thừa số vào trong dấu căn: $\dfrac{a}{a-b}\sqrt{\dfrac{a-b}{a}}$

Hướng dẫn: Điều kiện $\begin{cases}\dfrac{a-b}{a}\ge 0\\ a-b\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x=0 \text{ hoặc } x=2\end{cases}$

Với $\dfrac{a-b}{a}>0\Rightarrow\dfrac{a}{a-b}>0$

Vậy $\dfrac{a}{a-b}\sqrt{\dfrac{a-b}{a}}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{a-b}\right)^2.\dfrac{a-b}{a}}=\sqrt{\dfrac{a}{a-b}}$

III. Giải phương trình

Bài toán 8. Giải phương trình:

a) $2\sqrt{3x}-\sqrt{48x}+\sqrt{108x}+\sqrt{3x}=5$ (1)

b) $\sqrt{50x-25}+\sqrt{8x-4}-3\sqrt{x}=\sqrt{72x-36}-\sqrt{4x}$ (2)

c) $\sqrt{x^2-9}-\sqrt{4x-12}=0$ (3)

d) $\sqrt{2x^2+8x+8}+\sqrt{x+2}=0$ (4)

Hướng dẫn: Rút gọn biểu thức bằng cách đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

Lời giải

a) Ta có: (1) $\Rightarrow 2\sqrt{3x}-\sqrt{16.3x}+\sqrt{36.3x}+\sqrt{3x}=5$ $\Rightarrow 2\sqrt{3x}-4\sqrt{3x}+6\sqrt{3x}+\sqrt{3x}=5$

$\Rightarrow 5\sqrt{3x}=5\Leftrightarrow\sqrt{3x}=1$ $\Rightarrow\begin{cases}1\ge 0\\ 3x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

b) Ta có: (2) $\Rightarrow\sqrt{25(2x-1)}+\sqrt{4(2x-1)}-3\sqrt{x}=\sqrt{36(2x-1)}-\sqrt{4x}$

$\Rightarrow 5\sqrt{2x-1}+2\sqrt{2x-1}-3\sqrt{x}=6\sqrt{2x-1}-2\sqrt{x}$

$\Rightarrow\sqrt{2x-1}=\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 2x-1=x\end{cases}\Rightarrow x=1$

c) Ta có: (3) $\Rightarrow\sqrt{(x-3)(x+3)}-\sqrt{4(x-3)}=0$ $\Rightarrow\begin{cases}x\ge 3\\ \sqrt{x-3}\sqrt{x+3}-2\sqrt{x-3}=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\ge 3\\ \sqrt{x-3}\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}x\ge 3\\ x=3 \text{ hoặc } x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=3$

d) Ta có: (4) $\Rightarrow\sqrt{2(x+2)^2}+\sqrt{x+2}=0$

Điều kiện: $x+2\ge 0\Rightarrow\sqrt{x+2}\ge 0$ và $\sqrt{2(x+2)^2}\ge 0$ $\Rightarrow\sqrt{2(x+2)^2}+\sqrt{x+2}\ge 0$

Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow x+2=0\Leftrightarrow x=-2$.

+ (Bạn có thể giải tương tự như bài toán c)

(4) $\Rightarrow\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{(x+1)^2+9}\ge\sqrt{9}=3$ $\Rightarrow x+2=0$ hoặc $\sqrt{2(x+2)}+1\Rightarrow 0\Rightarrow x=-2$

IV. Giải bất phương trình

Bài toán 9. Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{9x}-\sqrt{36x}+\sqrt{121x}<8$ (1) b) $\sqrt{x-1}+5\sqrt{4x-4}-\sqrt{9x-9}<4$ (2)

c) $\sqrt{2x^2-12x+18}+\sqrt{x-3}>0$ (3) d) $\sqrt{x^2-4}-\sqrt{4x+8}>0$ (4)

Hướng dẫn: Biến đổi biểu thức như bài toán 8 .

Lời giải

a) Ta có: (1) $\Rightarrow 3\sqrt{x}-6\sqrt{x}+11\sqrt{x}<8 \quad \Rightarrow 8\sqrt{x}<8 \Rightarrow \sqrt{x}<1 \Rightarrow 0\le x<1$

b) Ta có: (2) $\Rightarrow 8\sqrt{x-1}<4 \Rightarrow 2\sqrt{x-1}<1 \quad \Rightarrow \sqrt{4x-4}<1 \Rightarrow 0\le 4x-4<1 \quad \Rightarrow 1\le x<\dfrac{5}{4}$

c) Ta có: (3) $\Rightarrow \sqrt{2\left(x^2-6x+9\right)}+\sqrt{x-3}>0 \quad \Rightarrow \sqrt{2}.\sqrt{\left(x-3\right)^2}+\sqrt{x-3}>0$

$\Rightarrow \sqrt{x-3}\left[\sqrt{2\left(x-3\right)}+1\right]>0$

Vì $x-3\ge 0 \Rightarrow \sqrt{2\left(x-3\right)}+1>0$ ($x=3$ không thỏa mãn)

Vậy: (3) $\Rightarrow x-3>0 \Rightarrow x>3$.

d) Ta có: (4) $\Rightarrow \sqrt{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}-2\sqrt{x+2}>0 \quad \Rightarrow \sqrt{x+2}\left(\sqrt{x-2}-2\right)>0$

Với điều kiện $x+2\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x-2}-2>0$ ($x+2=0$ không thỏa mãn)

Khi đó: (4) $\Rightarrow \sqrt{x-2}-2>0 \quad \Rightarrow \sqrt{x-2}>2 \Rightarrow x-2>4 \Rightarrow x>6$

Kết hợp điều kiện $x>2$, ta lấy: $x>6$

Bạn có thể giải bất phương trình sau:

1) $\sqrt{x^2-9}-\sqrt{4\left(x+3\right)}<0$ 2) $\sqrt{x^2-9}-\sqrt{4\left(x+3\right)}>0$

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán d)

Bài toán 10. So sánh:

a) $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{3}$ và $5\sqrt{2}$ c) $-6\sqrt{2}$ và $-5\sqrt{3}$.

Hướng dẫn: Đưa thừa số vào trong dấu căn.

Lời giải

a) Ta có: $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2.2}=\sqrt{18}; 2\sqrt{3}=\sqrt{2^2.3}=\sqrt{12}$

Lại có: $12<18 \Rightarrow \sqrt{12}<\sqrt{18}$. Vậy $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$

b) Ta có: $5\sqrt{2}=\sqrt{25.2}=\sqrt{50}; 4\sqrt{3}=\sqrt{4^2.3}=\sqrt{48}$

Lại có: $48<50 \Rightarrow \sqrt{48}<\sqrt{50}$. Vậy $4\sqrt{3}<5\sqrt{2}$

c) Ta có: $6\sqrt{2}=\sqrt{6^2.2}=\sqrt{72}; 5\sqrt{3}=\sqrt{5^2.3}=\sqrt{75}$

Lại có: $72<75 \Rightarrow \sqrt{72}<\sqrt{75}$. Vậy $6\sqrt{2}<5\sqrt{3} \Rightarrow -6\sqrt{2}>-5\sqrt{3}$.

V. Trục căn thức ở mẫu

Bài toán 11. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\frac{5}{3\sqrt{8}}$ b) $\frac{1}{3\sqrt{20}}$ c) $\frac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}}$ d) $\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\frac{A}{\sqrt{B}}=\frac{A\sqrt{B}}{B}(B>0)$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{5}{3\sqrt{8}}=\frac{5\sqrt{8}}{3.8}=\frac{5.2\sqrt{2}}{3.8}=\frac{5\sqrt{2}}{12}$

b) Ta có: $\frac{1}{3\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{20}}{3.20}=\frac{2\sqrt{5}}{60}=\frac{\sqrt{5}}{30}$

c) Ta có: $\frac{\left(2\sqrt{2}+2\right)\sqrt{2}}{5.2}=\frac{4+2\sqrt{2}}{5.2}=\frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{5.2}=\frac{2+\sqrt{2}}{5}$

d) Ta có: $\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{2.3}=\frac{3\sqrt{3}+3}{2.3}=\frac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{2.3}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Chú ý: Ta có thể giải bài toán trục căn thức ở mẫu bằng cách khác:

$$\frac{5}{3\sqrt{8}}=\frac{5}{3.\sqrt{4.2}}=\frac{5}{6\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{6.2}=\frac{5\sqrt{2}}{12}$$

(Bài toán b) cũng giải tương tự như thế)

Bài toán 12. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\frac{2}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{a+b\sqrt{a}}{b\sqrt{a}}$ c) $\frac{a}{\sqrt{2a^3}}$ d) $\frac{2a^2}{\sqrt{2a^5}}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức: $\frac{A}{\sqrt{B}}=\frac{A\sqrt{B}}{B}(B>0)$

Lời giải

a) Điều kiện $a>0$, ta có $\frac{2}{\sqrt{a}}=\frac{2\sqrt{a}}{a}$

b) Điều kiện $a>0, b\neq 0$.

Ta có: $\frac{a+b\sqrt{a}}{b\sqrt{a}}=\frac{\left(a+b\sqrt{a}\right)\sqrt{a}}{ab}=\frac{a\sqrt{a}+ab}{ab}=\frac{\sqrt{a}+b}{b}(a>0, b\neq 0)$

c) Điều kiện $a>0$. Ta có: $\frac{a}{\sqrt{2a^3}}=\frac{a.\sqrt{2a^3}}{2a^3}=\frac{a^2.\sqrt{2a}}{2a^3}=\frac{\sqrt{2a}}{2a}$

d) Điều kiện $a>0$, ta có: $\frac{2a^2}{\sqrt{2a^5}}=\frac{2a^2\sqrt{2a^5}}{2a^5}=\frac{2a^2.a^2\sqrt{2a}}{2a^5}=\frac{1}{a}\sqrt{2a}$

Bài toán 13. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\frac{3}{\sqrt{3}+1}$ b) $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$ c) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ d) $\frac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$ e) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\frac{C}{\sqrt{A}\pm B}=\frac{C\left(\sqrt{A}\mp B\right)}{A-B^2}\left(A\ge 0; A\ne B^2\right)$.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{3}{\sqrt{3}+1}=\frac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{3\sqrt{3}-3}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$.

b) Ta có: $\frac{2}{\sqrt{2}-1}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1}=2\left(\sqrt{2}+1\right)$.

c) Ta có: $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{4+4\sqrt{3}+3}{4-3}=7+4\sqrt{3}$.

d) Ta có: $\frac{\left(2\sqrt{10}-5\right)\left(4+\sqrt{10}\right)}{16-10}=\frac{8\sqrt{10}+20-20-5\sqrt{10}}{6}=\frac{3\sqrt{10}}{6}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

e) Ta có: $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}=\frac{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{8}+2\right)}{8-4}=\frac{2\sqrt{24}+4\sqrt{3}-\sqrt{48}-2\sqrt{6}}{4}$

$=\frac{4\sqrt{6}+4\sqrt{3}-4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{4}=\frac{2\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Bài toán 14. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\frac{a}{3+\sqrt{a}}$ b) $\frac{p}{2\sqrt{p}-1}$ c) $\frac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$ d) $\frac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2}$

Hướng dẫn: Xem cách giải bài toán 6 .

Lời giải

a) Ta có: $\frac{a}{3+\sqrt{a}}=\frac{a\left(3-\sqrt{a}\right)}{3^2-a}=\frac{a\left(3-\sqrt{a}\right)}{9-a}$ ($a\ge 0$ và $a\ne 9$)

b) Ta có: $\frac{p}{2\sqrt{p}-1}=\frac{p\left(2\sqrt{p}+1\right)}{\left(2\sqrt{p}\right)^2-1^2}=\frac{p\left(2\sqrt{p}+1\right)}{4p-1}$

c) Ta có: $\frac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}=\frac{\left(a+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}\right)}{1-a}=\frac{\sqrt{a}\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}\right)}{1-a}=\frac{\sqrt{a}\left(1-a\right)}{1-a}=\sqrt{a}$

Nhận xét: Ta có thể giải cách khác.

$\frac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)}{1+\sqrt{a}}=\sqrt{a}$ (rút gọn phân thức bằng cách phân tích đa thức thành nhân tử).

d) Ta có: $\frac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2}=\frac{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}-2\right)}{\sqrt{p}-2}=\sqrt{p}$.

Bài toán 15. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$ d) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{10}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức: $\dfrac{C}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\dfrac{C(\sqrt{A}\mp\sqrt{B})}{A-B}(A\geq 0,B\geq 0,A\neq B)$

Lời giải:

a) Ta có $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\dfrac{4(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}=2(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

b) Ta có: $\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\dfrac{2(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{6-5}=2(\sqrt{6}+\sqrt{5})$

c) Ta có: $\dfrac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}=\dfrac{3(\sqrt{10}-\sqrt{7})}{10-7}=\sqrt{10}-\sqrt{7}$

d) Ta có: $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$

e) Ta có: $\dfrac{10}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{10(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{10(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{12-2}=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

Bài toán 16. Trục căn thức ở mẫu

a) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}(a>b>0)$ b) $\dfrac{2ab}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}(a>0,b>0)$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}(a\geq 0)$ d) $\dfrac{b}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}(a>b>0)$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức

$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{C(\sqrt{A}\mp\sqrt{B})}{A-B}(A\geq 0,B\geq 0,A\neq B)$$

Lời giải:

a) Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b},(a>b>0)$

b) Ta có: $\dfrac{2ab}{\sqrt{2}+\sqrt{b}}=\dfrac{2ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b},(a>0,b>0)$.

c) $\dfrac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{a+1-a}=\sqrt{a+1}-\sqrt{a},(a\geq 0)$

d) $\dfrac{b}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}=\dfrac{b(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})}{(a+b)-(a-b)}=\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{2},(a>b>0)$.

Bài toán 17 .

a) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ b) $\dfrac{a}{a\sqrt{a}+1}(a>0,b\neq 1)$ c) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}-1}$

Lời giải

a) Ta có: $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\dfrac{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2}{\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}}=2+\sqrt{3}$.

b) Ta có: $\dfrac{a}{a\sqrt{a}+1}=\dfrac{a(a\sqrt{a}-1)}{(a\sqrt{a})^2-1}=\dfrac{a(a\sqrt{a}-1)}{a^3-1},(a>0,b\neq 1)$.

c) Ta có: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+1)^2-2}=\dfrac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{(\sqrt{3}+1-\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

d) Ta có $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}-1}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{1+\sqrt{2}}+1)}{(\sqrt{1+\sqrt{2}})^2-1^2}=\sqrt{1+\sqrt{2}}+1$

Bài toán 18. So sánh (không dùng máy tính bỏ túi và bảng số)

a) $\sqrt{12}-\sqrt{11}$ và $\sqrt{11}-\sqrt{10}$

b) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ và $\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}$.

Hướng dẫn: Xét các biểu thức liên hợp của các biểu thức đã cho, chẳng hạn: $\sqrt{12}-\sqrt{11}$ và $\sqrt{12}+\sqrt{11}, \sqrt{3}-1$ và $\sqrt{3}+1$.

Lời giải:

a) Ta có: $(\sqrt{12}-\sqrt{11})(\sqrt{12}+\sqrt{11})=12-11=1\Rightarrow\sqrt{12}-\sqrt{11}=\dfrac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$.

Tương tự, ta có: $\sqrt{11}-\sqrt{10}=\dfrac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}$

Vì $\sqrt{12}+\sqrt{11}>\sqrt{11}+\sqrt{10}\Leftrightarrow\sqrt{12}>\sqrt{10}\Leftrightarrow 12>10$ (hiển nhiên) nên

ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{10}}<\dfrac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}\Rightarrow\sqrt{12}-\sqrt{11}<\sqrt{11}-\sqrt{10}$

Nhận xét::

1) Từ kết quả $\sqrt{12}-\sqrt{11}<\sqrt{11}-\sqrt{10}\quad\Rightarrow\sqrt{12}+\sqrt{10}<2\sqrt{11}$.

- Một cách tổng quát với $n\in\mathbb{N}^*$ ta có: $\sqrt{n+2}+\sqrt{n}<2\sqrt{n+1}$ (xin bạn tự chứng minh)
- Nếu lấy $n=2014$, ta có bài toán:
  So sánh $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{(\sqrt{x-1})^2-2\sqrt{x-1}+1}$ và $2\sqrt{2015}$, v.v...)

2) Ta có: $\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

Vì vậy, ta có thể nói đây là phép "trục căn thức ở tử số".

b) Học sinh tự giải.

Bài toán 19. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}\geq -1,\forall x\geq 1$

b) $\dfrac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}\geq\sqrt{2},\forall x\geq 1,x\neq 3$

c) $\dfrac{y}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}<\dfrac{z}{\sqrt{x+z}-\sqrt{x-z}},\forall x>y>z>0$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\frac{C}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\frac{C(\sqrt{A}\neq\sqrt{B})}{A-B}$ $(A\geq 0, B\geq 0, A\neq B)$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{(x-2)(\sqrt{x-1}-1)}{(x-1)-1}=\sqrt{x-1}-1(x\neq 2)$

Vì $x\geq 1, x\neq 2\Rightarrow\sqrt{x-1}\geq 0\Rightarrow\sqrt{x-1}-1\geq -1$ (Nếu $x=2\Rightarrow\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=0>-1$, hiển nhiên)

Vậy $\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}\geq -1, \forall x\geq 1$.

Nhận xét: Ta có bài toán khó hơn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\frac{x-2+}{\sqrt{x-1}+1}, \forall x\geq 1.$ (Đáp số: $\min\limits_{x\geq 1} P=-1$ (với $x=1$)

(Bài toán có thể giải cách khác như sau:

Ta có: $\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}\geq -1\Rightarrow x-2\geq -1(\sqrt{x-1}+1)$ (vì $\sqrt{x-1}+1>0, \forall x\geq 1$)

$\Rightarrow x+\sqrt{x-1}-1\geq 0$ $\Rightarrow (x-1)+\sqrt{x-1}\geq 0, \forall x\geq 1$ $\Rightarrow\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)\geq 0$ (hiển nhiên đúng $\forall x\geq 1$)

Nhưng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của P thì ta phải trục căn thức ở mẫu.

b) Ta có $\frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}=\frac{(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-1})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})}{x-3}=\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\geq\sqrt{2}$

(vì $x\geq 1, x\neq 3$)$\Rightarrow\sqrt{x-1}\geq 0$

(Em hãy suy nghĩ xem, ta không làm cách hai như bài toán a)

Ta còn có bài toán: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}, \forall x\geq 1; x\neq 3,$ (Đáp số: $\min P=\sqrt{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x=1)

c) Ta có: $\frac{y}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}=\frac{y\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)}{(x+y)-(x-y)}=\frac{y(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})}{2y}=\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{2}$

Tương tự: $\frac{z}{\sqrt{x+z}-\sqrt{x-z}}=\frac{\sqrt{x+z}+\sqrt{x-z}}{2}$

Còn lại, ta sẽ chứng minh:

$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}<\sqrt{x+z}+\sqrt{x-z}$ (*) (với $x>y>z>0$)

Bình phương hai vế bất đẳng thức (*), ta được:

(*) $\Leftrightarrow x+y+2\sqrt{x^2-y^2}+x-y<x+z+2\sqrt{x^2-z^2}+x-z\Leftrightarrow\sqrt{x^2-y^2}<\sqrt{x^2-z^2}$

$\Leftrightarrow x^2-y^2<x^2-z^2\Leftrightarrow y^2>z^2\Leftrightarrow y>z>0$ (hiển nhiên).

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Bài toán 20. Rút gọn:

a) $A=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{10}}$ b) $B=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{100}}$

Hướng dẫn: Trục căn thức ở mẫu số của mỗi số hạng.

Lời giải:

a)Ta có $A=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\ldots+\frac{\sqrt{10}-\sqrt{9}}{10-9}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{9}-\sqrt{8}+\sqrt{10}-\sqrt{9}$

$=\sqrt{10}-1$

Nhận xét: Vì $\sqrt{10}>\sqrt{9}\Rightarrow\sqrt{10}-1>\sqrt{9}-1$

Ta có bài toán: So sánh: $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{10}}$ và 2.

Bài toán tương tự: So sánh $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ và 9

b) Ta có: $B=2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{2\sqrt{100}}\right)$

$<2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}\right)=2(\sqrt{100}-1)=18$

Bài toán tương tự.

Rút gọn:

a) $P=\frac{1}{1+\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{9}+13}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2017}}$ b) $Q=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2014}}$

VI. Giải phương trình

Bài toán 21.

a) $\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=2$ (1)   b) $\frac{4x^2}{(1-\sqrt{2x+1})^2}=2x+6$ (2)   c) $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2}=x-4$
(3)

Hướng dẫn: Trục căn thức ở mẫu:

Lời giải

a) Ta có: (1) $\Rightarrow\frac{(x-2)(\sqrt{x-1}-1)}{x-2}=2(x\geq 1,x\neq 2)$

$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}-1=2\\ x\geq 1;x\neq 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}=3\\ x\geq 1;x\neq 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-1=9\\ x\geq 1,x\neq 2\end{cases}\Rightarrow x=10$

b) Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$ và $1-\sqrt{2x+1} \neq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-1}{2}$ và $x \neq 0$.

Khi đó: $(2) \Rightarrow \frac{4x^2(1+\sqrt{2x+1})^2}{(1-\sqrt{2x+1})^2(1+\sqrt{2x+1})^2} = 2x+6$

$\Rightarrow \frac{4x^2(2+2x+2\sqrt{2x+1})}{(1-2x-1)^2} = 2x+6 \Rightarrow \sqrt{2x+1} = 2$

$\Rightarrow 2x+1=4 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ (Thỏa mãn diều kiện $x \geq \frac{-1}{2}$ và $x \neq 0$)

c) Điều kiện: $x \geq -1$. Ta có:

(1) $\Rightarrow \frac{x^2(1-\sqrt{1+x})^2}{(1+\sqrt{1+x})^2(1-\sqrt{1+x})^2} = x-4 (x \neq 0)$

$\Rightarrow 2+x-2\sqrt{1+x} = x-4 \Rightarrow \sqrt{1+x} = 3 \Rightarrow 1+x=9 \quad \Rightarrow x=8$ (Thoả mãn điều kiện $x \geq -1$ vì $x \neq 0$)

Bài toán 22. Giải phương trình $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=x$

Hướng dẫn: Đặt điều kiện và nhân hai vế với biểu thức liên hợp của vế trái.

Lời giải

Điều kiện $-2 \leq x \leq 1$

Ta có $(*) \Rightarrow (\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) = x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$

$\Rightarrow 2x = x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) \qquad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2(**) \end{array}\right.$

Xét phương trình $(**)$. Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$1.\sqrt{1+x}+1.\sqrt{1-x} \leq \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{1+x+1-x} = 2$

Dấu " = " xảy ra $\Rightarrow \sqrt{1+x} = \sqrt{1-x} \quad \Rightarrow x=0$ (Thỏa mãn điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$).

Đáp số: $x = \mathbf{0}$. (có thể bình phương hai vế)

Cách trình bày khác như sau:

(*) $\Rightarrow \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = x \quad \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = x \Rightarrow 2x = x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$

Ta được kết quả như cách giải trên. Việc này ta tạm gọi là “ trục căn thức ở tử”

Bạn hãy giải bài sau:

1) $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}$

2) $4(x+1)^2=(2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2$

3) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+x}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=x$

4) $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\dfrac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$

Đáp số: 1) $x=2$ 2) $x=3$ 3) $x=-2$ 4) $x=\dfrac{2}{3};\ x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

VII. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Bài toán 23. Rút gọn:

a) $A=\left(\dfrac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)^2\quad (x\ge 0 \text{ và } x\ne 1)$.

b) $B=\left(\dfrac{2-a\sqrt{a}}{2-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\cdot\left(\dfrac{2-\sqrt{a}}{2-a}\right)(a\ge 0; a\ne 2; a\ne 4)$.

c) $C=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}(x>0, x\ne 1)$.

Hướng dẫn: Thực hiện phép tính trong dấu ngoặc trước.

Lời giải

a) Ta có: $A=\left[\dfrac{(1-\sqrt{x})(x+\sqrt{x}+1)}{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right]\left[\dfrac{1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}\right]^2$

$=(x+2\sqrt{x}+1)\cdot\dfrac{1}{(1+\sqrt{x})^2}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)^2}=1$

b) Ta có: $B=\dfrac{2-a\sqrt{a}+2\sqrt{a}-a}{2-\sqrt{a}}\cdot\dfrac{2-\sqrt{a}}{2-a}$

$=\dfrac{(2-a)+\sqrt{a}(2-a)}{2-\sqrt{a}}\cdot\dfrac{2-\sqrt{a}}{2-a}=\dfrac{(2-a)(1+\sqrt{a})}{2-a}=1+\sqrt{a}$

c) Ta có: $C=\dfrac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}-\dfrac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

$=\dfrac{x+\sqrt{x}+1-x+\sqrt{x}-1+x+1}{\sqrt{x}}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$

(Ta có thể đặt $u=\sqrt{x}; u\ge 0\Rightarrow x=u^2$ và đưa về biểu thức theo biến u như đã học ở lớp 8)

Bài toán 24. Rút gọn biểu thức:

a) $A=\left(\dfrac{3x-3\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}(x\ge 0, x\ne 1)$

b) $B=\dfrac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}(x\ge 0, x\ne 9)$

c) $C=\dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}(x\ge 0,x\ne 4,x\ne 9)$

Hướng dẫn: Phân tích các mẫu thức thành nhân tử.

Lời giải

a) Ta có: $x+\sqrt{x}-2=x-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-2\ =\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)+2(\sqrt{x}-1)=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)$

Vậy $A=\left[\dfrac{(3x-3\sqrt{x}-3)+(\sqrt{x}+2)-(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}\right]\cdot(\sqrt{x}+2)\quad=\dfrac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)}=3\sqrt{x}$

Cách khác: Đặt $\mathrm{u}=\sqrt{v},\ \mathrm{u}\ge 0 \Rightarrow x=u^2$

Khi đó: $\mathrm{A}=\left(\dfrac{3\mathrm{u}^2-3\mathrm{u}-3}{\mathrm{u}^2+\mathrm{u}-2}+\dfrac{1}{\mathrm{u}-1}-\dfrac{1}{\mathrm{u}+2}\right):\dfrac{1}{\mathrm{u}+2}$

Biến đổi và rút gọn, ta được kết quả trên, với chú ý rằng:

$u^2+u-2=(u-1)(u+2)$

Ta có $x-2\sqrt{x}-3=x+\sqrt{x}-3\sqrt{x}-3=\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)-3(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)$

Khi đó

$$B=\frac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}-\frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}=\frac{x\sqrt{x}-3-(2\sqrt{x}-6)(\sqrt{x}-3)-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-3-2x+6\sqrt{x}+6\sqrt{x}-18-x-\sqrt{x}-3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-3x+8\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}=\frac{x(\sqrt{x}-3)+8(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}=\frac{(\sqrt{x}-3)(x+8)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}=\frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$$

c) Ta có: $x-5\sqrt{x}+6=x-3\sqrt{x}-2\sqrt{x}+6=\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)-2(\sqrt{x}-3)\ =(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)$

Vậy $C=\dfrac{2\sqrt{x}-9-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}$

$$=\frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}=\frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}$$

$=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$(vì $x-\sqrt{x}-2=x+\sqrt{x}-2\sqrt{x}-2$

$=\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)-2(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)$

Có thể đặt $\mathrm{u}=\sqrt{\mathrm{x}};\mathrm{u}\ge 0\Rightarrow \mathrm{x}=\mathrm{u}^2$

Bài toán 25. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1}$.

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức P.

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tìm x để $P = 10$.

Lời giải

a) P xác định $\Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x}+1 \ne 0 \\ x-\sqrt{x}+1 \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$ (Vì $x-\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, với mọi $x \ge 0$ và $x \ne 1$);

khi $x \ge 0$ và $x \ne 1 \Rightarrow x\sqrt{x}+1 > 0$ và $\sqrt{x}+1 > 0$.

b) Ta có $x\sqrt{x}+1 = (\sqrt{x})^3 + 1^3 = (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$

Vậy $P = \left[\dfrac{x+2-(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}\right] \cdot \dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

c) $P = 10\ (x \ge 0; x \ne 1) \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} = 10 \Rightarrow 10(\sqrt{x}-1) = 1 \quad \Rightarrow 10\sqrt{x} - 10 = 1 \Rightarrow 10\sqrt{x} = 11$

$\Rightarrow x = \dfrac{121}{100}$ (Thỏa mãn diều kiện).

Bài toán 26. Cho biểu thức $A = \dfrac{1}{2+2\sqrt{a}} + \dfrac{1}{2-2\sqrt{a}} - \dfrac{a^2+1}{1-a^2}$

a) Tìm điều kiện xác định của A. b) Rút gọn biểu thức A. c) Tìm giá trị của a; biết $A < \frac{1}{3}$.

Lời giải

a) Biểu thức A có nghĩa (xác định) $\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 2+2\sqrt{a} \ne 0 \\ 2-2\sqrt{a} \ne 0 \\ 1-a^2 \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ 2(1+\sqrt{a}) \ne 0 \\ 2(1-\sqrt{a}) \ne 0 \\ (1-a)(1+a) \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ a \ne 1 \end{cases}$

b) Ta có:

$$A = \frac{1}{2(1+\sqrt{a})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{a})} - \frac{a^2+1}{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})(1+a)}$$
$$= \frac{(1-\sqrt{a})\cdot(1+a) + (1+\sqrt{a})(1+a) - 2\left(a^2+1\right)}{2(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})(1+a)}$$
$$= \frac{1+a-\sqrt{a}-a\sqrt{a}+1+a+\sqrt{a}+a\sqrt{a}-2a^2-2}{2(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})(1+a)} = \frac{2a(1-a)}{2(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})(1+a)} = \frac{a}{1+a}$$

c) $A < \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{a}{1+a} < \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{a}{1+a} - \dfrac{1}{3} < 0 \quad \Rightarrow \dfrac{2a-1}{3(1+a)} < 0 \Rightarrow 2a-1 < 0$ (vì $a \ge 0$; nên mẫu số luôn dương)

$\Rightarrow a < \dfrac{1}{2}$. Kết hợp điều kiện, ta có $0 \le a < \dfrac{1}{2}$.

Bài toán 27. $A=\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$

a) Tìm điều kiện có nghĩa của A . b) Rút gọn A . c) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Lời giải

a) Biểu thức A có nghỉa (xác định) $\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x\sqrt{x}-1\ne 0\\ x+\sqrt{x}+1\ne 0\\ 1-\sqrt{x}\ne 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x\ne 1\end{cases}$

b) Ta có: $x\sqrt{x}-1=(\sqrt{x})^3-1=(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)$

Mẫu thức chung: $x\sqrt{x}-1$

Vậy $A=\dfrac{x+2+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{x\sqrt{x}-1}=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}=\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$

c) Vì $x\ge 0\Rightarrow A=0$ khi $x=0; A>0$ khi $x>0$ với $x>0$.

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{1}{A}=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1$

Theo bất đẳng thức Cauchy: $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ge 2\sqrt{\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=2\Rightarrow\dfrac{1}{A}\ge 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{1}{A}$ bằng 3 .

Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow x=1$ Khi đó A có giá trị lớn nhất là $\dfrac{1}{3}$

Dấu " = " xảy ra khi $x=1$ (với $x=0$ thì $A=0<\dfrac{4}{3}$)

Đáp số: giá trị lớn nhất của A bằng $\dfrac{1}{3}$ (khi $x=1$).

Bài toán 28. Giải phương trình:

a) $\sqrt{2x^2-4x+1}=x-1$ (1) b) $\sqrt{4x-20}-3\sqrt{\dfrac{x-5}{9}}=\sqrt{1-x}$ (2)

Áp dụng: $\sqrt{A}=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\ge 0\\ A=B^2\end{cases}$

Lời giải

a) Ta có: (1) $\Rightarrow\begin{cases}x-1\ge 0\\ 2x^2-4x+1=(x-1)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ 2x^2-4x+1=x^2-2x+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x^2-2x=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x(x-2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x=0\ \ hoac\ x-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x=0\ hoac\ x=2\end{cases}\Rightarrow x=2$

b) Ta có: (2) $\Rightarrow 2\sqrt{x-5}-3.\frac{1}{3}\sqrt{x-5}=\sqrt{1-x} \Rightarrow \sqrt{x-5}=\sqrt{1-x} \Rightarrow \begin{cases}1-x\ge 0\\ x-5=1-x\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}x\le 1\\ x=3\end{cases} \Rightarrow x=\varnothing$

Vậy phương trình (2) vô nghiệm.

Bài toán 29. Giải phương trình $\sqrt{x-5}+\sqrt{7-x}=2$ (*)

Lời giải

Ta có: (*)$\Rightarrow \begin{cases}5\le x\le 7\\ x-5+2\sqrt{(x-5)(7-x)}+7-x=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5\le x\le 7\\ 2\sqrt{(x-5)(7-x)}=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5\le x\le 7\\ (x-5)(7-x)=1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}5\le x\le 7\\ x^2-12x+36=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5\le x\le 7\\ (x-6)^2=0\end{cases} \Rightarrow x=6$

Vậy phương trình (*) có nghiệm $x=6$

Cách giải khác:

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$\sqrt{x-5}+\sqrt{7-x}=1\sqrt{x-5}+1\sqrt{7-x}\le \sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{x-5+7-x}=2$

Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow \sqrt{x-5}=\sqrt{7-x} \Rightarrow x-5=7-x \Rightarrow x=6$

Vậy phương trình (*) có nghiệm $x=6$

Ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy như sau:

$\sqrt{x-5}=\sqrt{(x-5).1}\le \frac{x-5+1}{2}=\frac{x-4}{2}$ $(x\le 7)$

Vậy: $\sqrt{x-5}+\sqrt{7-x}\le \frac{x-4}{2}+\frac{8-x}{2}=2$

Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow \begin{cases}x-5=1\\ 7-x=1\end{cases} \Rightarrow x=6$

Vậy phương trình (*) có nghiệm $x=6$

Bài toán 30. Giải phương trình: $\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}+\sqrt{(1+x)(3-x)}=2$

Hướng dẫn: Để ý đến biểu thức dưới các dấu căn, ta đặt ẩn phụ:

$u=\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}$, từ đó tính $\sqrt{(1+x)(3-x)}$ qua u

Lời giải

Đặt $u=\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}$ $(-1\le x\le 3) \Rightarrow u\ge 0$

$\Rightarrow u^2=1+x+2\sqrt{(1+x)(3-x)}+3-x \Rightarrow \sqrt{(1+x)(3-x)}=\frac{u^2-4}{2}$

Ta có phương trình: $\frac{u^2-4}{2}+u=2 \Rightarrow u^2+2u-8=0$ $\Rightarrow u^2+2u+1=9 \Rightarrow (u+1)^2=3^2$

$\Rightarrow |u+1|=3$

Vì $u\ge 0 \Rightarrow |u+1|=u+1 \Rightarrow u=2$

Vậy $\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2 \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 3 \\ 1+x+2\sqrt{(1+x)(3-x)}+3-x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 3 \\ 2\sqrt{(1+x)(3-x)}=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Nhận xét: Ta có thể xét điều kiện của u chặt chẽ hơn:

$2 \le u \le 2\sqrt{2}$. Thật vậy:

Thaeo bất đẳng thức Bunyakovsky:

$1.\sqrt{1+x}+1.\sqrt{3-x} \le \sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{1+x+3-x}=2\sqrt{2} \Rightarrow u \le 2\sqrt{2}$

Lại có: $u^2=4+2\sqrt{(1+x)(3-x)} \ge 4$ $(vì\ -1 \le x \le 3)$

$\Rightarrow \sqrt{(1+x)(3-x)} \ge 0 \Rightarrow u \ge 2$

Ta có bài toán mới sau đay: “Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $A=\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}$”

BÀI 10. CĂN BẬC BA VÀ CĂN THỨC BẬC BA

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Căn bậc ba

* Căn bậc ba của số thực a là số thực x thỏa mãn $x^3 = a$.

Chú ý: Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc ba. Căn bậc ba của só a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$. Trong kí hiệu $\sqrt[3]{a}$, số 3 được gọi là chỉ só của căn. Phép tìm căn bậc ba của một số gọi là phép khai căn bậc ba.

Nhận xét: $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$ với mọi số thực a.

2. Căn thức bậc ba

Căn thức bậc ba là biểu thức dạng $\sqrt[3]{A}$ trong đó A là một biểu thức đại số.

B. PHÂN LOẠI CÁC DẠNG BÀI TẬP

I. Tính căn bậc ba

Bài toán 1. Tính:

a) $\sqrt[3]{216}$ b) $\sqrt[3]{-512}$ c) $\sqrt[3]{-0,001}$ d) $\sqrt[3]{1,331}$ e) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$

Hướng dẫn: $\sqrt[3]{a^3} = a$ với mọi số thực a.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6.$ b) Ta có: $\sqrt[3]{-512} = \sqrt[3]{-(8)^3} = -8.$

c) Ta có: $\sqrt[3]{-0,001} = \sqrt[3]{-(0,1)^3} = -0,1$ d) $\sqrt[3]{1,331} = \sqrt[3]{(1,1)^3} = 1,1$

e) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{-\left(\frac{2}{3}\right)^3} = -\frac{2}{3}.$

Bài toán 2. Sử dụng MTCT, tính căn bậc ba sau đây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

a) $\sqrt[3]{2,1}$ b) $\sqrt[3]{-18}$ c) $\sqrt[3]{0,35}$ d) $\sqrt[3]{3,25}$

e) $\sqrt[3]{45}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{2,1} \approx 1,28;$ b) Ta có: $\sqrt[3]{-18} \approx -2,62;$

c) Ta có: $\sqrt[3]{0,35} \approx 0,70$ d) Ta có: $\sqrt[3]{3,25} \approx 1,48;$ e) Ta có: $\sqrt[3]{45} \approx 3,56$

Bài toán 3. Tính:

a) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27} - \sqrt[3]{\frac{1}{64}};$ b) $2\left(\sqrt[3]{27} + 5\sqrt[3]{216}\right).\sqrt[3]{\frac{1}{64}}.$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27} - \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = 2 + (-3) - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}.$

b) $2\left(\sqrt[3]{27} + 5\sqrt[3]{216}\right).\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = 2\left(\sqrt[3]{3^3} + 5\sqrt[3]{6^3}\right).\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = (2.3 - 5.6).\frac{1}{4} = (-24).\frac{1}{4} = -6.$

Bài toán 4. Tính giá trị các căn thức: $\sqrt[3]{5x-1}$ tại $x=0$ *và* $x=-1,4$.

Lời giải

- Với $x=0$, *ta có*: $\sqrt[3]{5.0-1}=\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{(-1)^3}=-1.$
- Với $x=-1,4$ *ta có*: $\sqrt[3]{5.(-,14)}=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2.$

II. RÚT GỌN BIỂU THỨC

Bài toán 5. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}$; b) $\sqrt[3]{27x^3-27x^2+9x-1}$; c) $\sqrt[3]{8x^3-12x^2+6x-1}$;

Hướng dẫn: $(a-1)^3=a^3-3a^2+3a-1$;

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}=\sqrt[3]{(x-1)^3}=x-1.$

b) Ta có: $\sqrt[3]{27x^3-27x^2+9x-1}=\sqrt[3]{(3x-1)^3}=3x-1.$

c) Ta có: $\sqrt[3]{8x^3-12x^2+6x-1}=\sqrt[3]{(2x-1)^3}=2x-1.$

Bài toán tương tự:

Rút gọn: a) $\sqrt[3]{8x^3+12x^2+6x+1}$ b) $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}$.

Bài toán 6. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}$; b) $\sqrt[3]{(2\sqrt{2}+1)^2}$; c) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}\right)^3$.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}=1-\sqrt{2}.$ b) Ta có: $\sqrt[3]{(2\sqrt{2}+1)^3}=2\sqrt{2}+1$

c) Ta có: $\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}\right)^3=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3}=\sqrt{2}+1.$

Nhận xét:

- Vì $\left(\sqrt{2}+1\right)^3=1-3\sqrt{2}+6-2\sqrt{2}=7-5\sqrt{2}$, ta có bài toán rút gọn $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$
- Từ bài toán b) và c), ta có bài toán sau:
- Rút gọn $\sqrt[3]{25+22\sqrt{2}}$; $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$.

Bài toán 7. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

a) $x+5+\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}$; tại $x=-3$; b) $x+\sqrt[3]{1-9x+27x^2-27x^3}$; tại $x=2$.

Lời giải

a) Ta có: $x+5+\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}=x+5+\sqrt[3]{(x+1)^3}=x+5+x+1=2x+6$

Tại $x=-3$; ta có: $2.(-3)+6=-6+6=0$

b) Ta có: $x+\sqrt[3]{1-9x+27x^2-27x^3}=x+\sqrt[3]{(1-3x)^3}=x+(1-3x)=-2x+1$

Tại $x=2$. Ta có: $-2.2+1=-3$

Bài toán 8. Rút gọn biểu thức:

a) $A=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$; b) $B=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn: Lập phương hai vế. Xem nhận xét ở bài toán 6.

Lời giải

a) Đặt $a=20+14\sqrt{2};\ b=20-14\sqrt{2}$

Ta có: $A=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\Rightarrow A^3=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3=a+b+3\sqrt[3]{ab}.(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$

Ở đó: $a+b=20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}=40$

$ab=\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\left(20-14\sqrt{2}\right)}=\sqrt[3]{8}=2$

Vậy $A^3=40+6A.$ $\Rightarrow A^3-6A-40=0$ $\Rightarrow (A-4)(A^2+4A+10)=0$

$\Rightarrow A-4=0$ *vì* $A^2+4A+10=(A+2)^2+6\ge 6>0\Rightarrow A=4$ *vì* $(A+2)^2+6\ge 6>0$ vô nghiệm

Cách khác: $A=\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3}=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4.$

b) Ta có: $B=\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2.$

Nhận xét: Ta có thể làm như bài toán a)

Ta có bài toán sau:

1. Chứng tỏ rằng: $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ là một nghiệm của phương trình $x^3-6x-40=0$
2. Chứng tỏ rằng: $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ là một nghiệm của phương trình $x^3+3x-14=0$

Bài toán tương tự:

Chứng minh rằng:

a) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ là một số tự nhiên

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ là một số tự nhiên

III. Giải phương trình

Bài toán 9. Giải phương trình:

a) $\sqrt[3]{x-1}=2$; b) $\sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{12-5x}=1$

Hướng dẫn: Lập phương trình hai vế.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{x-1}=2\Rightarrow x-1=8\Rightarrow x=9$.

b) Ta co: $\sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{12-5x}=1$

$$\Rightarrow (5x+7)+3\left(\sqrt[3]{5x+7}\right)^2\cdot\sqrt[3]{12-5x}+3\cdot\sqrt[3]{5x+7}\cdot\left(\sqrt[3]{12-5x}\right)^2+12-5x=1$$

$$\Rightarrow 19+3\sqrt[3]{5x+7}.\sqrt[3]{12-5x}.\left(\sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{12-5x}\right)=1$$

mà $\sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{12-5x}=1$

$\Rightarrow 19+3\cdot\sqrt[3]{(5x+7)(12-5x)}=1$ $\quad\Rightarrow \sqrt[3]{(5x+7)(12-5x)}=-6$

$\Rightarrow (5x)^2-12.(5x)-300=0$ $\quad\Rightarrow x^2-x-12=0$ $\quad\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Thử lại: $x=4; x=-3$ đều là nghiệm của phương trình.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Căn bậc hai của 4 là:

A. 2. **B.** -2. **C.** 2 và -2. **D.** $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$.

Câu 2. Căn bậc hai số học của 49 là:

A. 7. **B.** -7. **C.** 7 và -7. **D.** $\sqrt{7}$ và $-\sqrt{7}$.

Câu 3. Rút gọn biểu thức $\sqrt[3]{\left(4-\sqrt{17}\right)^3}$ ta được:

A. $4+\sqrt{17}$. **B.** $4-\sqrt{17}$. **C.** $\sqrt{17}-4$. **D.** $-4-\sqrt{17}$.

Câu 4. Độ dài đương kính (mét) của hình tròn có diện tích $4\,\mathrm{m}^2$ sau khi làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai bằng:

A. $2,26$. **B.** $2,50$. **C.** $1,13$. **D.** $1,12$.

Câu 5. Một vật rơi tự do từ độ cao $396,9\,\mathrm{m}$. Biết quãng đường chuyển động S (mét) của vật phụ thuộc vào thời gian t (giây) bơi công thức $S=4,9t^2$. Vật chạm đất sau:

A. 8 giây. **B.** 5 giây. **C.** 11 giây. **D.** 9 giây.

Hướng dẫn - Đáp số

Câu 1. Chọn C.

Câu 2. Chọn A.

Câu 3. $\sqrt[3]{\left(4-\sqrt{17}\right)^3}=4-\sqrt{17}$. Chọn B.

Câu 4. $2\mathrm{R}=2\cdot\sqrt{\dfrac{4}{\pi}}\approx 2,26$. Chọn A.

Câu 5. $\mathrm{t}=\sqrt{\dfrac{\mathrm{S}}{4,9}}=\sqrt{\dfrac{396,9}{4,9}}=9$ giây. Chọn D.

B. TỰ LUẬN

Bài 1. Không sử dưng MCCT, tính giá trị của biếu thức:

$$A=\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}+\sqrt{4\left(2+\sqrt{3}\right)^2}-\frac{1}{2-\sqrt{3}}.$$

Bài 2. Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{4}{\sqrt{x}+2}(x>0,x\neq 4)$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A tại $x=14$.

Bài 3. Biết rằng nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn tính bởi công thức $Q=I^2Rt$, trong đó Q là nhiệt lượng tính bằng đơn vị Joule $(\mathrm{J}, \mathrm{R}$ là diện trở tính bằng dơn vị Ohm (Ω), I là cường độ dòng diện tính bàng đơn vị Ampe (A), t là thời gian tính bằng giây (s). Dòng điện chạy qua một dây dẫn co $R = 10\Omega$ trong thời gian 5 giây.

a) Thay dấu "?" trong bảng sau bàng các giá trị thích hợp.

$I(A)$	1	1,5	2
$Q(J)$	?	?	?

b) Cường độ dòng điện là bao nhiêu Ampe để nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn đạt 800 J ?

Bài 4. Tìm điều kiện có nghĩa của biểu thức:

a) $A = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ b) $B = \sqrt{x-2} + \dfrac{1}{x-2}$

Bài 5. Chứng minh:

a) $2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ b) $\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

Bài 6. Tính:

a) $A = \sqrt{2}\left(\sqrt{21}+3\right)\cdot\sqrt{5-\sqrt{21}}$ b) $B = \sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}$

Bài 7. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}\right) : \dfrac{x-\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+1} (x > 0)$

a) Rút gọn biểu thức P. b) Tìm x sao cho $P < 0$.

Bài 8. Tìm x, biết: $\left(3-2\sqrt{x}\right)\left(2+3\sqrt{x}\right) = 16-6x$.

Bài 9. Tìm điều kiện để mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $A = \dfrac{1}{1-\sqrt{x-1}}$ b) $B = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

Bài 10. Rút gọn:

a) $M = \left(4+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ b) $N = \dfrac{\sqrt{8-\sqrt{15}}}{\sqrt{30}-\sqrt{2}}$.

Bài 11. Rút gọn biểu thức: $P = \left(\dfrac{8-x\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}\right)\cdot\left(\dfrac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)^2 \quad (x \ge 0; x \ne 4)$

Bài 12. Tìm x, biết: $\left(3-\sqrt{2x}\right)\left(2-3\sqrt{2x}\right) = 6x-5 \ (*)$.

Hướng dẫn giải

Bài 1. $A = \left|\sqrt{3}-2\right| + \left|2\left(2+\sqrt{3}\right)\right| - \dfrac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}$

Bài 2. a) $A=\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2-4\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{x+4\sqrt{x}+4-4\sqrt{x}+8}{x-4}=\dfrac{x+12}{x-4}$.

b) Với $x=14$, ta có $A=\dfrac{14+12}{14-4}=\dfrac{13}{5}$.

Bài 3. a) Ta có bảng sau:

$I(A)$	1	1,5	2
$Q(J)$	50	112,5	200

b) $I=\sqrt{\dfrac{Q}{Rt}}=\sqrt{\dfrac{800}{10.5}}=4(\text{A})$.

Bài 4. a) A có nghĩa $\Rightarrow \begin{cases} x-3\neq 0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow x-3>0 \Rightarrow x>3$

b) B có nghĩa $\Rightarrow \begin{cases} x-2\geq 0 \\ x-2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow x>2$

Bài 5. a) Ta có: $2\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{4\left(2+\sqrt{3}\right)}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{6+2\sqrt{12}+2}$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}=\left|\sqrt{6}+\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}+\sqrt{6}(\text{dpcm}).$$

b) Ta có: $\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{\sqrt{4}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(\text{dpcm})$.

Bài 6. a) Ta có: $A=\left(\sqrt{21}+3\right)\sqrt{10-2\sqrt{21}}=\sqrt{3}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2}$

$$=\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}.$$

b) Ta có: $B=\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)=5-1=4$

Bài 7. a) Ta có $P=\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}\right]:\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}\right)^3+1}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}:\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

b) Ta có: $P<0$ (điều kiện $x>0$)

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}<0 \Rightarrow \sqrt{x}-1<0$(vì $\sqrt{x}>0$ khi $x>0$)

$\Rightarrow \sqrt{x}<1 \Rightarrow 0<x<1$.

Bài 8. Ta có: $\left(3-2\sqrt{x}\right)\left(2+3\sqrt{x}\right)=16-6x\ \ (1)$ Điều kiện: $x\ge 0$.

$(1)\Rightarrow 6+9\sqrt{x}-4\sqrt{x}-6x=16-6x\Rightarrow 5\sqrt{x}=10\Rightarrow\sqrt{x}=2\Rightarrow x=4$ (nhận)

Bài 9. a) A có nghĩa $\Rightarrow\begin{cases}x-1\ge 0\\ 1-\sqrt{x-1}\ne 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-1\ge 0\\ \sqrt{x-1}\ne 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x-1\ne 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x\ne 2\end{cases}$

b) B có nghĩa $\Rightarrow x^2-2x+1>0\Rightarrow(x-1)^2>0\Rightarrow x\ne 1$.

Bài 10. a) Ta co: $M=\left(4+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{\left(4-\sqrt{3}\right)^2}=\left(4+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)=16-3=13\right.$

b) Ta có: $\mathrm{N}=\dfrac{\sqrt{8-\sqrt{15}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{15}-1\right)}=\dfrac{\sqrt{2\left(8-\sqrt{15}\right)}}{2\left(\sqrt{15}-1\right)}=\dfrac{\sqrt{16-2\sqrt{15}}\left(\sqrt{15}+1\right)}{2.14}$

$=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{15}-1\right)^2}\cdot\left(\sqrt{15}+1\right)}{28}=\dfrac{\left(\sqrt{15}-1\right)\left(\sqrt{15}+1\right)}{28}=\dfrac{14}{28}=\dfrac{1}{2}.$

Bài 11. Ta có: $P=\left[\dfrac{(2-\sqrt{x})(4+2\sqrt{x}+x)}{2-\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\right]\cdot\left[\dfrac{(2-\sqrt{x})^2}{(2+\sqrt{x})^2}\right]$

$=\left(4+2\sqrt{x}+x+2\sqrt{x}\right)\cdot\dfrac{\left(2-\sqrt{x}\right)^2}{\left(2+\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{\left(2+\sqrt{x}\right)^2\cdot\left(2-\sqrt{x}\right)^2}{\left(2+\sqrt{x}\right)^2}=\left(2-\sqrt{x}\right)^2$

Bài 12. Ta có: $(*)\Rightarrow 6-9\sqrt{2x}-2\sqrt{2x}+6x=6x-5\Rightarrow -11\sqrt{2x}=-11\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}.$

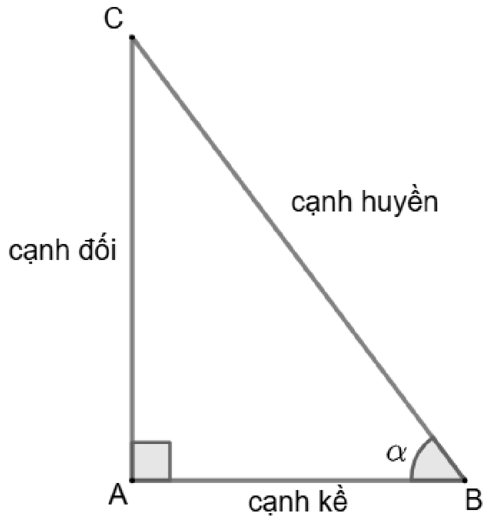
Chương IV. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 11. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho góc nhọn α. Xét tam giác ABC vuông tại A, có góc nhọn bằng α (hình vẽ bên). Ta có:

I. Định nghĩa



$\sin\alpha = \frac{AC}{BC}$ (tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền) .

$\cos\alpha = \frac{AB}{BC}$ (tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền)

$\tan\alpha = \frac{AC}{AB}$ (tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề)

$\cot\alpha = \frac{AB}{AC}$ (ti số giữa cạnh kề và cạnh đối)

Chú ý: $0 < \sin\alpha < 1; 0 < \cos\alpha < 1$.

II. Tỉ số lượng giác cưa hai góc phụ nhau

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

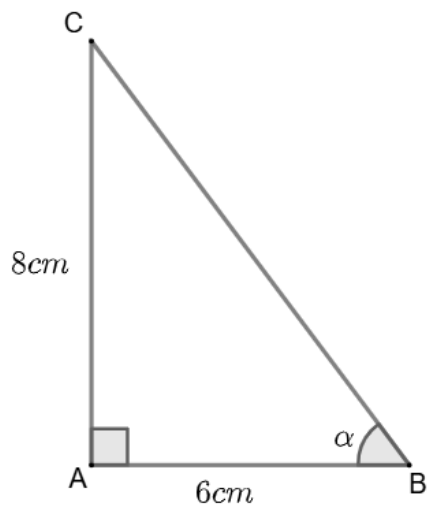
$\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha \qquad \cot(90° - \alpha) = \tan\alpha$

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tính tỉ số lượng giác của một góc nhọn

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 6$cm, $AC = 8$ cm. Hãy tính các tỉ số lượng giác $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$ với $\alpha = \widehat{B}$.

Lời giải



Xét ΔABC vuông tại A co $\widehat{B} = \alpha (gt)$

Theo định lí Pythagore, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = 10 (\text{cm})$

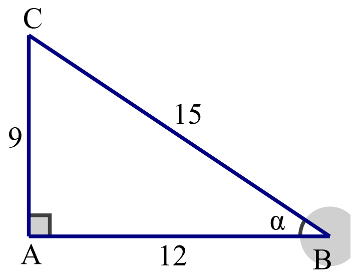
Theo định nghĩa của tỉ số lượng giác sin, cos, tan, cot, ta có:

$\sin\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \qquad \cos\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5};$

$\tan\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}; \qquad \cot\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$

Bài toán 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 12$, $AC = 9$, $BC = 15$. Tính các tỉ số lượng giác $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ với $\alpha = \widehat{B}$.

Lời giải



Xét ΔABC vuông tại A có $\alpha = \widehat{B}$ (GT)

Ta có: $\sin\alpha = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$; $\cos\alpha = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$;

$\tan\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$; $\cot\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$.

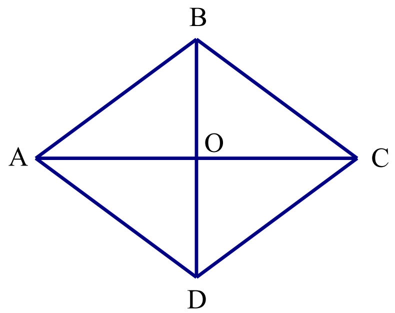
Bài toán 3. Cho hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại điểm O (hình vẽ bên).

a) Tỉ số $\dfrac{OB}{AB}$ là sin của góc nhọn nào?

Tỉ số $\dfrac{OB}{BC}$ là cos của góc nhọn nào?

b) Viết tỉ số lượng giác của mỗi góc nhọn sau: $\tan\widehat{OCD}$, $\cot\widehat{OAD}$.

Lời giải



Ta có $ABCD$ là hình thoi (GT) nên hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại O.

a) Xét ΔOAB vuông tại O nên tỉ số $\dfrac{OB}{AB} = \sin\widehat{BAO}$.

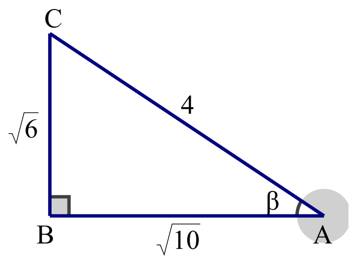
Tương tự ΔOCB vuông tại O nên tỉ số $\dfrac{OB}{BC} = \cos\widehat{CBO}$.

b) Xét ΔOCD vuông tại O nên tỉ số $\tan\widehat{OCD} = \dfrac{OD}{OC}$.

Tương tự ΔOAD vuông tại O nên tỉ số $\cot\widehat{OAD} = \dfrac{OA}{OD}$.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC vuông tại B, có $AB = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{6}$ và góc nhọn $\widehat{A} = \beta$. Tính các tỉ số lượng giác của góc nhọn β.

Lời giải



Xét ΔABC vuông tại B có $\alpha = \widehat{B}$ (GT).

Theo định lí Pythagore, ta có:

$AC^2 = BC^2 + AB^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 = 16$

$\Rightarrow AC = 4$

Theo định lí của tỉ số lượng giác sin, cos, tan, cot.

Ta có: $\sin\beta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$; $\cos\beta = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$;

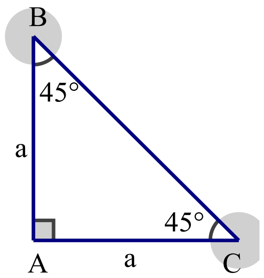
$\tan\beta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$; $\cot\beta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}}$.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có cạnh góc vuông bằng a. Tính độ dài cạnh huyền BC theo a rồi tính:

* Các tỉ số $\dfrac{AB}{BC}, \dfrac{AC}{BC}$. Từ đó suy ra $\sin 45°$, $\cos 45°$.

* Các tỉ số $\dfrac{AB}{AC}, \dfrac{AC}{AB}$. Từ đó suy ra $\tan 45°$, $\cot 45°$.

Lời giải



Xét ΔABC vuông cân tại A (GT)

Theo định lí Pythagore, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

* Tỉ số $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hay $\sin C = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Tương tự tỉ số $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos C$

Vậy $\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

* Tỉ số $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{a}{a}=1$ hay $\tan C=1$.

Tương tự tỉ số $\dfrac{AC}{AB}=1$ hay $\cot C=1$.

Vậy $\tan 45^\circ=\cot 45^\circ=1$.

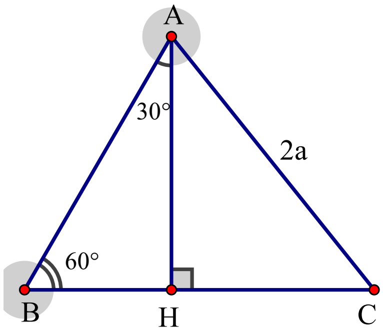
Bài toán 6. Cho tam giác đều ABC, có cạnh bằng $2a$ (xem hình vẽ).

a) Tính đường cao AH của tam giác ABC.

b) Tính $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\sin 60^\circ$ và $\cos 60^\circ$.

c) Tính $\tan 30^\circ$, $\cot 30^\circ$, $\tan 60^\circ$ và $\cot 60^\circ$.

Lời giải



a) ΔABC đều nên đường cao AH đồng thời cũng là đường phân giác của góc BAC.

Xét tam giác AHB vuông tại H có $\widehat{BAH}=30^\circ$

$BH=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{2a}{2}=a.$

Theo định lí Pythagore, ta có: $AB^2=AH^2+BH^2$

$\Rightarrow AH^2=AB^2-BH^2=(2a)^2-a^2=3a^2$

$\Rightarrow AH=a\sqrt{3}.$

b) Ta có: $\sin 30^\circ=\sin BAH=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{a}{2a}=\dfrac{1}{2}.$

$\cos 30^\circ=\cos BAH=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

$\tan 30^\circ=\tan BAH=\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{a}{a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

$\cot 30^\circ=\cot BAH=\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}.$

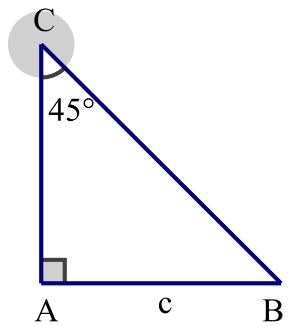
Từ bài toán 5 và 6 ở trên, ta có bảng sau:

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài toán 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $\widehat{C}=45^\circ$ và $AB=c$. Tính BC và AC theo c.

Lời giải



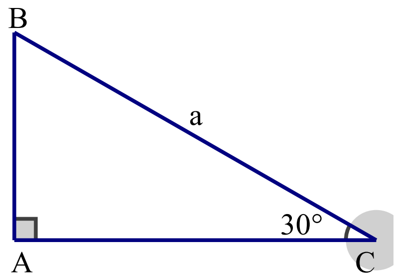
Ta có $\sin C=\dfrac{AB}{BC}\Rightarrow BC=\dfrac{AB}{\sin C}$

Theo bảng trên $\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $BC=\dfrac{c}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=c\sqrt{2}$

Tương tự $\cot C=\dfrac{AC}{AB}\Rightarrow AC=AB\cdot\cot C=c\cdot\cot C=c\cdot 1=c$

Bài toán 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $\widehat{C}=30^\circ$ và $BC=a$. Tính các cạnh AB và AC theo a.

Lời giải



Ta có $\sin C=\dfrac{AB}{BC}\Rightarrow AB=BC\cdot\sin C=a\cdot\sin 30^\circ$

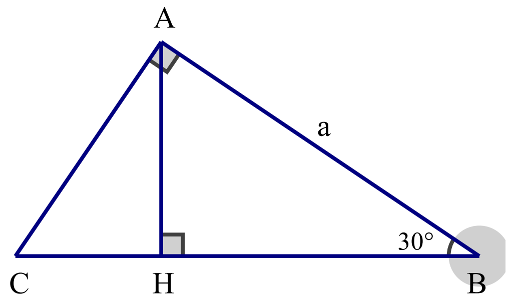
Theo bảng trên $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$ nên $AB=a\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{a}{2}$

Tương tự $\cos C=\dfrac{AC}{BC}$

$\Rightarrow AC=BC\cdot\cos C=a\cdot\cos C=a\cdot\cos 30^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài toán 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $\widehat{B} = 30°$, đường cao AH. Tính tỉ số $\frac{AH}{BH}$ và $\frac{AH}{CH}$, từ đó tìm $\frac{BH}{CH}$.

Lời giải



Ta có $AH \perp BC$.

Xét ΔAHB vuông tại H, có $\widehat{B} = 30°$ (GT)

$\frac{AH}{BH} = \tan B = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

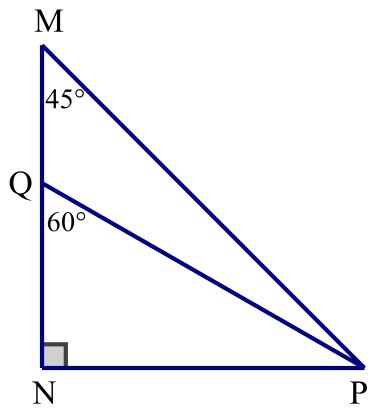
ΔABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30°$ (GT) $\Rightarrow \widehat{C} = 90° - 30° = 60°$

Xét ΔAHC vuông tại H, có $\widehat{C} = 60°$ nên $\frac{AH}{CH} = \tan C = \tan 60° = \sqrt{3}$.

Do đó $\frac{BH}{CH} = \frac{AH}{CH} \cdot \frac{BH}{AH} = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = 3$.

Bài toán 10. Trong hình vẽ bên, hãy tính tỉ số $\frac{PN}{PQ}$ và $\frac{PN}{PM}$, từ đó tìm $\frac{PQ}{PM}$.

Lời giải



Xét ΔQNP vuông tại N, có $\widehat{Q} = 60°$ (GT)

Ta có $\frac{NP}{PQ} = \sin Q = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

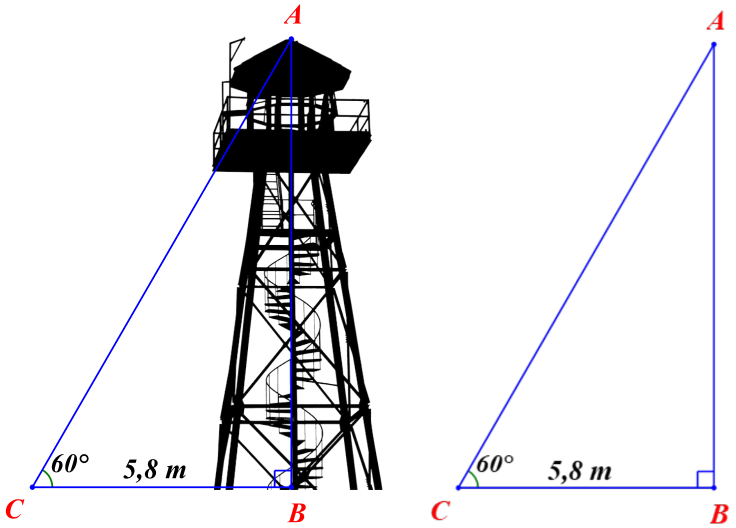
Xét ΔMNP vuông tại N, có $\widehat{M} = 45°$

nên $\frac{PN}{PM} = \sin M = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\dfrac{PQ}{PM}=\dfrac{PQ}{PN}\cdot\dfrac{PN}{PM}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Bài toán 11. Tìm chiều cao của tháp canh trong hình vẽ bên (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải



Ta có $\tan C=\dfrac{AB}{BC}$

mà $\widehat{C}=60°$, $BC=5,8$ (GT)

hay $\tan 60°=\dfrac{AB}{5,8}$

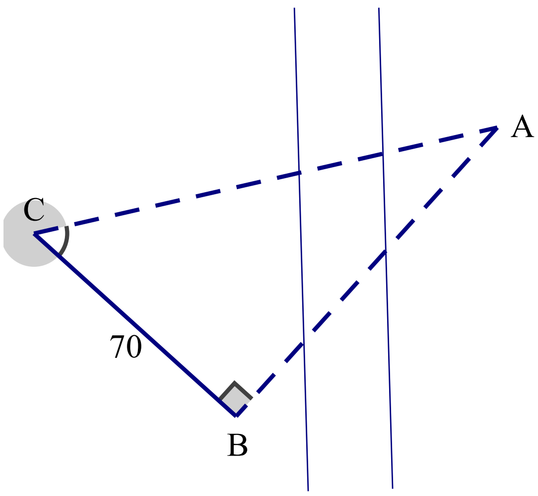
$\Rightarrow AB=5,8\cdot\tan 60°$

$AB=5,8\cdot\sqrt{3}$

$\Rightarrow AB\approx 10,05\,(m)$

Bài toán 12. Để tính khoảng cách giữa hai địa điểm A, B mà không đo trược tiếp được. Chẳng hạn A và B là hai địa điểm ở hai bên sông, người ta lấy điểm C về phía bờ sông có chứa B sao cho ΔABC vuông tại B. Ở bên bờ sông chứa B người ta đo được $\widehat{ACB}=55°$ và $BC=70\ m$, với các dữ liệu đó khoảng cách AB có tính được không và nếu được bạn hãy tính AB.

Lời giải



Ta có ΔABC vuông tại B, có $\widehat{ACB}=55^\circ$
và $BC=70\ m$ (GT)

nên $\dfrac{AB}{BC}=\tan C \Rightarrow AB=BC\cdot\tan C$

$$=70.\tan 55^\circ \approx 99,97\left(m\right)$$

Trả lời: Khoảng cách AB tính được $AB\approx 99,97\left(m\right)$

Bài toán 13. Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của góc nhỏ hơn 45°.
$\sin 65^\circ,\ \cos 75^\circ,\ \tan 85^\circ,\ \cot 71^\circ$.

Lời giải

Ta có: $\sin 65^\circ=\cos\left(90^\circ-65^\circ\right)=\cos 25^\circ$.

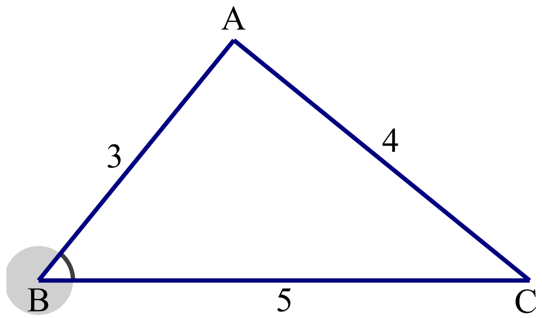
$\cos 75^\circ=\sin\left(90^\circ-75^\circ\right)=\sin 15^\circ$.

$\tan 85^\circ=\cot\left(90^\circ-85^\circ\right)=\cot 5^\circ$.

$\cot 71^\circ=\tan\left(90^\circ-71^\circ\right)=\tan 19^\circ$.

Bài toán 14. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB=3cm,\ BC=5cm$. Tính các tỉ số lượng giác của hai góc B và C

Lời giải



Áp dụng định lý Pythagore ta có $AC^2=BC^2-AB^2=5^2-3^2=16$
$\Rightarrow AC=4cm$

$\sin B=\dfrac{4}{5}\Rightarrow \cos C=\dfrac{4}{5}$ (Vì $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là hai góc phụ nhau)

$\cos B=\dfrac{3}{5}\Rightarrow \sin C=\dfrac{3}{5}$

$\tan B=\dfrac{4}{3}\Rightarrow \cot C=\dfrac{4}{3}$

$\cot B=\dfrac{3}{4}\Rightarrow \tan C=\dfrac{3}{4}$.

Bài toán 15. Cho tam giác ABC vuông tại B, trong đó $AB=0,9cm$, $BC=1,2cm$. Tính các tỉ số lượng giác của góc A đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C.

Lời giải

Ta có: $AC^2=AB^2+BC^2$ (định lý Pythagore)

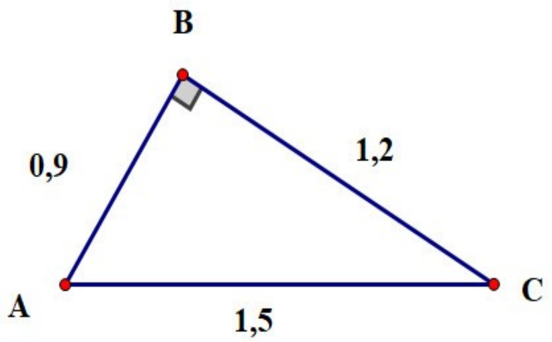
$AC^2 = 0,9^2 + 1,2^2 = 2,25$

$\Rightarrow AC = 1,5cm$

$\sin A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1,2}{1,5} = \dfrac{4}{5}$; $\qquad \cos A = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{0,9}{1,5} = \dfrac{3}{5}$

$\tan A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1,2}{0,9} = \dfrac{4}{3} \qquad \cot A = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{4}$

Vì $\hat{A}$ và $\hat{C}$ là hai góc phụ nhau , ta có

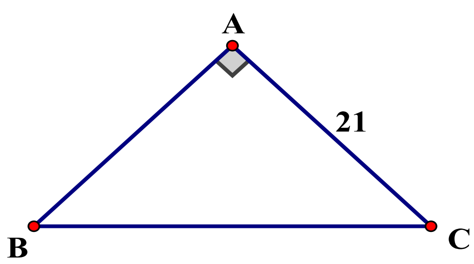


$\sin C = \dfrac{3}{5} \qquad \cos C = \dfrac{4}{5}$;

$\tan C = \dfrac{3}{4} \qquad \cot C = \dfrac{4}{3}$

Bài toán 16. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 12cm, \cos C = \dfrac{3}{5}$..Tính $\tan B, \cot B$.

Lời giải



Ta có $\dfrac{AC}{BC} = \cos C = \dfrac{3}{5}$ hay $\dfrac{21}{BC} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow BC = \dfrac{21.5}{3} = 35(cm)$

Áp dụng định lý Pythagore :

$AB^2 = BC^2 - AC^2$

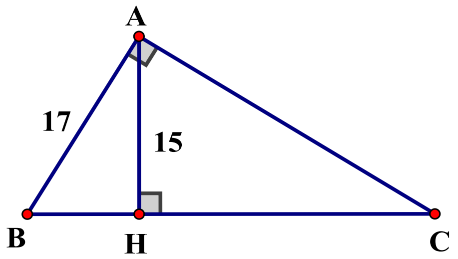
$= 35^2 - 21^2 = 784$

$\Rightarrow AB = 28(cm)$

Vậy $\tan B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{21}{28} - \dfrac{3}{4}$ và $ABC \cot B = \dfrac{4}{3}$.

Bài toán 17. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH . Biết $AB = 17, BH = 8$. Tìm $\sin B, \sin C$. (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



Xét tam giác AHB vuông tại H

Theo định lý Pythagore , tao có :

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 17^2 - 8^2 = 225$

$\Rightarrow AH = 15$

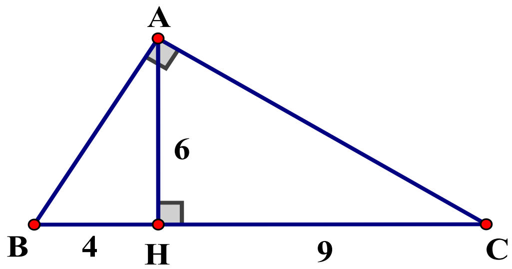
Vậy $\sin B = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{15}{17} \approx 0,88$

Ta có $AB^2 = BH.BC \Rightarrow BC = \dfrac{AB^2}{BH} = \dfrac{17^2}{8} = 36,125.$

Vậy $\text{Sin}\, C = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{17}{36,125} \approx 0,47.$

Bài toán 18. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH . Biết $HB = 4, HC = 9$. Tính $\sin B, \sin C$. (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



Ta có ΔABC vuông tại A có đường cao AH

Áp dụng hệ thức $h^2 = b'.c'$, ta có :

$AH^2 = HB.HC = 4.9 = 36 \Rightarrow AH = 6$

Theo định lý Pythagore:

$AB^2 = AH^2 + HB^2$

$= 6^2 + 4^2 = 52$

$\Rightarrow AB \approx 7,21$

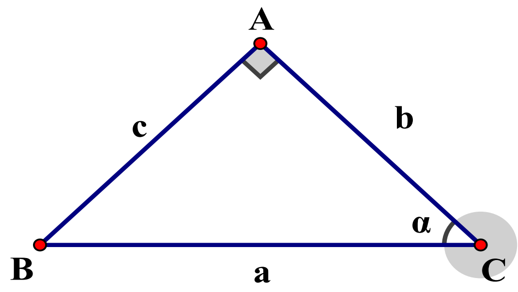
Do đó $\sin B = \dfrac{AH}{AB} \approx \dfrac{6}{7,21} \approx 0,83$. Lại có $BC = BH + HC = 4 + 9 = 13$

Ta có $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 13^2 - 52 - 117 \Rightarrow AC \approx 10,82$

Vậy $\sin C = \dfrac{AH}{AC} \approx \dfrac{6}{10,82} \approx 0,55$.

Bài toán 19. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{C}=\alpha, \cos\alpha=\frac{4}{5}$. Hãy tính $\sin\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.

Lời giải



$\cos\alpha=\frac{4}{5}=\frac{b}{a}\Rightarrow b=\frac{4}{5}a.$

Theo định lý Pythagore, ta có:

$a^2=b^2+c^2\Rightarrow c^2=a^2-b^2=a^2-\left(\frac{4}{5}a\right)^2$

$=a^2-\frac{16}{25}a^2=\frac{9}{25}a^2\Rightarrow c=\frac{3}{5}a.$

Vậy $\sin\alpha=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}a:a=\frac{3}{5}$

$\tan\alpha=\frac{c}{b}=\frac{3}{5}a:\frac{4}{5}a=\frac{3}{4}\Rightarrow\cot\alpha=\frac{4}{3}.$

Bài toán 20. Cho hình vẽ như bài 10, cho $\tan\alpha=\frac{1}{3}$. Tính $\sin\alpha, \cos\alpha$, (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

(Xem hình bài 19).

Ta có $\tan\alpha=\frac{c}{b}=\frac{1}{3}\Rightarrow b=3c$

Theo định lý Pythagore, ta có:

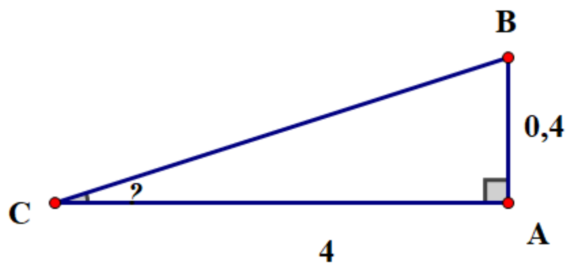
$a^2=b^2+c^2=(3c)^2+c^2=10c^2\Rightarrow a=c\sqrt{10}$

Do đó $\sin\alpha=\frac{c}{a}=\frac{c}{c\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\approx 0.32$

$\cos\alpha=\frac{b}{a}=\frac{3c}{c\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}\approx 0,95$

Bài toán 21. Trong các tòa nhà trung cư , người ta thường thiết kế đoạn dốc cho người đi xe lăn với góc dốc bé hơn 6°. Hãy tính góc dốc , biết rằng đoạn dốc vào sảnh nhà dài $4m$, độ cao của đỉnh dốc bằng $0,4m$

Lời giải



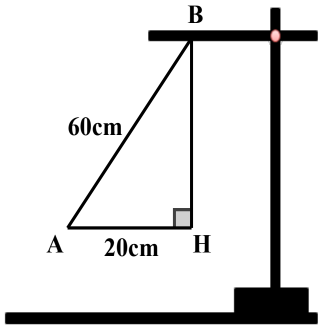
ΔABC vuông tại A có $AC = 4m, AB = 0,4m$

Ta có $\tan C = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{0,4}{4} = \dfrac{1}{10}$

$\Rightarrow \widehat{C} \approx 5°42'$.

Bài toán 22. Treo quả cầu kim loại vào giá thí nghiệm bằng sợi dây mảnh nhẹ không dãn . Khi quả cầu đứng yên tại vị trí cân bằng , dây treo có phương thẳng đứng . Kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ rồi buông ra thì quả cầu sẽ chuyển động qua lại quanh vị trí cân bằng . Khi kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng , giả sử tâm A của quả cầu cách B một khoảng $AB = 60cm$ và cách vị trí cân bằng một khoảng $AH = 20cm$ (hình vẽ). Tính số đo góc α tạo bởi dây và vị trí cân bằng(Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ) .

Lời giải



Xét tam giác AHB vuông tại H có $AH = 20cm, AB = 60cm$.

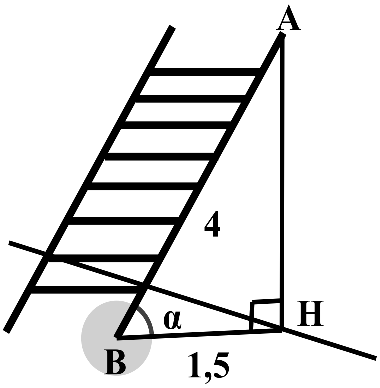
Gọi α là góc tạo bởi dây AB và vị trí cân bằng (Xem hình vẽ $\widehat{ABH}$ là α)

Ta có $\sin\alpha = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{20}{60} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \alpha \approx 19°$

Vậy $\alpha \approx 19°$.

Bài toán 23. Hình vẽ bên mô tả một chiếc thang có chiều dài $AB = 4m$ được đặt dựa vào tường , khoảng cách từ chân thang đến chân tường là $BH = 1,5m$. Tính góc tạo bởi cạnh AB và phương nằm ngang trên mặt đất (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ) .

Lời giải



Gọi α là góc tạo bởi cạnh AB và phương nằm ngang trên mặt đất (góc $\widehat{ABH}$).

Xét tam giác AHB vuông tại H có $BH = 1,5m, AB = 4m$.

Ta có $: \cos\alpha = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{1,5}{4} = 0,375$.

Do đó $\alpha \approx 68°$

Vậy góc tạo bởi cạnh AB và phương nằm ngang trên mặt đất khoảng $68°$

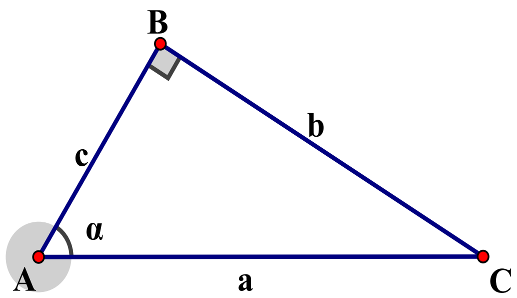
II. Chứng minh các hệ thức lượng giác

Bài toán 24. Hãy sử dụng định nghĩa các tỷ số lượng giác của một góc nhọn để chứng minh : Với góc nhọn α tùy ý , ta có

a) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ b) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

c) $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$ d) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Lời giải



a) Theo định nghĩa tỷ số lượng giác ta có : $\sin\alpha = \dfrac{b}{a}; \cos\alpha = \dfrac{c}{a}$

Biến đổi vế phải : $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{b}{a} : \dfrac{c}{a} = \dfrac{b}{c} = \tan\alpha$ (đpcm)

b) Chứng minh tương tự câu a.

c)Ta có $\tan\alpha = \dfrac{b}{c}; \cot\alpha = \dfrac{c}{b}$

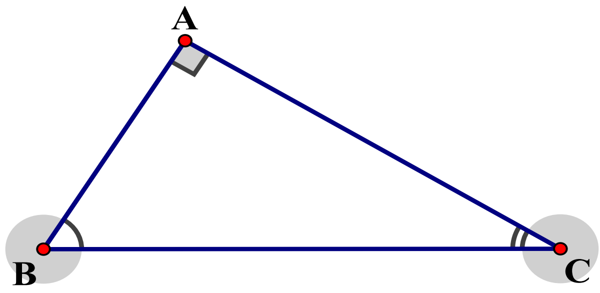
Khi đó ta có vế trái : $\tan\alpha.\cot\alpha = \dfrac{b}{c}.\dfrac{c}{b} = 1$ (đpcm)

d)Ta có $\sin\alpha = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \sin^2\alpha = \dfrac{b^2}{a^2}$, tương tự $\cos^2\alpha = \dfrac{c^2}{a^2}$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1 \quad (\text{đpcm})$$

Bài toán 25. Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin B}{\sin C}$.

Lời giải



Ta có $\sin B = \frac{AC}{BC}; \sin C = \frac{AB}{BC}$

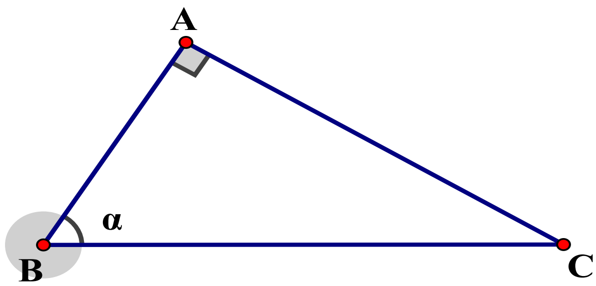
Vế phải : $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AC}{BC} : \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{AB}$ (đpcm)

Bài toán 26. Cho tam giác ABC vuông tại A, và $\widehat{B} = \alpha$. chứng minh rằng:

a) $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

b) $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

Lời giải



a)Theo định nghĩa tỷ số lượng giác ta có

$\tan\alpha = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{AC^2}{AB^2}$

Vế trái $1 + \tan^2\alpha = 1 + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2}$

$$\frac{BC^2}{AB^2} = \frac{1}{\left(\frac{AB}{BC}\right)^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad (\text{đpcm})$$

b) Chứng minh tương tự , ta có $\cot\alpha = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \cot^2\alpha = \frac{AB^2}{AC^2}$

Vế trái $1 + \cot^2\alpha = 1 + \frac{AB^2}{AC^2}$

Bài toán 27. Cho góc nhọn α . Hãy rút gọn các biểu thức sau:

a) $A=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2$

b) $B=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$

Hướng dẫn: Sử dụng hằng đẳng thức $(A\pm B)^2$ để khai triển rồi áp dụng hệ thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

(Chứng minh ở bài 32)

Lời giải

a) $A=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2$

$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-2\sin\alpha\cos\alpha$

$=1+1=2$

b) $B=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$

$=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3+3\sin^4\alpha\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha\cos^4\alpha$

$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3=1^3=1.$

Bài toán 28. Cho góc nhọn α. Chứng tỏ rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào góc nhọn α

$$M=(\tan\alpha+\cot\alpha)^2-(\cot\alpha-\tan\alpha)^2.$$

Lời giải

$M=(\tan\alpha+\cot\alpha)^2-(\cot\alpha-\tan\alpha)^2$

$=\left(\tan\alpha+\cot\alpha+\cot\alpha-\tan\alpha\left[(\tan\alpha+\cot\alpha)-(\cot\alpha-\tan\alpha)\right]\right)$

$=2\cot\alpha\left[\tan\alpha+\cot\alpha-\cot\alpha+\tan\alpha\right]$

$=2\cot\alpha.2\tan\alpha=4\cot\alpha.\tan\alpha=4$

Bài toán 29 . Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào góc $\alpha\left(0°<\alpha<90°\right)$.

$$\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2-(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{\cos\alpha.\sin\alpha}$$

Lời giải

Ta có $\dfrac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2-(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{\cos\alpha.\sin\alpha}$

$=\dfrac{\cos^2\alpha-2\cos s\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha-(\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha)}{\cos\alpha.\sin\alpha}$

$=\dfrac{1-2\cos\alpha\sin\alpha-1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}$

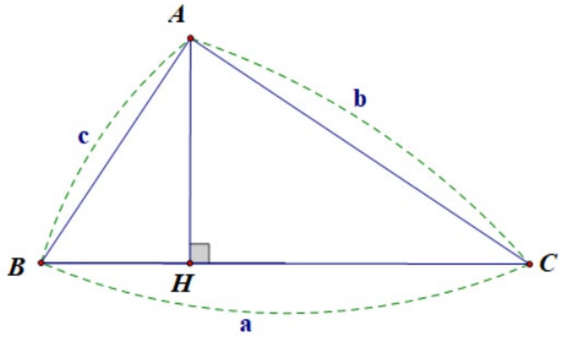
$=\dfrac{-4\cos s\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}=-4$

Chứng tỏ biểu thức không phụ thuộc vào góc α

Bài toán 30. Cho tam giác nhọn ABC có $BC=a;CA=b;AB=c$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Lời giải



Kẻ đường cao AH ta có : $\sin B = \frac{AH}{AB}; \sin C = \frac{AH}{AC}$

$\Rightarrow \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AH}{AB} : \frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$

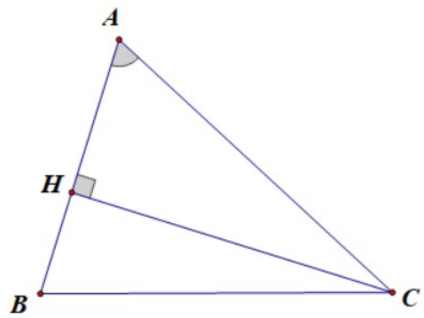
$\Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Tương tự : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

Do đó : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (đpcm).

Bài toán 31. Cho tam giác nhọn ABC . Chứng minh rằng : $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$

Lời giải



Vẽ $CH \perp AB$ $(H \in AB)$

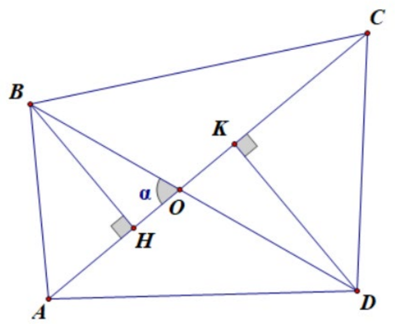
Ta có : $CH = AC \cdot \sin A$

Do đó : $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$.

Bài toán 32. Cho α là góc nhọn tạo bởi hai đường chéo AC và BD của tứ giác $ABCD$.

Chứng minh rằng : $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD.

Kẻ $\mathrm{BH} \perp \mathrm{AC}, \mathrm{DK} \perp \mathrm{AC}$.

Các tam giác vuông BHO và DKO có : $\mathrm{BH} = \mathrm{OB} \cdot \sin\alpha$ và $\mathrm{DK} = \mathrm{OD} \cdot \sin\alpha$ (1)

Ta có : $\mathrm{S_{ABCD}} = \mathrm{S_{ABC}} + \mathrm{S_{ADC}}$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{AC} \cdot \mathrm{BH} + \frac{1}{2}\mathrm{AC} \cdot \mathrm{DK}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{AC}(\mathrm{BH} + \mathrm{DK}) \qquad (2)$$

Thay (1) và (2) , ta có : $\mathrm{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}\mathrm{AC} \cdot (\mathrm{OB} \cdot \sin\alpha + \mathrm{OD} \cdot \sin\alpha)$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{AC}(\mathrm{OB} + \mathrm{OD})\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD} \cdot \sin\alpha$$

Áp dụng : Cho tứ giác $ABCD$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, biết $\widehat{\mathrm{AOB}} = 60^\circ$; $\mathrm{AC} = 4,2\,\mathrm{cm}$; $\mathrm{BD} = 6,5\,\mathrm{cm}$. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Hướng dẫn : Sử dụng ngay kết quả của bài toán trên ta có :

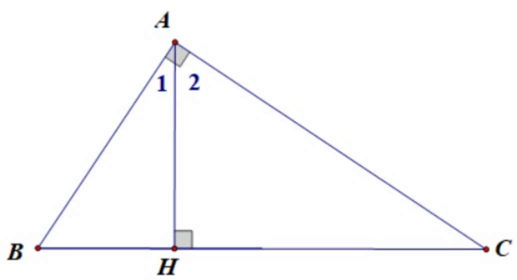
$$\mathrm{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}\mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD} \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4,2 \cdot 6,5 \cdot \sin 60^\circ \approx 11,824\,\mathrm{cm}^2$$

Bài toán 33. Cho tam giác ABC vuông tại A . đường cao AH .

a) Chứng minh rằng : $\sin^2 \mathrm{B} = \frac{\mathrm{HC}}{\mathrm{BC}}$.

b) Chứng minh rằng : $\sin 2C = 2\sin C \cdot \cos C$

Lời giải



a) Xét tam giác vuông AHB

Theo định nghĩa tỷ số lượng giác , ta có : $\sin B = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow \sin^2 B = \dfrac{AH^2}{AB^2}$ (1)

Xét ΔAHB và ΔAHC vuông tại H

Có : $\widehat{A}_1 = \widehat{C}$ (cùng phụ với $\widehat{B}$)

Tương tự có : $\widehat{A}_2 = \widehat{B}$ (cùng phụ với $\widehat{C}$)

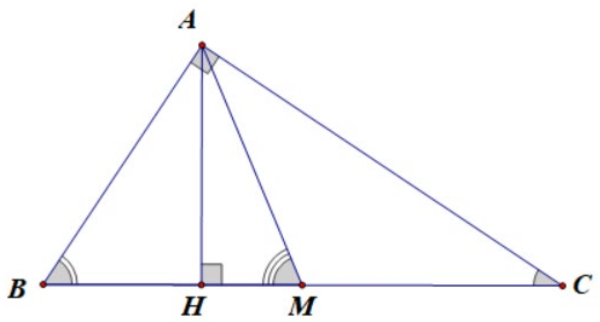
Do đó : $\Delta AHB \backsim \Delta CHA(g-g) \Rightarrow \dfrac{AH}{HC} = \dfrac{HB}{AH} \Rightarrow AH^2 = HB \cdot HC$ (*)

Chứng minh tương tự, ta có : $\Delta ABC \backsim \Delta HBA(g \cdot g)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{HB} = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = HB \cdot BC$ (**)

Thay (*) (**) vào (1) , ta có : $\sin^2 B = \dfrac{AH^2}{AB^2} = \dfrac{HB \cdot HC}{HB \cdot BC} = \dfrac{HC}{BC}$.

b)



Kẻ trung tuyến AM ta có: $MA = MC = MB = \dfrac{BC}{2}$

hay ΔAMC cân tại $M \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{AMH} = 2.\widehat{C}$ (góc ngoài của ΔAMC)

Xét tam giác vuông AHM ta có : $\sin \widehat{AMH} = \dfrac{AH}{AM}$ hay $\sin 2C = \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{AH}{\dfrac{BC}{2}} = \dfrac{2AH}{BC}$ (1)

Mà $AC^2 = BC \cdot CH \Rightarrow \sin C \cdot \cos C = \dfrac{AH \cdot CH}{BC \cdot CH} = \dfrac{AH}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) có $\sin 2C = 2\sin C \cdot \cos C$.

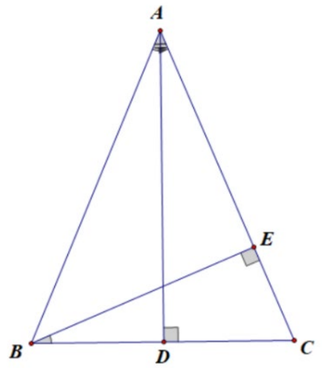
Bài toán 34. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 1\text{cm}$ và $\widehat{A} = 2\alpha$ $\left(0^\circ < \alpha < 45^\circ\right)$ các đường cao AD và BE. $\left(-\dfrac{1}{2}\right)x \cdot y^2 \cdot 2x^3$.

a) Chứng minh rằng : $\Delta ADC \backsim \Delta BEC$.

b) Chứng minh : $\sin A = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

Hướng dẫn: Với câu b) để chứng minh đẳng thức , ta đưa hai biểu thức về cùng một biểu thức thứ ba . Dựa vào các hệ thức lượng giác trong các tam giác vuông .

Lời giải



a) Dễ thấy : $\Delta ADC \backsim \Delta BEC$ (g.g)

b) ΔABC cân tại A nên đường cao AD đồng thời là đường phân giác

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

Xét tam giác vuông ABD có : $BD = AB\sin BAD = 1\sin\alpha$

ΔABC cân tại A nên đường cao AD đồng thời là đường trung tuyến nên

$$BC = 2BD = 2\sin\alpha$$

Xét tam giác vuông CEB có : $\widehat{CBE} = \widehat{CAD} = \alpha$ (cùng phụ với $\widehat{C}$)

Ta có : $BE = BC.cos\,CBE = BCcos\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$ (1)

Xét tam giác vuông AEB có : $\sin A = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{1} = BE$ (2)

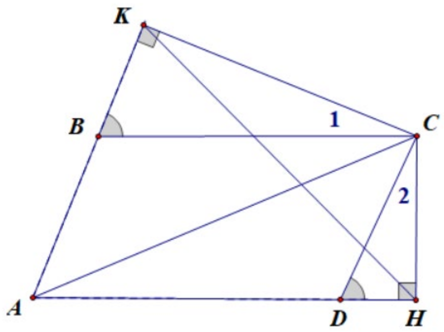
Từ (1) và (2) có : $\sin A = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ (đpcm)

Bài toán 35. Cho hình bình hành $ABCD$ có AC là đường chéo lớn . Kẻ CH vuông góc với $AD\left(H\in AD\right)$ và CK vuông góc với $AB\left(K\in AB\right)$

a) Chứng minh : $\Delta CKH \backsim \Delta ABC$.

b) Chứng minh : $HK = AC\sin\widehat{BAD}$.

Lời giải



a) Ta có: $AB//CD(gt) \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CDH}$ (đồng vị)

Tương tự : $AD//BC \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{KBC}$.

Nên $\widehat{KBC} = \widehat{CDH}$

Do đó : $\Delta CKB \backsim \Delta CHD\left(g.g\right) \Rightarrow \frac{CK}{CH} = \frac{CB}{CD}$ mà $CD = AB \Rightarrow \frac{CK}{CH} = \frac{CB}{AB}$ (1)

Lại có : $AB // CD$ mà $AK \perp CK \Rightarrow CD \perp CK$ hay $\widehat{KCD} = \widehat{BKC} = 90^\circ$

Mặt khác $\widehat{ABC}$ là góc ngoài của ΔBKC nên

$$\widehat{ABC} = \widehat{BKC} + \hat{C}_1 = 90^\circ + \hat{C}_1$$

Lại có : $\widehat{KCH} = \widehat{KCD} + \hat{C}_2 = 90^\circ + \hat{C}_2$ mà $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{KCH}$ (2)

Từ (1) và (2) có : $\Delta CKH \backsim \Delta BCA (c.g.c)$

Ta có : $\Delta CKH \backsim \Delta BCA$ (cmt)

$\Rightarrow \dfrac{HK}{CA} = \dfrac{CK}{CB} = \sin\widehat{KBC} \Rightarrow HK = CA \cdot \sin\widehat{KBC}$ mà $\widehat{BAD} = \widehat{KBC}$ (cmt)

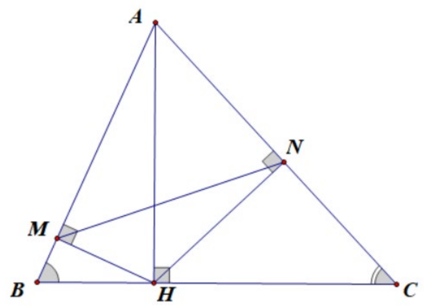
Do đó : $HK = AC\sin\widehat{BAD}$ (đpcm)

Bài toán 36. Cho ΔABC nhọn , đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC.

a) Chứng minh : $AM.AB = AN.AC$.

b) Chứng minh : $\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \sin^2 B.\sin^2 C$.

Lời giải



a) Xét tam giác vuông AHB vuông tại H có đường cao HM (gt)

Theo hệ thức $b^2 = a \cdot b'$, ta có : $AH^2 = AM.AB$ (1)

Tương tự với AHC, ta có : $AH^2 = AN.AC$ (2)

Từ (1) và (2) có : $AM.AB = AN.AC$.

b) Dễ thấy : $\Delta AMN \backsim \Delta ACB (c.g.c)$

Nên : Vế trái : $\dfrac{S_{AMM}}{S_{ACB}} = \left(\dfrac{AM}{AC}\right)^2 = \dfrac{AM^2}{AC^2}$

Lại có : $\left.\begin{array}{l} \sin B = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow \sin^2 B = \dfrac{AH^2}{AB^2} \\ \sin C = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow \sin^2 C = \dfrac{AH^2}{AC^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin^2 B \sin^2 C = \dfrac{AH^4}{AB^2 \cdot AC^2}$ (3)

Thay $AH^4 = (AB.AM)^2 = AB^2.AM^2$ vào (3) , ta có :

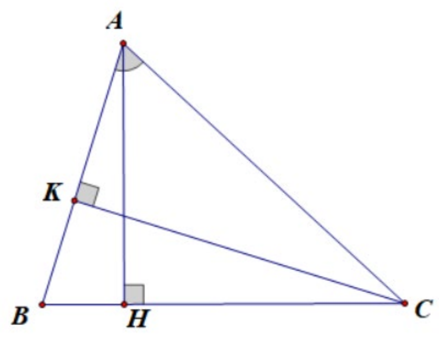
$\sin^2 B \sin^2 C = \dfrac{AB^2 \cdot AM^2}{AC^2 \cdot AB^2} = \dfrac{AM^2}{AC^2} \Rightarrow \dfrac{S_{AMS}}{S_{ABC}} = \sin^2 B \sin^2 C$.

Bài toán 37. Cho ΔABC nhọn , đường cao AH . Chứng minh rằng :

a) $\sin A + \cos A > 1$.

b) $AH = \dfrac{BC}{\cot g B + \cot g C}$.

Lời giải



a) Kẻ $CK \perp AB$. Xét ΔAKC ta có : $\sin A = \dfrac{CK}{AC}$; $\cos A = \dfrac{AK}{AC}$

$\Rightarrow \sin A + \cos A = \dfrac{CK + AK}{AC} > 1$ (Vì theo bất đẳng thức tam giác $CK + AK > AC$)

b) Ta có :

$BC = BH + HC = AH\cot B + AH\cot C$

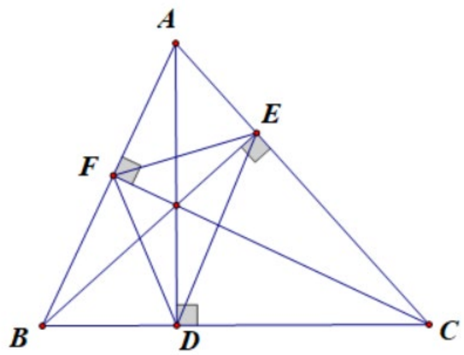
$= AH(\cot B + \cot C)$

$\Rightarrow AH = \dfrac{BC}{\cot B + \cot C}$

Bài toán 8. Cho ΔABC nhọn , các đường cao AD, BE, CF .

Chứng minh rằng : $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$

Lời giải



Dễ thấy $\Delta AEB \backsim \Delta AFC(g.g) \Rightarrow \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (c.g.c)

Do đó $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2 = \cos^2 A.$

Chứng minh tương tự có :

$\dfrac{S_{BDP}}{S_{MC}} = \left(\dfrac{BD}{AB}\right)^2 = \cos^2 B$

$\dfrac{S_{CDE}}{S_{CAB}} = \left(\dfrac{CD}{AC}\right)^2 = \cos^2 C$

mà $S_{DEP} = S_{ABC} - S_{AEP} - S_{BDF} - S_{CDE}$

$$\Rightarrow \frac{S_{DFF}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} - \frac{S_{AEP}}{S_{ABC}} - \frac{S_{ADF}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B = \cos^2 C \text{ (đpcm)}$$

III. So sánh các tỉ số lượng giác

(Không dùng bảng số và máy tính)

Bài toán 39. Hãy sắp xếp các tỉ số lượng giác sau đây theo thứ tự tăng dần (có giải thích , không dùng bảng số và máy tính)

a) $\sin 40^\circ; \cos 28^\circ; \sin 68^\circ; \cos 88^\circ;$ b) $\tan 65^\circ; \cot 42^\circ; \tan 76^\circ; \cot 27^\circ$

Hướng dẫn : Dùng tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau để đưa về cùng một loại (nếu cần)

Thường thì đưa về $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$ vì :

Khi góc nhọn α tăng từ 0^0 đến 90^0 thì :

+) $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$ tăng

+) $\cos\alpha$ và $\cot\alpha$ giảm

Lời giải

a) cos28° = sin(90° - 28°) = sin62°; cos88° = sin(90° – 88°) = sin2°

mà sin2° < sin40° < sin62° < $\sin 68^0$

=> cos88° < sin40° < cos28° < sin68°

b) cot42° = tan(90° – 42°) = tan48°; cot27° = tan(90° – 27°) = tan63°

Mà tan 48^0 < tan63° < tan65° < tan76°

⇒cot42° < cot27° < tan65° < tan76°.

Bài toán 40. So sánh:

a) $\sin 72^0$ và $\cos 18^0$;

b) $\cos 72^0$ và $\sin 18^0$;

c) $\tan 72^0$ và $\cot 18^0$;

d) $\cot 72^0$ và $\tan 18^0$;

Lời giải

a) Ta có: $\sin 72^0 = \cos(90^0 - 72^0) = \cos 18^0$.

b) Ta có: $\cos 72^0 = \sin(90^0 - 72^0) = \sin 18^0$.

c) Ta có: $\tan 72^0 = \cot(90^0 - 72^0) = \cot 18^0$.

d) Ta có: $\cot 72^0 = \tan(90^0 - 72^0) = \tan 18^0$.

Bài toán 41. Hãy sắp xếp các tỉ số lượng giác sau đây theo thứ tự giảm dần (có giải thích, không dùng bảng số và máy tính).

a) $\sin 25^0$; $\cos 15^0$; $\sin 50^0$; $\cos 67^0 30'$.

b) $\cot 35^0$; $\tan 48^0$; $\cot 44^0$; $\tan 53^0$; $\cot 39^0$.

Hướng dẫn: Như bài 33 ở trên.

Lời giải

a) $\cos 15^0 = \sin(90^0 - 15^0) = \sin 75^0$

$\cos 67^0 30' = \sin(90^0 - 67^0 30') = \sin 22^0 30'$

mà $\sin 75^0 > \sin 50^0 > \sin 25^0 > \sin 22^0 30'$

$\Rightarrow \cos 15^0 > \sin 50^0 > \sin 25^0 > \cos 67^0 30'$

b) $\cot 35^0 = \tan(90^0 - 35^0) = \tan 55^0$

$\cot 44^0 = \tan(90^0 - 44^0) = \tan 46^0$

$\cot 39^0 \tan(90^0 - 39^0) = \tan 51^0$

mà $\tan 55^0 > \tan 53^0 > \tan 51^0 > \tan 48^0 > \tan 46^0$

$\Rightarrow \cot 35^0 > \tan 53^0 > \cot 39^0 > \tan 48^0 > \cot 44^0$.

Bài toán 42. Không dùng bảng số và máy tính hãy so sánh:

a) $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$ b) $\cos\alpha$ và $\cot\alpha$

Lời giải

a) Ta có: $\tan\alpha > \sin\alpha \Leftrightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > \sin\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha > \sin\alpha.\cos\alpha$

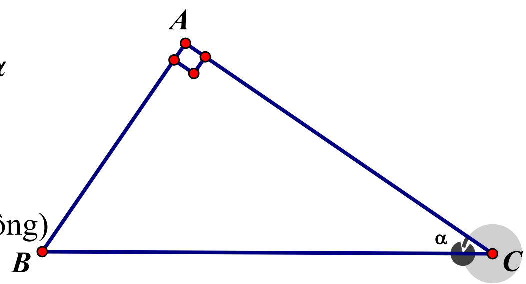
(vì $0^0 < \alpha < 90^0$) $\Leftrightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha.\cos\alpha}{\sin\alpha} \Leftrightarrow 1 > \cos\alpha\,(*)$

(vì $0^0 < \alpha < 90^0 \Rightarrow \sin\alpha > 0$)

Điều cuối cùng (*) luôn đúng với $0^0 < \alpha < 90^0$

b) Tương tự câu a ta có: $\cos\alpha > \cot\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha < \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha.\cos\alpha < \cos\alpha$

$\Leftrightarrow \sin\alpha < 1$ (luôn đúng với $0^0 < \alpha < 90^0$)



Cách khác: a) dựng ΔABC vuông tại A có $\widehat{C} = \alpha$

Ta có $\sin\alpha = \dfrac{AB}{BC}; \tan\alpha = \dfrac{AB}{AC}$

Mà BC > AC (cạnh huyền lớn hơn cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} < \dfrac{AB}{AC}$ hay $\sin\alpha < \tan\alpha$.

Bài toán 43: Không dùng bảng số và máy tính hãy so sánh:

a) $\sin 32^0$ và $\tan 32^0$ b) $\cos 35^0$ và $\cot 35^0$

c) $\sin 25^0$ và $\cot 65^0$ d) $\cos 54^0$ và $\tan 42^0$

Lời giải

Ta có: $\tan 32^0 > \sin 32^0 \Leftrightarrow \dfrac{\sin 32^0}{\cos 32^0} > \sin 32^0 \Leftrightarrow \sin 32^0 > \sin 32^0.\cos 32^0$

(vì $\cos\alpha > 0$) $\Leftrightarrow 1 > \cos 32^0$ (luôn đúng)

b) Theo câu b bài 49 ta có: $\cos 35^0 < \cot 35^0$.

c) $\cot 65^0 = \tan(90° - 65°) = \tan 25°$

theo câu a bài 49 ta có $\sin 25° < \tan 25°$ Do đó $\sin 25° < \cot 65°$

d) cos54° = sin(90° – 54°) = sin36° < tan36° < tan42^0

Vậy cos54° < tan42.

Bài toán 44. Hãy sắp xếp các tỉ số lượng giác sau đây theo thứ tự tăng dần (có giải thích, không dùng bảng số và máy tính): cot36°; tan72°; cot21°; sin54°.

Lời giải

cot36° = tan54°; cot21° = tan69° và sin 54° < tan54°

Ta có: sin54° < tan54° < tan69° < tan72^0

=> sin54° < cot36^0 < cot21°< tan72°.

IV. This giá trị của các biểu thức lượng giác

Bài toán 45. Không dùng bảng số và máy tính hãy tính:

a) $\sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + ... + \sin^2 70^0 + \sin^2 80^0$

b) $\cos^2 12^0 + \cos^2 78^0 + \cos^2 1^0 + \cos^2 89^0$.

Hướng dẫn: – Dùng tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

- Sử dụng các hệ thức lượng giác đã được chứng minh ở bài toán 30;31; 32; ...

Lời giải

a) $\sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + ... + \sin^2 70^0 + \sin^2 80^0$

$= \left(\sin^2 10^0 + \sin^2 80^0\right) + \left(\sin^2 20^0 + \sin^2 70^0\right) + \left(\sin^2 30^0 + \sin^2 60^0\right) + \left(\sin^2 40^0 + \sin^2 50^0\right)$

$= \left(\sin^2 10^0 + cos^2 10^0\right) + \left(\sin^2 20^0 + cos^2 20^0\right) + \left(\sin^2 30^0 + cos^2 30^0\right) + \left(\sin^2 40^0 + cos^2 40^0\right)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

$\cos^2 12^0 + \cos^2 78^0 + \cos^2 1^0 + \cos^2 89^0$

$= \left(\cos^2 12^0 + \sin^2 12^0\right) + \left(\cos^2 1^0 + \sin^2 1^0\right)$

$= 1 + 1$

$= 2$.

Bài toán 46: Không dung bảng số và máy tính, hãy tính:

$$A = \sin^2 14^0 + \sin^2 76^0 + \tan 1^0 . \tan 89^0 - \frac{2\sin 55^0}{\cos 35^0}$$

$$B = \tan 67^0 + \cos^2 16^0 - \cot 23^0 + \cos^2 74^0 - \frac{\cot 37^0}{\tan 53^0}.$$

Lời giải

$$A = \sin^2 14^0 + \sin^2 76^0 + \tan 1^0 . \tan 89^0 - \frac{2\sin 55^0}{\cos 35^0}$$

$$= \sin^2 14^0 + cos^2 14^0 + \tan 1^0 . \cot 1^0 - \frac{2\sin 55^0}{\sin 55^0}$$

$$= 1 + 1 - 2$$

$= 0$

$$B = \tan 67^0 + \cos^2 16^0 - \cot 23^0 + \cos^2 74^0 - \frac{\cot 37^0}{\tan 53^0}$$

$$= \left(\tan 67^0 - \cot 23^0\right) + \left(\cos^2 16^0 + \cos^2 74^0\right) - \frac{\cot 37^0}{\cot 37^0}$$

$$= \left(\cot 23^0 - \cot 23^0\right) + \left(\cos^2 16^0 + \sin^2 16^0\right) - 1$$

$$= 0 + 1 - 1 = 0$$

Bài toán 47. Cho $\tan\alpha = 3$. Tính $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$

Hướng dẫn: Vì $0^0 < \alpha < 90^0 \Rightarrow \cos\alpha > 0$ chia cả tử và mẫu cho $\cos\alpha$ để đưa về $\tan\alpha$.

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho $\cos\alpha$ ta có: $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} = \dfrac{1+3}{1-3} = -2$

Bài toán 48. Tính giá trị của biểu thức $B = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x.\cos x}$. Cho $\tan x = \sqrt{3}$.

Hướng dẫn: Đưa về $\tan x$ ta chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 x$.

Lời giải

Ta có: $B = \dfrac{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sin x.\cos x}{\cos^2 x}} = \dfrac{\tan^2 x - 1}{\tan x} = \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Bài toán 49. Cho $\tan\alpha = 3$. Tính $A = \dfrac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}$.

Lời giải

Ta có: $\tan\alpha = 3 \Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3 \Rightarrow \sin\alpha = 3\cos\alpha \Rightarrow \sin^3\alpha = \left(3\cos\alpha\right)^3$

$$A = \frac{\left(3\cos\alpha\right)^3 - \cos^3\alpha}{\left(3\cos\alpha\right)^3 + \cos^3\alpha} = \frac{27\cos^3\alpha - \cos^3\alpha}{27\cos^3\alpha + \cos^3\alpha} = \frac{26\cos^3\alpha}{28\cos^3\alpha} = \frac{13}{14}$$

Cách khác: $A = \dfrac{\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - \dfrac{\cos^3 x}{\cos^3 x}}{\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + \dfrac{\cos^3 x}{\cos^3 x}} = \dfrac{\tan^3 x - 1}{\tan^3 x + 1} = \dfrac{3^3 - 1}{3^3 + 1} = \dfrac{26}{28} = \dfrac{13}{14}$.

Bài toán 50. Cho $\sin\alpha.\cos\alpha = 0,48$. Tính $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$..

Lời giải

Ta có: $\left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha.\cos\alpha$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 1+2.0,48$

$=1+2.\frac{12}{25}=\frac{49}{25}$

$\Rightarrow \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}$

Ta lại có: $(\sin\alpha+\cos\alpha)^3=\sin^3\alpha+\cos^3\alpha+3\sin\alpha.\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$

$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^3-3\sin\alpha.\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$

$=\left(\frac{7}{5}\right)^3-3.\frac{12}{25}.\frac{7}{5}=\frac{343}{125}-\frac{252}{125}=\frac{91}{125}=0,725$

Bài toán 51. Tính số đo góc nhọn α biết: Cách khác: $\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 1-\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 1-3\sin^2\alpha=\frac{1}{4}\Leftrightarrow -3\sin^2\alpha=\frac{1}{4}-1=\frac{-3}{4}$

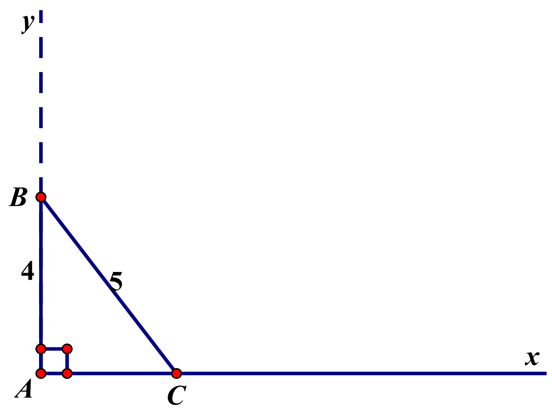
$\Leftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{1}{2}=\sin 30^0\ (\sin\alpha>0)$

Vậy $\alpha=30^0$

IV. Dựng góc α khi biết một tỉ số lượng giác.

Bài toán 52. Dựng góc nhọn α biết $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

Hướng dẫn: Ta biết rằng $\sin\alpha$ và $cos\alpha$ là tỉ số giữa một cạnh góc vuông và cạnh huyền. Vì vậy để dựng được góc a ta đưa về dựng một tam giác vuông biết một cạnh góc vuông và cạnh huyền. Sau đó sử dụng định nghĩa để nhận ra góc α.



Lời giải

+ Dựng góc $\widehat{xAy}=90^0$. Lấy một đoạn thẳng làm đơn vị.

+ Trên tia Ay đặt AB = 4.

+ Dựng đường tròn tâm B bán kính bằng 5.

+ lấy C là giao điểm của (B;5) và tia Ax.

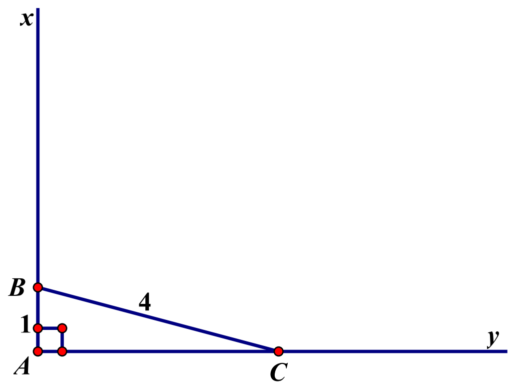
+ Nối B và C ta được $\widehat{ACB}$ chính là góc α cần dựng.

Thật vậy: Ta có $\sin\alpha = \frac{AB}{CB} = \frac{4}{5}$.

Bài toán 53. Dựng góc nhọn α biết $\cos\alpha = 0,25$.

Hướng dẫn: Tương tự như bài 52.

Lời giải



+ Dựng góc $\widehat{xAy} = 90^0$. Lấy một đoạn thẳng làm đơn vị.

+ Trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 1$.

+ Dựng đường tròn tâm B bán kính bằng 4.

+ lấy C là giao điểm của (B;4) và tia Ay.

+ Nối B và C ta được $\widehat{ABC}$ chính là góc α cần dựng.

Thật vậy: Ta có $\cos\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{4} = 0,25$.

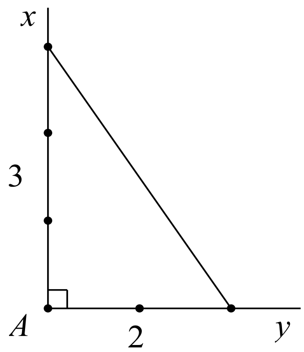
Bài toán 54

a) Dựng góc nhọn α biết $\cot\alpha = \frac{3}{2}$.

b) Dựng góc nhọn α biết $\tan\alpha = \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn: Ta đã biết $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$ là tỉ số giữa hai cạnh góc vuông.Vậy để dựng được góc α ta đưa về dựng một tam giác vuông biết hai cạnh của góc vuông. Sau đó sử dụng định nghĩa để nhận ra góc α.

Lời giải



Dựng góc $\widehat{xAy} = 90°$.

Trên tia Ax lấy C sao cho $AC = 2$.

Nối B và C ta được chính là góc α cần dựng.

Thật vậy: $\cot\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{2}$.

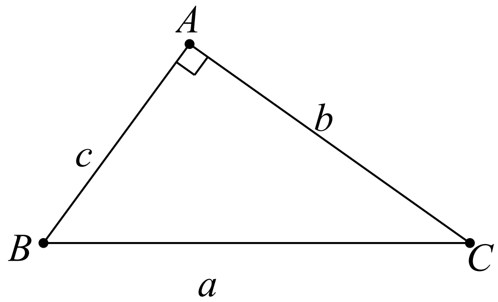
Câu b. học sinh tự làm.

Chương IV. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 12. MỘT SỐ HỆ THỨC GIỮA CẠNH, GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG VÀ ỨNG DỤNG

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hệ thức giữa cạnh và góc trong của tam giác vuông



Định lý 1. Trong tam giác vuông:

• Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với cos góc kề.

$$b = a\sin B = a\cos C; c = a\sin C = a\cos B.$$

• Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông còn lại nhân với tan góc đối hoặc nhân với cot góc kề.

$$b = c\tan B = c\cot C; c = b\tan C = b\cot B.$$

2. Giải tam giác vuông

Trong một tam giác vuông, nếu cho biết trước hai cạnh (hoặc một góc nhọn và một cạnh) thì ta sẽ tìm được tất cả các cạnh và các góc còn lại của tam giác vuông đó.

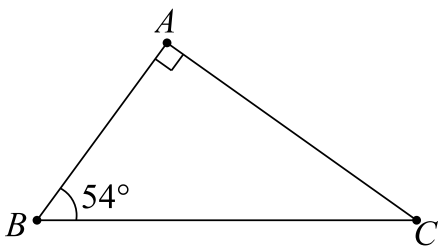
Bài toán này gọi là bài toán giải tam giác vuông.

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

1. Tính cạnh góc vuông khi biết cạnh huyền và một góc nhọn

Bài toán 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 3\,\text{cm}$, $\widehat{B} = 54^\circ$. Tính AB và AC.

Lời giải



Ta có ΔABC, vuông tại A có $\widehat{B} = 54^\circ$ và cạnh huyền $BC = 3\,\text{cm}$.

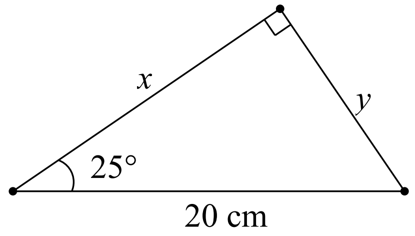
Theo định lý về hệ thức về cạnh và góc của tam giác vuông, ta có:

$AB = BC\cos 54^\circ = 3.\cos 54^\circ \approx 1.76\,(\text{cm})$.

$AC = BC\sin 54^\circ = 3.\sin 54^\circ \approx 2,43(\text{cm})$.

Bài toán 2: Cho tam giác vuông có cạnh huyền bằng 20 cm và một góc nhọn bằng $25°$ (xem hình vẽ bên). Tính x, y (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải



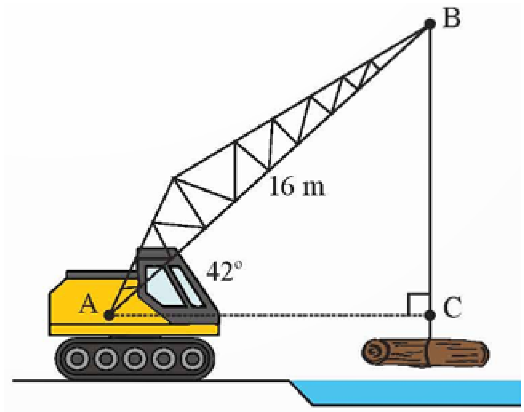
Tam giác đã cho vuông có cạnh huyền bằng 20 cm, cạnh góc vuông x có góc kề bằng $25°$.

Ta có: $x = 20.\cos 25° \approx 18,13\,(\text{cm})$.

Tương tự cạnh góc vuông y có góc đối bằng $25°$.

Ta có: $y = 20.\sin 25° \approx 8,45\,(\text{cm})$.

Bài toán 3: Một cần cẩu đang nâng một khối gỗ trên sông biết tay cẩu AB có chiều dài $16\,\text{m}$ và nghiêng một góc $42°$ so với phương nằm ngang (hình vẽ). Tính chiều dài BC của đoạn dây cáp (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



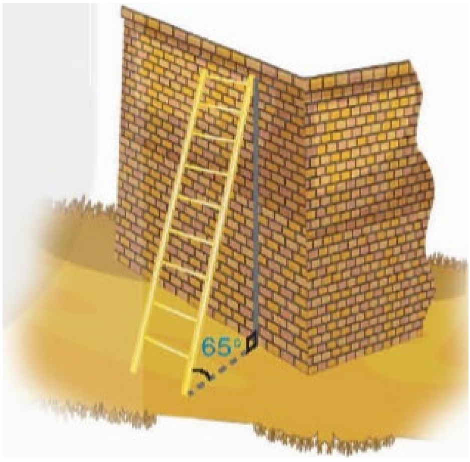
Lời giải

Tam giác ABC vuông tại C có cạnh huyền $AB = 16\,\text{m}$, $\widehat{BAC} = 42°$.

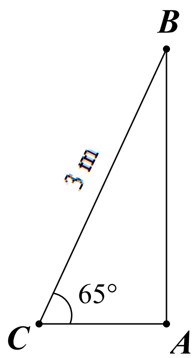
Theo định lý về hệ thức về cạnh và góc của tam giác vuông, ta có:

$BC = AB.\sin BAC = 16.\ \sin 42° \approx 10,7\,(\text{m})$.

Bài toán 4: Một chiếc thang dài $3\,\text{m}$. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến số thập phân thứ hai) để nó tạo được với mặt đất một góc "an toàn" (tức là đảm bảo thang chắc chắn khi sử dụng) (xem hình vẽ).



Lời giải



Xét ΔABC vuông tại A có $\widehat{C} = 65°$ và $BC = 3\,\text{m}$

Tính AC.

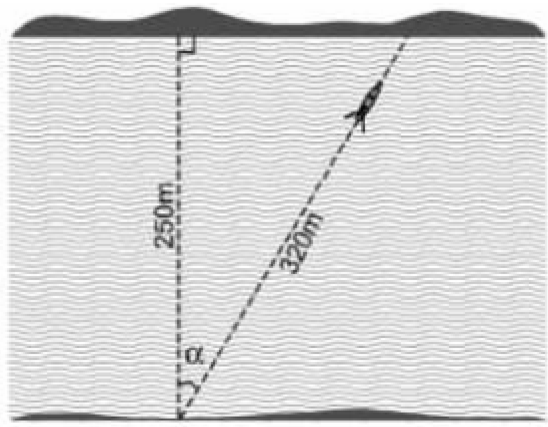
Theo định lý về hệ thức về cạnh và góc của tam giác vuông, ta có:

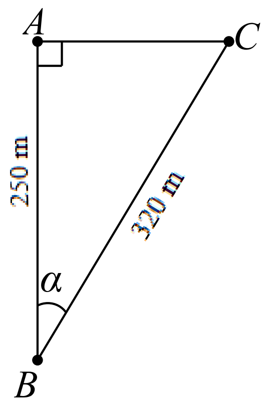
$$AC = BC\cos C = 3.\cos 65° \approx 1,27\,(\text{m}).$$

Vậy để đảm bảo thang chắc chắn khi sử dụng cần đặt chân thang cách chân tường $1,27\,\text{m}$.

Bài toán 5: Một khúc sông rộng 250 m. Một con đò chèo qua sông bị dòng nước đẩy xiên nên phải chờ khoảng hai 320 m mới sang được bờ bên kia. Hỏi dòng nước đã đẩy con đò đi lệch một góc α bằng bao nhiêu độ (làm tròn đến phút)? (Xem hình vẽ).

Lời giải





ΔABC vuông tại A có cạnh góc vuông $AB = 250\,\text{m}$, cạnh huyền $BC = 320\,\text{m}$. Theo định lí về hệ thức về cạnh và góc của tam giác vuông, ta có:

$AB = BC\cos B$ hay $250 = 320.\cos\alpha$

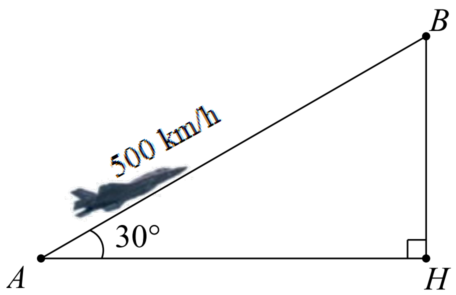
$$\cos\alpha = \frac{250}{320}$$

$$\alpha = 38°37'$$

Dòng nước đã để con đò đi lệch một góc bằng $38°37'$.

Bài toán 6. Một chiếc máy bay bay lên với vận tốc 500 km/h đường bay tạo với phương nằm ngang một góc $30°$ (hình vẽ bên). Hỏi sau $1,2$ phút, máy bay bay lên cao được bao nhiêu km theo phương thẳng đứng?

Lời giải



Đổi $1,2$ phút $= \frac{1}{50}$ giờ.

Ta có AB là quãng đường máy bay bay lên trong $\frac{1}{50}$ giờ với vận tốc 500 km/h.

$AB = 500 \cdot \frac{1}{50} = 10\ (\text{km})$

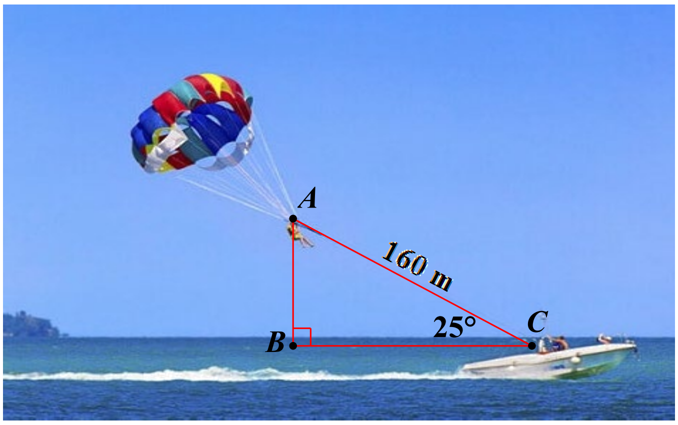
Tam giác ABC vuông tại H có cạnh huyền $AB = 10$ km, $\widehat{A} = 30°$. Theo hệ thức về cạnh và góc của tam giác vuông ta có: $BH = AB.\sin A = 10.\sin 30° = 5(\text{km})$

Vậy sau $1,2$ phút (tức $\frac{1}{50}$ giờ) máy bay bay lên cao được 5km theo phương thẳng đứng.

Bài toán 7. Ca nô dù bay là một trò chơi thể thao mạo hiểm được ưa chuộng trong đó người chơi được đeo dù và được canô kéo bay lên để thưởng ngoạn cảnh biển từ trên cao (xem hình vẽ). Biết độ dài của dây kéo $AC = 160$m và góc tạo bởi dây kéo và phương nằm ngang $\widehat{ACB} = 25°$.

a) Tính độ cao AB của người chơi so với mặt biển.

b) Muốn bay cao 75 m thì dây kéo phải dài bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười mét)?



Lời giải

a) Tính độ cao AB là cạnh góc vuông của tam giác vuông ABC, biết cạnh huyền $AC = 160\,\text{m}$ và $\widehat{ACB} = 25°$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$AB = AC.\sin\widehat{ACB} = 160.\sin 25° \approx 67{,}6\,(\text{m}).$$

b) Khi $AB = 75$ m . Tính AC .

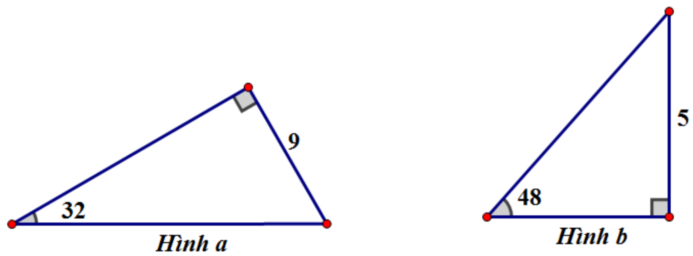
Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $AB = AC.\sin 25°$ hay $75 = AC.\sin 25°$.

Suy ra: $AC = \dfrac{75}{\sin 25°} \approx 177{,}5\,(\text{m})$.

Muốn bay cao 75 m thì dây kéo phải dài $177{,}5$ m .

II. Tính cạnh góc vuông khi biết cạnh góc vuông còn lại và góc nhọn.

Bài toán 8. Tính cạnh góc vuông x của tam giác vuông của mỗi tam giác vuông trong hình vẽ dưới đây (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

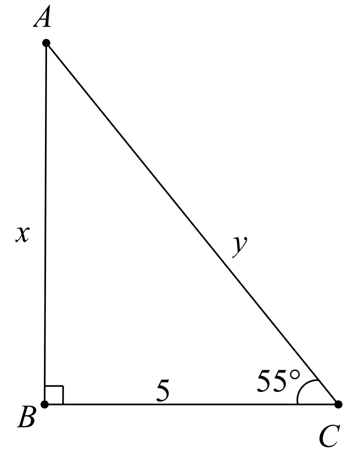
Hình a. Tam giác ở *Hình a* vuông có một cạnh góc vuông là 9, góc nhọn đối diện với cạnh đó là $32°$. Tính cạnh góc vuông còn lại.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $x = 9.\cot 32° \approx 14{,}4$.

Hình b. Tam giác ở *Hình b* vuông có một cạnh góc vuông là 5, góc nhọn kề với cạnh đó là $48°$. Tính cạnh góc vuông còn lại.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $x = 5.\tan 48° \approx 5{,}55$.

Bài toán 9. Tính các độ dài x, y trong hình vẽ bên. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Tam giác ABC vuông tại B.

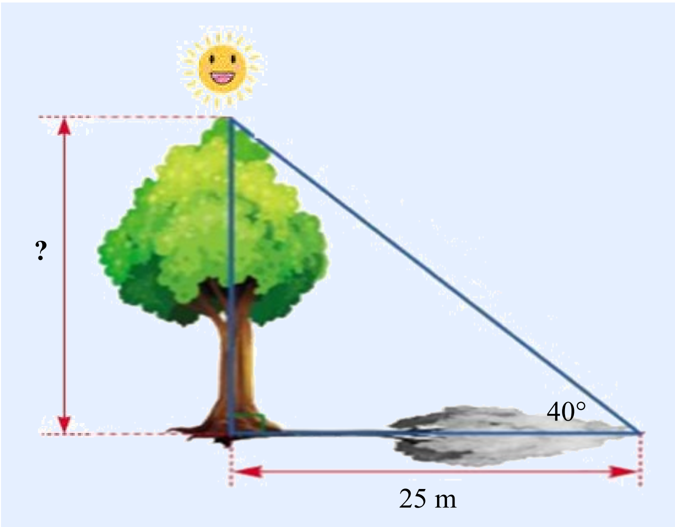
Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$x = AB = BC \,.\, \tan 55° = 5 \,.\, \tan 55° \approx 7{,}14$.

Tương tự: $BC = AC \,.\, \cos C = y \,.\, \cos 55°$.

Vậy $y = \dfrac{BC}{\cos 55°} = \dfrac{5}{\cos 55°} \approx 8{,}72$.

Bài toán 10. Bóng trên mặt đất của một cây dài 25 m. Tính chiều cao của cây (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng tia nắng mặt trời tạo với mặt đất góc $40°$ (Xem hình vẽ).



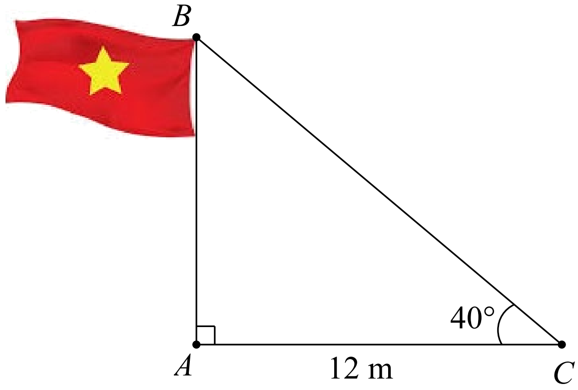
Lời giải

Ta thấy chiều cao của cây đối diện với góc $40°$ (góc tạo bởi tia nắng mặt trời và bóng của cây trên mặt đất).

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $h = 25 \,.\, \tan 40° \approx 21\,(\text{m})$.

Vậy chiều cao của cây là: 21 m

Bài toán 11. Tam giác ABC ở hình vẽ bên (có $\widehat{A} = 90°$) mô tả cột cờ AB và bóng nắng của cột cờ trên mặt đất là AC. Người ta đo được độ dài $AC = 12\text{ m}$ và $\widehat{C} = 40°$. Tính chiều cao AB của cột cờ (làm tròn đến kết quả phần trăm của mét).



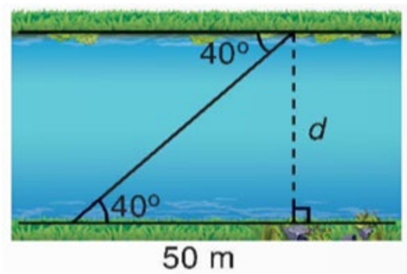
Lời giải

Ta có tam giác ABC vuông tại A có cạnh góc vuông $AC = 12$ m và góc kề với cạnh đó bằng $40°$, chiều cao của cột cờ AB là cạnh góc vuông còn lại.

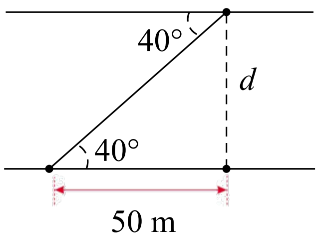
Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$AB = AC\,.\,\tan C = 12\,.\,\tan 40° \approx 10{,}07\,(\text{m}).$$

Bài toán 12. Tìm chiều rộng d của dòng sông trong hình vẽ bên (làm tròn đến mét)



Lời giải



Chiều rộng d của dòng sông là một cạnh của tam giác vuông khi biết cạnh kia 50 m và góc nhọn $\alpha = 40°$

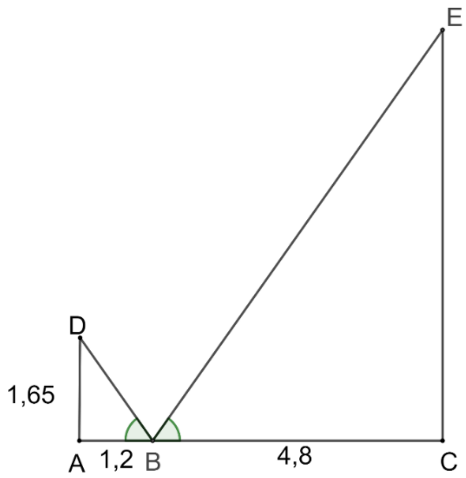
Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

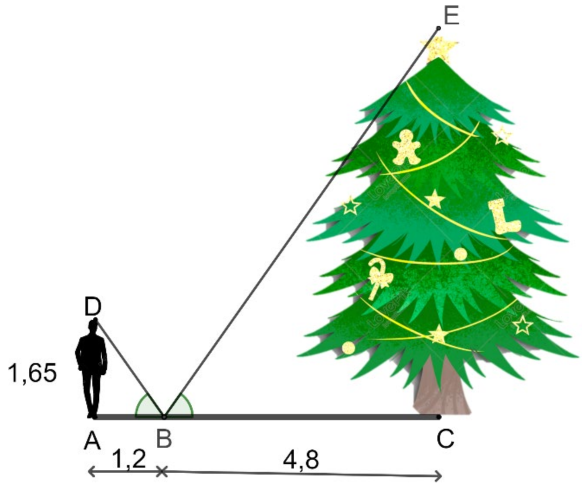
$$\text{d} = 50.\tan 40° \approx 42\,(\text{m})$$

Vậy chiều rộng của dòng sông khoảng 42 m.

Bài toán 13. Một người đứng tại điểm A, cách gương phẳng đặt nằm trên mặt đất tại điểm B là $1{,}2$ m, nhìn thấy hình phản chiếu qua gương B của ngọn cây (cây có gốc ở tại điểm C cách B là $44{,}8$ m, B nằm giữa A và C). Biết khoảng cách từ mặt đất đến mắt người đó là $1{,}65$ m. Tính chiều cao của cây (xem hình vẽ).

Lời giải





Gọi α là $\widehat{ABD}$, ta có $\widehat{CBE} = \alpha(gt)$

Xét tam giác ABD vuông tại A, ta có: $\tan\alpha = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{1,65}{1,2}$

Xét tam giác BCE vuông tại C .

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$CE = BC\,.\,\tan\alpha = 44,8\,.\dfrac{1,65}{1,2} \approx 6,6(m)$$

Vậy chiều cao của cây là $6,6\text{ m}$.

III. Giải tam giác vuông

Bài toán 1. Giải tam giác ABC vuông tại A có $BC = a, AC = b, AB = c$, trong các trường hợp sau (làm tròn kết quả độ dài đến hàng đơn vị, số đo góc đến độ).

a) $a = 21,\ h = 18$

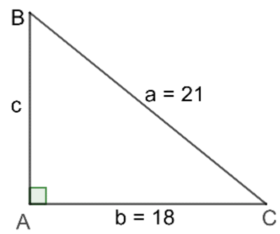
b) $\widehat{C} = 50^\circ,\ a = 8$

c) $\widehat{C} = 30^\circ,\ c = 5$

d) $\widehat{C} = 30^\circ,\ b = 10$

e) $c = 4,\ b = 6$

Lời giải



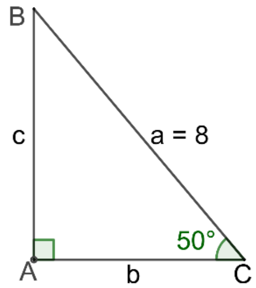
a) Ta có: $\cos C = \dfrac{b}{a} = \dfrac{18}{21} = \dfrac{6}{7}$, suy ra $\widehat{C} = 31^\circ$

$\Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ - 31^\circ = 59^\circ$

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$c = a.\sin C = 21.\sin 31^\circ \approx 11.$$

b) Ta có tam giác ABC vuông tại A,



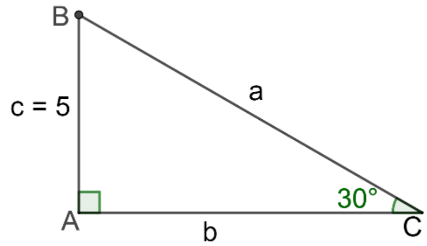
có $\hat{C} = 50^\circ \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$c = a.\sin C = 8.\sin 50^\circ \approx 6.$$

Tương tự $b = a.\cos C = 8.\cos 50^\circ \approx 5.$

c)Ta có tam giác ABC vuông tại A : $\hat{C} = 30^\circ \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$



Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông,ta có:

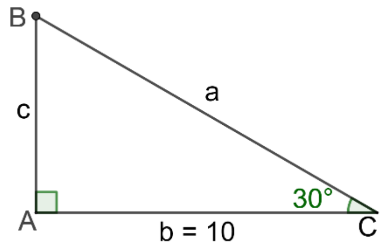
$$c = a.\cot 30^\circ = 5.\cot 30^\circ = 5\sqrt{3}.$$

$$c = a.\sin C \Rightarrow a = \frac{c}{\sin C} = \frac{5}{\sin 30^\circ} = 10.$$

Cách khác:

Để tính cạnh huyền a. Vì ABC vuông có $\hat{C} = 30^\circ$ và $c = 5$ nên cạnh huyền $a = 10$

d) Tam giác ABC vuông tại A , có $\hat{C} = 30^\circ \rightarrow \hat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$



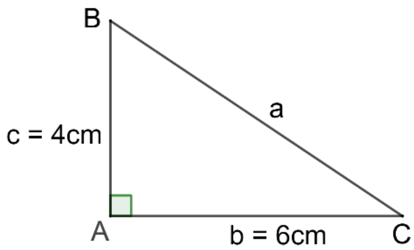
Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$c = b.\tan 30^\circ = 10.\tan 90^\circ = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

$$b = a.\cos C \Rightarrow a = \frac{b}{\cos C} = \frac{10}{\cos 30^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

Nhận xét: Khi ΔABC vuông tại A có $\hat{C} = 30^\circ$ và $c = \frac{10\sqrt{3}}{3}$. ta kết luận $a = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

e) Tam giác ΔABC vuông tại A .



Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$b = c.\tan B \Rightarrow \tan B = \frac{b}{c} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

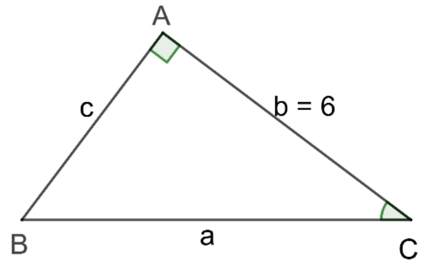
Suy ra $\hat{B} = 56^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ.$

Lại có $b = a.\sin B \Rightarrow a = \frac{b}{\sin C} = \frac{6}{\sin 56^\circ} \approx 7.2(cm).$

Bài toán 2. Giải tam giác ABC vuông tại A biết:

$$\sin C = 0,6 \text{ và } AC = 6.$$

Lời giải



Ta có $\sin C = 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow AB = \frac{3}{5}BC$

Áp dụng định lý Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = BC^2 - \left(\frac{3}{5}BC\right)^2$

$=> 6^2 = BC^2 - \frac{9}{25}BC^2 \Rightarrow 6^2 = \frac{16}{25}BC^2$

$=> BC^2 = \frac{6^2}{\frac{16}{25}} = 56,25 \Rightarrow BC = 7,5$

Áp dụng định lý Pythagore: $a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = (7,5)^2 - 6^2 = 20,25$

$\Rightarrow c = 4,5$

Vì $\sin C = 0,6(gt) \Rightarrow \widehat{C} \approx 36^\circ 52'$

Do đó $\widehat{B} \approx 90^\circ - 36^\circ 52' \approx 53^\circ 08'$

Bài toán 3. Cho tam giác ABC vuông tại A biết $AB = 9cm; \widehat{C} = 30^\circ$

a) Giải tam giác vuông ABC.

b) Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Tính AH, BH.

c) Tính độ dài đường phân giác AD của tam giác ABC. (Số đo độ dài làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

a) Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

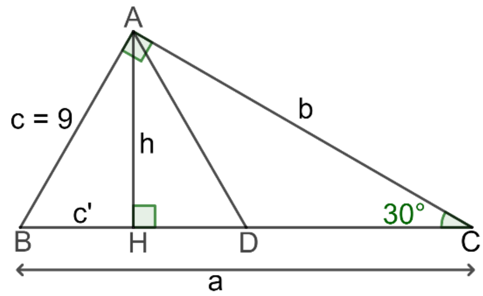
$c = a.\sin C \Rightarrow a = \frac{c}{\sin C} = \frac{9}{\sin 30^\circ} = \frac{9}{\frac{1}{2}} = 18(cm).$

Nhận xét: Ta có thể thấy trong tam giác vuông có góc $30°$ thì cạnh đối diện góc góc $30°$ bằng nửa cạnh huyền.

Lại có $c = b.\tan C$

$\Rightarrow b = \frac{c}{\tan C} = \frac{9}{\tan 30^\circ} = 9\sqrt{3}(cm)$

Dễ thấy $\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$



Xét tam giác AHB vuông tại H, có $\widehat{B} = 60^\circ$ (chứng minh trên) và cạnh huyền $AB = 9$ cm.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH = AB.\sin B = 9.\sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2} \approx 7,79(cm)$$

$$BH = AB.\cos B = 9.\cos 60^\circ = 4,5(cm)$$

Nhận xét: Như trên ta có ngay BH là cạnh đối diện góc 30° trong tam giác vuông nên $BH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}.9 = 4,5(cm)$

b)Tam giác ABC có phân giác AD (gt) ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{9\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{1} = \frac{DC}{\sqrt{3}} = \frac{DB+DC}{1+\sqrt{3}} = \frac{BC}{1+\sqrt{3}} = \frac{a}{1+\sqrt{3}} = \frac{18}{1+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow BD = \frac{18}{1+\sqrt{3}} \approx 6,59$$

$$\Rightarrow HD = BD - BH = 6,59 - 4,5 \approx 2,09(cm).$$

Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông AHD,ta có:

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 = (7,79)^2 + (2,09)^2 \approx 65,11$$

$$\Rightarrow AD \approx 8,07(cm).$$

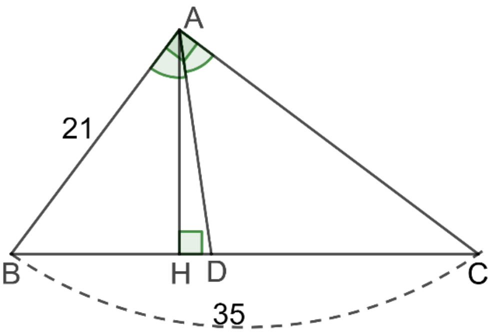
Bài toán 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 21cm, BC = 35cm$

a) Giải tam giác vuông ABC.

b) Tính độ dài phân giác AD và đường cao AH (số đo độ dài làm tròn đến số thập phân thứ hai, số đo góc làm tròn đến phút).

Lời giải

a) Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:



$$AB = BC.\sin C$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{21}{35}$$

Suy ra $\hat{C} \approx 36^\circ 52'$

$$\Rightarrow \hat{B} \approx 90^\circ - 36^\circ 52' \approx 53^\circ \approx 53^\circ 08$$

$$AC = BC.\sin B = 335.\sin 53^\circ 08 \approx 27,98(cm)$$

Xét tam giác vuông AHB có cạnh huyền $AB = 21(cm)(gt)$

$\hat{B} \approx 53^\circ 08$, ta có $AH = AB.\sin B = 21.\sin 53^\circ 08 \approx 16,79(cm)$

b) AD là phân giác của ΔABC ta có: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \frac{DB}{3} = \frac{DC}{4} = \frac{DB+DC}{3+4} = \frac{BC}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

$\Rightarrow DB = 3.5 = 15(cm)$.

Cũng trong tam giác AHB, ta có:

$$BH = AB.\cos B = 21.\cos 53^\circ 08 \approx 12,60(cm).$$

Do đó $HD = DB - BH = 15 - 12,6 = 2,4(cm)$

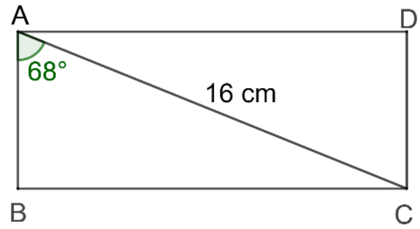
Theo định lý Pythagore, ta có: $AD^2 = AH^2 + HD^2 = (16,79)^2 + (2,4)^2 \approx 276,14$

$\Rightarrow AD \approx \sqrt{276,14} \approx 16,62(cm)$

Bài toán 5. Tính các cạnh của hình chữ nhật ABCD (xem hình vẽ) biết đường chéo AC = 16 cm và $\widehat{BAC} = 68^\circ$.

Lời giải

Tam giác ABC vuông tại B có cạnh huyền $AC = 16$ cm, góc nhọn $\widehat{BAC} = 68^\circ$



Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông,ta có:

$AB = AC.\cos BAC = 16.\cos 68^\circ \approx 6,0(cm)$

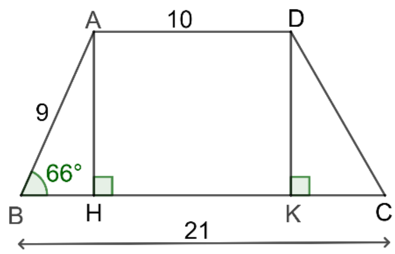
Lại có $BC = AC.\sin BAC = 16.\sin 68^\circ \approx 14,8(cm)$.

Vậy chiều rộng của hình chữ nhật là 6,0 cm và chiều dài là 14,8 cm.

Bài toán 6. Tính độ dài cạnh bên CD của hình thang ABCD trong hình vẽ bên.

Lời giải

Xét tam giác AHB vuông tại H có cạnh huyền $AB = 9$, góc nhọn $\widehat{B} = 66^\circ$.



Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BH = AB.\cos B = 9.\cos 66^\circ \approx 3,66$$

$$AH = AB.\sin B = 9.\sin 66^\circ \approx 8,22$$

Dễ thấy $HK = AD = 10$

$\Rightarrow KC = BC - (BH + HK) = 21 - (3,66 + 10) = 7,34$

Kẻ đường cao DK của hình thang ABCD.

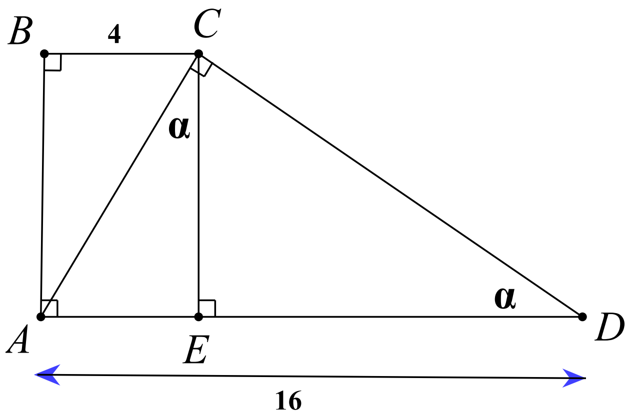
Xét tam giác DKC vuông tại K có hai cạnh góc vuông $DK = AH = 8,22; KC = 7,34(cmt)$

Theo định lí Pythagore, ta có:

$$DC^2 = DK^2 + KC^2 = (8,22)^2 + (7,34)^2 = \frac{2429}{20} \Rightarrow DK \approx 11,0$$

Bài toán 7. Cho hình thang $ABCD(AD//BC)$ có $AD = 16\ cm, BC = 4\ cm$ và $\hat{A} = \hat{B} = \widehat{ACD} = 90^\circ$. Kẻ đường cao CD của tam giác ACD. Chứng minh $\widehat{ADC} = \widehat{ACE}$. Tính sin của các góc $\widehat{ADC}, \widehat{ACE}$ và suy ra $AC^2 = AE.AD$. Từ đó tính AC.

Lời giải



Ta có ΔACD vuông tại C (gt)

$$\Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{CAD} = 90^\circ \ (1)$$

Tương tự ΔACE vuông tại E (gt)

$$\Rightarrow \widehat{ACE} + \widehat{CAD} = 90^\circ \ (2)$$

Tứ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ACE}$.

Dễ thấy tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow AE = BC = 4\ cm \Rightarrow ED = AD - EA = 16 - 4 = 12\ cm.$$

Xét ΔAEC và ΔCED co:

$\widehat{AEC} = \widehat{CED} \text{ - } 90^o\left(gt\right), \widehat{ACE} = \widehat{ADC}$ (Chứng minh trên)

Do đó $\Delta AEC \# \Delta CED$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{AE}{CE} \Rightarrow CE^2 = AE \cdot DE = 4 \cdot 12 = 48$$

$$\Rightarrow CE = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\ cm.$$

Đặt $\alpha = \widehat{ADC}$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, xét ΔAEC, ta có:

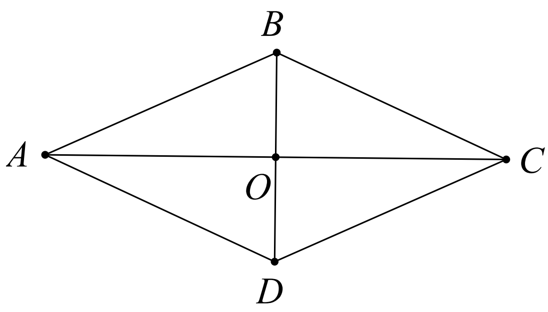
$$AE = CE.tan\alpha \Rightarrow tan\alpha = \frac{AE}{CE} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Do đo $\alpha = 30^\circ \Rightarrow sin\alpha = \frac{1}{2}$ hay $sinADC = sinACE = \frac{1}{2}$.

Ta có $sin30^\circ = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AE}{sin30^\circ} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8\ cm$.

Bài toán 8. Tính các góc của hình thoi có hai đường chéo dài $2\sqrt{3}$ và 2

Lời giải



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của hình thoi $ABCD$.

Ta có $OA = OC = \frac{AC}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$ và $OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Lại có $AC \perp BD$ tại O (tính chất hai đường chéo của hình thoi).

Xét tam giác AOB vuông tại O.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$OB = OA.tanOAB \Rightarrow tanOAB = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ suy ra $\widehat{OAB} = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BAD} = 2.30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Vậy $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 60^\circ$ và $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 120^\circ$.

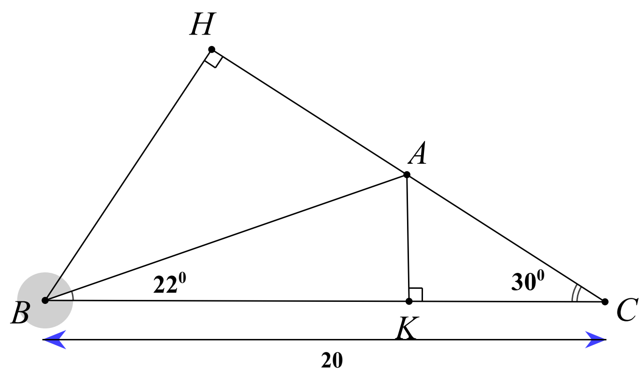
Bài toán 9. Cho tam giác ABC có $BC = 20\ cm, \widehat{ABC} = 22^\circ, \widehat{ACB} = 30^\circ$.

a) Tính khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng AC.

b) Tính các cạnh và các góc còn lại của tam giác ABC.

c) Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC.

Lời giải



a) Gọi BH là khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng AC.

Tam giác BHC vuông tại H có $\hat{C} = 30^0$, cạnh huyền $BC = 20\ cm$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $BH = BC.sinC = 20.sin30^\circ = 10\ cm$.

b) Ta có: $\widehat{BAC} = 180^\circ - \left(\hat{B} + \hat{C}\right) = 180^\circ - \left(22^\circ + 30^\circ\right) = 128^\circ$.

Ta có: $\widehat{BAC} + \widehat{BAH} = 180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{BAH} = 180^0 - \widehat{BAC} = 180^0 - 128^0 = 52^0$.

Xét tam giác BHA vuông tại H, có cạnh góc vuông $BH = 10(cm)$, góc nhọn $\widehat{BAH} = 52^0$

(cmt).

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BH = BA \cdot sinBAH \Rightarrow BA = \frac{BH}{sinBAH} = \frac{10}{sin52^\circ} \approx 12,7\left(cm\right)$$

Lại có: $HA = BH.cotBAH = 10.cot52^\circ \approx 7,8\left(cm\right)$

Xét tam giác BHC vuông tại H, có cạnh huyền $BC = 120\left(cm\right)$, góc nhọn $\widehat{C} = 30^\circ$ (gt).

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$HC = BC.cosC = 20.cos30^\circ = 10\sqrt{3} \approx 17,3\left(cm\right)$$

Ta có: $HC = HA + AC \Rightarrow AC = HC - HA \approx 17,3 - 7,8 \approx 9,5\left(cm\right)$.

Vậy góc còn lại của tam giác ABC là $\widehat{BAC} = 128^\circ$, cạnh $AB \approx 12,7\left(cm\right)$, cạnh $AC \approx 9,5(cm$

.

c) Gọi khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC là AK.

Xét tam giác AKB vuông tại K có cạnh huyền $AB \approx 12,7\left(cm\right), \widehat{ABC} = 22^\circ$.

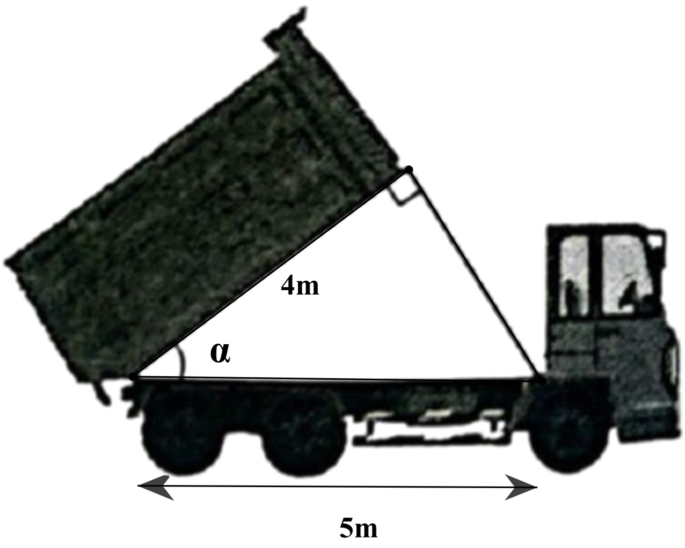
Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

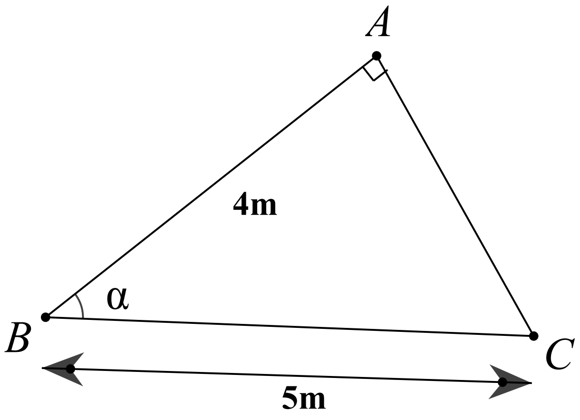
$$AK = AB \cdot sinABC \approx 12,7 \cdot sinABC \approx 12,7 \cdot sin22^\circ \approx 4,8\left(cm\right).$$

Vậy khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC là $4,8\left(cm\right)$.

Bài toán 10. Tính góc nghiêng α của thùng xe chở rác trong hình vẽ bên.

Lời giải





(Xem hình vẽ bên).

Tam giác ABC vuông tại A, có cạnh huyền $BC = 5\ m$, cạnh góc vuông $AB = 4\ m$.

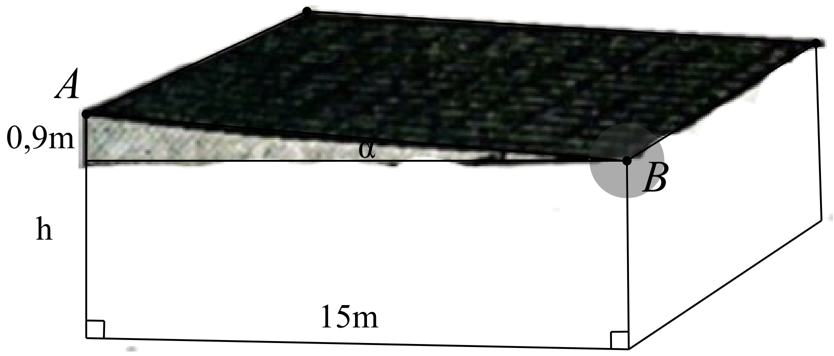
Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

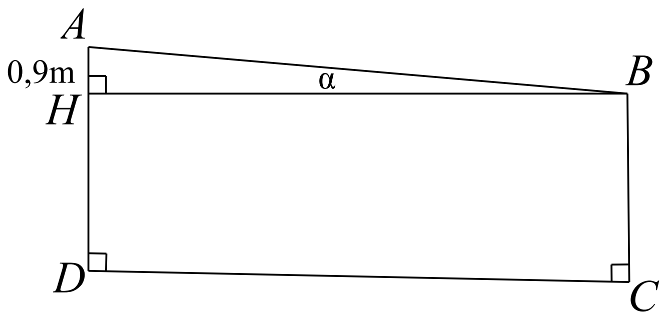
$$AB = BC \cdot cos\alpha \Rightarrow cos\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha \approx 36^\circ 52'$$

Vậy góc nghiêng α của thùng xe chở rác gần bằng $36^\circ 52'$

Bài toán 11. Tìm góc nghiêng α và chiều rộng của mái nhà kho trong hình vẽ bên.

Lời giải





(Xem hình vẽ bên).

Dễ thấy tứ giác HBCD là hình chữ nhật $\Rightarrow BH = DC = 15\left(\ cm\right)$

Xét tam giác AHB vuông tại H, có hai cạnh góc vuông $HB = 15\ m$, $HA = 0,9\ m$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$HA = HB \cdot tan\alpha \Rightarrow tan\alpha = \frac{HA}{HB} = \frac{0,9}{15} \Rightarrow \alpha \approx 3^\circ 26'.$$

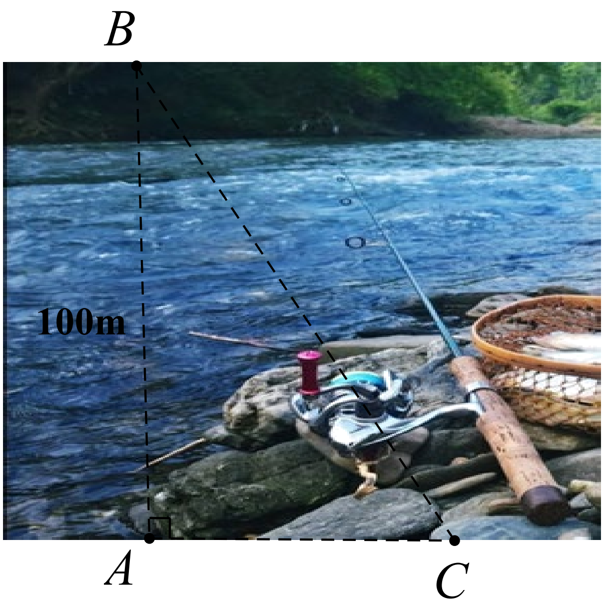
Ta có: $AH = AB.sin\alpha \Rightarrow AB = \dfrac{AH}{sin\alpha} = \dfrac{0,9}{sin3^\circ 26'} \approx 15,03(\ m)$

Cách khác: Có thể áp dụng định lí Pythagore, ta có:

$$AB^2 = HA^2 + HB^2 = (0,9)^2 + 15^2 \approx \frac{22581}{100} \Rightarrow AB \approx 15,03(\ m).$$

Bài toán 12. Hình vẽ bên dưới minh hoạ một phần con sông có bề rộng $AB = 100\ m$. Một chiếc thuyền đi thẳng từ vị trí B bên này bờ đến vị trí C bên kia bờ sông. Tính quãng đường BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét), biết $\widehat{ABC} = 35^\circ$.

Lời giải



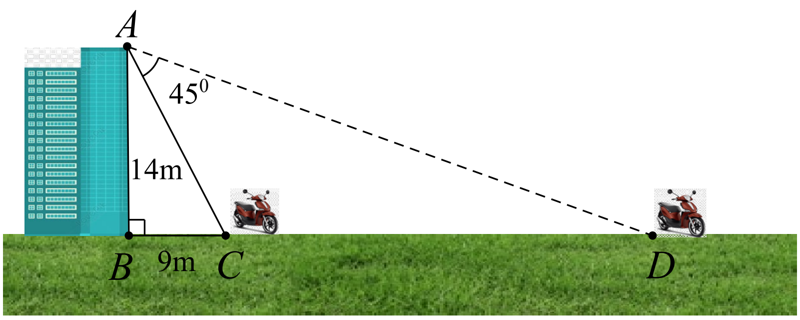
Xét tam giác BAC vuông tại A có cạnh góc vuông $AB = 100\ m$, góc nhọn $B = 35^\circ$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AB = BC.cosB \Rightarrow BC = \frac{AB}{cosB} = \frac{100}{cos35^\circ} \approx 122,1(\ m)$$

Vậy quãng đường BC dài $122,1(\ m)$.

Bài toán 13. Một người đứng từ sân thượng toà nhà và quan sát một người đi xe máy từ vị trí C đến D (xem hình vẽ).



a) Giải tam giác vuông ABD.

b) Tính tốc độ của xe máy, biết thời gian xe đi từ C đến D là 6,5 giây. Làm tròn số đo góc đến độ và độ dài cạnh đến hàng phần mười mét.

Lời giải

a) Xét ΔABC vuông tại B có hai cạnh góc vuông $AB = 14\ m, BC = 9\ m$.
Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BC = AB.tanBAC \Rightarrow tanBAC = \frac{BC}{AB} = \frac{9}{14} \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 32^\circ 44'.$$

Lại có $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 32^\circ 44' + 45^\circ \approx 77^\circ 44'$

$$\Rightarrow \hat{D} \approx 90^\circ - 77^\circ 44' \approx 12^\circ.$$

Xét tam giác ABD vuông tại B có cạnh góc vuông $AB = 14\ m, \hat{D} = 12^\circ$. Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AB = AD.sinD \Rightarrow AD = \frac{AB}{sinD} = \frac{14}{sin12^\circ} \approx 67\,(m)$$

Lại có $AB = BD.tanD \Rightarrow BD = \dfrac{AB}{tanD} = \dfrac{14}{tan12^\circ} \approx 66\,(m)$.

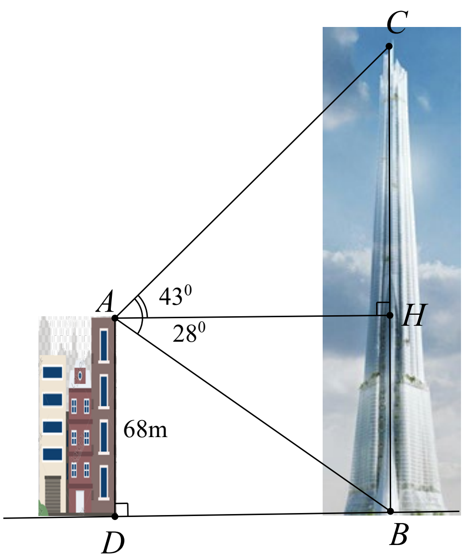
b) Ta có quãng đường xe máy đi từ C đến D là:

$$CD = BD - BC \approx 66 - 9 = 57\,(m) = 0{,}057\,(km)$$

Thời gian 6,5 giây $= \dfrac{6{,}5}{3600}\,(h)$

Vậy vận tốc của xe máy là: $\dfrac{0{,}057}{\left(\dfrac{6{,}5}{3600}\right)} = 31{,}5 \approx 32\ km/h$.

Bài toán 14. Từ vị trí A ở phía trên một toà nhà có chiều cao $AD = 68\ m$, bác Duy nhìn thấy vị trí C cao nhất của một tháp truyền hình, góc tạo bởi tia AH theo phương nằm ngang là $\widehat{CAH} = 43^\circ$. Bác Duy cũng nhìn thấy chân tháp tại vị trí B mà góc tạo bởi tia AB và tia AH là $\widehat{BAH} = 28^\circ$, điểm H thuộc đoạn thẳng BC (hình vẽ). Tính khoảng cách BD từ chân tháp đến chân toà nhà và chiều cao BC của tháp truyền hình (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Lời giải

Dễ thấy $\widehat{ABD} = \widehat{HAB} = 28^\circ$ (so le trong).

Xét tam giác ADB có cạnh góc vuông $AD = 68\ m$ và $\widehat{ABD} = 28^\circ$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AD = BD \cdot tan28^\circ \Rightarrow BD = \frac{AD}{tan28^\circ} = \frac{68}{tan28^\circ} \approx 127{,}9\left(\ m\right).$$

Vậy khoảng cách từ chân tháp đến chân toà nhà $BD = 127{,}9\left(\ m\right)$.

Ta có tứ giác $AHBD$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow AH = BD = 127{,}9\left(\ m\right)$ và $BH = AD = 68\ m$.

Tam giác AHC vuông tại H, có cạnh góc vuông $AH = 127{,}9$ (m), góc nhọn $\widehat{CAH} = 43^\circ$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$CH = AH.tanCAH \approx 127{,}9.tan43^\circ \approx 119{,}3\left(\ m\right).$$

Vậy chiều cao BC của tháp truyền hình là:

$$BC = BH + HC \approx 68 + 119{,}3 \approx 187{,}3\left(\ m\right).$$

Bài toán 15. Năm 1990, tháp nghiêng ở thành phố Pisa (Italia) bắt đầu quá trình trùng tu nhằm giảm độ nghiêng của tháp. Sau 10 năm trùng tu, vào năm 2001, các kĩ sư đã thành công trong việc đưa độ nghiêng của tháp chỉ còn khoảng 4° (nguồn: *https/len.wikipedia/wiki/Leaning_tower_of_Pisa*). Giả sử một người đứng trên tháp (tại vị trí A), cách mặt đất một khoảng là $AH = 45\ m$, thả một vật rơi xuống đất (hình vẽ bên). Tính khoảng cách từ vị trí chạm đất (vị trí H) đó đến chân tháp (vị trí B) (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).

Lời giải

Ta có khoảng cách từ vị trí chạm đất đến chân tháp là BH.

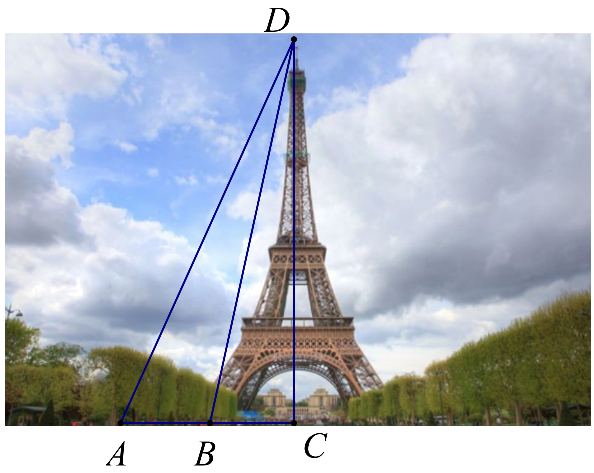
Tam giác AHB vuông tại H có cạnh góc vuông $AH = 45\ m$, góc nhọn $\widehat{BAH} = 4^\circ$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

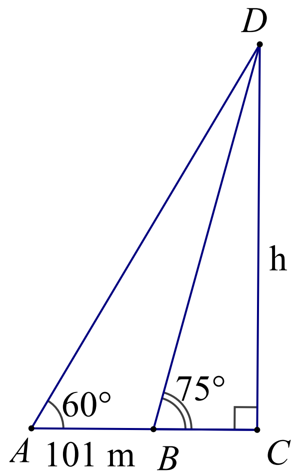
$BH = AH.\tan BAH = 45.\tan 4^\circ = 3{,}15\ (m)$

Vậy khoảng cách từ vị trí chạm đất đến chân tháp là gần $3{,}15\ (m)$.

Bài toán 16. Trong lần đến tham quan tháp Eiffel (ở Thủ đô Paris, Pháp), bạn Vân muốn ước tính độ cao của tháp. Sau khi quan sát, bạn Vân đã minh hoạ lại kết quả đo đạc ở hình vẽ dưới đây. Em hãy giúp bạn Vân tính độ cao h của tháp Eiffel theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Hình 1



Hình 2

Lời giải

Xem hình vẽ 2

Ta có tam giác ACD vuông tại C có cạnh góc vuông $DC = h$, góc nhọn $\widehat{DAC} = 60^\circ$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$AC = h.\cot DAC = h.\cot 60^\circ$

Xét tam giác BDC vuông tại C có cạnh góc vuông $CD = h$, góc nhọn $\widehat{CBD} = 75^\circ$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$BC = h.\cot 75^\circ$

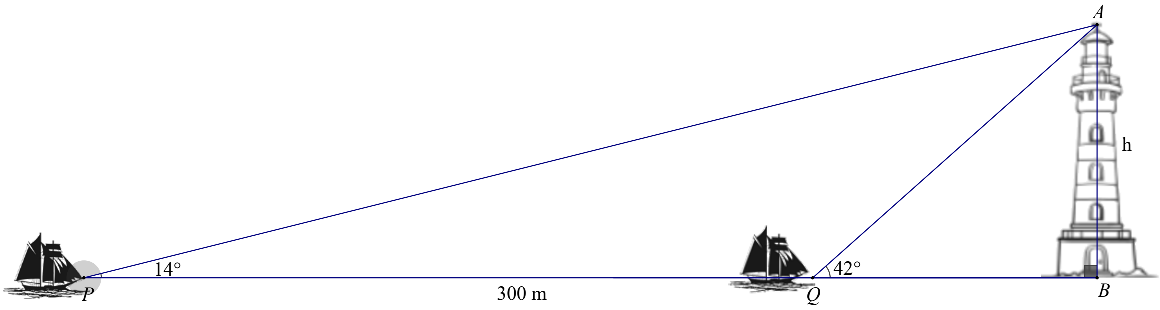
mà $AC - BC = AB$ hay $h.\cot 60^\circ - h.\cot 75^\circ = 101$

$$\Rightarrow h\left(\cot 60^\circ - \cot 75^\circ\right) = 101 \Rightarrow h = \frac{101}{\cot 60^\circ - \cot 75^\circ} = 326$$

Vậy tháp Eiffel có độ cao khoảng 326 (m).

Bài toán 17. Hai con thuyền P và Q cách nhau 300 m và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng trên bờ biển (hình vẽ dưới đây). Từ P và Q, người ta nhìn thấy tháp hải đăng dưới các góc $\widehat{BPA} = 14^\circ$ và $\widehat{BQA} = 42^\circ$. Đặt $h = AB$ là chiều cao của tháp hải đăng.

a) Tính BQ và BP theo h.



b) Tính chiều cao của tháp hải đăng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

a) Xét tam giác ABQ vuông tại B, có cạnh góc vuông $AB = h$ và gọc nhọn $\widehat{AQB} = 42^\circ$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AB = BQ.\tan AQB \Rightarrow BQ = \frac{AB}{\tan AQB} = \frac{h}{\tan 42^\circ}$$

b) Xét tam giác ABP vuông tại B, có cạnh góc vuông $AB = h$ và góc nhọn $\widehat{P} = 14^\circ$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AB = BP.\tan P \Rightarrow BP = \frac{AB}{\tan 14^\circ} = \frac{h}{\tan 14^\circ}$$

mà $BP = BQ + PQ \Rightarrow PQ = BP - BQ$ hay $300 = \dfrac{h}{\tan 14^\circ} - \dfrac{h}{\tan 42^\circ}$

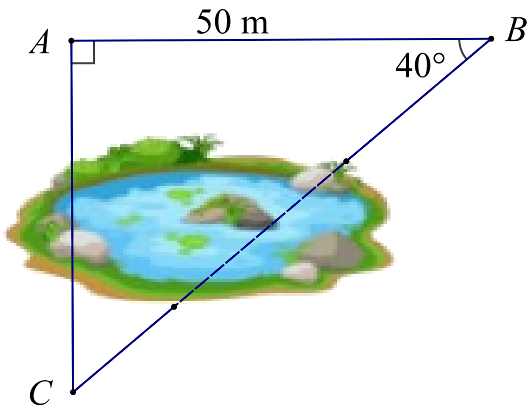
$$\Rightarrow 300 = \frac{h.\tan 42^\circ - h.\tan 14^\circ}{\tan 14^\circ.\tan 42^\circ} = \frac{h.\left(\tan 42^\circ - \tan 14^\circ\right)}{\tan 14^\circ.\tan 42^\circ}$$

$$\Rightarrow 300.\tan 14^\circ.\tan 42^\circ = h.\left(\tan 42^\circ - \tan 14^\circ\right)$$

$$\Rightarrow h = \frac{300.\tan 14^\circ.\tan 42^\circ}{\tan 42^\circ - \tan 14^\circ} \approx 103,4\ (m)$$

Vậy chiều cao của tháp hải đăng khoảng 103,4(m)

Bài toán 18. Hình vẽ bên mô tả ba vị trí A, B, C là ba đỉnh của một tam giác vuông và không đo được trực tiếp các khoảng cách từ C đến A và từ C đến B. Biết $AB = 50\ m$, $\widehat{ABC} = 40^\circ$. Tính khoảng cách CA và CB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Lời giải

Xét tam giác BAC vuông tại A, có cạnh góc vuông $AB = 50\ m$ góc nhọn $\widehat{ABC} = 40^\circ$.

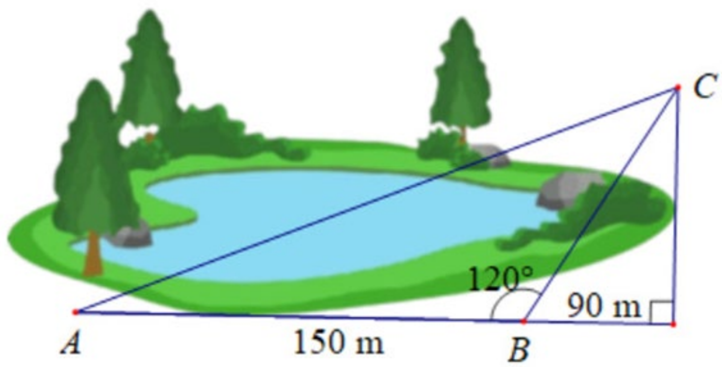
Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$AC = AB.\tan B = 50.\tan 40^\circ \approx 42\ (m)$

Lại có $AB = BC.\cos B \Rightarrow BC = \dfrac{AB}{\cos B} = \dfrac{50}{\cos 40^\circ} \approx 65\ (m)$

Vậy các khoảng cách CA = 42(m) CB = 65 (m).

Bài toán 19. Một bạn muốn tính khoảng cách giữa hai điểm A, B ở hai bên hồ nước. Biết rằng các khoảng cách từ một điểm C đến A và đến B là $CA = 90\ m$, $CB = 150\ m$ và $\widehat{ACB} = 120^\circ$ (hình vẽ bên). Hãy tính AB giúp bạn.



Lời giải

Ta có $\widehat{ACB} + \widehat{ACH} = 180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{ACH} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Trong tam giác vuông AHC có cạnh huyền $AC = 90\ m$, góc nhọn $\widehat{ACH} = 60^\circ$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$AH = AC.\sin ACH = 90.\sin 60^\circ = 45\sqrt{3} \approx 77,9\ (m)$

$CH = AC.\cos ACH = 90.\cos 60^\circ = 45\ (m)$

Cách khác:

Có thể xét ΔAHC vuông tại H có $\widehat{CAH} = 90^\circ - \widehat{ACH} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Mà cạnh huyền $90\ m \Rightarrow CH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}.90 = 45\ (m)$

Khi đó $BH = BC + CH = 150 + 45 = 195\ (m)$

Xét tam giác AHB vuông tại H có hai cạnh góc vuông $AH \approx 77,9\ (m)$, $BH = 195\ (m)$

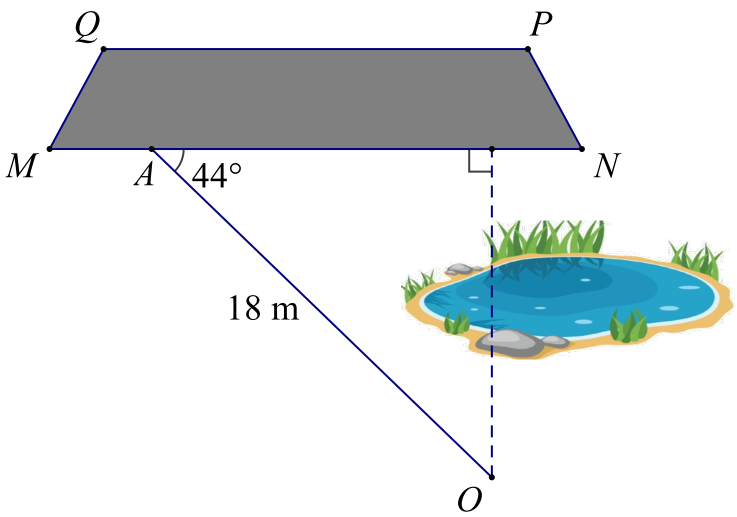
Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH = BH.\tan B \Rightarrow \tan B = \frac{AH}{BH} \approx \frac{77,9}{195} \approx 21^\circ 46'$$

Lại có $AH = AB.\sin B \Rightarrow AB = \dfrac{AH}{\sin B} \approx \dfrac{77,9}{\sin 21^\circ 46'} \approx 210\ (m)$

Nhận xét: *Tính AB ta có thể dùng định lí Pythagore với tam giác vuông khi đã biết hai cạnh góc vuông là* $AH \approx 77,9\ (m)$, $BH = 195\ (m)$.

Bài toán 20. Trong công việc, người ta cần ước lượng khoảng cách từ vị trí O đến khu đất có dạng hình thang $MNPQ$ nhưng không thể đo được trực tiếp, khoảng cách đó được tính bằng khoảng cách từ O đến đường thẳng MN. Người ta chọn vị trí A ở đáy MN và đo được $OA = 18\ m$, $\widehat{OAN} = 44^\circ$ (hình vẽ bên). Tính khoảng cách từ vị trí O đến khu đất (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Lời giải

Gọi khoảng cách từ O đến vị trí khu đất là H.

Xét tam giác AOH vuông tại H có cạnh huyền $AO = 18\ m$, góc nhọn $\widehat{HAO} = 44^\circ$.

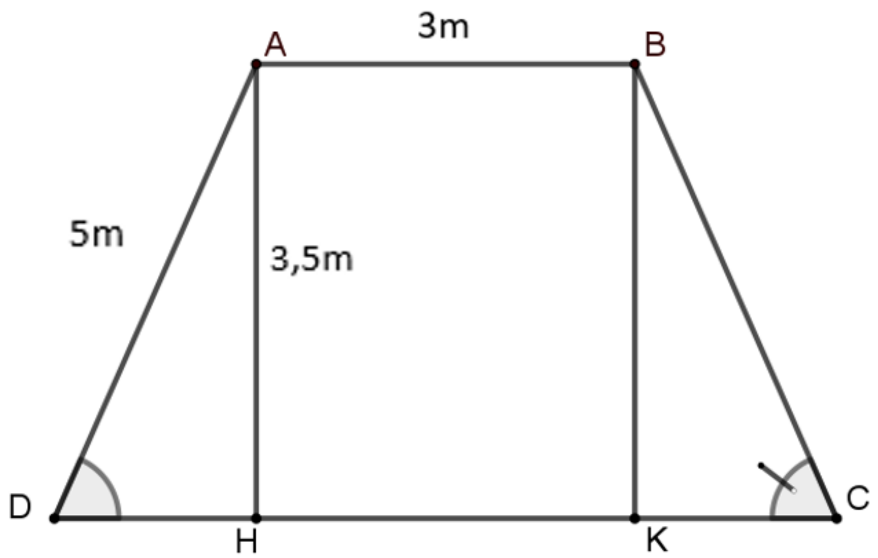
Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông,

Ta có: $OH = OA.\sin A$

$= 18.\sin 44^\circ \approx 12,5\ (m)$.

Bài toán 21. Mặt cắt ngang của một đập ngăn nước có dạng hình thang $ABCD$ (hình vẽ bên). Chiều rộng của mặt trên AB của đập là $3\ m$. Độ dốc của sườn AD, tức là $\tan D = 1,25$. Độ dốc của sườn BC

, tức là $\tan C = 1,5$. Chiều cao của đập là $3,5\ m$. Hãy tính chiều rộng CD của chân đập, chiều dài của các sườn AD và BC (làm tròn đến dm).



Lời giải

Gọi AH là chiều cao của đập $AH = 3,5\ m$

Xét tam giác AHD vuông tại H có cạnh góc vuông có $AH = 3,5\ m$ và độ dốc của sườn AD tức là $\tan D = 1,25$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH = DH.\tan D \Rightarrow DH = \frac{AH}{\tan D} = \frac{3,5}{1,25} = 2,8\ (m)$$

Kẻ đường cao BK của hình thang $ABCD$ ta có tứ giác $ABKH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BK = AH = 3,5\ (m)$ và $HK = AB = 3\ (m)$.

Xét tam giác BKC vuông tại K có cạnh góc vuông $BK = 3,5\ m$, $\tan C = 1,5$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BK = KC.\tan C \Rightarrow KC = \frac{BK}{\tan D} = \frac{3,5}{1,5} \approx 2,3\ (m)$$

Do đó $CD = DH + HK + KC \approx 2,8 + 3 + 2,3 \approx 8,1\ (m)$.

Ta có $\tan D = 1,25 \Rightarrow \widehat{D} = 51^\circ 20'$.

Xét tam giác AHD vuông tại H.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH = AD.\sin D \Rightarrow AD = \frac{AH}{\sin D} = \frac{3,5}{\sin 51^\circ 20'} \approx 4,5\ (m)$$

Tương tự $\tan C = 1,5 \Rightarrow \widehat{C} \approx 56^\circ 18'$

Tam giác BKC vuông tại K.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BK = BC.\sin C \Rightarrow BC = \frac{BK}{\sin C} = \frac{3,5}{\sin 56^\circ 18'} \approx 4,2\,(m)$$

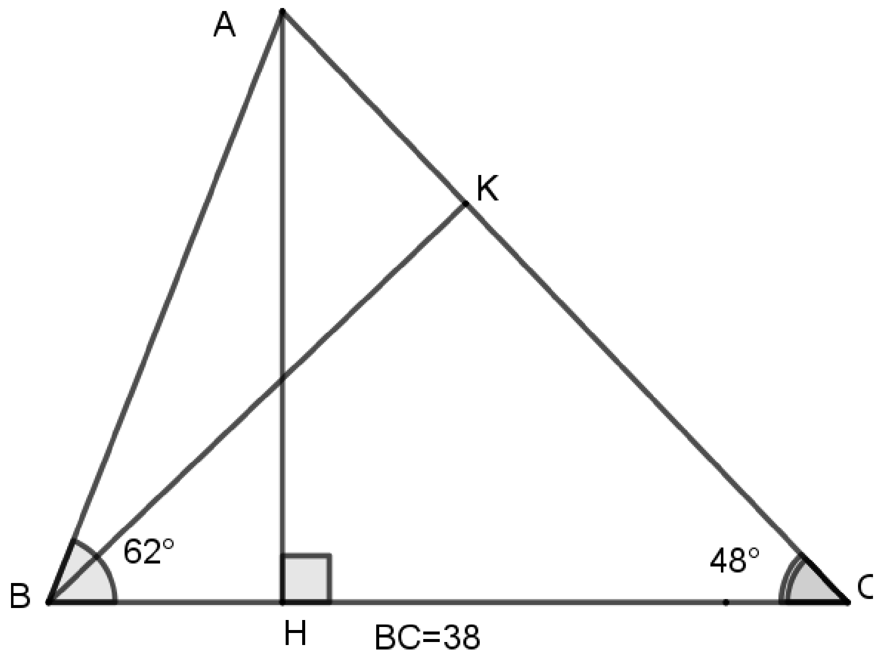
Vậy chiều rộng của chân đập khoảng $8,1\,(m) = 81\,dm$.

Chiều dài của sườn AD khoảng $4,5\,(m) = 45\,dm$.

Chiều dài của sườn BC khoảng $4,2\,(m) = 42\,dm$.

IV. Tính các yếu tố góc, cạnh và diện tích các hình

Bài toán 22. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 62^\circ$; $\widehat{C} = 48^\circ$; $BC = 38\,cm$. Tính chiều cao AH của tam giác ABC. (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải

Kẻ $BK \perp AC$. Xét tam giác vuông BKC vuông tại K có cạnh huyền $BC = 38\,cm$, góc nhọn $\widehat{C} = 48^\circ$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

Ta có $BK = BC.\sin C = 38.\sin 48^\circ \approx 28,24\,(m)$

Và $CK = BC.\cos C = 38.\cos 48^\circ \approx 25,43\,(m)$

Xét tam giác vuông AKB có:

$\widehat{A} = 180^\circ - \left(\widehat{B} + \widehat{C}\right)$

$= 180^\circ - (62^\circ + 48^\circ) = 70^\circ$

Nên $AK = BK.\cot A \approx 28,24.\cot 70^\circ$

$\approx 28,24.\tan 20^\circ \approx 10,28\,(cm)$

Vậy $AC = AK + KC \approx 10,28 + 25,43 \approx 35,71\,(cm)$

Ta có $AH.BC = AC.BK$ (hệ thức lượng)

$\Rightarrow AH = \dfrac{AC.BK}{BC} \approx \dfrac{35,71.28,24}{38} \approx 26,54\ (cm)$

Cách khác:

Đặt $AH = x$. Xét tam giác vuông AHB theo hệ thức lượng ta có:

$HB = x.\cot B$

tương tự với $\Delta AHC : HC = x.\cot C$

mà $BC = HB + HC$ hay $38 = x.\cot B + x.\cot C$

$\Rightarrow 38 = x.\left(\cot 62^\circ + \cot 48^\circ\right)$

$\Rightarrow 38 = x.\left(\tan 28^\circ + \tan 42^\circ\right)$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{38}{\tan 28^\circ + \tan 42^\circ} \approx 26,54\ (cm)$

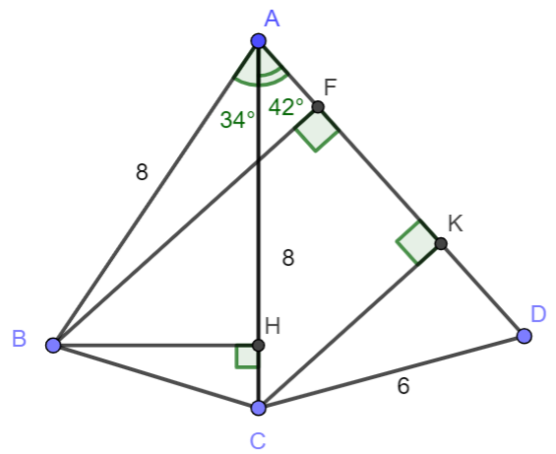
Vậy $AH \approx 26,54\ (cm)$

Bài toán 23. Cho hình vẽ bên biết $AB = AC = 8cm$; $\widehat{BAC} = 34°$; $\widehat{CAD} = 42°$. Tính:

a) Độ dài cạnh BC

b) Số đo góc $\widehat{ADC}$

c) Khoảng cách từ B đến cạnh AD.



Lời giải

a) Ta có ΔABC cân tại A $(AB = AC = 8)$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \dfrac{180° - 34°}{2} = 73°$.

Kẻ $BH \perp AC$ ta có ΔAHB vuông tại H, có cạnh huyền $AB = 8$, góc nhọn $\widehat{BAH} = 34°$

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$BH = AB.\sin A = 8.\sin 34° \approx 4,47\ (cm)$

Xét tam giác vuông BHC, có cạnh góc vuông $BH = 4,47$, góc nhọn $\widehat{C} = 73°$

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$BH = BC.\sin C \Rightarrow BC = \dfrac{BH}{\sin C} = \dfrac{4,47}{\sin 73^\circ} \approx 4,68\ (cm)$

b) Kẻ $CK \perp AD$ xét tam giác vuông AKC có $KC = AC.\sin A = 8.\sin 42^\circ \approx 5,35\ (cm)$.

Xét tam giác vuông CKD ta có $\sin D = \dfrac{CK}{CD} = \dfrac{5,35}{6} \approx 0,89$

$\Rightarrow \widehat{D} \approx 63^\circ 7'$

c) Kẻ $BF \perp AD$.

Xét tam giác vuông AFB có $AB = 8\ (cm)$;

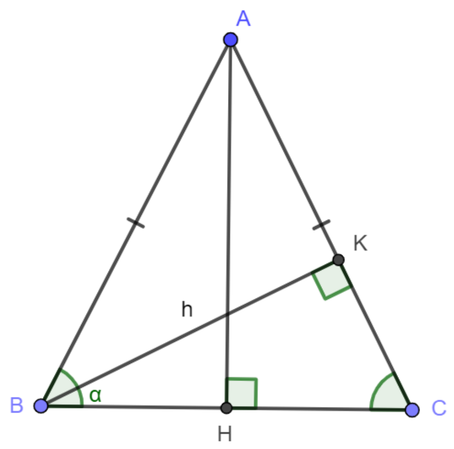
$\widehat{BAF} = \widehat{BAC} + \widehat{CAF} = 34^\circ + 42^\circ = 76^\circ$

Ta có $BF = AB.\sin 76^\circ = 8.\sin 76^\circ \approx 7,76\ (cm)$.

Bài toán 24. Cho ΔABC cân tại A, đường cao $BK = h$ và $\widehat{ABC} = \alpha$.

Tính các cạnh của tam giác theo h và α.

Lời giải



ΔABC cân tại A nên $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \alpha$

Lại có ΔBKC vuông tại K có $\widehat{C} = \alpha$, cạnh góc vuông $BK = h$, ta có:

$BK = BC.\sin A$

$\Rightarrow BC = \dfrac{BK}{\sin \alpha} = \dfrac{h}{\sin \alpha}$

Kẻ đường cao AH của tam giác ABC ta có AH cũng đồng thời là đường trung tuyến:

$HB = HC = \dfrac{h}{2\sin \alpha}$

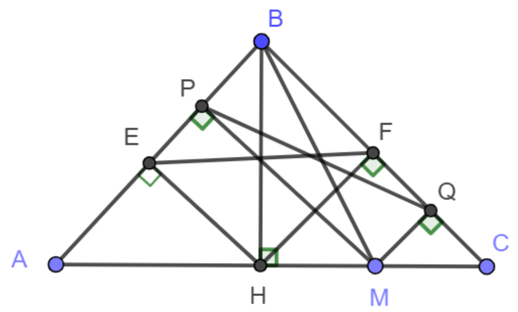
Bài toán 25. Cho ΔABC có đường cao BH, biết $AB = 40cm;\ AC = 58cm;\ BC = 42cm.$

a) Chứng minh rằng ΔABC vuông.

b) Kẻ HE vuông góc với BC. Tính BH, BE, BF và diện tích của tứ giác $EFCA$.

c) Lấy M bất kì trên cạnh AC. Gọi hình chiếu của M M trên AB và AC lần lượt là P và Q. Chứng minh $PQ = BM$. Từ đó suy ra vị trí M để PQ có độ dài nhỏ nhất (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



a) Ta có $58^2 = 40^2 + 42^2$ $(AC^2 = AB^2 + BC^2)$

Theo định lý Pythagore đảo thì ΔABC vuông tại B.

b) Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AB = \frac{1}{2}BH.AC$

$\Rightarrow BH = \frac{AB.BC}{AC} = \frac{40.42}{58} \approx 28,97\ (cm).$

Xét ΔAHB và ΔBHE có:

$\widehat{BHA} = \widehat{BEH} = 90°\ (gt)$, $\widehat{ABH}$ chung

Do đó $\Delta AHB \backsim \Delta BHE\ (g.g)$

$\Rightarrow \frac{BH}{BE} = \frac{AB}{BH} \Rightarrow BH^2 = AB.BE$

$\Rightarrow BE = \frac{BH^2}{AB} \approx \frac{(28,97)^2}{40} \approx 20,98\ (cm).$

Tương tự ta có $\Delta BFH \backsim \Delta BHC\ (g.g)$

$\Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BF}{BH} \Rightarrow BH^2 = BC.BF \Rightarrow BF = \frac{BH^2}{BC} \approx \frac{(28,97)^2}{42} \approx 19,98\ (cm).$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}40.42 = 840\ (cm^2)$

Và $S_{BEF} = \frac{1}{2}BE.BF \approx \frac{1}{2}20,98.19,98 \approx 209,58\ (cm^2)$

Do đó $S_{EFCA} = S_{ABC} - S_{BEF} = 840 - 209,58 \approx 630,42\ (cm^2)$.

c) Dễ thấy tứ giác $BQMP$ là hình chữ nhật (có ba góc vuông)

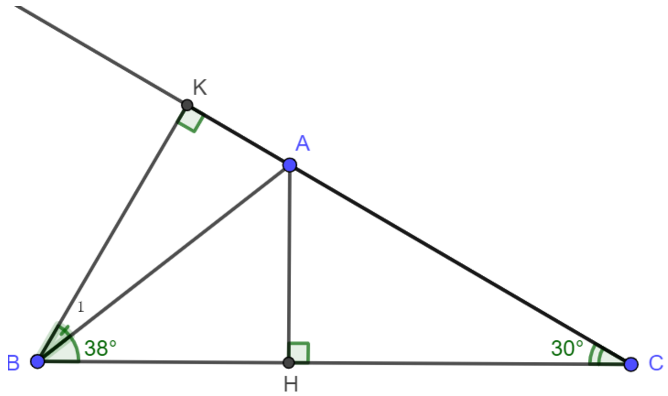
$\Rightarrow PQ = BM$

PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ BM nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ BM là khoảng cách từ B đến AC.

$\Leftrightarrow$ M trùng với H (Là chân đường vuông góc kẻ từ B đến BC).

Bài toán 26. Cho ΔABC có $BC = 11cm, \widehat{ABC} = 38°, \widehat{ACB} = 30°$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC. Hãy tính AH, AC.

Lời giải



Kẻ BK vuông góc với đường thẳng CA ta có ΔBKC vuông tại K, có cạnh huyền $BC = 11cm$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$BK = BC.\sin C$

$= 11.\sin 30° = 5,5\ (cm)$.

ΔBKC vuông có $\widehat{C} = 30°$

$\Rightarrow \widehat{KBC} = 90° - 30° = 60°$

$\Rightarrow \widehat{KBA} = 60° - 38° = 22°$

Xét tam giác vuông BKA có

$BK = AB.\cos B_1$

$\Rightarrow AB = \dfrac{BK}{\cos 22°} = \dfrac{5,5}{\cos 22°} \approx 5,933\ (cm)$.

Xét tam giác vuông AHB vuông tại H, có $\widehat{ABH} = 38°$ và cạnh huyền $AB = 5,93\ (cm)$.

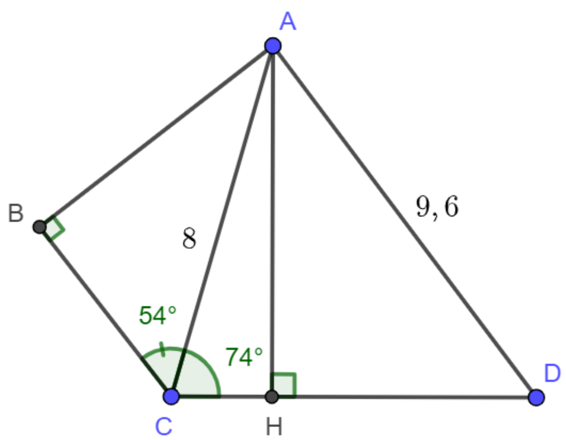
Ta có $AH = AB.\sin B \approx 5,93.\sin 38° \approx 3,65\ (cm)$

Xét tam giác vuông AHC có $\widehat{C} = 30° \Rightarrow AC = 2AH \approx 2.3,65 \approx 7,3\ (cm)$.

Bài toán 27. Cho hình vẽ bên biết $AC = 8\ (cm)$, $AD = 9,6\ (cm)$, $\widehat{ABC} = 90°$ $\widehat{ACB} = 54°$; $\widehat{ACD} = 74°$

Tính AB và $\widehat{ADC}$ (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



Ta có tam giác ABC vuông tại B (gt). Áp dụng hệ thức $b = a.\sin C$ ta có

$AB = AC.\sin \widehat{ACB} = 8.\sin 54° \approx 6,47\ (cm)$.

Kẻ $AH \perp CD$. Xét tam giác vuông AHC ta có:

$$AH = AC.\sin\widehat{ACH}$$
$$= 8.\sin 74° \approx 7,69\,(cm)$$

Xét tam giác vuông AHD ta có

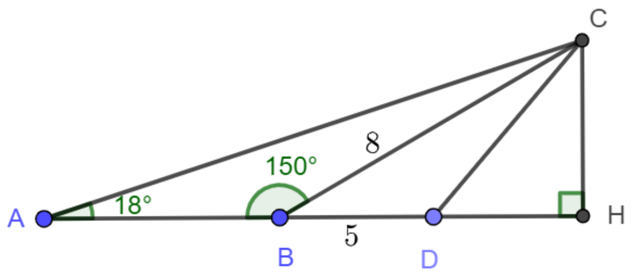
$$\sin\widehat{ADC} = \frac{AH}{AD} \approx \frac{7,69}{9,6} \approx 0,801$$

$$\Rightarrow \widehat{ADC} \approx 53°$$

Bài toán 28. Cho hình vẽ bên biết : $\widehat{CAD} = 18°; \widehat{ABC} = 150°,\ BC = 8cm,\ BD = 5cm.$ Hãy tính:

a) AB.

b) Diện tích tam giác ACD.



Lời giải

a) Kẻ CH vuông góc với đường thẳng AD. Xét tam giác vuông BHC.

Áp dụng hệ thức $b = a.\sin B$ ta có: $CH = CB.\sin\widehat{CBH} = 8.\sin 30° = 4\,(cm)$

$\left(\widehat{CBH} = 180° - \widehat{ABC} = 180° - 150° = 30°\right)$

Lại có $CH = BH.\tan 30° \Rightarrow BH = \dfrac{CH}{\tan 30°} = \dfrac{4}{\tan 30°} \approx 6,93\,(cm)$

Xét tam giác vuông AHC có: $CH = AH.\tan A$

$$\Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan A} = \frac{4}{\tan 18°} \approx 12,35$$

$$\Rightarrow AB = AH - BH \approx 12,35 - 6,93 \approx 5,41$$

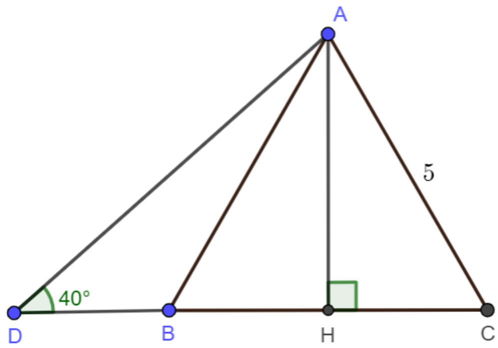
b) $S_{ACD} = \dfrac{1}{2}CH.AD$

Ta có $AD = AB + BD = 5,41 + 5 = 10,41\,(cm)$

Vậy $S_{ACD} = \dfrac{1}{2}4.10,41 \approx 20,8\,(cm^2)$.

Bài toán 29. Cho hình vẽ biết, ΔABC là tam giác đều cạnh 5cm, $\widehat{ADC} = 40°$. Tính AD và BD

Lời giải



$*$ Kẻ đường cao AH của tam giác đều ABC có cạnh là 5 . Vậy $AH = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}(cm)$.

Xét tam giác vuông AHD

Áp dụng hệ thức $b = a.\sin D$ ta có: $AH = AD.\sin 40°$

$\Delta ABC \Rightarrow AD = \dfrac{AH}{\sin 40°} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} : \sin 40° \approx 6,74\,(cm)$

$*$ đều nên đường cao AH cũng đồng thời là đường trung tuyến

Hay $HB = HC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{5}{2} = 2,5\,(cm)$

Lại có: $DH = AH.\cot D = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \cot 40° = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 50° \approx 5,16.$

Vậy $BD = DH - BH \approx 5,16 - 2,5 \approx 2,66\,(cm)$.

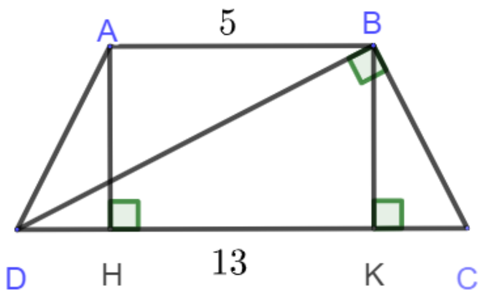
Bài toán 30. Cho hình thang cân $ABCD\,(AB\,//\,CD)$ biết $AB = 5cm, CD = 13cm$ và $BD \perp BC$

a) Tính độ dài đường cao BH của hình thang.

b) Tính diện tích hình thang.

c) Tính các góc của hình thang.

Lời giải



a) Kẻ $AK \perp CD$ ta có $\Delta AKD = \Delta BHC\,(ch.gn)$

$\Rightarrow DK = CH$

Lại có $ABHK$ là hình bình hành có một góc vuông nên $ABHK$ là hình chữ nhật
$\Rightarrow HK = AB = 5\,(cm)$.

$\Rightarrow DK = CH = \dfrac{DC - HK}{2} = \dfrac{13 - 5}{2} = 4\,(cm)$

$\Rightarrow DH = DK + HK = 4 + 5 = 9(cm).$

Xét ΔBHD và ΔBHC có:

$\widehat{BHD} = \widehat{BHC} = 90°, \widehat{DBH} = \widehat{C}$ (cùng phụ với $\widehat{BDH}$)

$\Rightarrow \Delta BHD \backsim \Delta CHB(g.g) \Rightarrow \dfrac{BH}{HD} = \dfrac{CH}{BH}$

$\Rightarrow BH^2 = DH.CH = 9.4 = 36$

$\Rightarrow BH = \sqrt{36} = 6(cm).$

b) Gọi S_{ABCD} là diện tích hình thang, ta có:

$S_{ABCD} = \dfrac{(AB + CD).BH}{2} = \dfrac{(5+13).6}{2} = 54(cm^2)$

c) ΔBHC có $\tan C = \dfrac{BH}{CH} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \widehat{C} \approx 56°19'$

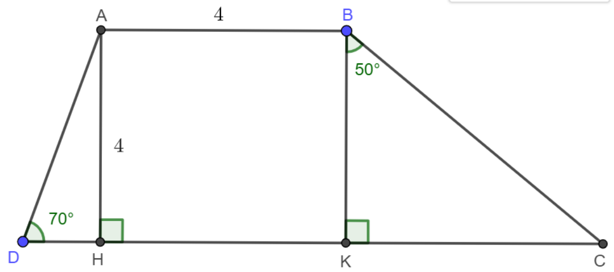
Vì $ABCD$ là hình thang cân (gt) $\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{C} \approx 56°19'$

Do đó $\widehat{DAB} = \widehat{CBA} = 180° - 56°19' = 123°41'$

Bài toán 31. Cho hình thang $ABCD(AB \,//\, CD)$ (xem hình vẽ).

Biết $AB = 4cm, AH = 4cm, \widehat{D} = 70°, \widehat{KBC} = 50°$. Tính BC và CD

Lời giải



Dễ thấy $ABKH$ là hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau nên $ABKH$ là hình vuông.

Ta có $BK = AH = 4(cm)$

Xét ΔBKC vuông tại K, có cạnh góc vuông $BK = 4(cm)$, góc nhọn $\widehat{CBK} = 50°$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$BK = BC.\cos B \Rightarrow BC = \dfrac{BK}{\cos B} = \dfrac{4}{\cos 50°} \approx 6,22(cm)$

Và $KC = BK.\tan \widehat{KBC} = 4.\tan 50° \approx 4,77(cm)$

Xét ΔAHD vuông tại H, có cạnh góc vuông $AH = 4cm$, góc nhọn $\widehat{D} = 70°$

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

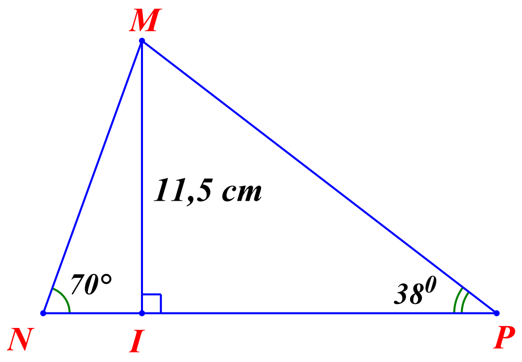
$AH = DH.\tan 70° \Rightarrow DH = \dfrac{AH}{\tan 70°} = \dfrac{4}{\tan 70°} \approx 1,46(cm)$

Vậy $DC = DH + HK + KC \approx 1,46 + 4 + 4,77 \approx 10,23(cm).$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

Bài toán 1. Cho tam giác MNP có $\widehat{N}=70^{\circ},\widehat{P}=38^{\circ}$, đường cao $MI=11,5\,cm$, Tính độ dài của cạnh NP của tam giác MNP (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải



Xét tam giác MIN vuông tại I, có

Cạnh góc vuông $MI=11,5\,cm$ và $\widehat{N}=70^{\circ}$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$MI=NI\cdot\tan N\Rightarrow NI=\frac{MI}{\tan N}=\frac{11,5}{\tan 70^{\circ}}\approx 4,2(cm)$$

Tương tự với tam giác vvông MIP, ta có: $MI=PI\cdot\tan P\Rightarrow PI=\dfrac{MI}{\tan P}=\dfrac{11,5}{\tan 38^{\circ}}\approx 14,7(cm)$

$\Rightarrow NP=NI+PI\approx 4,2+14,7\approx 18,9\,(cm)$

Bài toán 2. Xét tam giác vuông có một góc nhọn bằng hai lần góc nhọn còn lại. Hỏi các tam giác đó có đồng dạng với nhau không? Tính sin và *cos* của góc nhọn lớn hơn.

Lời giải

Xét ΔABC vuông tại A. Ta có $\widehat{B}+\widehat{C}=90^{\circ}$ và giả sử $\widehat{B}=2\widehat{C}$

$\Rightarrow\widehat{B}=60^{\circ}$ và $\widehat{C}=30^{\circ}$.

Xét $\Delta A'B'C'$ vuông tại A'. Ta có $\widehat{B'}+\widehat{C'}=90^{\circ}$ và giả sử $\widehat{B'}=2\widehat{C'}$

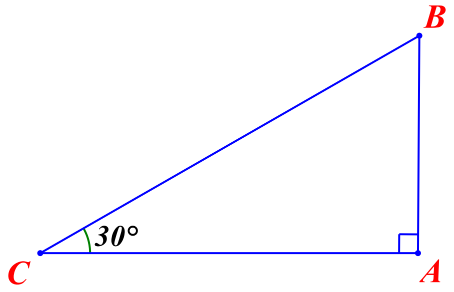
$\Rightarrow\widehat{B'}=60^{\circ}$ và $\widehat{C'}=30^{\circ}$.

Vậy ΔABC và $\Delta A'B'C'$ đồng dạng với nhau.

Ta có $\sin 60^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\cos 60^{\circ}=\dfrac{1}{2}$.

Bài toán 3. Một chiếc máy bay bay lên với tốc độ $50\,km/h$. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang môt góc 30°. Hỏi sau 3 phút kể tờ lúc cát cánh, máy bay cách mặt đất bao nhiêu ki lô mét theo phương thẳng đứng?

Lời giải



(Xem hình vẽ bên).

Đổi: 3 phút $=\dfrac{1}{20}$ giờ.

Quãng đường bay lên CB gọi là S.

Ta có: $s=\text{v.t}=450\cdot\dfrac{1}{20}=22,5\,\text{km}$.

Xét tam giác ABC vuông tại A có cạnh huyền $CB=22,5$, góc nhọn $\widehat{C}=30^\circ$.

Theo định lí vê hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

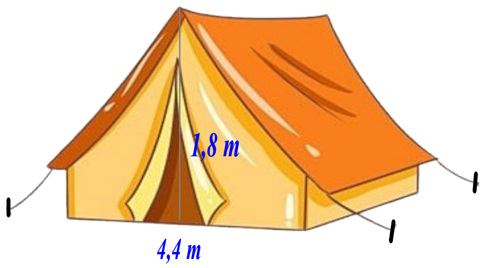
$AB=BC\cdot\sin C=22,5\cdot\sin 30^\circ=11,25\,(km)$

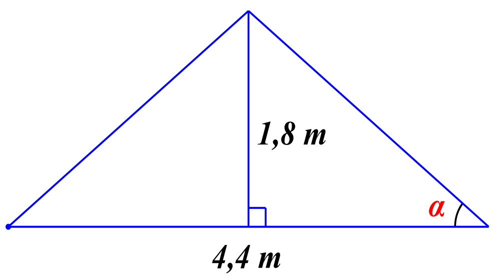
Vậy sau 3 phút kể từ lúc cất cánh, máy bay cách mặt đất $11,25\,\text{km}$ theo phương thẳng đứng.

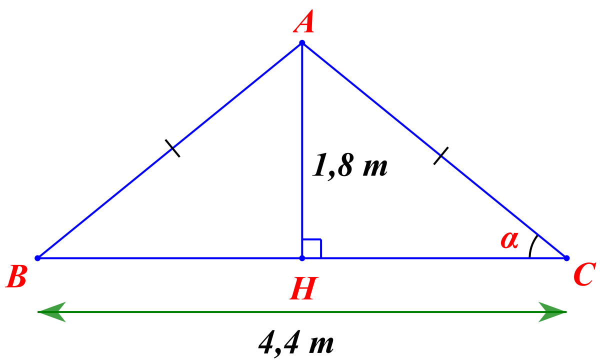
Bài toán 4. Hình vẽ dưới đây là mô hình của một túp lều. Tìm góc α giữa cạnh mái lều và mặt đất (làm tròn kết quả đến phút).

Lời giải

(Xem hình vẽ bên).







Tam giác ABC cân tại A nên đường cao AH đồng thời cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow HB = HC = 4,4 : 2 = 2,2(m)$

Xét tam giác AHC vuông tai H có

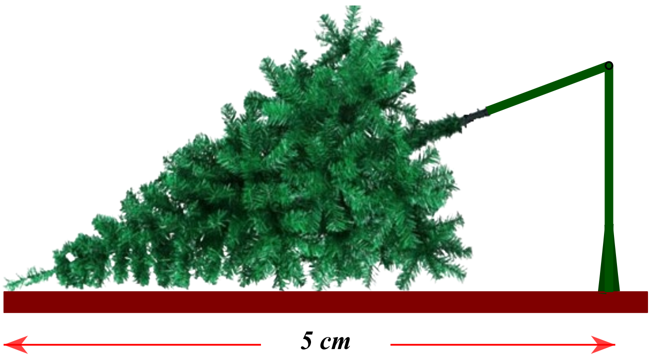
Cạnh hai góc vuông $HC = 2,2(m)$ và $AH = 1,8(m)$.

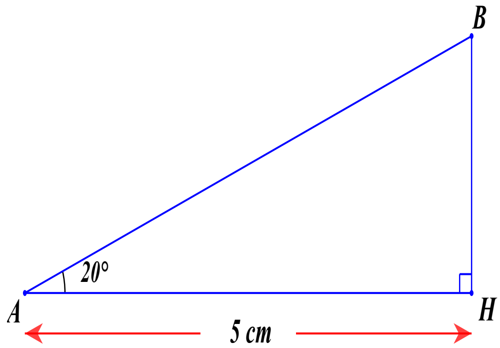
Ta có: $\tan\alpha = \frac{AH}{HC} = \frac{1,8}{2,2} \Rightarrow \alpha \approx 39^\circ 17^\circ$

Vậy góc α giữa cạnh mái lều và mặt đất xấp xỉ $39^\circ 17'$.

Bài toán 4. Một cây cao bi gãy, ngọn cây đổ xuống mặt đất. Ba điểm: gốc cây, điểm gãy, ngọn cây tạo thành một tam giác vuông. Đoạn cây gãy tạo với mặt đất góc 20° và chắn ngang lối đi một đoạn $5\,m$ (hình vẽ). Hỏi trước khi bị gãy, cây cao khoảng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải





Lời giải

(Xem hình vẽ trên).

Trước khi bị gãy độ dài của cây là tổng của hai đoạn thẳng $HB + BA$. Xét tam giác AHB vuông tại H có cạnh góc vuông $AH = 5\,m, \widehat{A} = 20^0$. Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$HB = AH \cdot \tan A = 5 \cdot \tan 20^0 \approx 1,8(m)$

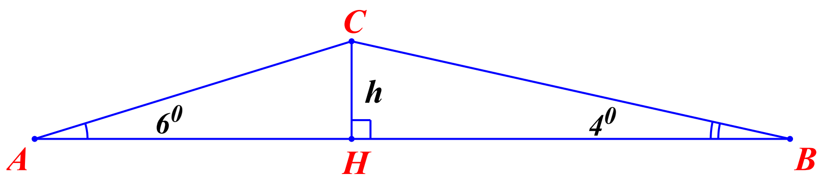
Lại có $AH = AB \cdot \cos A \Rightarrow AB = \frac{AH}{\cos A} = \frac{5}{\cos 20^\circ} \approx 5,3(m)$

Vậy độ dài của cây trước khi bị gãy là: $1,8 + 5,3 \approx 7,1(m)$.

Bài toán 6. Lúc 6 giờ sáng, bạn An đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B). Khi đi từ A đến B, An phải đi đoạn lên dốc AC và đoạn xuống dốc CB (hình vẽ). Biết $AB = 762\,m, \widehat{A} = 6^0, \widehat{B} = 4^0$.

a) Tính chiều cao h của con dốc.

b) Hỏi bạn An đến trường lúc mấy giơ? Biết rằng tốc độ khi lên dốc là $4\ km/h$ và tốc độ khi xuống dốc là $19\,km/h$.



Lời giải

a) (Xem hình vẽ bên).

Xét tam giác AHC vuông tại H có cạnh góc vuông $CH = h$, góc nhọn $\widehat{A} = 6^0$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$AH = h.\cot A = h.\cot 6^0$

$BH = h.\cot B = h.\cot 4^0$.

$\Rightarrow AB = AH + BH = h.\cot 6^0 + h.\cot 4^0 = h\left(\cot 6^0 + \cot 4^0\right)$

$$\Rightarrow h = \frac{AB}{\cos 6^0 + \cos 4^0} = \frac{762}{\frac{1}{\tan 6^0} + \frac{1}{\tan 4^0}} \approx 32$$

Vậy chiều cao h của con dốc là $32(m)$.

b) Tam giác AHC vuông tại H có cạnh góc vuông $CH = 32\,m$ và góc nhon $\widehat{A} = 6^0$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$CH = AC\sin A \Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin A} = \frac{32}{\sin 6^\circ} \approx 306(m)$$

Tương tự với ΔBHC ta có: $BC = \dfrac{CH}{\sin 4^0} = \dfrac{32}{\sin 4^0} \approx 459(m)$

Đổi: $306\,m \approx 0,306(km); 459\,m \approx 0,459(km)$

Thời gian lên dốc là: $\dfrac{0,306}{4} \approx 0,077$ (giơ)

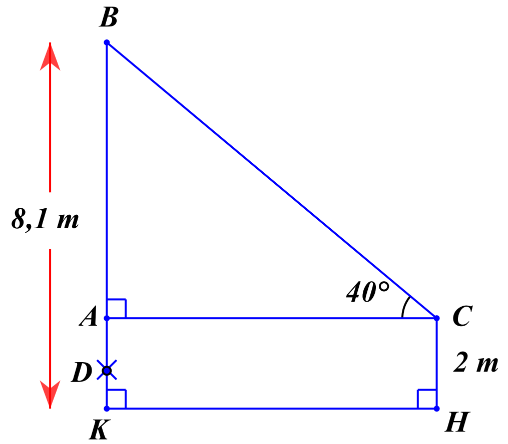
Thời gian xuống dốc là: $\dfrac{0,459}{19} \approx 0,024$ (giờ)

Thời gian lên và xuống dốc là: $0,077 + 0,024 \approx 0,101$ (giờ) ≈ 6 (phút)

Bạn An xuất phát từ nhà lúc 6 giờ sáng, khi đến trường là $6h6$ phút.

Bài toán 7. Một cần cẩu có góc nghiêng so với mặt đất nằm ngang là 40^0. Vậy muốn nâng một vật nặng lên cao $8,1m$ thì cần cẩu phải dài bao nhiêu? Biết chiều cao của xe là $2,6\,m$, chiều cao của vật nặng là $1m$ (xem hình vẽ) (kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân).

Lời giải



(Xem hình vẽ).

Gọi DK là chiều cao của vật nặng.

Khi đó BD là độ cao cần nâng $BD = 8,1$ (m).

Dễ thấy tứ giác $ACHK$ là hình chữ nhật

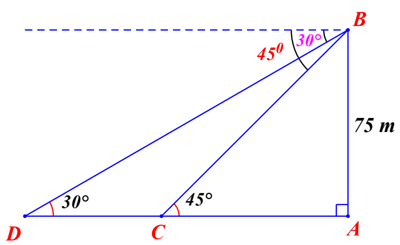
nên $AK = CH = 2,6(m)$

$\Rightarrow AD = AK - DK = 2,6 - 1 = 1,6(m)$

$\Rightarrow AB = BD - AD = 8,1 - 1,6 = 6,5(m)$

Bài toán 8. (Xem hình vẽ). Từ trên một ngọn hải đăng cao $75\,m$, người ta quan sát hai lần thấy một chiếc thuyền đang hướng vế phía hải đăng với góc hạ lần lượt là 30° và 45°. Hỏi chiếc thuyền đi được bao nhiêu mét giữa hai lần quan sát.

Lời giải



(Xem hình vẽ).

Lần 1: Quan sát tại điểm D vớ góc hạ 30°.

Lần 2: Quan sát tại điểm C với góc hạ 45° .

Do đó chiều dài quãng đường chiếc thuyền đi được giữa hai lần quan sát là độ dài CD

Xét tam giác ABD vuông tại A co cạnh góc vuông $\mathrm{AB}=75\,\mathrm{m}$, góc nhọn $\widehat{\mathrm{D}}=30^\circ$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}\tan \mathrm{D} \Rightarrow \mathrm{AD}=\frac{\mathrm{AB}}{\tan \mathrm{D}}=\frac{75}{\tan 30^\circ}\approx 75\sqrt{3}(\mathrm{m})$$

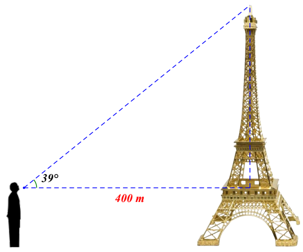
Tương tự với ABC ta có:

$$AC=\frac{AB}{\tan C}=\frac{75}{\tan 45^\circ}\approx 75(\mathrm{m})$$

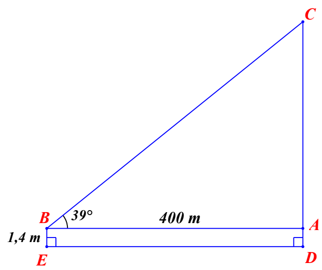
Vây $CD=AD-AC$

$=75\sqrt{3}-75\approx 55(\mathrm{m})$.

Bài toán 9. Một người có mát cách mặt đất $1,4\,\mathrm{m}$, đứng cách tháp Eiffel $400\,\mathrm{m}$ nhìn thấy đỉnh tháp vơi góc nâng 39°. Tính chiều cao của tháp (làm tròn kết quả đến mét).



Lời giải



(Xem hình vẽ).

Xét tam giác ABC vuông tại A có cạnh góc vuông $\mathrm{AB}=400\,\mathrm{m}$, góc nhọn $\widehat{B}=39^\circ$

Theo định lí v hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có

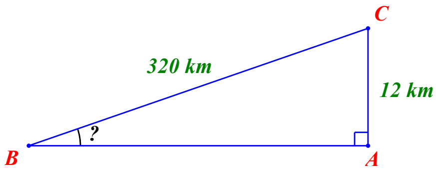
$$AC=AB\tan B=400.\tan 39^0\approx 324(m)$$

Chiều cao của tháp:

$$CD=AC+AD=324+1,4\approx 325(m)$$

Bài toán 10. Một máy bay dang bay ở độ cao $12\,\mathrm{km}$. Khi máy bay hạ cánh xuống mặt đất thì đường đi của máy bay tạo một góc nghiêng so với mặt đất. Nếu cách sân bay $320\,\mathrm{km}$ máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu (làm tròn đến phút).

Lời giải



(Xem hình vẽ).

Xét tam giác ABC vuông tại A có cạnh huyền $BC = 320\,km$, cạnh góc vuông $AC = 12\,km$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

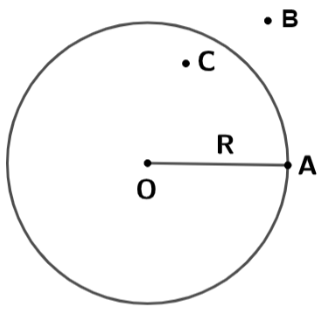
$$AC = BC\sin B \Rightarrow \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{320} \Rightarrow \hat{B} = 2^\circ 9'$$

Nếu cách sân bay $320\,km$ máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là $2^\circ 9'$.

CHƯƠNG V. ĐƯỜNG TRÒN
Bài 13. MỞ ĐẦU VỀ ĐƯỜNG TRÒN

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Đường tròn



Định nghĩa: Đường tròn tâm O bán kính R $(R > 0)$, kí hiệu là $(O;R)$, là hình gồm tất cả các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.

Kí hiệu $(O;R)$ hoặc (O)

A là một điểm của đường tròn (O) thì ta viết $A \in (O)$.

Khi đó còn nói đường tròn (O) đi qua điểm A hay điểm A nằm trên đường tròn (O).

Trên hình vẽ ta thấy:

- Điểm A nằm trên đường tròn (O).
- Điểm C nằm trong đường tròn (O).
- Điểm B nằm ngoài đường tròn (O).

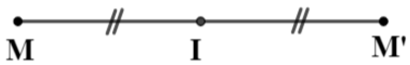
Tổng quát:

- Điểm M nằm trên đường tròn $(O;R)$ nếu $OM = R$.
- Điểm M nàm trong dương tròn $(O;R)$ nếu $OM < R$.
- Điểm M nằm ngoài đương tròn $(O;R)$ nếu $OM > R$.

II. Tính đối xứng của đường tròn

1. Đối xứng tâm

Hai điểm M và M' gọi là đối xứng tâm với nhau qua điểm I (hay qua tâm I) nếu I là trung điểm của đoạn thẳng MM'.



2. Đối xứng trục

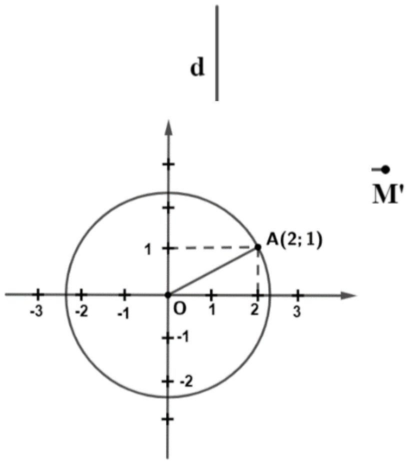
Hai điểm M và M' gọi là đối xứng trục với nhau qua đường thẳng d (hay qua trục d) nếu d là đường trung trực của doạn MM'.

III. Tâm và trục đối xứng của đường tròn

- Đường tròn là hình có tâm đối xứng, tâm của đường tròn là tâm đối xứng của nó.

- Đường tròn là hình có trục đối xứng, mỗi đường thẳng qua tâm của đường tròn là một trục đối xứng của nó.

- Đường tròn có một tâm đối xứng, nhưng có vô số trục đối xứng.



PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

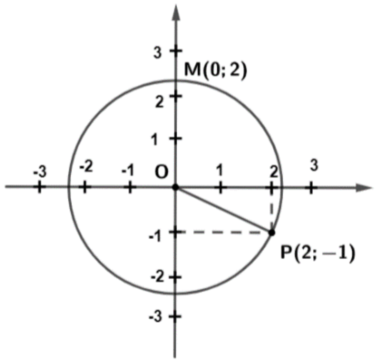
I. Xác định điểm nằm trên, nằm trong, nằm ngoài đường tròn

Bài toán 1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $M(0;2)$, $N(0;-3)$ và $P(2;-1)$. Vẽ hình và cho biết trong các điểm đã cho, điểm nào nằm trên, điểm nào nằm trong, điểm nào nằm ngoài đường tròn $(0;\sqrt{5})$? Vì sao?

Hướng dẫn: Dựng đường tròn tâm O, bán kính $\sqrt{5}$ trên mặt phẳng toạ độ (xem hình vẽ bên).

Giả sử điểm $A(2;1) \Rightarrow OA = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.

Lời giải



(Xem hình vẽ).

* Điểm $M(0;2) \Rightarrow OM = 2$ và M thuộc Oy.

* Điểm $N(0;-3) \Rightarrow ON = 3$ và N thuộc Oy.

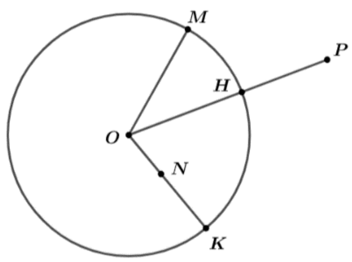
* Điểm $P(2;-1) \Rightarrow OP = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.

Ta có: $OM = 2 < \sqrt{5}$ nên M nằm trong đường tròn tâm O, bán kính $\sqrt{5}$.

$ON = 3 > \sqrt{5}$ nên N nằm ngoài $(0;\sqrt{5})$

$OP = \sqrt{5}$ nên diêm P nằm trên $(0;\sqrt{5})$.

Bài toán 2. Cho đường tròn $(O;R)$ và năm điểm M, N, P, Q, K (hình vẽ). So sánh độ dài các đoạn thẳng OM, ON, OH, OK, OP với R.



Lời giải

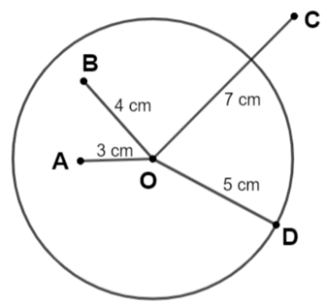
Ta có ba điểm M, H, K nằm trên đường tròn $(O;R)$ nên $OM = OH = OK = R$.

Điểm N nằm bên trong $(O;R)$ nên $ON < R$

Điểm P nằm bên ngoài $(O;R)$ nên $OP > R$.

Bài toán 3. Cho đường tròn (O), bán $5\,cm$ và bốn điểm A, B, C, D thoả mãn $OA = 3\,cm$, $OB = 4\,cm$, $OC = 7\,cm$, $OD = 5\,cm$. Hãy cho biết mỗi điểm A, B, C, D nằm trên, nằm trong hay nằm ngoài đường tròn (O).

Lời giải



$OA = 3\,\text{cm}(3 < 5)$ nên điểm A nằm trong đường tròn $(0;5)$.

$OB = 4\,\text{cm}(4 < 5)$ nên điểm B nằm trong đường tròn $(0;5)$.

$OC = 7\,\text{cm}(7 > 5)$ nên điểm C nằm ngoài đường tròn $(0;5)$.

$OD = 5\,\text{cm}$ nên điểm D nằm trên đường tròn $(0;5)$ hay $D \in (0;5)$.

II. Chứng minh nhiều điểm cùng thuộc đường tròn

Bài toán 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3\,\text{cm}$, $AC = 4\,\text{cm}$. Chứng minh rằng các điểm A, B, C thuộc cùng một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

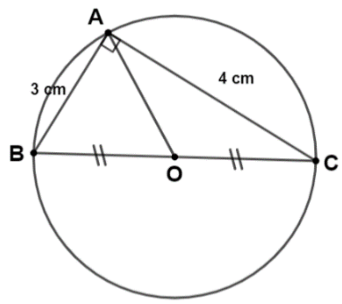
Lời giải

Xét tam giác ABC vuông tại A.

Theo định lí Pythagore, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2$

$\Rightarrow BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm})$



Gọi O là trung điểm của BC, ta có:

$$OB = OC = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2} = 2,5(\text{cm})$$

Mặt khác OA là trung tuyến của tam giác ABC vuông tại A

Ta có $OA = OB = OC = 2,5(\text{cm})$

Nên ba điểm A, B, C thuộc đường tròn tâm O là trung điểm đoạn BC và bán kính $R = 2,5(\text{cm})$.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC đều có cạnh a, các đường cao BD và CE cát nhau tại H.

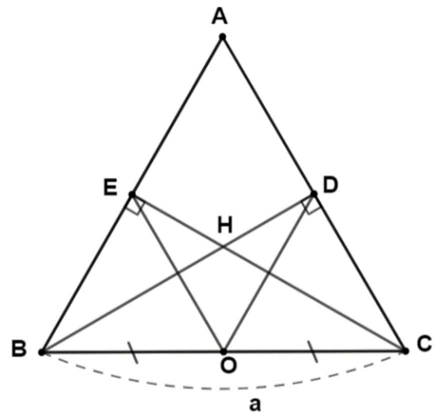
Chứng minh rằng bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn. Hãy xác định tâm và bán kính của đường tròn ấy.

Huớng dẫn: Chúng ta đưa về bài toán 1, ở đây có hai tam giác vuông cùng chung cạnh huyền BC.

Lời giải

Gọi O là trung điểm của BC.

Các tam giác vuông BDC và BEC có chung cạnh huyền BC và OD, OE là các trung tuyến tương ứng



Ta có $OD = OE\left(=\dfrac{1}{2}BC\right)$

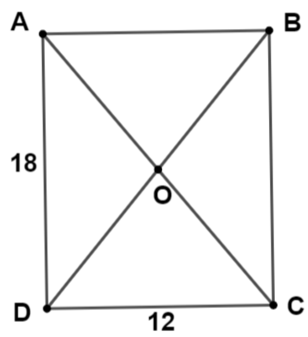
$\Rightarrow OD = OE = OB = OC = \dfrac{1}{2}a.$

Vậy bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc đường tròn tâm O là trung điểm của BC và bán kính bằng $\dfrac{a}{2}$.

Bài toán 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 18\,cm$ và $CD = 12\,cm$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD



Ta có: $OA = OB = OC = OD$ (Tính chất hai đường chéo của hình chữ nhật Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn tâm O bán kính OA.

Xét tam giác vuông ADC vuông tại D.

Theo định lý Pythagore ta có:

$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 18^2 + 12^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{18^2 + 12^2} = 6\sqrt{13}(cm)$

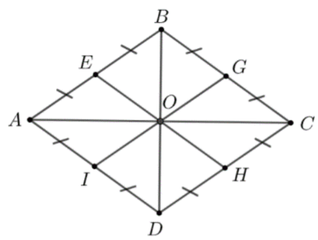
Vậy bán kính của đường tròn (O) đi qua bốn điểm A, B, C, D là $\dfrac{6\sqrt{13}}{2}$.

Bài toán 7. Chứng minh rằng các trung điểm của các cạnh của hình thoi cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải

Gọi E, G, H, I lần lượt là trung điểm của bốn cạnh AB, BC, CD, DA của hình thoi và O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Ta có OE, OG, OH, OI lần lượt là các đường trung tuyến của các tam giác vuông ΔAOB, $\Delta BOC, \Delta COD, \Delta DOA$



$\Rightarrow OE = \dfrac{1}{2}AB, OG = \dfrac{1}{2}BC, OH = \dfrac{1}{2}CD, OI = \dfrac{1}{2}AD$

Mà $AB = BC = CD = AD$ (cạnh hình thoi)

$\Rightarrow OE = OG = OH = OI$

Chứng tỏ bốn điểm E, G, H, I cùng thuộc đường tròn (O).

Bài toán 8. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên cạnh AD lấy N sao cho

$AM = AN$. Kẻ AH vuông góc với DM $(H \in DM)$ và AH cắt BC tại P. Chứng minh rằng năm điểm C, D, N, H, P cùng thuộc một đường tròn.

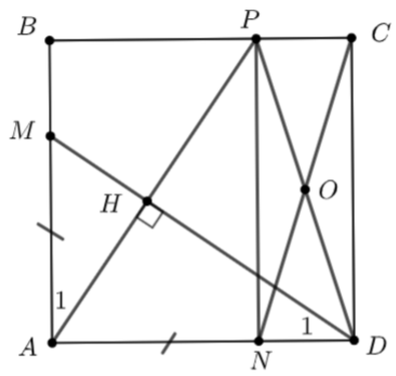
Lời giải

Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ (cùng phụ với $\widehat{M_1}$)

Do đó $\Delta ABP = \Delta DAM$ (g.c.g) $\Rightarrow BP = AM \Rightarrow PC = ND$.

Lại có $PC//ND$ và $\widehat{BCD} = 90°(gt)$

$\Rightarrow$ PCDN là hình chữ nhật. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo PD và CN ta có O là tâm đường tròn đi qua bốn điểm P, C, D, N.



Mặt khác ΔPHD vuông (gt) có HO là trung tuyến

$\Rightarrow HO = OP = OD$ hay H thuộc đường tròn tâm O.

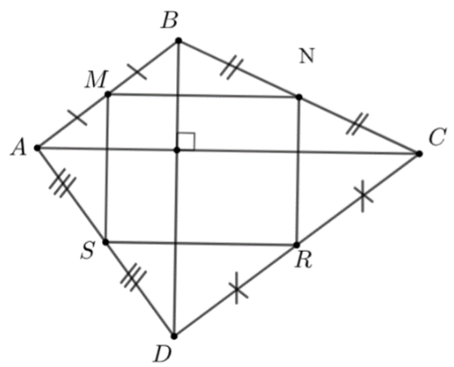
Vậy năm điểm C, D, N, H, P cùng thuộc đường tròn (O).

Bài toán 9. Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Gọi M, N, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD và AD. Chứng minh rằng: Bốn điểm M, N, R, S cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải

Ta có MN là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow MN \text{ // } AC$ và $MN = \dfrac{AC}{2}$



tương tự $SR \text{ // } AC$ và $SR = \dfrac{AC}{2}$

Do đó MNRS là hình bình hành

Mặt khác $BD \perp AC(gt) \Rightarrow MN \perp BD$

Ta còn có $MS \text{ // } NR \text{ // } BD$

Do đó $MN \perp MS$ hay MNRS là hình chữ nhật

$\Rightarrow 4$ điểm M, N, R, S cùng thuộc đường tròn tâm O là giao điểm của hai đường chéo MR và NS bán kính $\dfrac{MR}{2}$.

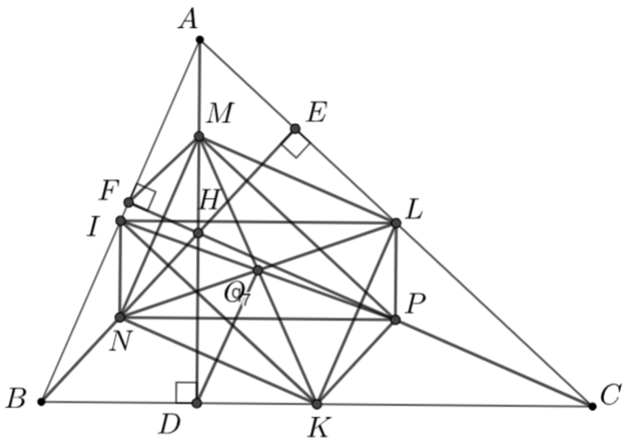
Bài toán 10. Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng các trung điểm của ba cạnh, các trung điểm của ba đoạn thẳng nối ba đỉnh với trực tâm chân của ba đường cao của tam giác cùng thuộc
một đường tròn. (Đường tròn 9 điểm hay đường tròn Euler).

Lời giải

Gọi I, K, L lần lượt là trung điểm của ba cạnh AB, BC, AC

M, N, P lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC

Chân ba đường cao kẻ từ A, B, C lần lượt là D, E, F.



Ta có IL là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow IL \mathbin{//} BC$ và $IL = \dfrac{BC}{2}$

Tương tự $NP \mathbin{//} BC$ và $NP = \dfrac{BC}{2}$

Do đó ILPN là hình bình hành.

Mặt khác $AD \perp BC$ (gt)

$\Rightarrow IL \perp AD$.

Ta còn có $IN \mathbin{//} LP \mathbin{//} AD \Rightarrow IN \perp IL$

hay ILPN là hình chữ nhật.

Chứng minh tương tự KLMN cũng là hình chữ nhật, hai hình chữ nhật này có chung đường chéo NL. Nên NL, PI, MK cắt nhau tại một điểm O là trung điểm của NL.

Từ đó ta có 6 điểm M, L, P, K, N, I cùng nằm trên đường tròn đồng tâm O. Lại có ΔMDK vuông tại D có DO là trung tuyến $\Rightarrow OD = OM = OK$ hay D thuộc đường tròn đường kính MK. Chứng minh tương tự ta có hai điểm E, F cùng thuộc đường tròn O.

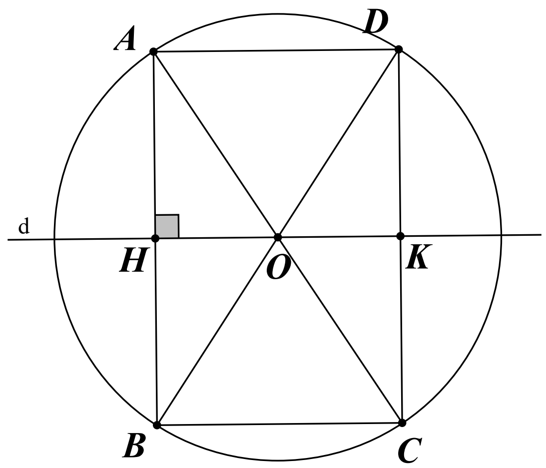
Bài toán 11. Cho đường tròn (O) đường thẳng d đi qua O và điểm A thuộc (O) nhưng không thuộc d. Gọi B là điểm đối xứng với A qua d; C và D lần lượt là điểm đối xứng với A và B qua O.

a) Ba điểm B, C và D có thuộc (O) không? Vì sao?

b) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

c) Chứng minh rằng C và D đối xứng với nhau qua d.

Lời giải



a) Xét tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC cắt BD tại (O).

Ta có B là điểm đối xứng với A qua d nên $d \perp AB$ tại H và $HA = HB$.

Xét tam giác AOB có đường cao OH đồng thời là đường trung tuyến (cmt) nên ΔAOB cân tại $OH \Rightarrow OB = OA$.

$A \in (O) \Rightarrow B \in (O)$

Điểm C đối xứng với A qua $O \Rightarrow OC = OA$, tương tự $OD = OB$.

Đó đó $OD = OC = OB = OA$ mà $A \in (O) \Rightarrow B, C, D \in (O)$.

b) Xét tứ giác $ABCD$ có AC cắt BD tại O và $OA = OB = OC = OD$ nên $ABCD$ là hình bình hành (tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tai trung điểm mõi đường)

Lai có $AC = BD$ nên tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật (hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau).

c) Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật (cmt) $\Rightarrow CD // AB$ mà $AB \perp d$ (tính chất đối xứng qua một đường thẳng) $\Rightarrow CD \perp d$.

Tam giác COD cân tại O có OK là đường cao nên đồng thời là trung trực $\Rightarrow DK = KC$.

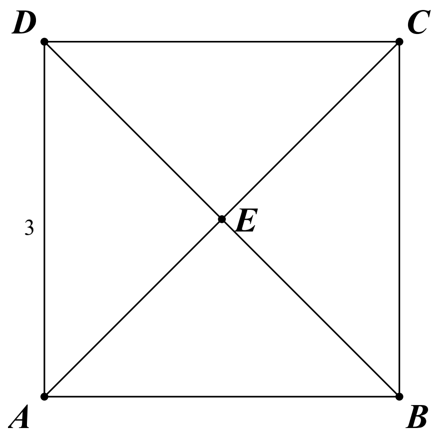
Ta có: $\begin{cases} d \perp CD \\ DK = CK \end{cases}$ chứng tỏ C đối xứng với D qua d.

Bài toán 12. Cho hình vuông $ABCD$ có E là giao điểm của hai đường chéo.

a) Chứng minh ràng có một đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C và D. Xác định tâm đối xứng và chỉ ra hai trục đối xứng của đường tròn đó.

b) Tính bán kính của đường tròn ở câu a, biết rằng hình vuông có cạnh bằng $3cm$.

Lời giải



a) E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD cuả hình vuông $ABCD$.

Nên $EA = EB = EC = ED$. Chứng tỏ 4 điểm A, B, C, D thuộc đường tròn tâm E.

Tâm đối xứng là điểm E.

Hai trục đối xứng là AC và BD.

b) Ta có: $AC \perp BD$ (tính chất hai đường chéo của hình vuông)

Tam giác AEB vuông cân tại E có cạnh huyền $AB = 3cm$.

Đặt $EB = EA = R$.

Theo định lí Pythagore ta có: $AB^2 = R^2 + R^2 \Rightarrow AB^2 = 2R^2$

$\Rightarrow R^2 = \dfrac{AB^2}{2}$ hay $R^2 = \dfrac{3^2}{2} \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{9}{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy bán kính của đường tròn ở câu a là $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (cm).

Bài 14. CUNG VÀ DÂY CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN

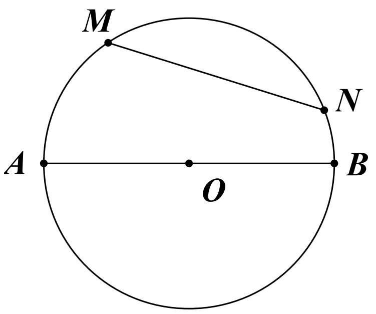
PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm dây và đường kính của đường tròn

- Đoạn thẳng nối hai điểm tuỳ ý của một đường tròn gọi là một dây (hay dây cung) của đường tròn CD.
- Mỗi dây đi qua tâm là một đường kính của đường tròn AB

* Quan hệ giữa dây và đường kính

Định lí: Trong một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.



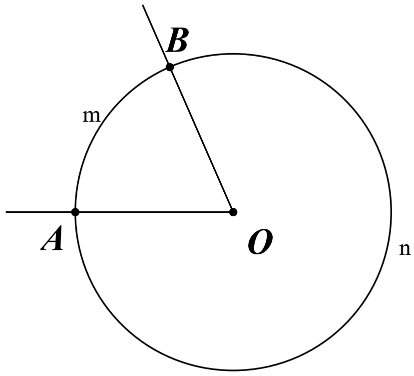
2. Góc ở tâm, cung và so đo của một cung

- Khái niệm góc ở tâm và cung tròn

Cho hai điểm A và B cùng thuộc một đường tròn. Hai điểm ấy chia đường tròn thành hai phần, mỗi phần gọi là một cung tròn (hay cung). Hai điểm A và B là hai mút (hay đầu mút) của mỗi cung đó.

Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn.

Kí hiệu $\overset{\frown}{AmB}$ và $\overset{\frown}{AnB}$ góc ở tâm $\widehat{AOB}$.



Chú ý:

- Khi góc AOB không bẹt thì cung nằm trong góc AOB gọi là cung nhỏ $\overset{\frown}{AmB}$. Kí hiệu $\overset{\frown}{AB}$.

- Cung còn lại, $\overset{\frown}{\text{AnB}}$ gọi là cung lớn.

- Khi góc AOB bẹt thì mỗi cung AB được gọi là một nửa đường tròn.

- Ta còn nói góc AOB chắn cung AB hay cung AB bị chắn bởi góc AOB.

- Cách xác định số đo của một cung

Số đo của một cung duọc xác dịnh như sau:

- Số đo của nửa đường tròn bằng 180°.

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ có chung hai mút.

- So đo của cung AB được kí hiệu sđ $\overset{\frown}{AB}$ (hình vẽ trên).

sđ $\overset{\frown}{AmB} = \widehat{AOB} = \alpha$, sđ $\overset{\frown}{AnB} = 360^\circ - \alpha$

Chú ý:

- Cung có số đo n° còn gọi là cung n°, cả đường tròn được coi là cung 360°.

- Một điểm coi là cung 0°.

- Hai cung trên một đường tròn gọi là bằng nhau nêu chúng có cùng số đo.

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

1. Các bài toán về chứng minh

Bài toán 1. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một điểm M tuỳ ý thuộc nửa đường tròn đó. Chứng minh rằng khoảng cách từ M đến AB không lớn hơn $\frac{AB}{2}$.

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với $a,b \geq 0$, ta có $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Lời giải

Gọi khoảng cách từ M đến AB là MH và bán kính đường tròn (O) là R. Ta có

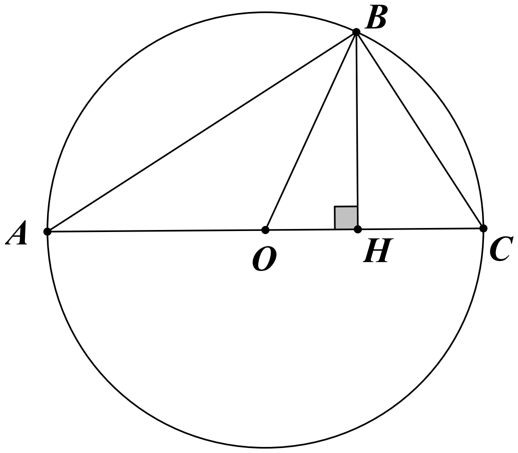
$OM = OA = OB (= R)$.

Đó đó ΔAMB vuông tại M.

Ta có $\Delta MHA \backsim \Delta BHM (g \cdot g) \Rightarrow \frac{MH}{HA} = \frac{BH}{HM}$

$\Rightarrow MH = \sqrt{HA \cdot HB} \leq \frac{HA+HB}{2} \leq \frac{AB}{2}$

$\Rightarrow MH^2 = HA \cdot HB$ (đpcm).



Bài toán 2. Cho tam giác nhọn ABC. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh $MN < BC$.

Lời giải

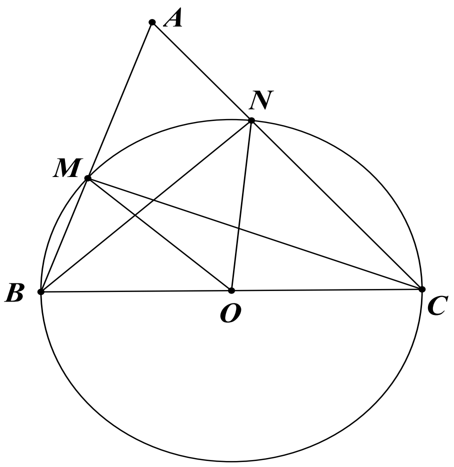
Dễ thấy các tam giác BMC và BNC đều là các tam giác vuông lần lượt tại M và N và OM, ON lần lượt là các trung tuyến.

Ta có $OM = ON = OB = OC (= R$, trong đó R là bán kính đường tròn đường kính BC)

Xét tam giác MON, ta có $MN < OM + ON$ (bất đẳng thức tam giác)

Mà $OM + ON = OB + OC = BC$

Vậy $MN < BC$.

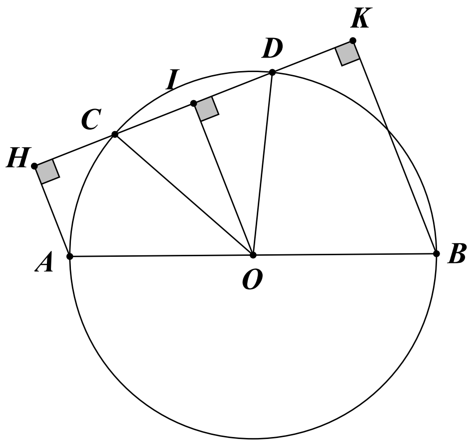


Ta có thể kết luận theo bài học: "Trong một đường tròn dây lớn nhất là đường kính".

Bài toán 3. Cho đường tròn (O) đuờng kính AB, dây CD không cắt đường kính AB. Gọi H và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng $CH = DK$.

Lời giải

Kẻ $OI \perp CD$, tam giác COD cân tại O nên đường cao OI đường thời đường trung tuyến $\Rightarrow IC = ID$.
Lại có $AHKB$ là hình thang vuông.
($AH // BK (\perp HK)$) mà OI là đường trung bình nên I là trung điểm của HK ta có $IH = IK$
$\Rightarrow HI - CI = KI - ID$ hay $CH = DK$



Nhận xét: Do $HI = KI$ và $IC = ID$ nên ta có $HI + ID = IK + IC$ hay $HD = KC$. Ta có bài toán sau:

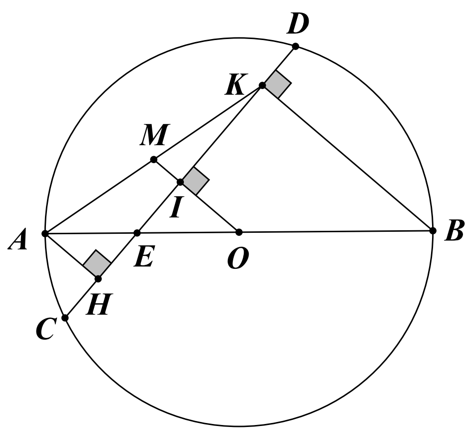
Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD không cắt đường kính AB. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ A, B đến CD. Chứng minh rằng $HD = CK$ (Học sinh tư giải).

Trường hợp dây CD cắt đường kính AB đưa ta đến bài toán 4 sau đây.

Bài toán 4. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD cắt đường kính AB tại E. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng $CH = DK$.

Lời giải

Kẻ $OI \perp CD$ ta có $IC = ID$ (tam giác COD cân tại O nên đường cao đồng thời là đường trung tuyến)
$OI // KB$
Gọi M là giao điểm của OI và AK ta có M là trung điểm của AK.
Xét ΔAKH có M là trung điểm của AK
$MI // AH$ (vì cùng $\perp CD$)
$\Rightarrow$ I là trung điểm của HK hay $IH = IK$ (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow IC - IH = ID - IK$ hay $CH = DK$



Nhận xét: Theo bài toán 1. Trên dây CD ta lấy thêm điểm M.

Khi đó $OI \le OM$. Mà $OM = \dfrac{AH + BK}{2}$ (tính chất đường trung bình của hình thang)

$\Rightarrow AH + BK \le 2OM$. Chúng ta sẽ có bài toán sau:

Bài toán 5. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. M là điểm cố định nằm trong đường tròn (M khác O) và CD là dây cung quay quanh M. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A và B lên CD. Xác định vị trí của dây CD để $AH + BK$ lớn nhất.

Hướng dẫn: Kẻ $OI \perp CD$.

Lời giải

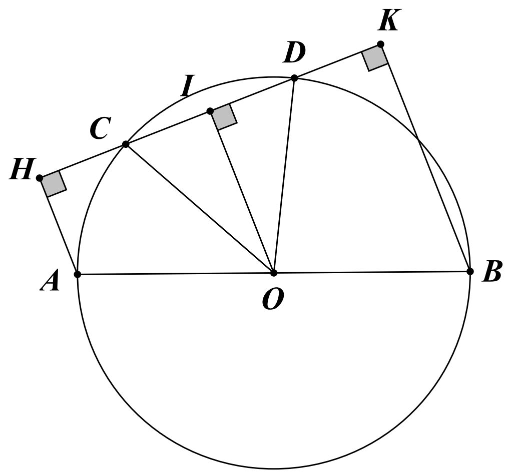
Ta có AH, BK cùng vuông góc với CD

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABKH$ là hình thang và có OI là đường trung bình

$OI = \dfrac{AH + BK}{2} \Rightarrow AH + BK = 2OI$

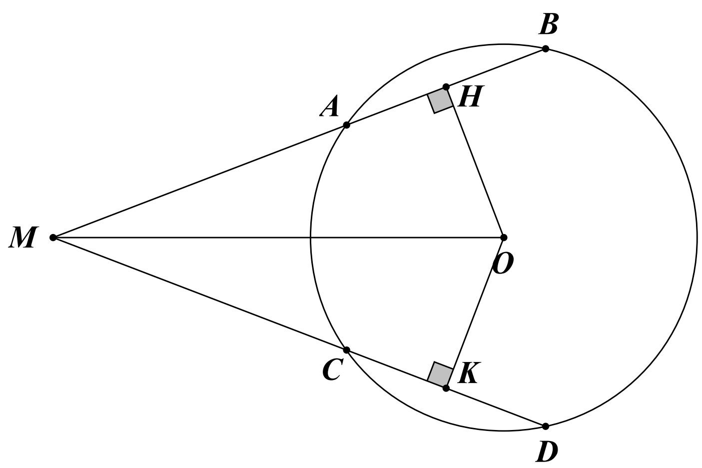
Ta có $OI \le OM$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên)

Dấu " =" xảy ra khi $OM \perp CD$



Bài toán 6. Cho đường tròn (O). Các dây AB và CD bằng nhau, các tia BA và DC cắt nhau tại điểm M nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng $MA = MC$.

Lời giải



Ta có $AB = CD$ (gt) $\Rightarrow OH = OK$ (liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm)

Xét tam giác vuông MHO theo định lí Pythagore: $MH^2 = MO^2 - OH^2$

Tương tự với ΔMKO, ta có $MK^2 = MO^2 - OK^2$ mà $OH = OK \Rightarrow MH = MK$ (1)

Lại có $OH \perp AB$ (gt) $\Rightarrow HA = HB = \dfrac{AB}{2}$

Tương tự $KC = KD = \dfrac{CD}{2}$ mà $AB = CD$

$\Rightarrow HA = CK$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MH - HA = MK - CK$

hay $MA = MC$

Nhận xét: Trường hợp hai dây AB, CD không bằng nhau, chẳng hạn $AB > CD$ ta có bài toán sau:

Bài toán 7. Cho đường tròn (O) hai dây AB và CD sao cho $AB > CD$. Các tia BA và DC cắt nhau tại M nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Hãy so sánh MH và MK.

Hướng dẫn: *Ta* có $MH^2 = MO^2 - OH^2$ và $MK^2 = MO^2 - OK^2$ mà $OH < OK$ (vì $AB > CD$) $\Rightarrow MH > MK$

Nhận xét: Trường hợp điểm M nằm bên trong đường tròn ta có bài toán tương tự.

Bài toán 8. Cho M là điểm nằm bền trong đường tròn (O), vẽ qua M, hh iỉ: dây AB và CD sao cho $AB > CD$. Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng: $MH > MK$.

Lời giải

Nối M với O.

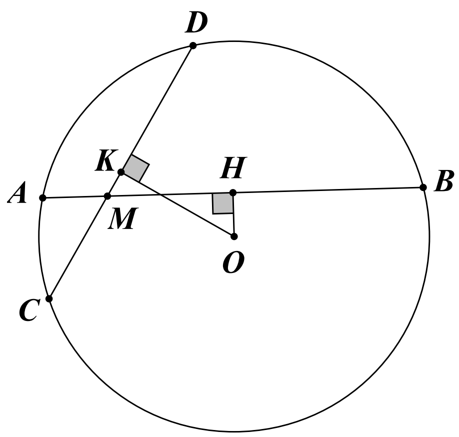
Xét tam giác vuông OHM có:

$MH^2 = OM^2 - OH^2$

Tương tự với tam giác vuông OKM có

$MK^2 = OM^2 - OK^2$

Mà $AB > CD(gt) \Rightarrow OH < OK \Rightarrow MH > MK$



Bài toán 9. Từ điểm P nằm bên ngoài đường tròn ($O; R$) và $OP = 2R$. Một đường thẳng qua P cắt đường tròn (O) tại A và B (A nằm giữa B và P) và $AB = R$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến BP. Qua P kẻ một đường thẳng khác cắt đường tròn (O) tại C và D (C, D khác phía với AB so với OP). Kẻ $OK \perp CD$. So sánh AB và CD biết $OK < \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

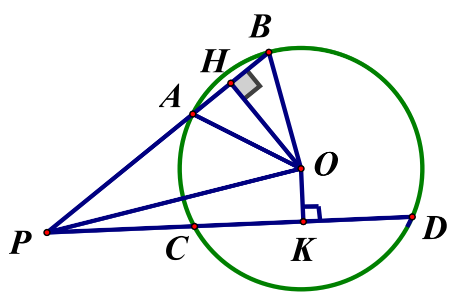
Lời giải

Ta có $OH \perp BP$. Tam giác AOB cân tại O nên đường cao OH đồng thời là đường tuyến H là trung điểm của AB:

$$HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{R}{2}.$$

Xét tam giác vuông AHO ta có:

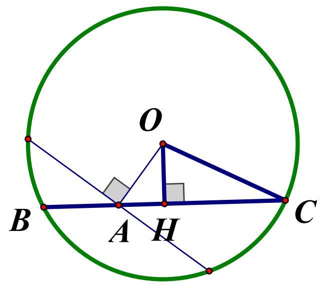
$$OH = \sqrt{OA^3 - AH^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$



Mà $OK < \frac{R\sqrt{3}}{2}(gt) \Rightarrow OK < OH \Rightarrow AB < CD$.

Bài toán 10. Cho điểm A cố định ở bên trong đường tròn $(O;R)$ và A không trùng với O. BC là dây cung quay quanh A. Xác định vị trí của dây cung BC lúc dây cung BC ngắn nhất.

Lời giải



Kẻ $OH \perp BC$(H thuộc BC).

Ta có $OH \le OA$ (không đổi)

BC ngắn nhất $\Leftrightarrow OH$ lớn nhất $\Leftrightarrow OH = OA \Leftrightarrow H = A$.

Vậy: Khi BC vuông góc với OA tại A thì độ dài dây BC ngắn nhất.

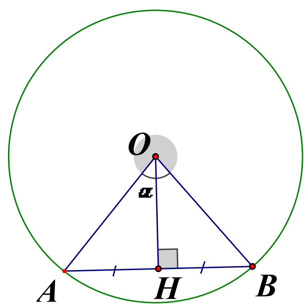
II. Tính toán

Bài toán 11. Cho đường tròn $(0;5\text{ cm})$ là một dây bất kì của đường tròn đó. Biết $AB = 6\text{ cm}$.

a) Tinh khoảng cách từ O đến đường thẳng AB.

b) Tinh $\tan \propto$ nếu góc ở tâm chắn cung AB bằng 2α.

Lời giải



a) Gọi khoảng cách từ O đến đường thẳng AB là OH

Tam giác AOB cân tại O nên đường cao OH cũng đồng thời là đường trung tuyến hay

$$AH = BH = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3(\text{ cm}).$$

Xét tam giác AHO vuông tại H, theo định li Pythagore, ta có:

$$OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow OH^2 = OA^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2$$

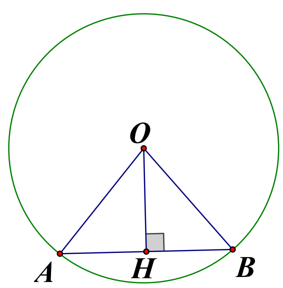
$$OH = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(\text{ cm})$$

b) Khi $\widehat{AOB} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{BOH} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$ (vì tam giác AOB cân tại O nên đường cao OH đồng thời là đường phân giác).

Xét tam giác AHO vuông tại H, ta có: $\tan\alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{3}{4}$.

Bài toán 12. Tâm O của một đường tròn (cách dây AB của nó một khoảng 3 cm. Tính bán kính của đường tròn (O), biết rằng cung nhỏ AB có số đo bằng 100° (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải



Ta biết rằng số đo cung nhỏ chính là số đo của góc ở tâm hay $\widehat{AOB} = 100^\circ$.

Tam giác AOB cân tại O có OH là đường cao đồng thời cũng là đường phân giác.

$$\widehat{AOH} = \widehat{BOH} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ.$$

Tam giác AOH vuông tại H có cạnh góc vuông $OH = 3$ cm, góc nhọn $\widehat{AOH} = 50^\circ$ (cmt).

Theo đinh lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$OH = OA\cos AOH \Rightarrow OA = \frac{OH}{\cos 50^\circ} \approx 4,7.$$

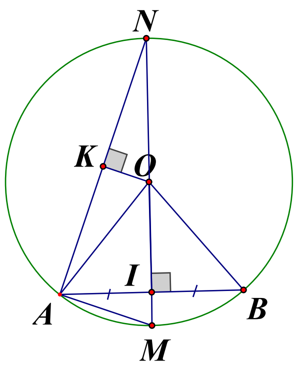
Vậy bán kính của đường tròn (O) là 4,7 (cm).

Bài toán 13. Cho đường tròn $(O;R)$ và một dây cung AB. Gọi I là trung điểm của AB. Tia OI cắt cung AB tại M.

a) Cho $R = 5$ cm, $AB = 6$ cm. Tinh độ dài dây cung MA.

b) Cho MN là đường kính của đường tròn $(0;R)$ biết $AN = 10$ cm và dây $AB = 12$ cm. Tính bán kính R.

Lời giải



a) Ta có I là trung điểm của dây AB (gt)

$\Rightarrow IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (cm) (định lý đường kính và dây cung)

Trong tam giác vuông AIO ta có:

$$OI = \sqrt{AO^2 - AI^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(\text{ cm}) \text{ (định lý Pythagore)}$$

$$\Rightarrow IM = OM - OI = 5 - 4 = 1(\text{cm})$$

Xét tam giác vuông AIM lại có:

$$AM = \sqrt{AI^2 + IM^2} = \sqrt{9^2 + 1^1} = \sqrt{10}(\text{ cm}) \text{ (định lý Pythagore)}$$

b) Chứng minh như trên ta có:

$$IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6(cm)$$

Xét tam giác vuông AIN ta có: $NI = \sqrt{AN^2 - AI^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8(cm)$

Kẻ $OK \perp AN$ ta có $KA = KN = \frac{AN}{2} = \frac{10}{2} = 5(cm)$

Và các tam giác vuông AIN và OKN đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{NO}{NA} = \frac{NK}{NI} \Rightarrow NO = \frac{NA.NK}{NI} = \frac{10.5}{8} = 6,25(cm)$$

Vậy $R = 6,25(cm)$

Bài toán 14: Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Một dây CD không đi qua tâm O sao cho $\widehat{COD} = 90^0$ và CD cắt đường thẳng AB tại E (D nằm giữa hai điểm E và C), biết $OE = 2R$. Tính độ dài EC và ED theo R

Hướng dẫn: Bạn hãy vẽ hình theo thứ tự sau:

Dựng $(O : R)$

Vẽ hai bán kính OC ⊥ OD

Nối CD kéo dài

Dựng $(O; 2R)$

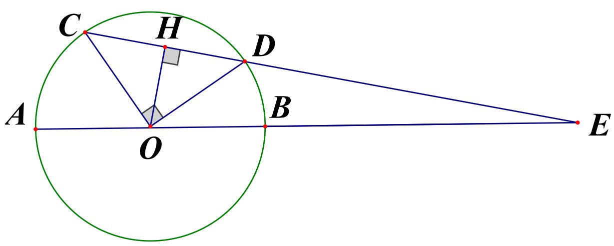
Lấy E là giao điểm của $(O; 2R)$ và đường thẳng CD

Lời giải

Ta có $\widehat{COD} = 90^0$ (gt) nên ΔCOD vuông cân tại O

ta có:

$$CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$$



Kẻ OH ⊥ CD, tam giác COD cân tại O nên đường cao OH đồng thời là đường trung tuyến hay $HC = HD$

$$\Rightarrow HC = HD = OH = \frac{CD}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Xét tam giác vuông OHE, ta có:

$EH = \sqrt{OE^2 - OH^2}$ (định lý Pythagore)

$$EH = \sqrt{(2R)^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{14}}{2}$$

$$ED = \mathrm{EH} - \mathrm{HD} = \frac{\mathrm{R}\sqrt{14}}{2} - \frac{\mathrm{R}\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\mathrm{R}\sqrt{14} - \mathrm{R}\sqrt{2}}{2} = \frac{\mathrm{R}\sqrt{2}\left(\sqrt{7} - 1\right)}{2}$$

$$EC = \mathrm{EH} + \mathrm{HC} = \frac{\mathrm{R}\sqrt{14} + \mathrm{R}\sqrt{2}}{2} = \frac{\mathrm{R}\sqrt{2}\left(\sqrt{7} + 1\right)}{2}$$

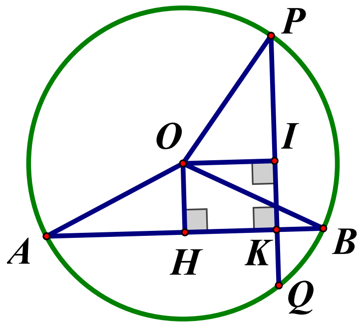
Bài toán 15. Cho đường tròn $(0; 10\text{ cm})$ dây $\mathrm{AB} = 16\text{ cm}$.

a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.

b) Lấy K thuộc dây AB sao cho $\mathrm{AK} = 14\text{ cm}$. Vẽ dây PQ vuông góc với AB tại K. Chứng tỏ $\mathrm{AB} = \mathrm{PQ}$.

Lời giải

a) Kẻ $OH \perp AB$, ta co: $HA = HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{16}{2} = 8(\text{ cm})$



Xét tam giác vuông AOH, ta có

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} \text{ (định lý Pythagore)}$$
$$= \sqrt{10^2 - 8^2} = 6(\text{ cm}).$$

b) Ta có: $KB = AB - AK = 16 - 14 = 2(\text{ cm})$

Do $HK = HB - KB = 8 - 2 = 6(\text{ cm})$

Kẻ $OI \perp PQ$, khi đó tứ giác OHKI là hình chữ nhật có hai canh kề $OH = KH = 6(\text{ cm})$ nên là hình vuông.

Do đó: $OH = OI = 6(\text{ cm})$.

Tam giác OHB vuông tại H. Theo định li Pythagore, ta có:

$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow HB^2 = OB^2 - OH^2 \Rightarrow HB = \sqrt{OB^2 - OH^2}$.

Tương tự với tam giác OIP, ta có: $IP = \sqrt{OP^2 - OI^2}$

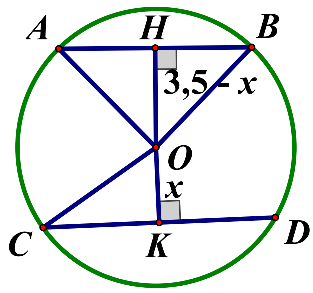
Mà $OB = OP(=R)$ và $OH = OI(\text{cmt}) \Rightarrow HB = IP$

Tam giác AOB cân tại O có OH là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến hay H là trung điểm của AB, tương tự I là trung điểm của PQ mà $HB = IP$ (cmt) $\Rightarrow AB = PQ$ (đpcm).

Bài toán 16. Cho dường tròn (O) hai dây AB và CD song song voi nhau biết $AB = 3\text{ cm}, CD = 4\text{ cm}$. Khoảng cách giữa hai dây là $3,5\text{ cm}$. Tỉnh bán kính đường tròn (O).

Lời giải

Kẻ $OH \perp AB$ tam giác AOB cân tại O nên đường cao OH đồng thời là đường trung tuyến hay $HA = HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{3}{2} = 1,5(\text{ cm})$.



Mặt khác vì $AB // CD$ nên $OH \perp CD$ tại K

ta cũng có

$KC = KD = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{4}{2} = 2(\text{ cm})$

Khi đó các tam giác AHO và CKO vuông. Theo định lí Pythagore:

$$\left.\begin{array}{l} AH^2 + OH^2 = OA^2(= R^2) \\ CK^2 + OK^2 = OC^2(= R^2) \end{array}\right\} \Rightarrow AH^2 + OH^2 = CK^2 + OK^2 \,(^*)$$

Đặt $OK = x \Rightarrow OH = 3,5 - x(^{**})$

Thay (**) vào (*) ta có

$$1,5^2+(3,5-x)^2=2^2+x^2$$
$$\Leftrightarrow\quad 2,25+3,5^2-7x+x^2=4+x^2$$
$$\Leftrightarrow\quad -7x=-10,5$$
$$\Leftrightarrow\quad x=1,5(\text{ cm}).$$

Xét tam giác vuông CKO ta có: $CO^2=OK^2+CK^2$ (định lí Pythagore)

$$R^2=1,5^2+2^2=6,25$$
$$\Rightarrow R=2,5(\text{ cm}).$$

Bài toán 17. Gọi I là trung điểm của dây cung AB không qua tâm của đường tròn $(0;R)$. Qua I vẽ dây cung CD.

a) Chứng tỏ $CD\ge AB$. Tìm độ dài nhỏ nhất, lớn nhất của các dây quay quanh I.

b) Cho $R=5\text{ cm}, OI=4\text{ cm}$. Tính độ dài dây cung ngắn nhất qua I.

c) Chứng tỏ rằng: $\widehat{OAI}>\widehat{ODI}$.

Lời giải

a) Kẻ $OK\perp CD$, ta có tam giác OKI vuông tại $K\Rightarrow OI\ge OK$ (cạnh huyền lớn hơn cạnh góc vuông).

có I là trung điểm của AB (gt).

Tam giác AOB cân tại $O(OA=OB=R)$ nên đường trung tuyến OI đồng thời là đường cao hay $OI\perp AB$.

Xét tam giác vuông AIO, theo định lí Pythagore: $AI=\sqrt{OA^2-OI^2}$.

Tương tự với tam giác vuông $OKD: KD=\sqrt{OD^2-OK^2}$

Mà $OI>OK(\text{cmt})\Rightarrow KD>AI$, mà K là trung điểm của CD và I là trung điểm của $AB\Rightarrow CD\ge AB$.

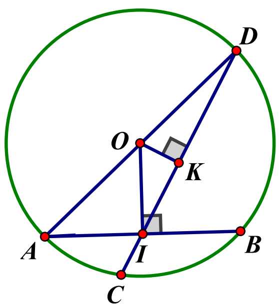
Dấu " = " xảy ra khi $CD=AB$.

Do đó độ dài nhỏ nhất của CD bằng AB hay CD trùng với AB. Hiển nhiên đường kính qua I là dây lớn nhất.

b) Ta có ΔOIA vuông tại I:

$$AI=\sqrt{OA^2-OI^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3(\text{ cm})$$

Do đó dây cung $AB=6(\text{ cm})$.



c) $\sin\widehat{OAI}=\dfrac{OI}{OA}=\dfrac{OI}{R};\sin\widehat{ODI}=\dfrac{OK}{OD}=\dfrac{OK}{R}$

Mà $OI>OK\Rightarrow\dfrac{OI}{R}>\dfrac{OK}{R}$

hay $\sin\widehat{OAI}>\sin\widehat{ODI}\Rightarrow\widehat{OAI}>\widehat{ODI}$.

III. Toán thực tế

Bài toán 18. Trên mặt một chiếc đồng hồ có các vạch chia như hình vẽ.

Hỏi cứ sau mỗi khoảng thời gian 36 phút:

a) Đầu kim phút vạch nên một cung có số đo bằng bao nhiêu độ?

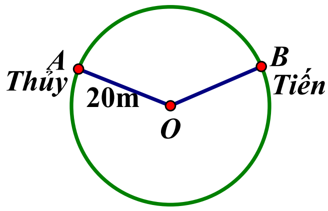
b) Đầu kim giờ vạch nên một cung có số đo bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

a) Kim phút vạch nên một cung sau 36 phút là:
$6^\circ.36 = 216^\circ$.

b) Kim giờ quay chậm hơn kim phút là 12 lần, ta có:
$216^\circ : 12 = 18^\circ$.

Bài toán 19. Trong một trò chơi, hai bạn Thuỷ và Tiến cùng chạy trên một đường tròn tâm O có bán kính 20 m (hình vẽ). Có thời điểm nào dây AB nối vị trí của hai bạn đó có độ dài bằng 41 m hay không? Vì sao?



Lời giải

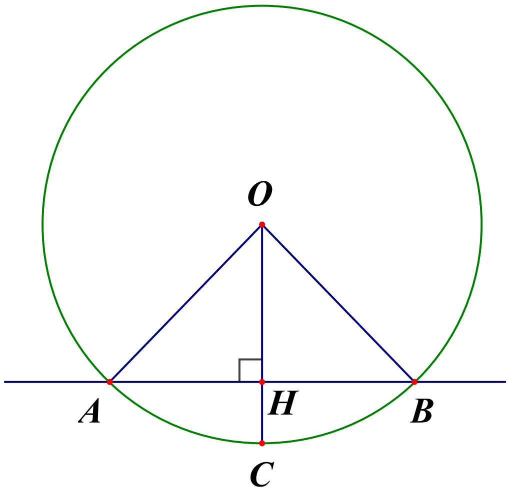
Không có thời điểm nào dây AB nối vị trí của hai bạn đó có độ dài bằng 41 m : vì độ dài dây AB không vượt quá độ dài đường kính: $2.20 = 40$ (m) của đường tròn.

Do đó $AB \le 40$.

Bài toán 20. Có thể xem guồng nước (còn gọi là cọn nước) là một công cụ hay cỗ máy có dạng hình tròn, quay được nhờ sức nước chảy (hình a). Guồng nước thường thấy ở các vùng miền núi. Nhiều guồng nước được làm bằng tre, dùng để đưa nước lên ruộng cao, giã gạo hoặc làm một số việc khác.

Giả sử ngấn nước ngăn cách giữa phần trên và phần dưới của một guồng nước được biểu thị bởi cung ứng với một cây dài 4 m và điểm ngập sâu nhất là $0,5$ m (hình b, điểm ngập sâu nhất là điểm C, ta có $AB = 4$ m và $HC = 0,5$ m. Dựa vào đó, em hãy tính bán kính của guồng nước.

a)



b)

Lời giải

Gọi bán kính của đường tròn (O) là R, ta có:

$OA = OB = OC = R$ và $OH = OC - HC = R - 0,5 = R - \dfrac{1}{2}$

Tam giác AOB cân tại O nên đường cao OH đồng thời là đường trung tuyến hay H là trung điểm của AB, ta có:

$HA = HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{4}{2} = 2(\text{ cm})$

Xét tam giác AHO vuông tại H. Theo định lí Pythagore, ta có:

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \; hay \; R^2 = \left(R - \frac{1}{2}\right)^2 + 2^2$$

$$\Leftrightarrow \quad R^2 = R^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} R + \frac{1}{4} + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad R = \frac{1}{4} + 4 \Leftrightarrow R = \frac{17}{4} = 4,25(m).$$

Vậy bán kính của guồng nước là 4,25 (m).

Bài 15. ĐỘ DÀI CỦA CUNG TRÒN.
DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN VÀ HÌNH VÀNH KHUYÊN

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Độ dài của cung tròn

Công thức tính độ dài của cung tròn $(O;R)$

$C = \pi d = 2\pi R$

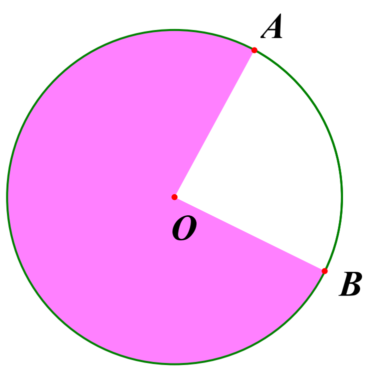
(d là đường kính của đường tròn, C là độ dài của đường tròn)

Độ dài l của cung n° trên đường tròn $(O;\mathrm{R})$ là $l = \frac{\pi}{180}n.R$.

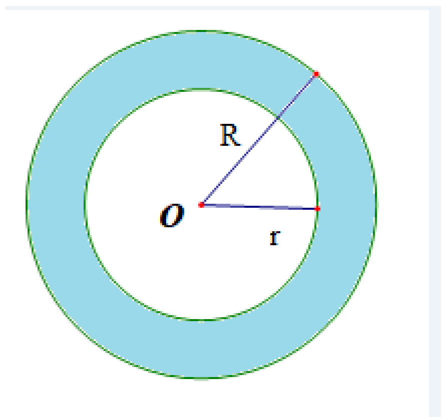
2. Hình quạt tròn và hình vành khuyên

Định nghĩa

1)Hình quạt tròn là phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai đầu mút của cung đó (Hình a).



Hình a



Hình b

2)Hình vành khuyên (còn gọi là hình vành khăn) là phần nằm giữa hai đường tròn có cùng tâm và bán kính khác nhau (còn gọi là hai đường tròn đồng tâm) (Hình b).

Diện tích của hình quạt tròn và hình vành khuyên

$S_q = \frac{n}{360}nR^2 = \frac{lR}{2}$.

(S_q : diện tích hình quạt tròn; R : bán kính ứng với cung n°)

$\mathrm{S_v} = \pi\left(\mathrm{R}^2 - \mathrm{r}^2\right)$ với $R > r$

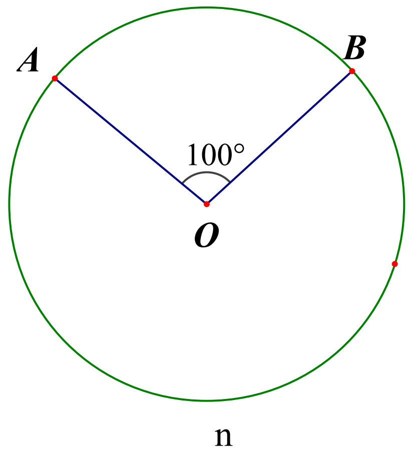
(S_v diện tích hình vành khuyên; R , r : bán kính của hai đường tròn đồng tâm).

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tính độ dài các cung tròn. Diện tích các hình

Bài toán 1. Cho A và B là hai điểm trên đường tròn $(O;0,8)$ sao cho $\widehat{AOI} = 100^\circ$. Tính số đo và độ dài các cung có hai mút A, B .

Lời giải



A, B là hai điểm trên (O) nên sẽ có hai cung.

Cung nhỏ AB bị chắn bởi góc ở tâm AOB

$\text{sd}\,\overset{\frown}{AB} = \widehat{AOB} = 100°.$

Do đó độ dài của cung nhỏ AB là:

$$l = \frac{100}{180} \cdot \pi \cdot 8 = \frac{40}{9}\pi\,(\text{cm})$$

Cung lớn AnB có số đo:

$\text{sd}\,\overset{\frown}{AnB} = 360° - 100° = 260°$

Do đó độ dài của cung lớn là:

$$l = \frac{260}{180} \cdot \pi \cdot 8 = \frac{104}{9}\pi\,(\text{cm}).$$

Bài toán 2. Tính độ dài cung $90°$ của đường tròn $(O; 6\text{ cm})$.

Lời giải

Ta có: $n = 90°$ và $R = 4$ cm. Do đó độ dài cung:

$$l = \frac{90}{180} \cdot \pi \cdot 6 = 3\pi\,(\text{cm}).$$

Bài toán 3. Tính diện tích hình quạt tròn có bán kính 4 cm, ứng với cung $36°$.

Lời giải

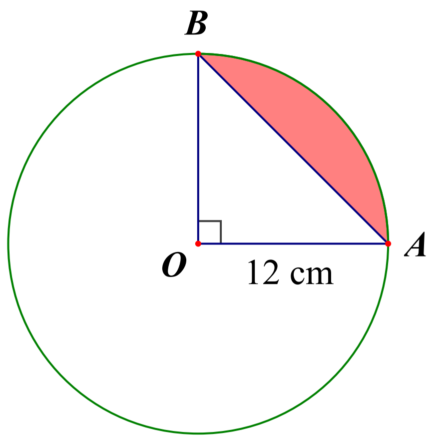
Ta có: $n = 90°$ và $R = 6$ cm. Do đó độ dài cung:

$$S_q = \frac{36}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = 1,6\pi\,(\text{cm}^2).$$

Bài toán 4. (Xem hình vẽ)

a) Tính diện tích hình quạt tròn tâm O cung nhỏ AB.

b) Tính diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung nhỏ AB (gọi là hình viên phân tâm O cung nhỏ AB). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười centimét vuông).



Lời giải

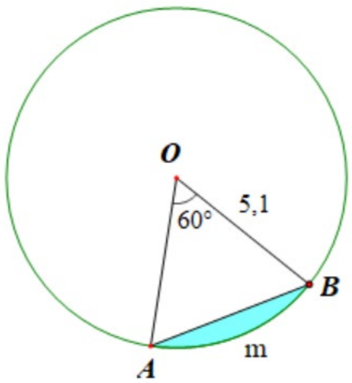
a) Ta có: $\widehat{AOB}=90°$ nên $sd\,\overset{\frown}{AB}=\widehat{AOB}=90°$. Do đó: $S_q=\dfrac{90}{360}\cdot\pi\cdot12^2=36\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

b) Ta có: $S_{vp}=S_q-S_{AOB}$ (S_{vp} là diện tích hình viên phân; S_{AOB} là diện tích tam giác AOB).

$S_{AOB}=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB=\dfrac{1}{2}\cdot12\cdot12=72\left(\text{ cm}^2\right)$

Vậy $S_{vp}=36\pi-72\approx41,0\left(\text{ cm}^2\right)$.

Bài toán 5. Phần hình tròn được giới hạn bởi một cung và dây căng cung đó gọi là hình viên phân. Tính diện tích hình viên phân AmB, biết góc ở tâm $\widehat{AOB}=60°$ và bán kính đường tròn là $5,1$ cm (hình vẽ) (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của cm^2).



Lời giải

Gọi S_{vp} là diện tích hình viên phân, S_q là diện tích hình quạt và S_{AOB} là diện tích tam giác AOB.

Ta có: $S_q=\dfrac{60}{360}\cdot\pi\cdot(5,1)^2\approx13,62\left(\text{ cm}^2\right)$.

Xét $\triangle AOB$ cân tại $O\left(OA=OB=R\right)$ có $\widehat{AOB}=60°$ nên tam giác AOB đều.

Do đó $S_{AOB}=\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{(5,1)^2\cdot\sqrt{3}}{4}\approx11,26\left(\text{ cm}^2\right)$

Do đó $S_{vp} = S_q - S_{AOB} = 13,62 - 11,26 \approx 2,63\left(\text{ cm}^2\right)$.

II. Đơn thức đồng dạng

Bài toán 6. Tính diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 6 cm và 4 cm.

Lời giải

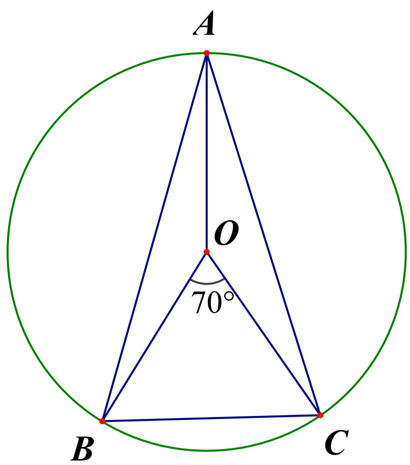
Gọi S_v là diện tích hình vành khuyên cần tính.

Ta có: $S_v = \pi.\left(6^2 - 4^2\right) = 20\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Bài toán 7. Cho đường tròn $\left(\text{O}; 4\text{ cm}\right)$ và ba điểm A, B, C trên đường tròn đó sao cho tam giác ABC cân tại đỉnh A và số đo cung nhỏ BC bằng $70°$.

a) Giải thích tại sao hai cung nhỏ AB và AC bằng nhau.

b) Tính độ dài của các cung BC, AB và AC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

a) Nối O với A. Xét tam giác AOB và tam giác AOC có:

OA: cạnh chung, $AB = AC$ (gt),

$OB = OC\left(= 4\text{ cm}\right)$

Do đó $\triangle AON = \triangle AOC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{AOC} \Rightarrow sđ\,\overset{\frown}{AB} = sd\,\overset{\frown}{AC}$

b) Gọi độ dài của cung BC là l_1, ta có:

$$l_1 = \frac{70}{180} \cdot \pi \cdot 4 = \frac{14}{9}\pi \approx 4,9\left(\text{ cm}\right).$$

Ta có: sd $\overset{\frown}{AB}$ = sd $\overset{\frown}{AC} = \frac{360° - 70°}{2} = 145°$.

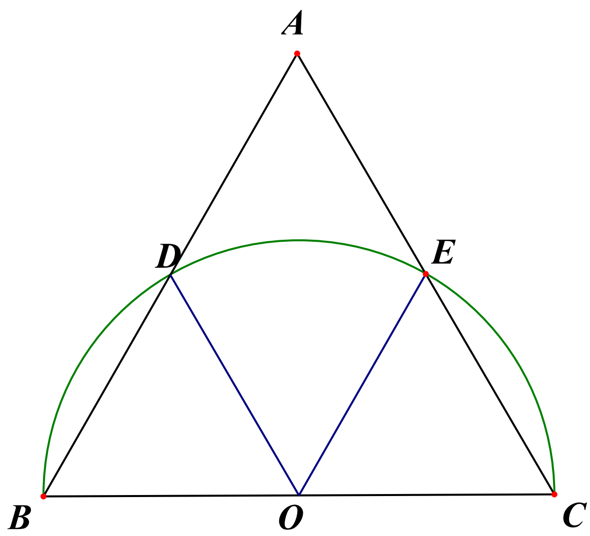
Gọi l_2, l_3 lần lượt là độ dài của cung AB và AC, ta có:

$$l_2 = l_3 = \frac{145}{180}.\pi \cdot 4 = \frac{29}{9}\pi \approx 10,1\left(\text{ cm}\right).$$

Bài toán 8. Cho tam giác đều ABC có $AB = 2\sqrt{3}$ cm. Nửa đường tròn đường kính BC cắt hai cạnh AB và AC lần lượt tại D và E (khác B và C) (hình vẽ).

a) Chứng tỏ rằng ba cung nhỏ BD, DE và EC bằng nhau. Tính số đo mỗi cung ấy.

b) Tính diện tích của hình viên phân giới hạn bởi dây BD và cung nhỏ BD.



Lời giải

a) Tam giác ABC đều (gt) $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$.

Gọi O là tâm của nửa đường tròn đường kính BC, ta có tam giác BOD cân tại O có $\widehat{B} = 60°(\text{cmt}) \Rightarrow \triangle BOD$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{BOD} = 60°$.

Tương tự với tam giác $COE \Rightarrow \widehat{COE} = 60°$.

Do đó $\widehat{DOE} = 180° - \left(\widehat{BOD} + \widehat{COE}\right) = 180° - (60° + 60°) = 60°$.

Ta có $\widehat{BOD} = \widehat{DOE} = \widehat{COE} = 60°$

$\Rightarrow \text{sd}\,\overset{\frown}{BD} = \text{sd}\,\overset{\frown}{DE} = \text{sd}\,\overset{\frown}{EC} = 60°.$

b) Ta có $S_{vp} = S_q - S_{BOD}$

Tam giác ABC đều $\Rightarrow BC = AC = AB = 2\sqrt{3}\ (\text{cm})$

$$\Rightarrow \quad OB = OC = \frac{BC}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ (\text{cm})$$

$$S_q = \frac{60}{360} \cdot \pi(\sqrt{3})^2 = \frac{1}{2}\pi = 1{,}57\ (\text{cm}^2)$$

$$S_{BOD} = \frac{(\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\ (\text{cm}^2) \approx 1{,}30\ (\text{cm}^2)$$

Vậy $S_{vp} = 1{,}57 - 1{,}30 \approx 0{,}27\ (\text{cm}^2)$.

II. Toán thực tế

Bài toán 9. Có hai chiếc bánh pizza hình tròn (hình vẽ). Chiếc bánh thứ nhất (hình a) có đường kính 16 cm được cắt thành 6 miếng đều nhau có dạng hình quạt tròn. Chiếc bánh thứ hai (hình b) có đường kính 18 cm cắt thành 8 miếng đều nhau có dạng hình quạt tròn. Hãy so sánh diện tích bề mặt của hai miếng bánh cát ra từ chiếc bánh thứ nhất và thứ hai.

Hình a

Hình b

Lời giải

Miếng bánh được cắt ra từ chiếc bánh thứ nhất (hình a) có dạng hình quạt tròn bán kính $R_1 = 16:2 = 8$ cm ứng với cung $360°:6 = 60°$ có diện tích bề mặt là:

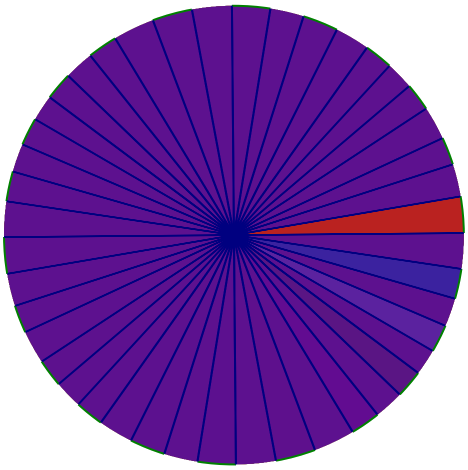
$$S_a = \frac{60}{360}\cdot\pi\cdot 8^2 = \frac{32}{3}\pi \approx 33,5\left(\text{cm}^2\right)$$

Miếng bánh được cắt ra từ chiếc bánh thứ hai (hình b) có dạng hình quạt tròn bán kính $R_2 = 18:2 = 9$ cm ứng với cung $360°:8 = 45°$ có diện tích bề mặt là:

$$S_b = \frac{45}{360}\cdot\pi\cdot 9^2 = \frac{81}{8}\pi \approx 31,8\left(\text{cm}^2\right)$$

Vậy diện tích bề mặt của miếng bánh được cắt ra từ chiếc bánh thứ nhất lớn hơn diện tích bề mặt của miếng bánh được cắt ra từ chiếc bánh thứ hai.

Bài toán 10. Một hoạ tiết trang trí có dạng hình tròn bán kính 4dm được chia thành nhiều hình quạt tròn (hình vẽ), mỗi hình quạt có góc ở tâm là $7,5°$. Diện tích của mỗi hình quạt đó là bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Lời giải

Lời giải

Mỗi hình quạt được chia ra chắn cung $7,5°$ và có bán kính đường tròn là 4 dm.

Do đó diện tích của mỗi hình quạt là: $S_q = \frac{7,5}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = \frac{1}{3}\pi \approx 1,05\ (\text{dm}^2)$.

Bài toán 11. Một chiếc quạt giấy khi xoè ra có dạng nửa hình tròn bán kính $2,2$ dm như hình vẽ. Tính diện tích phần giấy của chiếc quạt, biết rằng khi gấp lại, phần giấy có chiều dài khoảng $1,6$ dm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của dm^2 ?

Lời giải

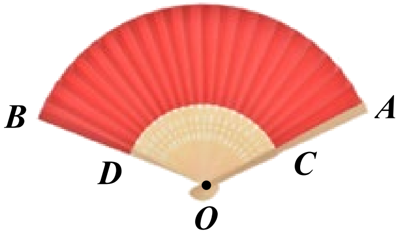
Phần giấy của chiếc quạt có dạng hình vành khuyên.

Gọi diện tích của phần giấy là S_v, ta có:

$S_v = \frac{1}{2}\pi\left(R^2 - r^2\right)$ trong đó $r = R - 1,6 = 2,2 - 1,6 = 0,6(\text{dm})$

$S_v = \frac{1}{2}\pi\left(2,2^2 - 0,6^2\right) \approx 7,03\left(\text{dm}^2\right)$.

Bài toán 12. Trong hình vẽ chiếc quạt có dạng một hình quạt tròn tâm O cung AB, bán kính $OA = OB = 20$ cm. Giấy được dán trong phần giới hạn bởi cung AB, cung CD, đoạn thẳng AC và BD với $OC = OD = 10$ cm. Biết khi mở rộng tối đa, hai nan quạt ngoài cùng tạo thành một góc AOB bằng $140°$. Tính chu vi và diện tích mảnh giấy để dán một mặt quạt (diện tích mép dán không đáng kể).



Lời giải

Độ dài cung AB : $l_1 = \frac{140}{180} \cdot \pi \cdot 20 = \frac{140}{9}\pi$

Độ dài cung CD: $l_2 = \frac{140}{180} \cdot \pi \cdot 10 = \frac{70}{9}\pi$

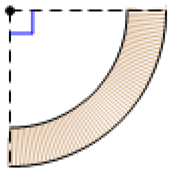
Gọi P là chu vi mảnh giấy, ta có:

$$P = l_1 + BD + l_2 + AC$$
$$= \frac{140}{9}\pi + 10 + \frac{70}{9}\pi + 10 = 20 + \left(\frac{140}{9} + \frac{70}{9}\right)\pi$$
$$= 20 + \frac{70}{3}\pi \approx 93\ (\text{cm})$$

Gọi S_v là diện tích mảnh giấy, ta có:

$$\text{S} = \frac{140}{360}\pi\left(20^2 - 10^2\right) = \frac{350}{3}\pi \approx 366,5\ \left(\text{cm}^2\right)$$

Bài toán 13. Hình vẽ bên mô tả mặt cắt của một khúc gỗ có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lán lượt là 4dm và 3dm. Diện tích mặt cắt đó là bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải

Mặt cắt khúc gỗ có dạng hình vành khuyên, gọi S là diện tích mặt cắt. Ta có:

$$S_v = \frac{1}{4}\pi\left(4^2 - 3^2\right) = \frac{7}{4}\pi \approx 5,5\ \left(\text{dm}^2\right).$$

Bài toán 14. Một máy kéo nông nghiệp có đường kính bánh xe sau là $124\ \text{m}$ và đường kính bánh xe trước là $80\ \text{cm}$. Hỏi khi bánh xe sau lăn được 20 vòng thì bánh xe trước lăn được bao nhiêu vòng?

Lời giải

Chu vi bánh xe sau là 124π, khi bánh xe sau lăn được 20 vòng, ta có:
$124\pi\ .\ 20 = 2480\pi\ (\mathrm{cm})$

Chu vi bánh xe trước là 80π

Do đó khi bánh xe sau lăn được 20 vòng thì bánh xe trước lăn được:
$2480\pi : 80\pi = 31$ (vòng).

Bài toán 15. Ba bộ phận truyền chuyển động của một chiếc xe đạp gồm một giò đĩa (bánh răng gắn với bàn đạp), một chiếc líp (cũng có dạng bánh răng gắn với bánh xe và bộ xích (hình vẽ). Biết rằng giò đĩa có bán kính $15\ \mathrm{cm}$, líp có bán kính $4\ \mathrm{cm}$ và bánh xe có đường kính $65\ \mathrm{cm}$. Hỏi khi người đi xe đạp một vòng thì xe chạy được quãng đường dài bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?

Lời giải

Chu vi bánh xe 65π, chu vi líp 8π, chu vi giò đĩa 30π.

Khi người đi xe đạp đạp một vòng giò đĩa thì líp quay được: $30\pi : 8\pi = \frac{15}{4}$ (vòng)

Do đó xe chạy được quãng đường là:

$$65\pi \cdot \frac{15}{4} = \frac{975}{4}\pi$$
$$= 765,76(\ \mathrm{cm}) \approx 7,7(\ \mathrm{m})$$

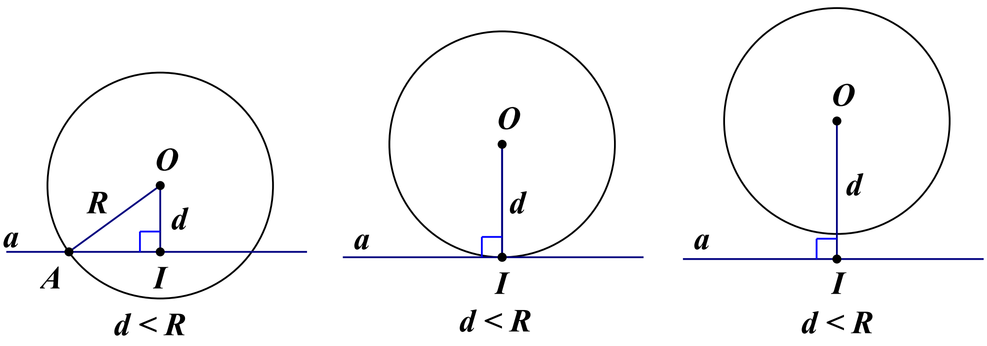
Khi người đi xe đạp một vòng thì xe chạy được quãng đường dài khoảng $7,7(\ \mathrm{m})$.

Bài 16. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

PHẦN A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Ba vị trí tương đối

Gọi $OI = d$ là khoảng cách từ O đến a.



a) $d < R$: (O) và a có hai điểm chung. Ta nói (O) và a cắt nhau.

b) $d = R$: (O) và a chỉ có 1 điểm chung là I. Ta nói (O) và a tiếp xúc nhau tại I, I là tiếp điểm, a là tiếp tuyến.

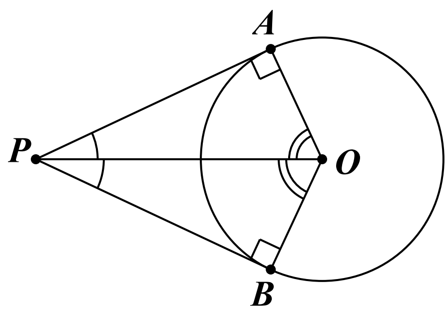
c) $d > R$: (O) và a không có điểm chung. Ta nói (O) và a không giao nhau.

II. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Định lý 1: Nếu một đường thẳng đi qua một điểm nằm trên một đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

III. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Định lý 2: Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm P thì:



- Điểm P cách đều hai tiếp điểm.

- PO là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

- OP là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính qua hai tiếp điểm.

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Bài toán 1. Cho đường thẳng a và một điểm O cách a một khoảng 7 cm. Hãy xác định vị trí tương đối của a với các đường tròn sau:

a) Đường tròn $(O; 5\text{ cm})$;

b) Đường tròn $(O; 7\text{ cm})$;

c) Đường tròn $(O;9\text{ cm})$.

Lời giải

a) Vì $d>R$ $(7>5)$ nên a và đường tròn $(O;5\text{ cm})$ không giao nhau.

b) Vì $\text{d}=\text{R}=7\text{ cm}$ nên a và đường tròn $(O;7\text{ cm})$ tiếp xúc.

c) Vì $\text{d}<\text{R}(7<9)$ nên a và đường tròn $(O;9\text{ cm})$ cắt nhau tại hai điểm.

Bài toán 2. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng a đến đường tròn $(O;7\text{ cm})$ nếu khoảng cách từ O đến a bằng:

a) 4 cm;

b) 9 cm;

c) 7 cm.

Lời giải

a) Vì $d<R$ $(4<7)$ nên a cắt đường tròn $(O;7\text{ cm})$ tại hai điểm.

b) Vì $d>R$ $(9>7)$ nên a và đường tròn $(O;7\text{ cm})$ không giao nhau.

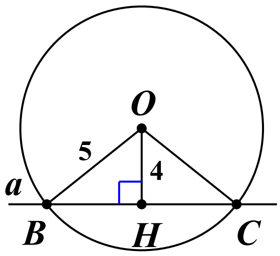
c) Vì $d=R=7\text{ cm}$ nên a và đường tròn $(O;7\text{ cm})$ tiếp xúc.

Bài toán 3. Cho đường thẳng a và một điểm O cách a một khoảng 4 cm. Vẽ đường tròn tâm O bán kính 5 cm.

a) Giải thích vì sao a và (O) cắt nhau.

b) Gọi B và C là các giao điểm của đường thẳng a và đường tròn $(O;5\text{ cm})$. Tính độ dài dây BC.

Lời giải



a) Gọi OH là khoảng cách từ O đến đường thẳng a, khi đó $OH<OB$ $(4<5)$ hay $d<R$, nên đường thẳng a cắt đường tròn $(O;5\text{ cm})$ tại 2 điểm.

b) Dễ thấy tam giác BOC cân tại O $(OB=OC=R)$ nên đường cao OH đồng thời là đường trung tuyến hay H là trung điểm của BC.

Xét tam giác BHO vuông tại H. Theo định lí Pythagore, ta có:

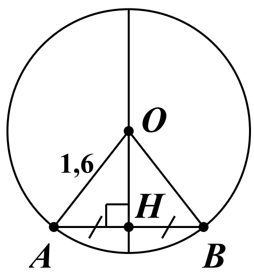
$$OB^2=OH^2+BH^2 \Rightarrow BH^2=OB^2-OH^2=5^2-4^2$$

$$\Rightarrow BH=\sqrt{5^2-4^2}=3(\text{cm})$$

Do đó $BC = 2BH = 2.3 = 6\ (\text{cm})$.

Bài toán 4. Trong hình vẽ, mép ngoài cửa ra vào có dạng một phần của đường tròn bán kính $1{,}6$ m. Hãy tính chiều cao HK của cửa đó, biết $AH = 0{,}9$ m.

Lời giải



Xét tam giác AHO vuông tại H.

Theo định lý Pythagore, ta có:

$OA^2 = OH^2 + AH^2$

$\Rightarrow OH^2 = OA^2 - AH^2 = 1{,}6^2 - 0{,}9^2$

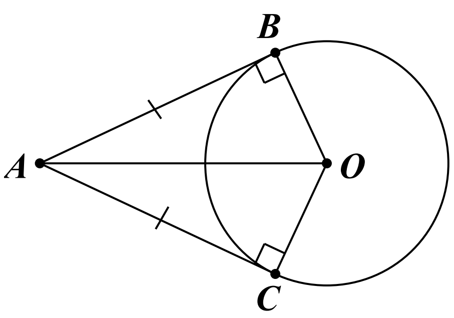
$\Rightarrow OH = \sqrt{1{,}6^2 - 0{,}9^2} = 1{,}3\ (\text{m})$

Chiều cao $HK = HO + OK = 1{,}3 + 1{,}6 = 2{,}9\ (\text{m})$.

II. Chứng minh đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn

Bài toán 5. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm). Lấy một điểm C trên đường tròn sao cho $AC = AB$. Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



Nối A với (O).

Xét ΔACO và ΔABO có

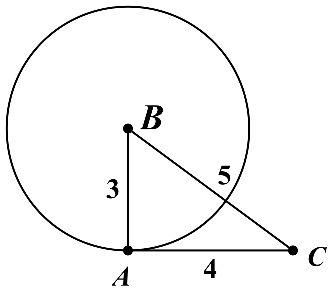
OA cạnh chung, $AC = AB$ (gt), $OC = OB\ (= R)$

Do đó $\Delta ACO = \Delta ABO$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{ABO} = 90°$

Chứng tỏ $AC \perp OC$ hay AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài toán 6. Cho tam giác ABC có $AB=3; AC=4$ và $BC=5$. Chứng minh rằng đường thẳng AC là tiếp tuyến của đường tròn $(B;3)$.

Lời giải



Xét tam giác ABC, ta có:
$BC^2 = AB^2 + AC^2 \left(5^2 = 3^2 + 4^2\right)$.

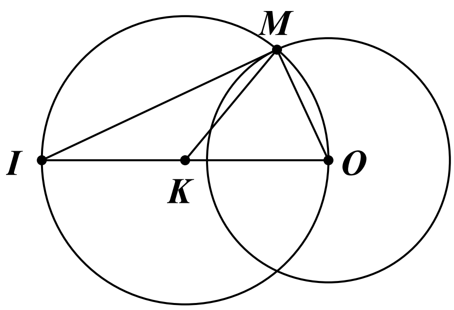
Theo định lí Pythagore đảo, tam giác ABC vuông tại A hay $AB \perp AC$ (1)

Lại có $AB = 3$ nên điểm A thuộc đường tròn $(B;\ 3)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của đường tròn $(B;\ 3)$.

Bài toán 7. Cho đường tròn (O) và điểm I ở ngoài đường tròn. Gọi M là giao điểm của đường tròn tâm K đường kính IO và đường tròn (O). Chứng minh đường thẳng IM là tiếp tuyến của (O) tại M.

Lời giải



M là giao điểm của đường tròn tâm K đường kính IO và đường tròn (O) nên M thuộc $\left(K;\dfrac{IO}{2}\right)$, ta có: $KM = KI = KO$ hay $KM = \dfrac{IO}{2}$ (*).

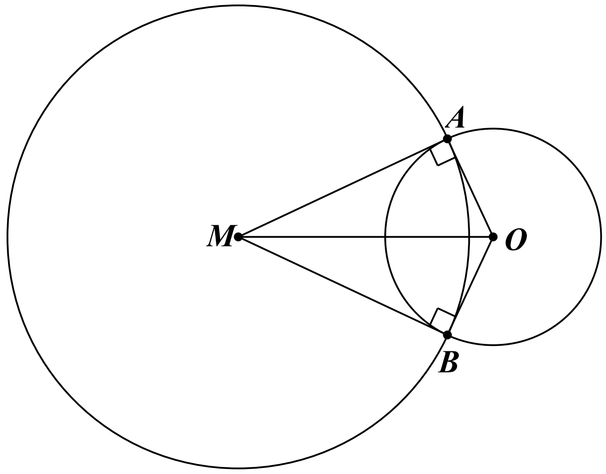
Xét tam giác IMO có K là trung điểm của IO nên KM là đường trung tuyến và (*) nên tam giác IMO vuông tại M hay $IM \perp OM$ (1)

Mặt khác $M \in (O)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ đường thẳng IM là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M.

Bài toán 8. Cho A là một điểm thuộc đường tròn (O), M là một điểm thuộc tiếp tuyến của (O) tại A (M khác A). Đường tròn tâm M bán kính MA cắt (O) tại B (B khác A. Chứng minh rằng MB là một tiếp tuyến của (O).

Lời giải



Ta có MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A nên $MA \perp OA$ hay $\widehat{MAO} = 90°$.

Đường tròn tâm M bán kính MA cắt (O) tại B nên $MB = MA$ và $B \in (O)$.

Xét ΔMAO và ΔMBO có:

OM chung,

$OA = OB = r$ (r là bán kính đường tròn (O))

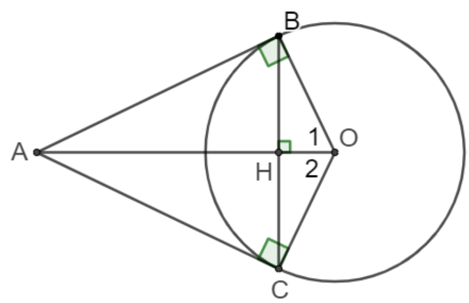
MA = MB =R (R là bán kính đường tròn (M))

Do đó $\Delta MAO = \Delta MBO(c.c.c) \Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^o$ hay $MB = OB$

Mà $\Rightarrow$ MB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài toán 9. Cho đường tròn (O) dây BC khác đường kính, qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn ở A Chứng minh rằng AC la tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



Gọi H là giao điểm của OA và BC

ΔBOC cân tại O có OH là đường cao (gt)

nên đồng thời là đường phân giác: $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$

Xét ΔACO và ΔABO có: OB = OC = R,

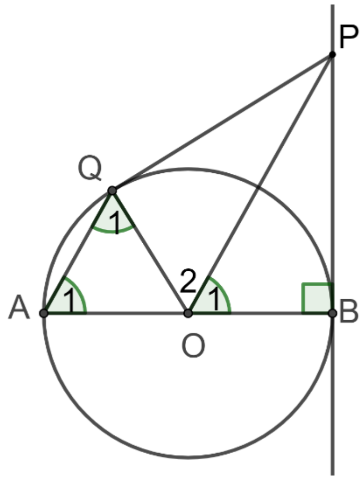
$\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (cmt), AO chung

=> ΔACO = ΔABO (c.g.c) => $\widehat{ACO} = \widehat{ABO} = 90^o$

Chứng tỏ AC là tiếp tuyến của (O).

Bài toán 10. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến tại B với đường tròn (O), trên tiếp tuyến lấy P. Qua A kẻ đường thẳng song song với OP cắt (O) tại Q. Chứng minh PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



Ta có: AQ // OP (gt)

$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{O_1} (\text{ở vị trí đồng vị}) \\ \widehat{Q_1} = \widehat{O_2} (\text{ở vị trí so le trong}) \end{cases}$

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{Q_1}$ (ΔAOQ cân) $\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2}$

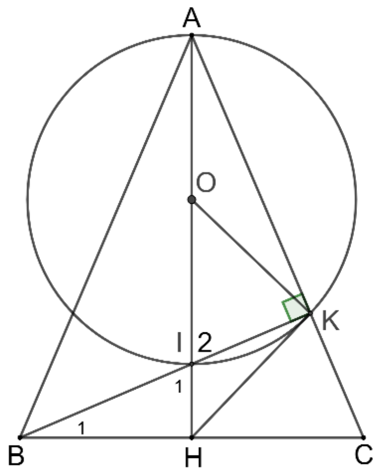
Xét ΔPQO và ΔPBO có: OP chung, $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (cmt), OQ = OB (=R)

Vậy ΔPQO = ΔPBO (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{PQO} = \widehat{PBO} = 90^\circ$

Hay PQ ⊥ OQ, chứng tỏ PQ là tiếp tuyến của (O).

Bài toán 11. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH và BK cắt nhau tại I. Chứng minh rằng HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

Lời giải



Gọi O là tâm đường tròn đường kính AI. Hiển nhiên K thuộc (O) (vì $\widehat{AKI} = 90^\circ$).

ΔABC cân tại A có AH là đường cao (gt) nên AH đồng thời là đường trung tuyến ⇒HB=HC.

Xét ABKC vuông tại K có KH là đường trung tuyến nên $KH = BH = \dfrac{BC}{2}$

Do đó ΔBHK cân tại H $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{BKH}$ (1)

Lại có ΔIOK cân tại O (OI=OK=R)

$\Rightarrow \widehat{I_2} = \widehat{OKI}$ mà $\Rightarrow \widehat{I_2} = \widehat{I_1}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{OKI} = \widehat{I_1}$ (2)

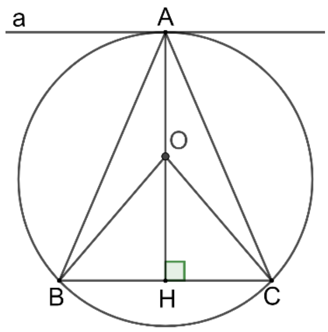
Mặt khác ΔBHI vuông tại H (gt) nên $\widehat{B_1} + \widehat{I_1} = 90^\circ$ (3)

Từ (1),(2) và (3) ta có: $\widehat{BKH} + \widehat{OKI} = 90^\circ$ hay HK ⊥ OK

Vậy HK là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Bài toán 12. Cho đường tròn (O) đi qua ba điểm A,B và C của một tam giác cân tại A. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua A và song song với BC là một tiếp tuyến của (O).

Lời giải



Ta có: AB = AC (gt)

OB = OC = R (R là bán kính của đường tròn (O)) nên OA thuộc đường trung trực của đoạn BC

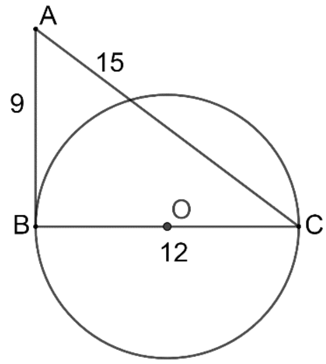
hay $OA \perp BC$ tại H.

a qua A và a // BC $\Rightarrow$ a $\perp$ OA tại A

Chứng tỏ a là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài toán 13. Trong hình vẽ AB= 9, BC =12,AC=15 và BC là đường kính của đuờng tròn (O). Chứng minh AB là tiếp tuyến của đuòng tròn(O).

Lời giải



Ta có: $BC^2 + AB^2 = AC^2 (12^2 + 9^2 = 15^2)$

Theo định lý Pythagore đảo, ΔABC vuông tại B hay $AB \perp CB$

mà BC là đường kính của đường tròn (O) (gt)

$\Rightarrow$AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

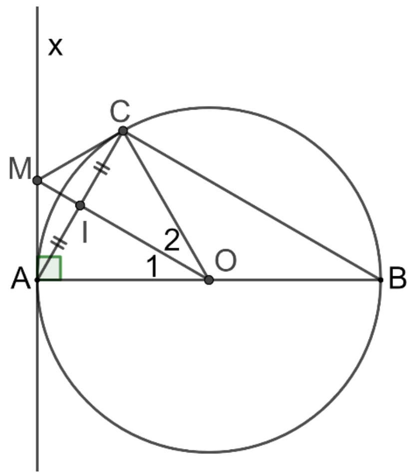
Bài toán 14. Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho AC=R. Gọi I là trung điểm của dây AC. Đường thẳng OI cắt tiếp tuyến Ax tại M. Chứng minh rằng:

a) $\overset{\frown}{ACB}$ có số đo bằng 90°, từ đó suy ra độ dài của BC theo R;

b) OM là tia phân giác của $\overset{\frown}{COA}$;

c) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

Lời giải



a)Xét ΔAOC có OA = OC (=R)

nên ΔAOC cân tại O.

Lại có AC = R (gt) nên tam giác AOC đều

$\Rightarrow \overset{\frown}{AOC} = 60^\circ$

$\Rightarrow \overset{\frown}{COB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$(kề bù)

Mặt khác tam giác COB cũng cân tại O có góc ở đỉnh 120°

$$\Rightarrow \overset{\frown}{OBC} = \overset{\frown}{OCB} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

ΔAOC đều (cmt) $\Rightarrow \overset{\frown}{ACO} = 60^\circ$

$\Rightarrow \overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{ACO} + \overset{\frown}{OCB} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

Ta có ACB là nửa tam giác đều có cạnh 2R

$\Rightarrow$ đường cao BC=$\dfrac{2R\sqrt{3}}{2}$ =$R\sqrt{3}$

b) Vì AC = R (gt) nên tam giác AOC đều (cmt) có OI là đường trung tuyến nên đồng thời là đường phân giác của góc COA hay OM là tia phân giác của $\widehat{AOC}$.

c) Xét ΔMCO và ΔMAO có:

OM cạnh chung, $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$(cmt), OC = OA (=R)

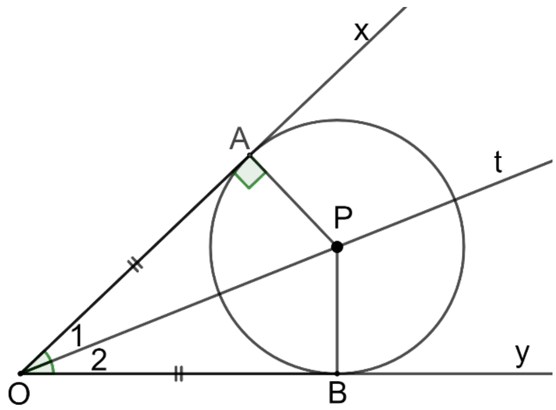
Do đó ΔMCO = ΔMAO (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MCO} = \widehat{MAO} = 90^o$ hay MC ⊥ OC

Mà C ∈ (O) nên MC là tiếp tuyến cua đường tròn (O; R).

Bài toán 15. Cho góc xOy với đường phân giác Ot và điểm A trên cạnh Ox, điểm B trên cạnh Oy sao cho OA = OB. Đường thẳng qua A và vuông góc với Ox cắt Ot tại P. Chứng minh rằng OA và OB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (P; PA)

Lời giải



Xét ΔOBP và ΔOAP có:

OP cạnh chung, $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$(gt), OB = OA (gt)

Do đó ΔOBP = ΔOAP (c.g.c)

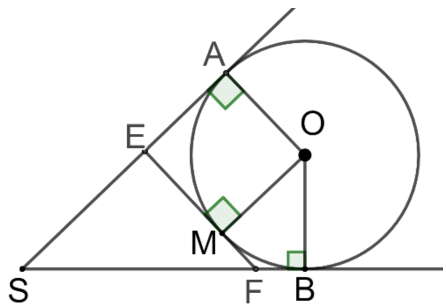
$\Rightarrow PB = PA$,chứng tỏ B thuộc đường tròn tâm P.

Lai có $\widehat{OBP} = \widehat{OAP} = 90^o$(góc tương ứng)

$\Rightarrow$ OB ⊥ PB, chứng tỏ OB là tiếp tuyến của đường tròn (P; PA).

Vây PA, PB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (P; PA).

Bài toán 16. Cho SA và SB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn(O)(A và B là hai tiếp điểm)



Gọi M là điểm tuỳ ý trên cung nhỏ AB. Tiếp tuyến cúa (O) tại M cắt SA tai E và cat SB tai F.

a) Chứng minh rằng chu vi của tam giác SEF bằng SA + SB.

b)Giả sử M là giao điểm của đọan SO với đường tròn (O). Chứng minh rằng SE =SF.

Lời giải

Gọi P là chu vi của tam giác SEF.
Ta có P = SE + EM + FM + SF

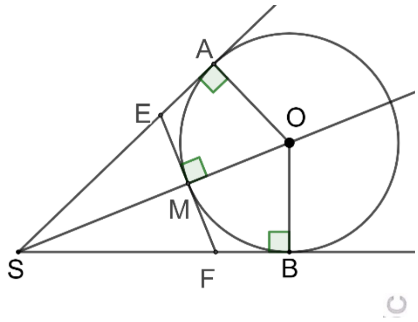
mà EA = EM (tính chất tiếp tuyến cắt nhau) tương tự FM = FB

$\Rightarrow$ P = SE + EA + FB + SF

Mà SE + EA = SA và FB + SF = SB

$\Rightarrow$ P = SA + SB (đpcm)

Vậy chu vi của tam giác SEF bằng SA+SB.



b)(Xem hình vẽ).

Khi M là giao điểm của SO với đường tròn (O), ta có: EF $\perp$ SO tại M.

Xét tam giác ESF có SM là đường cao (vì M là tiếp điểm của tiếp tuyến tại M) đồng thời SM hay SO là đường phân giác (tính chất tiếp tuyến cắt nhau) nên tam giác SEF cân tại S $\Rightarrow$ SE = SF(đpcm).

Bài toán 17. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O; R). Vẽ đường tròn đường kính AO cắt đường tròn (O; R) tại hai điểm B và C.

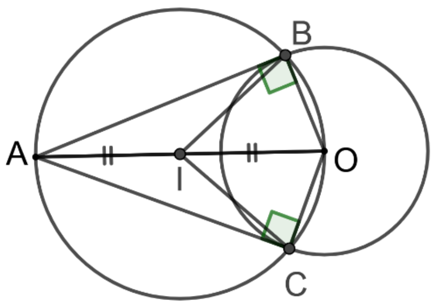
a) Chứng minh AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

b) Chứng minh AB=AC.

c) Xác định tia phân giác của $\widehat{BAC}$ và $\widehat{BOC}$

Lời giải

a) Gọi I là tâm của đường tròn đường kính OA, ta có I là trung điểm của OA



Đường tròn đường kính OA cắt đường tròn (O; R) tại B và C nên ta có

$$IA = IB = IO = \frac{OA}{2}$$

Xét tam giác ABO có $IB = \frac{OA}{2}$ (cmt) nên tam giác ABO vuông tại B hay AB $\perp$ OB.

Chứng minh tương tự, ta có AC $\perp$ OC mà B,C $\in$ (O)

Do đó AB và AC là hai tiếp tuyến của dường tròn (O; R).

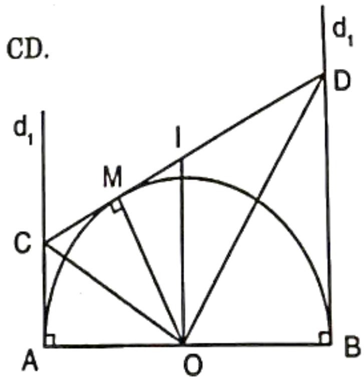
b) Theo tính chất hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một diểm, ta có AB=AC.

c) Tia phân giác của góc BAC và góc BOC là tia OA

Bài toán 18. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến tại A và B với nửa đường tròn. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến tại A và B lần lượt tại C và D.

a)Chứng minh ràng: CD = CA + BD; $\widehat{COD} = 90^{o}$

b)Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.



Lời giải

a) Ta có CA = CM; DB = DM

(tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $CD = CM + DM \Rightarrow CD = CA + BD$

Lại có CO và DO là các tia phân giác của góc kề bù $\widehat{AOM}$ và $\widehat{BOM}$ nên $\widehat{COD} = 90^{o}$

b) Gọi I là trung điểm của CD ta có OI là đường trung tuyến cua tam giác vuông COD nên IO =IC =ID

hay I là tâm của đường tròn đường kính CD.

Dễ thấy tứ giác ABCD là hình thang vuông có OI là đường trung bình nên IO // AC và BD mà AC và BD cùng vuông góc với AB (gt)

$\Rightarrow IO \perp AB$.

Chứng tỏ AB là tiếp tuyến cúa đường tròn đường kính CD.

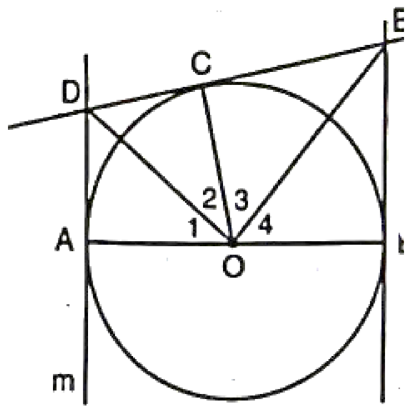
Bài toán 19. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB và các đường thẳng m, n, p lần lượt tiếp xúc với đường tròn tại A, B, C (hình vẽ). Chứng minh:

a) $AD + BE = DE$

b) $\widehat{COD} = \frac{1}{2}\widehat{COA}$ và $\widehat{COE} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$

c) Tam giác ODE vuông;

d) $\frac{OD.OE}{DE} = R$



Lời giải

a) Ta có các đường thẳng m, n, p lân lượt là các tiếp tuyến tai các điểm tại A, B,C với đường tròn(O;R).

Ta có AD=CD (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Tương tự BE = CE mà $CD + CE = DE \Rightarrow AD + BE = DE$ (đpcm)

Do DC và DA là hai tiếp tuyến cắt nhau tại D,

Ta có: OD là tia phân giác của góc COA hay $\widehat{COD} = \widehat{AOD} = \frac{1}{2}\widehat{COA}$

Tương tự OE là tia phân giác của góc COB nên $\widehat{COE} = \widehat{BOE} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$

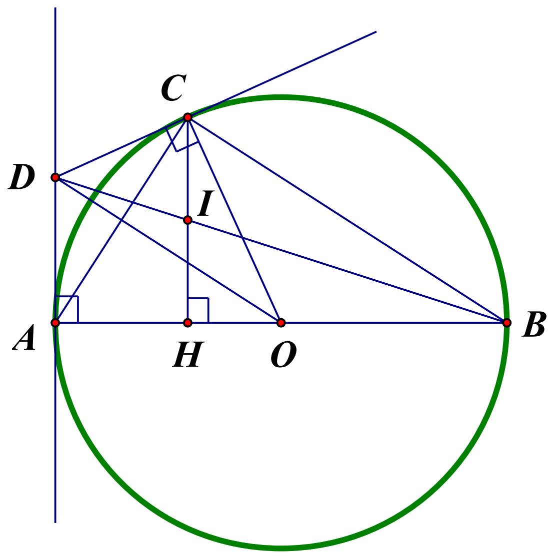
c)Ta có $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}; \widehat{O_3} = \widehat{O_4}$ (cmt) mà $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^o$

Chứng tỏ ΔODE vuông tại O.

Bài toán 20. Cho đường tròn (O) đường kính AB. C là một điểm nằm trên đường tròn (O), các tiếp tuyến của đường tròn tại A và C cắt nhau ở D. Gọi H là hình chiếu của C trên AB và I là giao điểm của BD và CH. Chứng minh rằng CI = HI.

Lời giải



a) Ta có: $DA = DC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$OA = OC\ (= R)$

Nên DO là đường trung trực của AC

$\Rightarrow\ DO \perp AC$

Lại có $CB \perp AC$ (AB là đường kính)

$\Rightarrow\ DO // BC \Rightarrow\ \widehat{AOD} = \widehat{ABC}$ (đồng vị)

Do đó $\Delta DOA \backsim \Delta CHB$ (g.g)

$\Rightarrow\ \dfrac{AO}{HB} = \dfrac{AD}{HC}\ \Rightarrow AO.HC = AD.HB$ (1)

Lại có $IH // AD$ (cùng vuông góc với AB) theo hệ quả của định lí Thalès

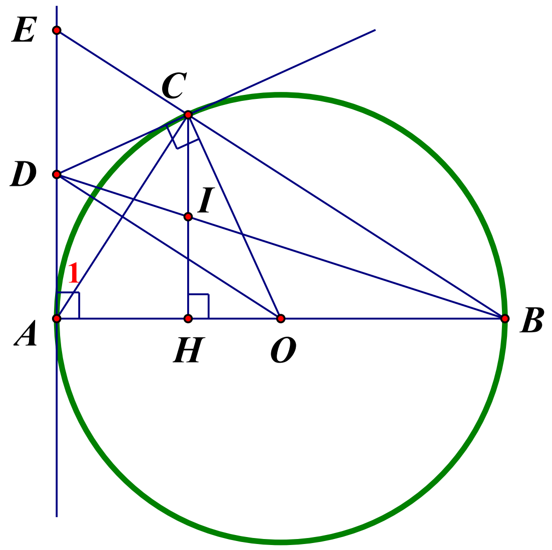
$\dfrac{IH}{AD} = \dfrac{HB}{AB} \Rightarrow AD.HB = IH.AB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\ AO.HC = IH.AB$ mà $AB = 2AO$

$\Rightarrow AO.HC = IH.2AO \Rightarrow HC = 2IH$

Chứng tỏ I là trung điểm của HC hay CI = HI.

Cách khác:



Có $\widehat{ACB} = 90^o$ (AB là đường kính)

$\Rightarrow \widehat{ACE} = 90^o$ hay $\widehat{ACD} + \widehat{DCE} = 90^o$ (1)

ΔACE vuông tại C $\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{E} = 90^o$ (2)

Lại có ΔADC cân tại D (tính chất tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{ACD}$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow\ \widehat{E} = \widehat{DCE}$

Hay ΔEDC cân tại D $\Rightarrow DE = DC$

Mà $DC = DA \Rightarrow DE = DA$

Lại có $AE // CH$ $(\perp AB)$

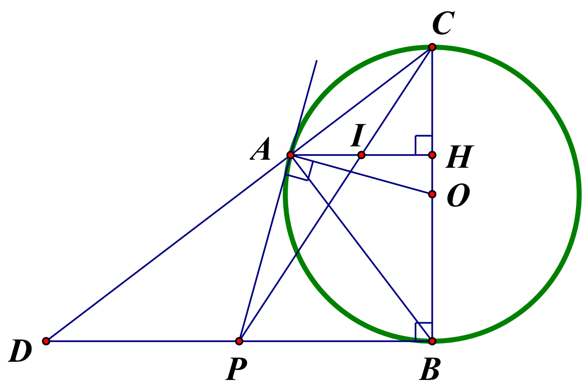
Xét ΔDAB có $IH // AD$

Theo hệ quả của định lí Thalès $\dfrac{IH}{AD} = \dfrac{BI}{BD}$ (4)

Tương tự với ΔBDE có $CI // DE \Rightarrow \dfrac{IH}{AD} = \dfrac{CI}{DE}$ mà $AD = DE$ (cmt) $\Rightarrow IH = CI$

Bài toán 21. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến PA, PB (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến đường kính BC. Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm I của AH.

Lời giải



Gọi D là giao điểm của đường thẳng AC và BP. Ta có $\widehat{BAC} = 90^o$ (BC là đường kính)

$\Rightarrow \widehat{BAD} = 90^o$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{DAP} + \widehat{PAB} = 90^o$ (1)

ΔABD vuông tại A (cmt)

$\Rightarrow \widehat{DBA} + \widehat{ADB} = 90^o$ (2)

Mặt khác PA, PB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại P của đường tròn (O) nên PA = PB và $\widehat{PAB} = \widehat{PBA}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra : $\widehat{DAP} = \widehat{ADP}$

Do đó ΔAPD cân tại P $\Rightarrow$PA = PD mà PA = PB (tính chất tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow$PD = PB

Lại có $DB // AH (\perp BC)$

Xét ΔPBC có $IH // PB (\perp BC) \Rightarrow \dfrac{IH}{PB} = \dfrac{IC}{PC}$ (định lí Thalès) (4)

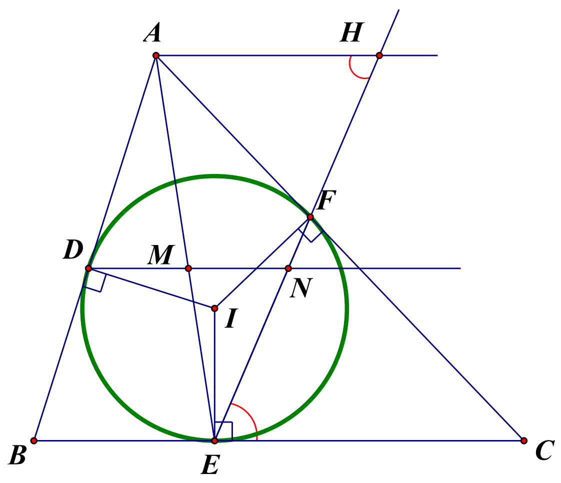
Tương tự ΔPDC có $IA // PD (\perp BC) \Rightarrow \dfrac{IA}{PD} = \dfrac{IC}{PC}$ (định lí Thalès) (5)

Từ (4) và (5) suy ra : $\dfrac{IH}{PB} = \dfrac{AI}{DP} \Rightarrow IH = IA$ (vì PB = PD)

Bài toán 22. Cho đường tròn tâm I nội tiếp ΔABC, các tiếp điểm trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt là D, E, F. Qua D kẻ đường thẳng song song với BC cắt EF tại N và AE tại M. Chứng minh rằng : M là trung điểm của DN.

Lời giải

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng EF tại H.



Ta có $\widehat{AHF} = \widehat{FEC}$ (1) (so le trong)

Lại có CE = CF (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Nên ΔECF cân tại C $\Rightarrow$ $\widehat{FEC} = \widehat{CFE}$ (2)

Mà $\widehat{EFC} = \widehat{AFH}$ (3) (đối đỉnh)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $\widehat{AHF} = \widehat{AFH}$

Hay ΔAHF cân tại A $\Rightarrow$ AH = AF = AD

Xét ΔABE có DM // BE (gt)

Theo hệ quả của định lí Thalès ta có $\dfrac{DM}{BE} = \dfrac{AD}{AB}$ $\Rightarrow$

$\dfrac{DM}{AD} = \dfrac{BE}{AB}$

Mà AD = AH (cmt) và BE = BD (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \dfrac{DM}{AH} = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{EM}{AE}$ (4) (định lí Thalès)

Mặt khác xét ΔAEH có MN // AH (gt). Theo hệ quả của định lí Thalès ta có $\dfrac{EM}{AE} = \dfrac{MN}{AH}$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \dfrac{DM}{AH} = \dfrac{MN}{AH} \Rightarrow$ DM = MN hay M là trung điểm của DN

Bài toán 23. Cho góc $\widehat{xOy} = 60^o$. Đường tròn tâm K bán kính R tiếp xúc với Ox tại A và Oy tại B. Từ điểm M trên cung nhỏ AB, vẽ tiếp tuyến với đường tròn, tiếp tuyến này cắt Ox, Oy lần lượt tại C và D.

a) Tính chu vi ΔCOD theo R. Chứng tỏ chu vi đó không đổi khi M chạy trên cung nhỏ AB.

b) Chứng tỏ số đo $\widehat{CKD}$ không đổi khi M chạy trên cung nhỏ AB.

Lời giải

a) Ta có OA, OB là hai tiếp tuyến của (O) nên OA = OB và OK là phân giác của $\widehat{AOB}$

$\Rightarrow \widehat{AOK} = \widehat{BOK} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2} = \dfrac{60^o}{2} = 30^o$

Do đó ΔOAK là nửa tam giác đều có cạnh AK = R $\Rightarrow$ OK = 2R nên

OA = OB $=\sqrt{OK^2-AK^2}$

$=\sqrt{(2R)^2-R^2}=R\sqrt{3}$

Lại có CD tiếp xúc với (K) tại M nên CM = CA và DM = DB

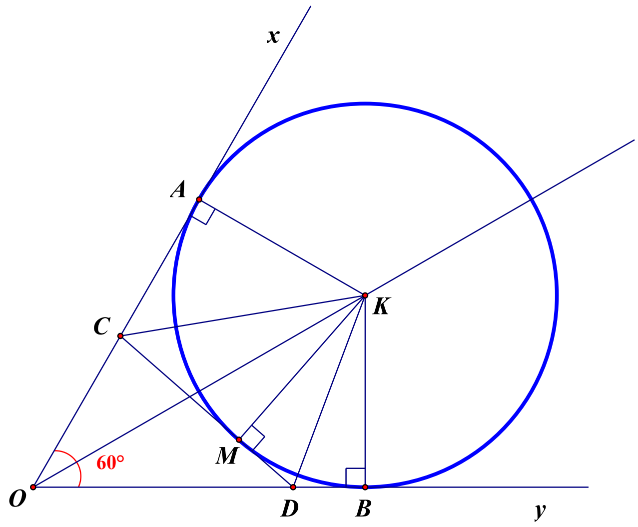
Gọi p là chu vi của ΔOCD, ta có

p_{OCD} = OC + CM + MD + OD

= OC + CA + DB + OD

= 2 OA = 2 $R\sqrt{3}$ (không đổi)

b) Ta có CK là phân giác của $\widehat{AKM}$



DK là phân giác của $\widehat{BKM}$

Mà $\widehat{AKM}+\widehat{BKM}=\widehat{AKB}=120^o$ (vì $\widehat{O}=60^o$ và $\widehat{A}=\widehat{B}=90^o$)

$\Rightarrow \widehat{CKD}=\frac{1}{2}\widehat{AKB}=\frac{1}{2}.120^o=60^o$ (không đổi)

Bài toán 24. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn. Từ một điểm M trên cung tròn trên cung nhỏ BC kẻ một tiếp tuyến thứ ba cắt hai tiếp tuyến kia tại P và Q. Chứng minh rằng khi M chuyển động trên cung BC thì chu vi tam giác APQ có giá trị không đổi.

Lời giải

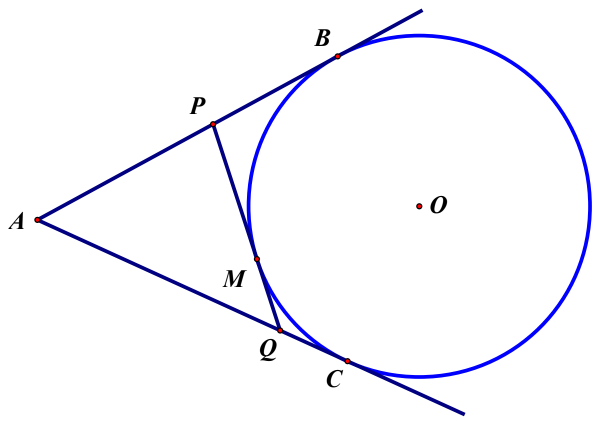
Ta có chu vi ΔAPQ bằng AP + PQ + QA và PQ = PM + MQ nên chu vi ΔAPQ bằng AP + PM + MQ + QA (1)

Mặt khác ta có: PB = PM và QC = QM (2) (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)

Từ (1) và (2) ta có :

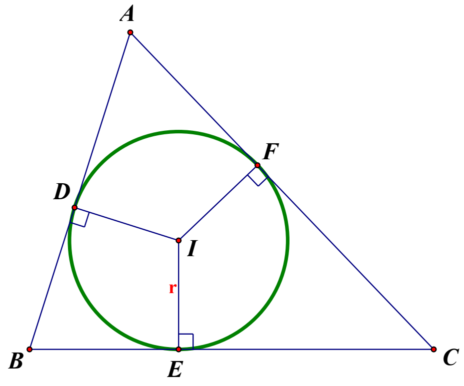
AP + PM + MQ + QA = AP + PB + QC + QA = AB + AC

Vậy chu vi ΔAPQ bằng AB + AC không đổi.



Bài toán 25. Cho đường tròn (I ; r) nội tiếp ΔABC, các tiếp điểm trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt là D, E, F. Chứng minh rằng : 2AD = AB + AC – BC (*)

Lời giải



Ta có AD = AF (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Tương tự BD = BE và CE = CF

Do đó:

AB + AC – BC = AD + BD + AF + CF – (BE + CE)

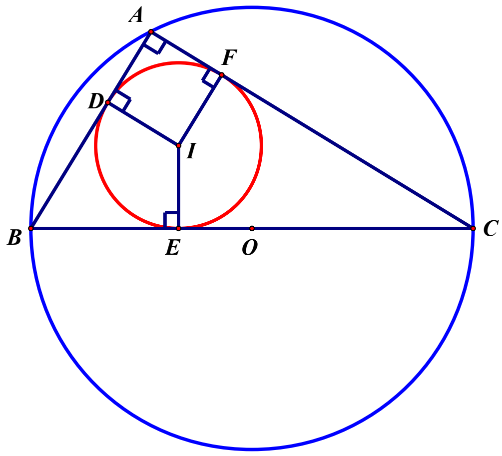
= AD + BE + AF + CE – BE – CE

= AD + AF = 2 AD

Bài toán 26. Cho tam giác ABC vuông tại A Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC.

Chứng minh rằng AB + AC = 2(R + r)

Lời giải



Dễ thấy AFID là hình chữ nhật (có 3 góc vuông)

Lại có AD = AF nên AFID là hình vuông

$\Rightarrow$ AD = AF = ID = r

Ta có BD = BE và CE = CF

$\Rightarrow$ AB + AC = AD + BD + AF + CF

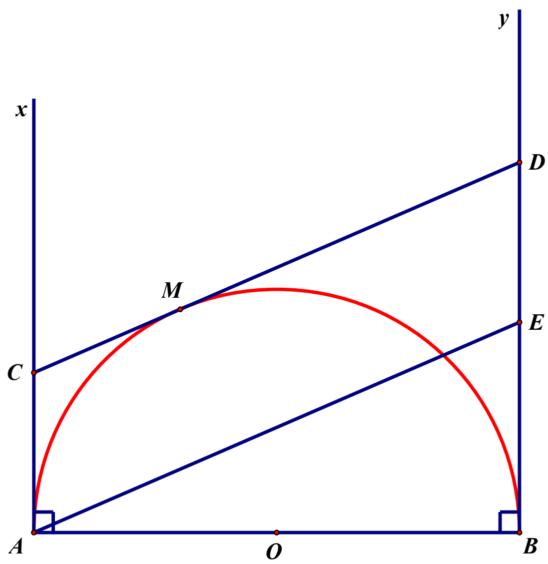
= AD + AF + BD + CF

= 2 r + 2 R

= 2 (r + R)

Bài toán 27. Cho nửa đường tròn (O ; R) đường kính AB. Từ A và B vẽ hai tiếp tuyến Ax và By. Một điểm M di động trên nửa đường tròn này qua M vẽ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax và By lần lượt tại C vàD. Hãy xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O ; R) sao cho AC + BD nhỏ nhất.

Lời giải



Kẻ AE // CD (E thuộc By)

Dễ thấy tứ giác ACDE là hình bình hành

$\Rightarrow$ AE = CD mà AC = MC (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Tương tự BD = MD nên AC + BD = MC + MD = CD

Lại có AE $\geq$ AB

$\Rightarrow$ AC + BD $\geq$ AB (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ E trùng với B

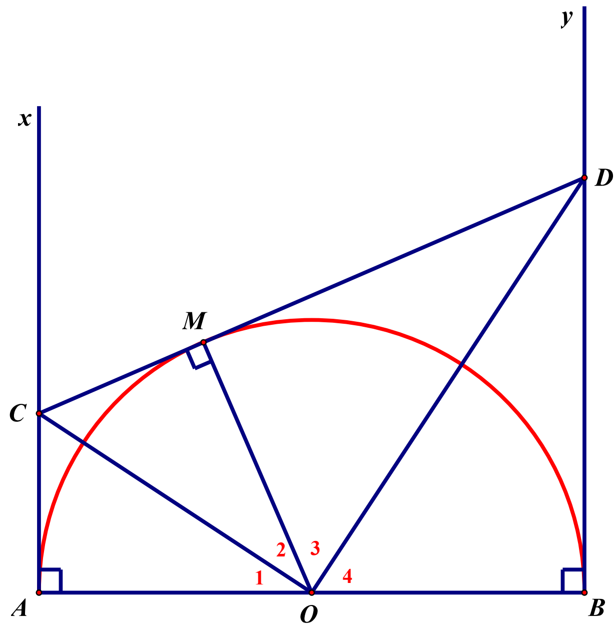
$\Leftrightarrow$ CD // AB $\Leftrightarrow$ $OM \perp AB$.

Vậy khi M là giao điểm của đường thẳng vuông góc với AB thì AC + BD nhỏ nhất.

Bài toán 28. Cho nửa đường tròn (O ; R) đường kính AB. Từ A và B vẽ hai tiếp tuyến Ax và By. Một điểm M di động trên nửa đường tròn này, qua M vẽ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax và By lần lượt tại C và

D. Hãy xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O ; R) sao cho 3AC + BD nhỏ nhất.

Lời giải



Ta có CM và CA là hai tiếp tuyến nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$

Tương tự $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$

Mà $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^o$

Hay tam giác COD vuông tại O

CD là tiếp tuyến tại M nên $CD \perp OM$

Xét ΔCMO và ΔOMD có:

$\widehat{CMO} = \widehat{DMO} = 90^o$, $\widehat{O_2} = \widehat{CDO}$ (cùng phụ với góc DCO)

Nên $\Delta CMO \backsim \Delta OMD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CM}{OM} = \dfrac{OM}{MD}$

$\Rightarrow CM.DM = OM^2 = R^2$ (không đổi)

Mà CM = AC, DM = BD $\Rightarrow AC.BD = R^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có: $\dfrac{3AC + BD}{2} \geq \sqrt{3.AC.BD}$

$\Leftrightarrow\ 3AC + BD \geq 2\sqrt{3.AC.BD} \Leftrightarrow\ 3AC + BD \geq 2\sqrt{3}.R$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\ 3AC = BD = \sqrt{3}.R \Leftrightarrow\ \widehat{AOC} = 30^o \Leftrightarrow \widehat{AOM} = 60^o$

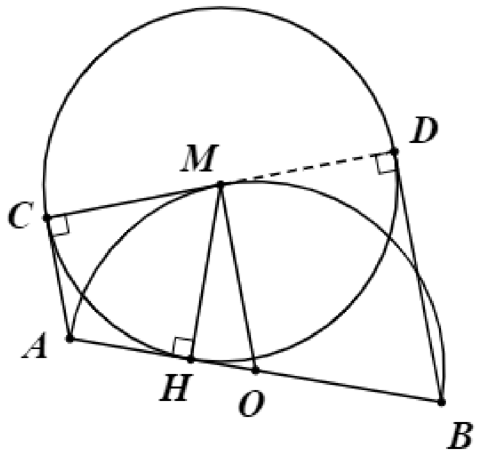
Vậy M di động ở trên (O) sao cho $\widehat{AOM} = 60^o$ thì 3AC + BD nhỏ nhất.

Bài toán 29. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. M là điểm bất kì thuộc nửa đường tròn, kẻ MH vuông góc với AB (H thuộc AB). Vẽ đường tròn tâm M bán kính MH. Kẻ các tiếp tuyến AC, BD với đường tròn tâm M (C, D là các tiếp điểm).

a) Chứng minh ba điểm C, M, D thẳng hàng và CD là tiếp tuyến của (O).

b) Chứng minh rằng khi M di chuyển trên nửa đường tròn (O) thì $AC + BD$ không đổi.

Lời giải



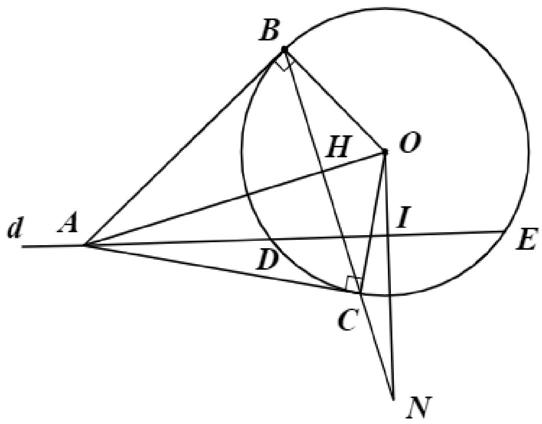
a) Ta có AC, AH là tiếp tuyến của đường tròn $(M;MH)$ nên AM là phân giác của góc $\widehat{CMH}$ hay $\widehat{CMA}=\widehat{AMH}$

Chứng minh tương tự có $\widehat{HMB}=\widehat{BMD}$ Mà $\widehat{AMH}+\widehat{HMB}=\widehat{AMB}=90^\circ$ (AB là đường kính)
$\Rightarrow \widehat{CMA}+\widehat{AMH}+\widehat{HMB}+\widehat{BMD}=180^\circ$ Hay ba điểm C, M, D thẳng hàng
$\Rightarrow CA//BD(\perp CD)$ hay tứ giác $ABDC$ là hình thang vuông có OM là đường trung bình nên $OM//AC$ và $BD \Rightarrow OM\perp CD$. Chứng tỏ CD là tiếp tuyến của (O).

b) Ta có $AC=AH$, $BD=BH$ (tính chất tiếp tuyến cắt nhau)
$\Rightarrow AC+BD=AH+BH=AB=2R$ không đổi.

Bài toán 30. Cho đường tròn $(O;R)$ một đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại hai điểm D và E. Một điểm A di động trên đường thẳng d và A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là hai tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của DE, đường thẳng OI cắt đường thẳng BC tại N. Chứng minh rằng: Khi A di động trên đường thẳng d thì BC luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



I là trung điểm của $DE(gt)\Rightarrow OI\perp DE$ hay ΔOIA vuông tại I

Gọi H là giao điểm của OA và BC.

Ta có ΔOHN vuông tại H

Ta có $\Delta OHN\sim\Delta OIA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{ON}{OA}=\dfrac{OH}{OI}\Rightarrow ON=\dfrac{OA.OH}{OI}$.

Xét ΔABO và ΔHBO có: $\widehat{ABO}=\widehat{BOH}=90^\circ$, $\widehat{AOB}$ chung

Do đó $\Delta ABO \sim \Delta BHO$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OB}{OH}=\dfrac{OA}{OB} \Rightarrow OA.OH=OB^2=R^2$

Do đó $ON=\dfrac{R^2}{OI}$ (không đổi), d cho trước, O cố định $\Rightarrow I$ cố định $\Rightarrow N$ cố định.

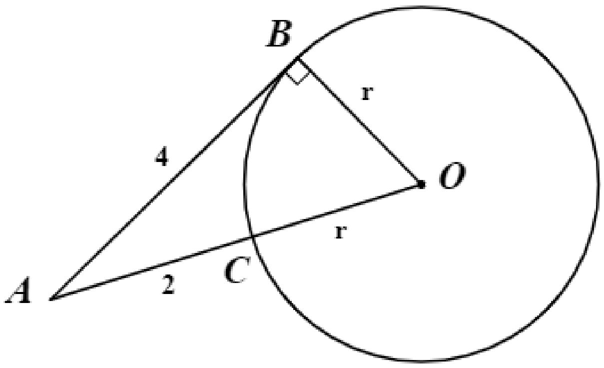
III. Tính toán

Bài toán 31. Trong hình vẽ, AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B.

a) Tính bán kính r của đường tròn (O).

b) Tính chiều dài cạnh OA của tam giác ABO.

Lời giải



a) AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại $B \Rightarrow AB \perp OB$. Xét tam giác ABO vuông tại B, theo định lí Pythagore: $OA^2=OB^2+AB^2$ hay $(r+2)^2=r^2+4^2$

$\Rightarrow r^2+4r+4=r^2+16$

$\Rightarrow 4r=16-4=12$

$\Rightarrow r=3$

Vậy bán kính của đường tròn (O) là $r=3$.

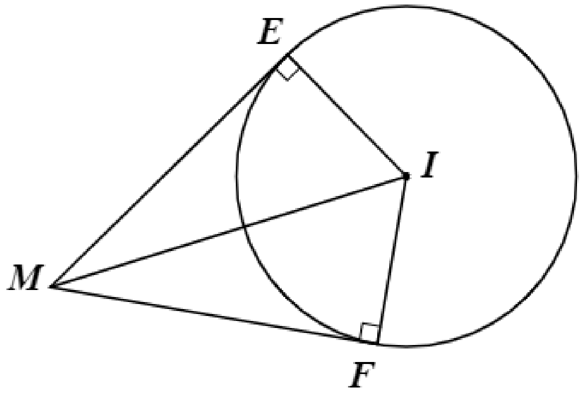
b) $OA=OC+AC=r+2 \Rightarrow OA=3+2=5$.

Bài toán 32. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(I;6\ cm)$ và ME, MF là hia tiếp tuyến của đường tròn này tại E và F. Cho biết $\widehat{EMF}=60^\circ$.

a) Tính số đo $\widehat{EMI}$ và $\widehat{EMI}$.

b) Tính độ dài MI.

Lời giải



a) Ta có MI là đường phân giác của góc EMF (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{EMI} = \widehat{FMI} = \dfrac{\widehat{EMF}}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Xét tứ giác $MEIF$ có: $\widehat{MEI} = \widehat{MFI} = 90^\circ$ (tính chất của tiếp tuyến)

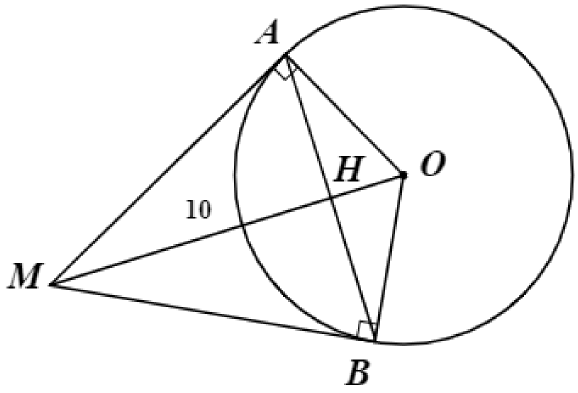
$\Rightarrow \widehat{EIF} = 360^\circ - \left(\widehat{MEI} + \widehat{MFI} + \widehat{EMF}\right) = 360^\circ - \left(90^\circ + 90^\circ + 60^\circ\right) = 120^\circ$

b) Xét tam giác MEI vuông tại E có $\widehat{EMI} = 30^\circ$ (cmt)

$\Rightarrow MI = 2EI = 2.6 = 12\left(\ cm\right)$.

Bài toán 33. Cho đường tròn $\left(O;6\ cm\right)$. M nằm ngoài đường tròn sao cho $OM = 10\ cm$. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (A, B là hai tiếp điểm). Tính độ dài các cạnh của tam giác MAB.

Lời giải



ΔMAO vuông tại A (tính chất tiếp tuyến)

Theo định lí Pythagore $MA^2 = MO^2 - OA^2$

$MA^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow MA = 8\left(\ cm\right)$

Ta có $MB = MA = 8\left(\ cm\right)$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Dễ thấy MO là đường trung trực của AB ($OA = OB$, $MA = MB$) $\Rightarrow MO \perp AB$ tại H.

Xét ΔMAO và ΔAHO có: $\widehat{MAO} = \widehat{AHO} = 90^\circ$, $\widehat{MOA}$ chung

Do đó $\Delta MAO \sim \Delta AHO$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MO}{AO} = \dfrac{AO}{HO} \Rightarrow AO^2 = MO \cdot HO$

$\Rightarrow HO = \dfrac{AO^2}{MO} = \dfrac{6^2}{10} = 3,6\,(cm)$

$\Rightarrow HM = MO - HO = 10 - 3,6 = 6,4\,(cm)$

Chứng minh tương tự, ta có: $\Delta AHM \sim \Delta OHA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AH}{MH} = \dfrac{HO}{AH} \Rightarrow AH^2 = MH \cdot HO = 6,4 \cdot 3,6$

$\Rightarrow AH = \sqrt{6,4 \cdot 3,6} \approx 4,8\,(cm)$

Vì MO là đường trung trực của $AB\,(cmt) \Rightarrow HA = HB = 4,8\,(cm)$

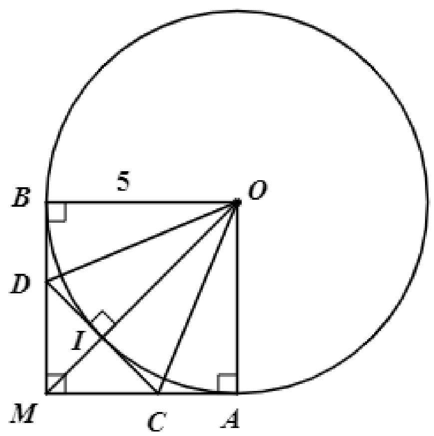
$\Rightarrow AB = HA + HB = 4,8 + 4,8 = 9,6\,(cm)$

Bài toán 34. Cho đường tròn $(O;5\ cm)$. Điểm M nằm ngoài (O) sao cho hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là hai tiếp điểm) vuông góc với nhau tại M.

a) Tính độ dài của MA và MB.

b) Qua giao điểm I của đoạn thẳng MO và đường tròn (O), vẽ một tiếp tuyến cắt MA, MB lần lượt tại C, D. Tính độ dài của CD.

Lời giải



a) Dễ thấy tứ giác $MBOA$ là hình chữ nhật (có ba góc vuông)

Lại có $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Nên $MBOA$ là hình vuông (hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông)

$\Rightarrow MA = MB = 5\ cm.$

b) DB và DI là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O) nên OD là tia phân giác của

$\widehat{MOB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{DOB} = \widehat{DOI} = \dfrac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ$.

Xét tam giác DBO vuông tại B, có $\widehat{DOB} = 22,5^\circ$ và cạnh góc vuông $OB = 5\ cm$.

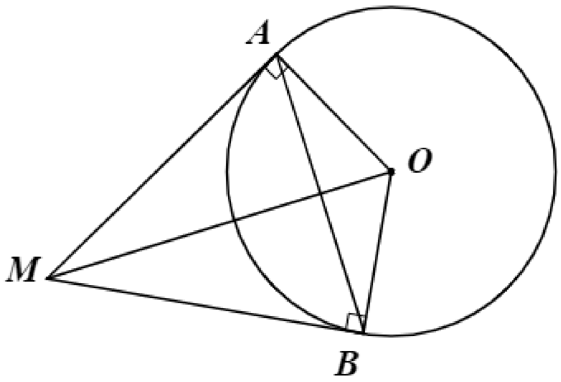
Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$BD = OB \cdot \tan \widehat{DOB} = 5 \cdot \tan 22,5^\circ \approx 2,1\,(cm) \Rightarrow DI = DB \approx 2,1\,(cm)$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Ta có $MD = MC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Tam giác DMC cân có MI là đường cao nên đồng thời là trung tuyến. Hay $IC = DI \approx 2,1$ (cm) $\Rightarrow CD = 2.2,1 \approx 4,2\,(cm)$

Bài toán 35. Cho đường tròn (O), điểm M nằm ngoài (O) sao cho MA và MB là hai tiếp tuyến (A, B là hai tiếp điểm) thoả mãn $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Biết chu vi tam giác MAB là 18 cm, tính độ dài dây AB.



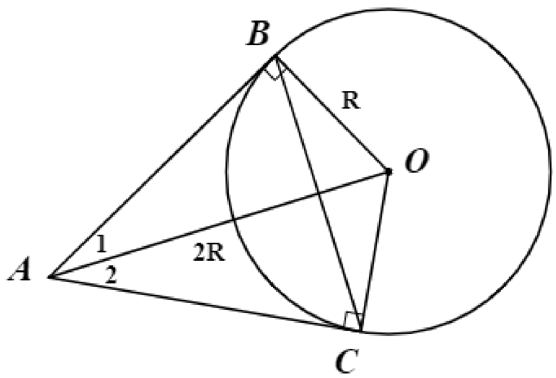
Lời giải

Ta có $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên tam giác AMB cân tại M có $\widehat{AMB} = 60^\circ\,(gt)$ nên tam giác AMB đều $\Rightarrow MA = MB = AM$ mà

$$MA + MB + AB = 18(\ cm) \Rightarrow AB = \frac{18}{3} = 6(\ cm)$$

Bài toán 36. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ với $OA = 2R$. Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là tiếp điểm). Chứng minh rằng ΔABC đều và tính các cạnh của nó theo R.

Lời giải



ΔABO vuông tại B (tính chất tiếp tuyến)

Ta có $\sin A_1 = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A_1} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$

$AB^2 = AO^2 - OB^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$

ΔABC cân (tính chất tiếp tuyến cắt nhau) có $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên là tam giác đều

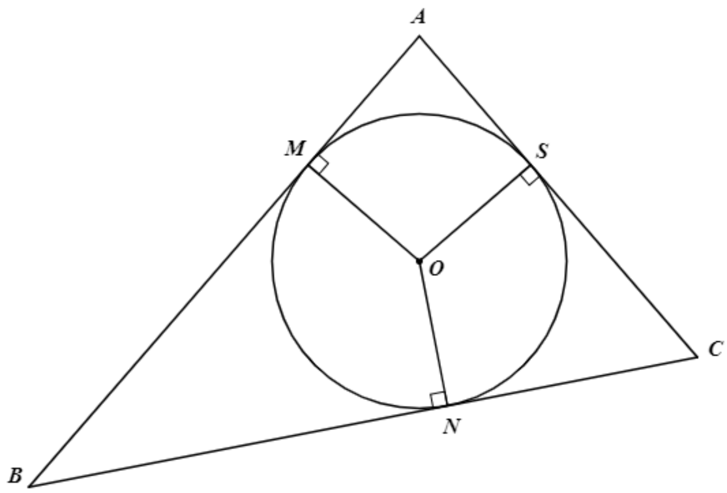
$\Rightarrow AC = BC = AB = R\sqrt{3}$.

Bài toán 37. Cho đường tròn (O) nội tiếp ΔABC, các tiếp điểm trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt là M, N và S.

a) Chứng minh rằng: $AB + AC - BC = 2AM$.

b) Cho $AB = 4\ cm$, $BC = 7\ cm$ và $CA = 5\ cm$. Tính các doạn thẳng AM, BM và CS.

Lời giải



a) Ta có $AB + AC - BC = AM + MB + AS + SC - BN - NC$

$= AM + AS = 2AM$

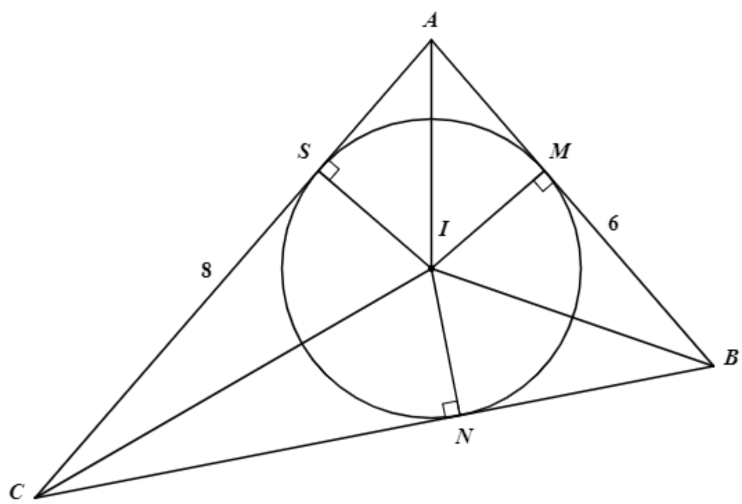
b) Theo câu a ta có: $AB + AC - BC = 2AM$

$$\Rightarrow AM = \frac{AB + AC - BC}{2}$$

$BM = 4 - 1 = 3$; $AS = AM = 1 \Rightarrow SC = 5 - 1 = 4$

Bài toán 38. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\ cm$, $AC = 8\ cm$. Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC. Tính bán kính của đường tròn tâm I.

Lời giải



Ta có tam giác ABC vuông tại A (gt) Theo định lí Pythagore:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

$\Rightarrow BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\ (cm)$

Gọi S_{ABC} là diện tích tam giác ABC

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC\ = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24\ (cm^2)$

Gọi bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là r

Ta có $S_{ABC} = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA} = \dfrac{1}{2}r \cdot AB + \dfrac{1}{2}r \cdot BC + \dfrac{1}{2}r \cdot AC$

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}r(AB + BC + AC)$

$\Rightarrow 24 \cdot 2 = r(AB + BC + AC)$

$\Rightarrow r = \dfrac{48}{AB + BC + AC} = \dfrac{48}{6 + 8 + 10} = 2$

Vậy bán kính đường tròn tâm I nội tiếp ΔABC là $r = 2\ (cm)$.

Nhận xét: Theo bài toán 36 trên. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, S_{ABC} là diện tích và nửa chu vi là $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2}$ thì $r = \dfrac{S}{p}$

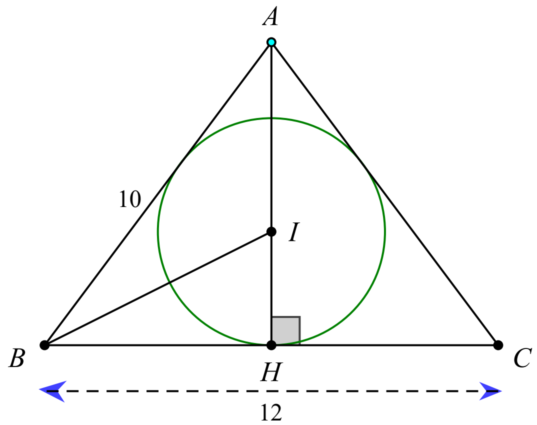
Bài toán 39. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 10\ cm$, $BC = 12\ cm$ và I là tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC. Tính bán kính của đường tròn (I).

Huớng dẫn: Theo bài 36. Để tính bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC ta tính diện tích của tam giác (S) và nửa chu vi (p).

Lời giải

ΔABC cân tại A, kẻ đường cao AH ta có AH đồng thời là đường trung tuyến

$HB = HC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{12}{2} = 6\ (cm)$ Theo định lí Pythagore:



$AH^2 = AB^2 - HB^2 = 10^2 - 6^2$

$\Rightarrow AH = 8(cm)$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AH = \dfrac{1}{2}.12.8 = 48(cm^2)$

$P = \dfrac{AB + AC + BC}{2} = 16(cm)$.

Vậy $r = \dfrac{48}{16} = 3(cm)$.

Cách khác:

ΔABC cân nên đường cao AH cũng đồng thời là đường phân giác, I là tâm của đường tròn nội tiếp nên CI là phân giác của ΔAHC.

Ta có $\dfrac{IA}{IH}=\dfrac{CA}{CH}=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{IA}{5}=\dfrac{IH}{3}=\dfrac{IA+IH}{5+3}=\dfrac{AH}{8}=1$

$\Rightarrow \dfrac{IH}{3}=1 \Rightarrow IH=3(cm)$.

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là $3(cm)$.

Chú ý: Đối với một tam giác tùy ý ta có thể chứng minh công thức diện tích sau đây:

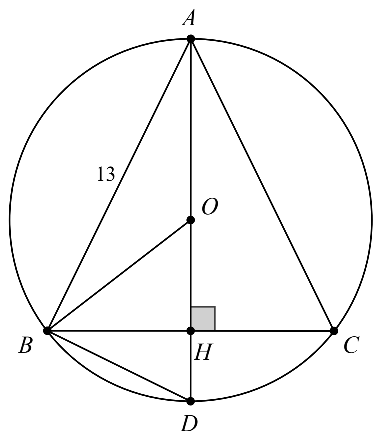
$S=p.r$ ($p=\dfrac{a+b+c}{2}$: nửa chu vi, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác, a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác) (Xem cách chứng minh bài toán 36).

Bài toán 40. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB=AC=13cm$, $BC=10cm$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính bán kính của đường tròn (O).

Lời giải

Kẻ đường kính AD cắt BC tại H ta có

$HB=HC=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{10}{2}=5$.



Theo định lí Pythagore $AB^2=AH^2+BH^2$

$AH^2=AB^2-BH^2=13^2-5^2 \Rightarrow AH=\sqrt{13^2-5^2}$

$\Rightarrow AH=12(cm)$.

Xét tam giác ABD có BO là đường trung tuyến mà $BO=AO=DO$ hay $BO=\dfrac{1}{2}AD$ nên tam giác ABD vuông tại B.

Xét ΔABD và ΔAHB có: $\widehat{BAD}$ chung và $\widehat{ABD}=\widehat{AHB}=90^0$

Do đó $\Delta ABD \sim \Delta AHB$ (g.g)

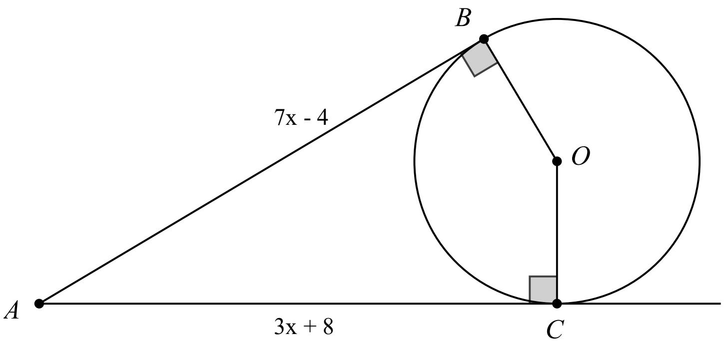
$\Rightarrow \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AB^2=AD.AH$

$\Rightarrow AD=\dfrac{AB^2}{AH}=\dfrac{13^2}{12}=14,1(cm)$

Vậy bán kính đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC: $R=\dfrac{14,1}{2}=7,05(cm)$.

Bài toán 41. Quan sát hình vẽ. Biết AB, AC lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C. Tính giá trị của x.

Lời giải



Ta có: $AB = AC$

(tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Hay $7x - 4 = 3x + 8$

$\Rightarrow 7x - 3x = 8 + 4$

$\Rightarrow 4x = 12$

$\Rightarrow x = 3$.

Bài toán 42. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), $MO = 13cm$, vẽ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm).

Tính độ dài MA, MB.

Cho C là điểm bất kì thuộc đường tròn (O) và nằm trong góc AOB. Tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt MA tại N và cắt MB tại P. Tính chu vi tam giác MNP.

Lời giải

Ta có: $MA \perp OA$ (tính chất tiếp tuyến) hay tam giác MAO vuông tại A.

Theo định lí Pythagore, ta có:

$MO^2 = MA^2 + OA^2 \Rightarrow MA^2 = MO^2 - OA^2 = 13^2 - 5^2$

$\Rightarrow MA = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(cm)$

Vậy $MB = MA = 12(cm)$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Gọi p là chu vi của tam giác MNP, ta có:

$p = MN + NC + CP + MP$

mà $NC = NA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Tương tự $CP = PB$

$\Rightarrow p = (MN + NA) + (PB + MP)$

$= MA + MB = 12 + 12 = 24(cm)$

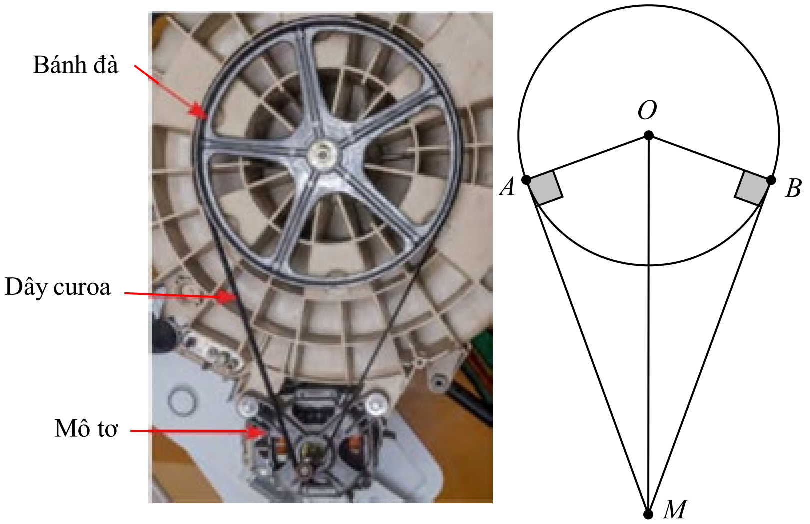
Vậy chu vi tam giác MNP bằng $24(cm)$.

III. TOÁN THỰC TẾ

Bài toán 43. Bánh đà của một động cơ được thiết kế có dạng là một đường tròn tâm O, bán kính $15cm$ được kéo bởi một dây curoa. Trục quay của mô tơ truyền lực được biểu diễn bởi điểm M (hình vẽ). Cho biết khoảng cách OM là $35cm$.

Tính độ dài của hai đoạn dây curoa MA và MB (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Tính số đo $\widehat{AMB}$ tạo bởi hai tiếp tuyến AM, AB và số đo $\widehat{AOB}$ (kết quả làm tròn đến phút).



a) b)

Lời giải

Xem hình vẽ.

Ta có $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

MA là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow MA \perp OA$ hay tam giác OAM vuông tại A.

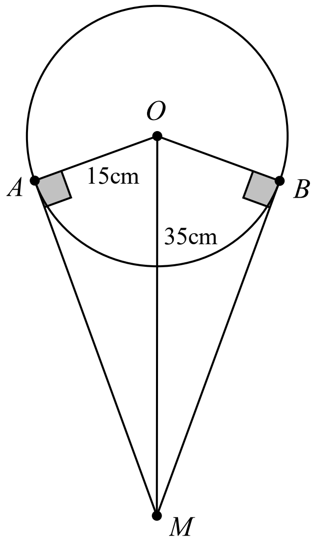
Theo định lí Pythagore, ta có:

$MO^2 = MA^2 + OA^2 \Rightarrow MA^2 = MO^2 - OA^2 = 35^2 - 15^2$

$\Rightarrow MA = \sqrt{35^2 - 15^2} \approx 31,6(cm)$

Vậy $MA = MB \approx 31,6cm$.

Tam giác vuông OAM có cạnh huyên $MO = 35cm$, cạnh góc vuông $OA = 15cm$.



Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$OA = OM.\sin\widehat{AMO}$

$\Rightarrow \sin\widehat{AMO} = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{15}{35} \Rightarrow \widehat{AMO} = 25^0 23'$

Vì MO là tia phân giác của góc AMB

$\Rightarrow AMB = 2.25^0 23' = 50^0 46'$

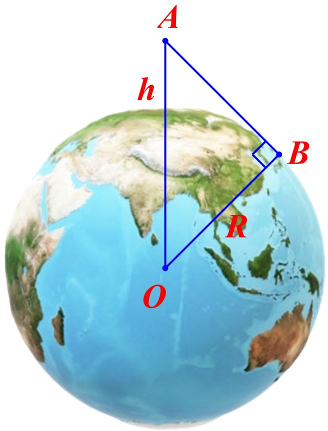
Xét tứ giác $MAOB$, ta có:

$\widehat{AOB} = 360^0 - \left(\widehat{MAO} + \widehat{MBO} + \widehat{AMB}\right)$

$\widehat{AOB} = 360^0 - \left(90^0 + 90^0 + 50^0 46'\right) = 129^0 32'$

Bài toán 44. Trong hình vẽ, mặt cắt của Trái Đất có thể xem là đường tròn tâm O bán kính $R = 6\,400km$. Từ điểm A nằm ở độ cao h so với mực nước biển, một người có thể thấy xa nhất đến điểm B trên (O) sao cho AB là tiếp tuyến của (O). Khoảng cách AB khi đó được gọi là tầm nhìn xa từ điểm A. Tính AB nếu $h = 20m$.

Lời giải



Đổi: $h = 20m = 0,02km$

Vì AB là tiếp tuyến của đường tròn $(O;6\,400km)$ nên $AB \perp OB$.

Tam giác ABO vuông tại B, có cạnh huyền $OA = R + h$ và cạnh góc vuông $OB = R$. Trong đó $R = 6\,400km$.

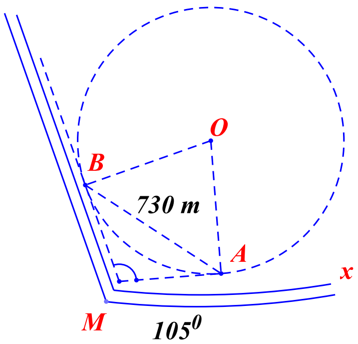
Theo định lí Pythagore, ta có:

$$OA^2 = OB^2 + AB^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = OA^2 - AB^2 = (R+h)^2 - R^2 = (6\,400 + 0,02)^2 - 6\,400^2$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(6\,400+0,02)^2 - 6\,400^2} = 16(km)$$

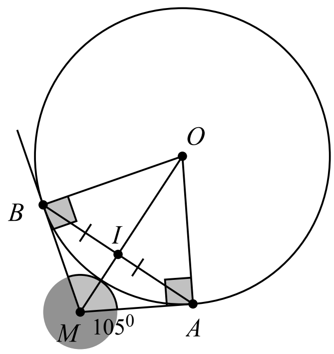
Bài toán 45. Trong hình vẽ, để tàu không trật bánh ray khi chuyển hướng từ đường ray thẳng XA sang đường ray thẳng YB, đoạn dây nối được thiết kế là một phần của đường tròn (O) tiếp xúc với XA tại A và BY tại B. Biết góc chuyển hướng của tàu là $\widehat{AMB} = 105^0$ và khoảng cách giữa hai điểm A và B là $730m$. Tính bán kính của đường tròn (O), làm tròn kết quả đến đơn vị mét.



Lời giải

Ta có $OA = OB = R; MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên MO là đường trung trực của đoạn AB.

Gọi I là giao điểm của MO và AB, ta có I là trung điểm của đoạn AB hay $IA = IB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{730}{2} = 365(m)$.



Xét tứ giác $AOBM$ có:

$$\widehat{AOB} = 360^0 - \left(\widehat{OBM} + \widehat{AMB} + \widehat{OAM}\right)$$

$$= 360^0 - (90^0 + 105^0 + 90^0) = 75^0$$

Lại có MO là tia phân giác của góc AOB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$$\Rightarrow \widehat{AOI} = \widehat{BOI} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{75^0}{2} = 37,5^0$$

Vì MO là đường trung trực của AB (cmt) $\Rightarrow MO \perp AB$ tại I.

Xét tam giác AOI vuông tại I có cạnh góc vuông $IA = 365(m)$, góc nhọn $\widehat{AOI} = 37,5^0$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$IA = OA.\sin \widehat{AOI}$

$\Rightarrow OA = \dfrac{IA}{\sin \widehat{AOI}} = \dfrac{365}{\sin 37,5^0} \approx 599(m)$

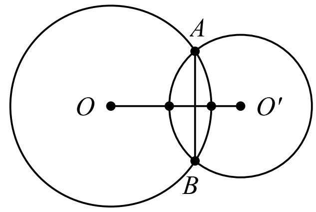
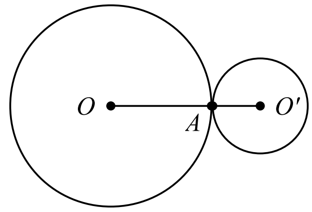
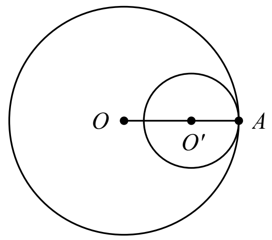
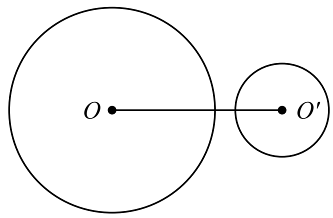
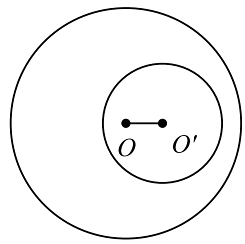
Vậy bán kính đường tròn (O) là $599m$.

BÀI 17. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Nhận xét: Bảng tóm tắt vị trí tương đối của hai đường tròn phân biệt $(O;R)$ và $(O';R')$ với $R \geq R'$

BẢNG TỔNG KẾT

Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức liên hệ	Hình ảnh
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - R' < OO' < R + R'$	
Hai đường tròn tiếp xúc ngoài	1	$OO' = R + R'$	
Hai đường tròn tiếp xúc trong	1	$OO' = R - R'$	
Hai đường tròn ở ngoài nhau	0	$OO' > R + R'$	
Đường tròn $(O;R)$ đựng đường tròn $(O';R')$	0	$OO' < R - R'$	

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn

Bài toán 1. Cho hai điểm O và O' cách nhau một khoảng 5 cm. Mỗi đường tròn sau đây có vị trí tương đối như thế nào đối với đường tròn $(O;\ 3cm)$.

a) Đường tròn $(O';\ 3cm)$ b) Đường tròn $(O';\ 1cm)$

b) Đường tròn $(O';\ 8cm)$

Lời giải

a) Đặt $R = 3cm, R' = 3cm$

Ta có: $3 - 3 < 5 < 3 + 3$

$R - R' < OO' < R + R'$ hay $0 < 5 < 6$

Do đó hai đường tròn $(O;\ 3cm)$ và $(O';\ 3cm)$ cắt nhau.

b) Đặt $R = 3cm, R' = 1cm$

Ta có: $5 > 3 + 1$

$OO' > R + R'$

Do đó hai đường tròn $(O;\ 3cm)$ và $(O';\ 1cm)$ ở ngoài nhau.

c) Đặt $R = 3cm, R' = 8cm$

Ta có: $5 = 8 - 3$ hay $OO' = R' - R$

Do đó hai đường tròn $(O;\ 3cm)$ và $(O';\ 8cm)$ tiếp xúc nhau.

Bài toán 2. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn $(O;\ R)$ và $(O';\ R')$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $OO' = 12; R = 5; R' = 3$; b) $OO' = 8; R = 5; R' = 3$;

c) $OO' = 7; R = 5; R' = 3$; d) $OO' = 0; R = 5; R' = 4;$.

e) $OO' = 3; R = 4; R' = 7$.

Lời giải

a) Ta có: $12 > 5 + 3$ hay $OO' > RR'$.

Do đó hai đường tròn $(O;\ R)$ và $(O';\ R')$ ở ngoài nhau.

b) Ta có: $8 = 5 + 3$ hay $OO' = RR'$.

Do đó hai đường tròn $(O;\ R)$ và $(O';\ R')$ tiếp xúc ngoài.

c) Ta có: $5 - 3 < 7 < 5 + 3$ hay $R - R' < OO' < R + R'$.

Do đó hai đường tròn $(O;\ R)$ và $(O';\ R')$ cắt nhau.

d) Ta có: $0 < 5 - 4$ hay $OO' < R - R'$.

Do đó hai đường tròn $(O;\ R)$ đựng đường tròn $(O';\ R')$.

e) Ta có: $3 = 7 - 4$ hay $OO' = R' - R$.

Do đó hai đường tròn $(O;\ R)$ và $(O';\ R')$ tiếp xúc trong.

Bài toán 3. Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 3cm$. Mỗi đường tròn sau đây có vị trí tương đối như thế nào đối với đường tròn $(O;\ 3cm)$.

Lời giải

Đặt $R = 8cm, R' = 5cm$

Ta có: $3cm = 8cm - 5cm$ hay $OO' = R - R'$

Vậy hai đường tròn đã cho tiếp xúc trong với nhau.

Bài toán 4. Xác định vị trí của hai đường tròn $(O;3cm)$ và $(O';2cm)$ biết $OO' > 5cm$.

Lời giải

Đặt $R = 3cm, R' = 2cm$

Ta có: $OO' = 5 > R + R'$

Do đó hai đường tròn $(O;3cm)$ và $(O';2cm)$ hai đường tròn ở ngoài nhau.

Bài toán 5. Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 2cm$. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn $(O;\ 5cm)$ và $(O';\ r)$ biết rằng $r < 3cm$.

Lời giải

Đặt $R = 8cm$ và đường tròn tâm O' có bán kính $r < 3cm$.

Ta có: $OO' = 2 < 5 - r$ (vì $r < 3cm$)

Do đó đường tròn $(O;5cm)$ đựng đường tròn $(O';r)$ khi $r < 3cm$.

Bài toán 6. Cho ba điểm thẳng hàng O, A và O'. Với mỗi trường hợp sau hãy viết hệ thức giữa các độ dài OO', OA và $O'A$ rồi xét xem hai đường tròn $(O;OA)$ và $(O';O'A)$ tiếp xúc trong hay tiếp xúc ngoài với nhau; vẽ hình để khẳng định dự đoán của mình.

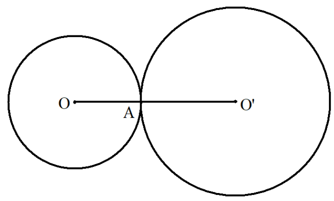
a) Điểm A nằm giữa hai điểm O và O';

b) Điểm O nằm giữa hai điểm A và O';

c) Điểm O' nằm giữa hai điểm A và O.

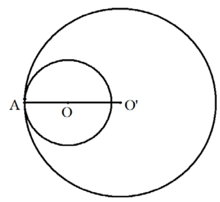
Lời giải

a) Điểm A nằm giữa hai điểm O và O';
Ta có: $OO' = OA + OA'$
Hai đường tròn $(O;OA)$ và $(O';O'A)$ tiếp xúc ngoài (Xem hình a)



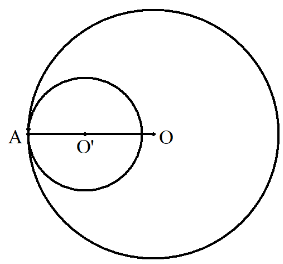
Hình a

b) Điểm O nằm giữa hai điểm A và O'.
Ta có: $OO' = O'A - OA$
Hai đường tròn $(O;OA)$ và $(O';O'A)$ tiếp xúc trong(Xem hình b)



Hình b

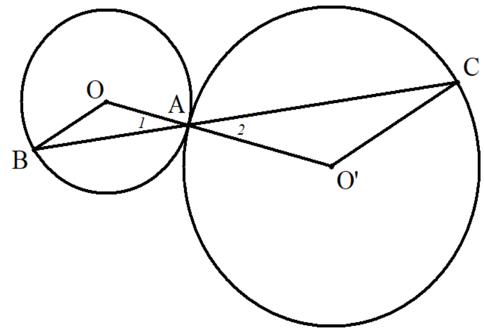
c) Điểm O' nằm giữa hai điểm A và O.
Ta có: $OO' = OA - O'A$
Hai đường tròn $(O;OA)$ và $(O';O'A)$ tiếp xúc trong (Xem hình c)



Hình c

Bài toán 7. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường thẳng qua A cắt (O) tại B và (O') cắt tại C. Chứng minh rằng $OB // O'C$.

Lời giải



Gọi bán kính đường tròn (O) là R.

Ta có: $OA = OB = R$ hay tam giác AOB cân tại O

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{A_1}$.

Tương tự, ta có tam giác AOC cân tại $O' \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A_2}$ mà

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (đối đỉnh)

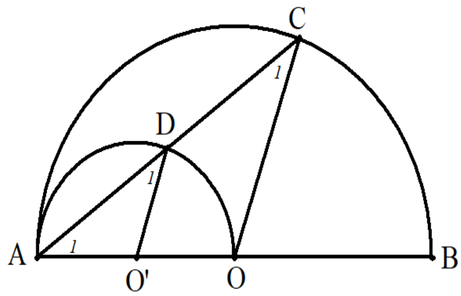
Do đó $\widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow OB // O'C$ (cặp góc so le trong bằng nhau).

Bài toán 8. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ nửa đường tròn tâm O' đường kính OA.

a) Xác định vị trí tương đối của đường tròn (O) và đường tròn (O')

b) Vẽ dây cung AC của nửa đường tròn (O) và nửa đường tròn (O') tại D. Chứng minh OC và OD song song với nhau.

Lời giải



a) Ta có ba điểm A, O', O thẳng hàng và

$OO' = OA - O'A$ $(d = R - R')$

Chứng tỏ (O) và (O') tiếp xúc trong tại A.

b) Ta có $\Delta AO'D$ cân (vì $O'A = O'D = R'$) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ (1)

Tương tự ΔAOC cân $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{D_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow O'D // OC$ (cặp góc đồng vị bằng nhau)

Chú ý: Các bạn có thể giải thêm câu c) sau đây:

Chứng minh D là trung điểm của AC và OD song song với BC.

Hướng dẫn: D thuộc nửa đường tròn đường kính AO nên $\widehat{ADO} = 90^0$. Khi đó D là trung điểm của AC (định lí đường kính dây cung) ta chứng minh OD là đường trung bình của ΔAOC để suy ra $OD // BC$.

Bài toán 9. Cho đoạn thẳng OO' và điểm A nằm giữa hai điểm O và O'. Vẽ đường tròn $(O; OA)$ và đường tròn $(O'; O'A)$. Qua A vẽ đường thẳng cắt (O) tại B và (O') cắt tại C.

a) Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc nhau.

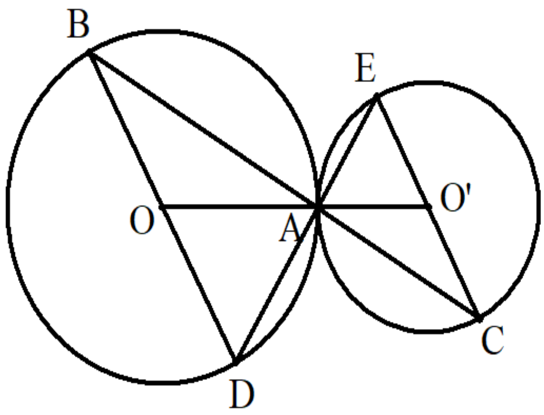
b) Vẽ đường kính BD của (O) và CE của (O'), chứng minh D, A, E thẳng hàng.

Lời giải

a) Ta có : $OO' = OA + O'A (d = R + R')$
Chứng tỏ (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A.
b) Ta có BD là đường kính của (O) nên

$OA = \frac{1}{2}BD$ (1)

Xét ΔABD có AO là trung tuyến (1) nên ΔABD vuông tại A hay $AD \perp AB$, mà B, A, C thẳng hàng nên $AD \perp BC$, tương tự $AE \perp BC$.

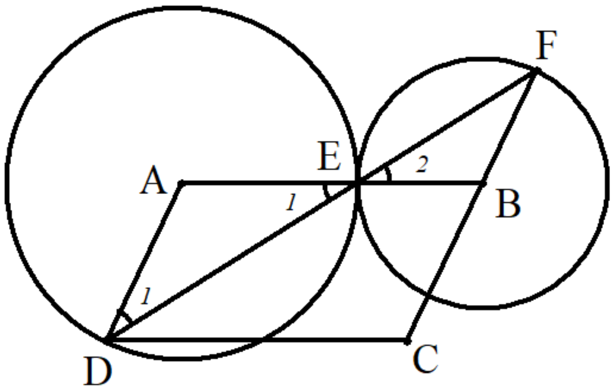


Vì vậy AD và AE phải trùng nhau hay ba điểm D, A, E thẳng hàng.

Bài toán 10. Cho hình bình hành $ABCD (AB > AD)$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AD, đường tròn (A) cắt AB tại E. Vẽ đường tròn tâm B bán kính BE, đường tròn (B) cắt đường rhawngr DE tại F. Chứng minh đường tròn $(A; AD)$ và $(B; BE)$ tiếp xúc với nhau và ba điểm F, B, C thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $AB = AE + EB$ $(d = R + R')$
Chứng tỏ $(A; AD)$ và $(B; BE)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại E.
Ta có ΔADE cân tại A $(AD = AE = R)$
$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{E_1}$
Tương tự ΔEBF cân tại $B \Rightarrow \widehat{F} = \widehat{E_2}$
mà $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{F}$.



Do đó $AD // BF$. Lại có $AD // BC (gt)$

Theo tiên đề Ơ-clit: BF và BC phải trùng nhau hay F, B, C thẳng hàng.

Bài toán 11. Cho đường tròn (O) đường kính BC. Một dây AD vuông góc với BC tại H. Gọi E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi (I) và (K) lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBE và HCF.

Xác định vị trí tương đối của đường tròn (I) và (O); (K) và (O); (I) và (K).

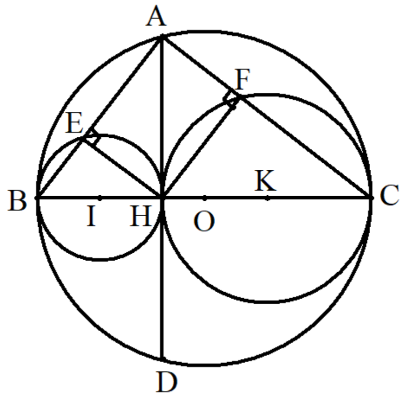
Lời giải

Ta có : $OI = OB - IB\,(d = R - R_1)$

Chứng tỏ (I) và (O) tiếp xúc trong.

Tương tự ta chứng minh được (K) và (O) tiếp xúc trong với nhau

Lại có: $IK = IH + HK\,(d = R_1 + R_2)$ Chứng tỏ (I) và (K) tiếp xúc ngoài với nhau.



Bài toán 12. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Một điểm C (khác A, B) nằm trên đường tròn. Tiếp tuyến Cx của đường tròn cắt tia AB tại I, phân giác của gcs CIA cắt OC tại O'.

a) Xác định vị trí tương đối của đường tròn (O) và $(O';O'C)$.

b) Chứng minh rằng đường tròn $(O';O'C)$ tiếp xúc với AB.

Lời giải

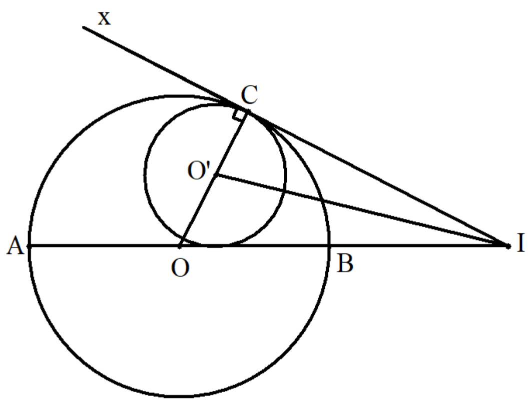
a) Hai đường tròn (O) và (O') có chung điểm C

Cx là tiếp tuyến của đường tròn (O) (gt)

$\Rightarrow OC \perp Cx$ mà $O' \in OC \Rightarrow O'C \perp Cx$

Vậy Cx là tiếp tuyến chung hy đường tròn (O) và đường tròn $(O';O'C)$ tiếp xúc nhau tại C.

b) O' nằm trên phân giác của góc CIA nên O' cách IA một khoảng bằng $O'C$ nên đường tròn $(O';O'C)$ tiếp xúc với AB.



Bài toán 13. Cho đường thẳng $OO' = 13cm$. Dựng đường tròn $(O;12cm)$ và $(O';5cm)$

a) Xác định vị trí tương đối của đường tròn (O) và (O').

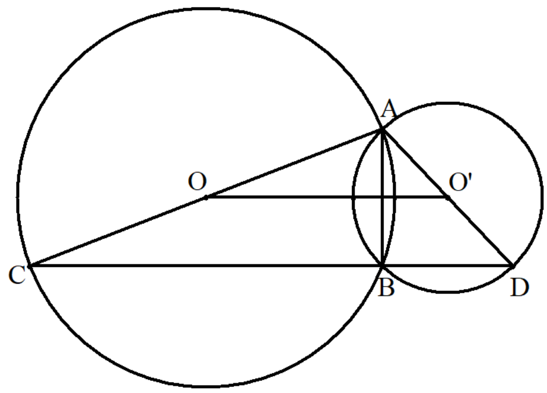
b) Vẽ đường kính AC của (O) và AD của (O'). Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng.

Lời giải

a) Ta có: $OO' < R + R'(13 < 12 + 5)$ nên đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B.

b) Ta có $\widehat{ABC} = 90^0$ (AC là đường kính)

Tương tự $\widehat{ABD} = 90^0$, do đó $\widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 180^0$ nên C, B, D thẳng hàng.



II. TÍNH CHẤT

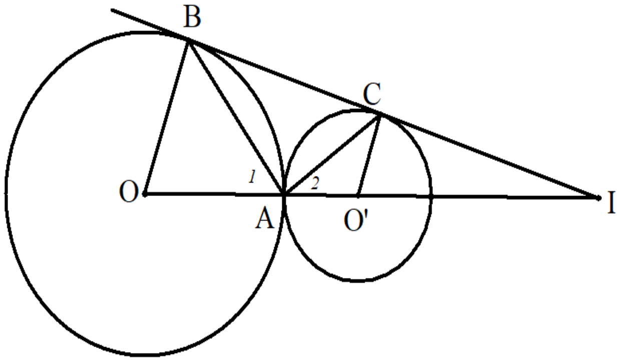
Áp dụng tính chất hai đường tròn tiếp xúc

Bài toán 14. Cho đường tròn $(O;3cm)$ và đường tròn $(O';1cm)$ tiếp xúc ngoài nhau tại A, vẽ hai bán kính OB và $O'C$ song song với nhau và cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ là OO'.

a) Tính $\widehat{BAC}$.

b) Gọi I là giao điểm của BC và OO'. Tính OI.

Lời giải



a) Ta có $OB//O'C$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{BOA}+\widehat{CO'A}=180^0$

(cặp góc trong cùng phía)

Lại có các tam giác AOB và $AO'C$ cân tại O và O'

nên $\widehat{A_1}=\dfrac{180^0-\widehat{BOA}}{2}$ và

$\widehat{A_2}=\dfrac{180^0-\widehat{CO'A}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{A_1}+\widehat{A_2}=\dfrac{360^0-(\widehat{BOA}+\widehat{CO'A})}{2}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{BAC}=180^0-(\widehat{A_1}+\widehat{A_2})=90^0$

b) ΔIBO có $OB//O'C$ theo hệ quả của định lí Thalès:

$\dfrac{IO}{IO'}=\dfrac{OB}{O'C}\Rightarrow \dfrac{IO-IO'}{IO}=\dfrac{OB-O'C}{OB}$

Hay $\dfrac{OO'}{IO}=\dfrac{OB-O'C}{OB}\Rightarrow \dfrac{4}{IO}=\dfrac{3-1}{3}$

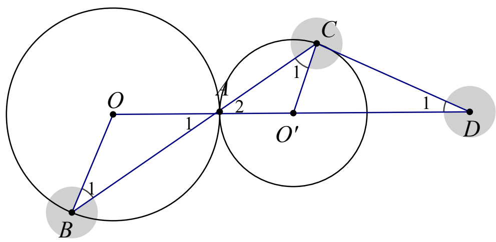
$\Rightarrow IO=\dfrac{4.3}{2}=6cm.$

Bài toán 15. Cho đường tròn $(O;\,5cm)$ và đường tròn $(O';\,3cm)$ tiếp xúc ngoài nhau tại A. Một đường thẳng qua A hợp với OO' một góc 30^0 cắt (O) tại B và (O') tại C.

a) Chứng minh $\widehat{AOB}=\widehat{AO'C}$ và $OB//O'C$

b) Tiếp tuyến tại C của (O') cắt OO' tại D. Tính $CD, O'D$.

Lời giải



a) ΔAOB cân tại O có $\hat{A}_1=\hat{B}_1$

tương tự với $\Delta AO'C$ có $\hat{A}_2=\hat{C}_1$

mà $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \hat{A}_1=\hat{A}_2=\hat{B}_1=\hat{C}_1$

$\Rightarrow \widehat{AOB}=\widehat{AO'C}$ (hai tam giác cân có các góc ở đáy bằng nhau)

và $\hat{B}_1=\hat{C}_1\Rightarrow OB//O'C$ (cặp góc so le trong)

b) Có $\widehat{A}_2 = 30^\circ(\text{gt}) \Rightarrow \widehat{C}_1 = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AO'C} = 180^\circ - \left(\widehat{A}_2 + \widehat{C}_1\right) = 180^\circ - \left(30^\circ + 30^\circ\right) = 120^\circ \Rightarrow \widehat{CO'D} = 60^\circ$

Xét tam giác vuông $CO'D$ có $\tan \widehat{CO'D} = \dfrac{CD}{O'C}$

$CD = O'C \tan \widehat{CO'D} = R \tan 60^\circ = R\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ cm

$\dfrac{O'C}{O'D} = \cos \widehat{CO'D} \Rightarrow O'D = \dfrac{O'C}{\cos \widehat{CO'D}} = \dfrac{3}{\frac{1}{2}} = 6(\text{cm})$

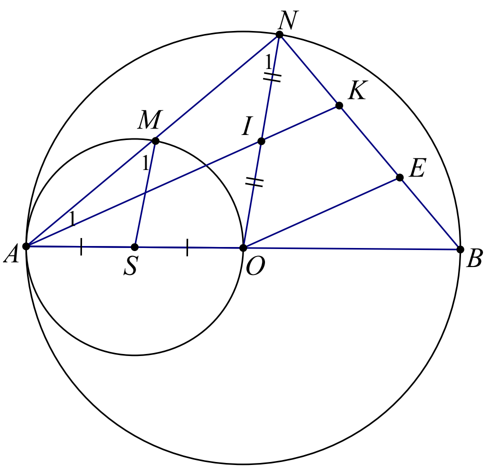
Bài toán 16. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi S là trung điểm của OA vẽ đường tròn tâm S đi qua A.

a) Chứng minh đường tròn (O) và đường tròn (S) tiếp xúc nhau tại A.

b) Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (S) tại M và cắt (O) tại N (M, N khác A) chứng minh $SM // ON$.

c) Gọi I là trung điểm của ON, đường thẳng AI cắt NB tại K. Chứng minh rằng $BK = 2KN$.

Lời giải



a) Ta có $SO = OA - SA\left(d = R - R'\right)$

Vậy (O) và (S) tiếp xúc trong tại A

b) ΔASM cân tại $S \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{M}_1$ và ΔAON cân tại $O \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{N}_1$

$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$

$\Rightarrow SM // ON$ (cặp góc đồng vị bằng nhau).

c) Kẻ $OE // IK$ có I là trung điểm của ON (gt)

$\Rightarrow$ IK là đường trung bình của $\Delta NOE \Rightarrow KN = KE$

Mặt khác ΔAKB có O là trung điểm của AB, $OE // AK$ (gt)

$\Rightarrow E$ là trung điểm của BK. Do đó $BK = 2KN$.

Bài toán 17. Cho đường tròn (K) có đường kính BC. Gọi D là trung điểm của KC và I là tâm đường tròn có đường kính BD.

a) Chứng tỏ đường tròn (K) và (I) tiếp xúc nhau.

b) Qua B vẽ đường thẳng (không trùng với BC) cắt (K) tại A và cắt (I) tại E. Chứng tỏ $KA // IE$ và tỉ số $\dfrac{CA}{DE}$ không đổi.

Lời giải

a) Ta có $KI = KB - IB\left(d = R - R'\right)$

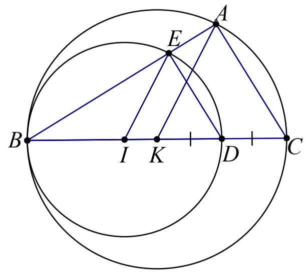
Vậy (K) và (I) tiếp xúc nhau tại B.

b) Chứng minh tương tự câu b bài toán 16

ta có: $KA // IE$

Ta có $DE \perp BE$ (BD là đường kính)

Tương tự $CA \perp BA \Rightarrow DE // AC$.



*** Áp dụng tính chất hai đường tròn cắt nhau**

Bài toán 18. Cho đường tròn $(O;4\text{cm})$ và $\left(O';3\text{cm}\right)$ và đoạn nối tâm $OO' = 5\text{cm}$.

a) Chứng tỏ đường tròn (O) và $\left(O'\right)$ cắt nhau tại hai điểm A và B.

b) Tính độ dài AB.

c) Gọi AC, AD lần lượt là đường kính của đường tròn (O) và $\left(O'\right)$. Chứng minh rằng C, B, D thẳng hàng.

Lời giải

a) Ta có $OA - O'A < OA + O'A$

$(4 - 3 < 5 < 4 + 3)$

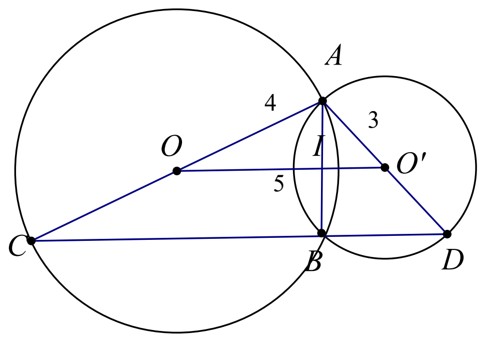
Chứng tỏ (O) và $\left(O'\right)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B.

b) Xét tam giác AOO' có

$AO = 4\text{cm}; AO' = 3\text{cm}$ và $OO' = 5\text{cm}$.

Ta có: $5^2 = 4^2 + 3^2$ hay $OO'^2 = AO^2 + AO'^2$

Theo định lí Pythagore đảo, ta có tam giác AOO' vuông tại A.



Ta có: $OA = OB = 4$ cm; $O'A = O'B = 3\text{cm}$ nên OO' là đường trung trực của đoạn AB

$\Rightarrow OO' \perp AB$.

Gọi I là giao điểm của OO' và AB, ta có AI là đường cao của tam giác vuông AOO'.

Gọi S_{AOO} là diện tích của tam giác vuông AOO'

Ta có $S_{AOO'} = \dfrac{1}{2} AI \cdot O0' = AO.AO' \cdot \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow AI = \dfrac{OA \cdot O'A}{OO'} = \dfrac{4 \cdot 3}{5} = 2,4(\text{cm}) \Rightarrow AB = 4,8(\text{cm})$

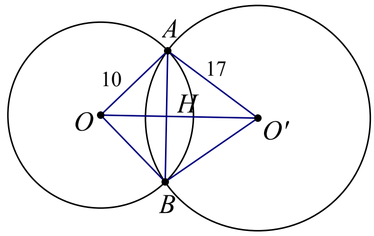
nên tam giác ABC vuông tại B hay $BC \perp AB$.

Chứng minh tương tự ta có $BD \perp AB$.

Do đó ba điểm C, B, D thẳng hàng.

Bài toán 19. Cho hai đường tròn $(O;10\text{cm})$ và $\left(O';17\text{cm}\right)$ cắt nhau tại hai điểm A và B, biết $AB = 16\text{cm}$. Tính độ dài đoạn OO'.

Lời giải



Trường hợp 1: (Xem hình vẽ).

O và O' nằm về hai phía đối với AB.

Ta có: $OA = OB = 10\,\text{cm}$

$O'A = O'B = 17\,\text{cm}$

Nên OO' là đường trung trực của doạn AB nên

$OO' \perp AB$ tại H và

$HA = HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{16}{2} = 8(cm)$

Xét tam giác AHO vuông tại H.

Theo định lí Pythagore, ta có:

$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow OH^2 = OA^2 - AH^2 = 10^2 - 8^2$

$\Rightarrow OH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6(\text{cm})$

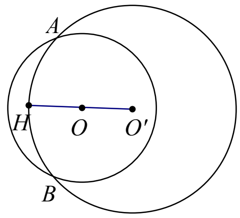
Tương tự với tam giác vuông AHO', ta có $HO' = 15(\text{cm})$.

$OO' = OH + HO' = 6 + 15 = 21(\text{cm})$

Trường hợp 2:

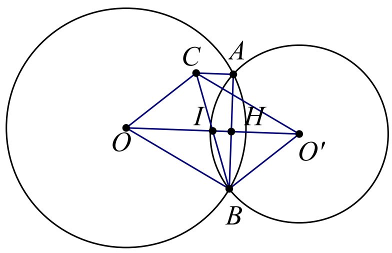
OO' nằm về cùng một phía đối với AB

Ta có $OO' = O'H - OH = 15 - 6 = 9(\text{cm})$.



Bài toán 20. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B (xem hình vẽ). Vẽ hình bình hành $OBO'C$. Chứng minh rằng $AC // OO'$.

Lời giải



Gọi H là giao điểm của AB và OO' ta có H là trung điểm của AB.

Gọi I là giao điểm của BC và OO'

Vì $OCO'B$ là hình bình hành nên I là trung điểm của BC.

Do đó IH là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow IH // AC$ hay $OO' // AC$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

Bài toán 1. Cho đường tròn (O) đương kính BC và điểm A (khác B và C).

a) Chứng minh rằng nếu A nằm trên (O) thì ABC là một tam giáo vuông; ngược lại, nếu ABC là một tam giác vuông tại A thì A nằm trên (O).

b) Giả sử A là một trong hai giao điểm của đường tròn $(B;BO)$ với đường tròn (O). Tính các góc của tam giác ABC.

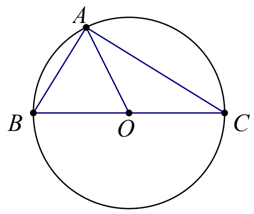
c) Với cùng giả thiết câu b, tính độ dài cung AC và diện tích hình quạt nằm trong (O) giới hạn bởi các bán kính OA và OC, biết rằng $BC = 6\text{cm}$.

Lời giải

a) A năm trên $(O) \Rightarrow OA = OB = OC$.

Tam giác ABC có O là trung điểm đoạn BC nên AO là trung tuyến mà $AO = \frac{1}{2}BC$.

Do đó ΔABC vuông tại A.



Ngược lại tam giác ABC vuông tại A có AO là đường trung tuyến

$\Rightarrow OA = OB = OC$

Chứng tỏ A thuộc đường tròn (O).

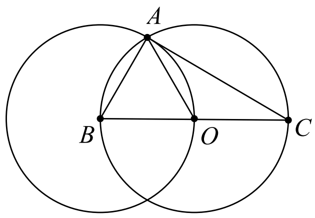
b) Khi A là giao điểm của đường tròn ($\mathrm{B;BO}$) với đường tròn (O)

Ta có $OA = OB = AB$ nên tam giác ABC đều

$\Rightarrow \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{AOB}} = 60°$

$\Rightarrow \widehat{\mathrm{AOC}} = 180° - \widehat{\mathrm{AOB}}$ (hai góc kề bù)

$= 180° - 60° = 120°$



Xét tam giác AOC cân tại O có:

$\widehat{AOC} = 120°(cmt) \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{OAC} = 30°$

Xét tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 180° - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180° - (60° + 30°) = 90°$

Các góc của tam giác ABC là $\widehat{BAC} = 90°, \widehat{B} = 60°, \widehat{C} = 30°$.

c) Khi $BC = 6\text{cm}$ ta có bán kính đường tròn (O) là 3cm.

Gọi l_{AC} là độ dài cung AC có $l_{\text{AC}} = \frac{120}{180} \cdot \pi \cdot 3 \approx 6,3(\text{cm})$

Gọi S là diện tích hình quạt nằm trong (O) giới hạn bởi các bán kính OA và OC, ta có:

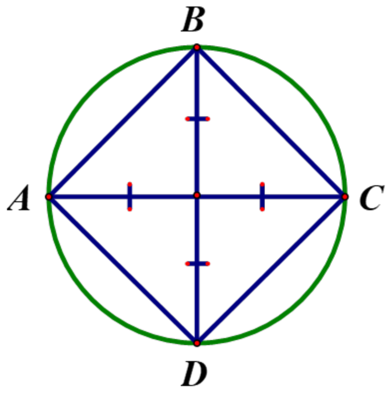
$S = \frac{120}{360} \cdot \pi \cdot 3^2 \approx 9,4(\text{cm})$

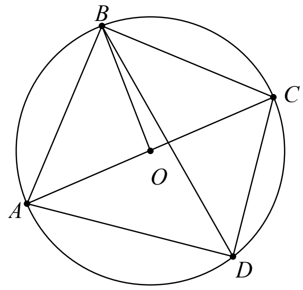
Bài toán 2. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90°$.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) So sánh độ dài của AC và BD.

Lời giải





a) Nối A với C. Gọi O là trung điểm đoạn AC.

Xét tam giác ABC vuông tại B (gt) có OB là đường trung tuyến

$\Rightarrow OB = \frac{1}{2}AC$ hay $OA = OB = OC$

Do đó ba điểm A, B, C nằm trên đường tròn $\left(O; \frac{AC}{2}\right)$

Chứng minh tương tự D nằm trên đường tròn $\left(O; \frac{AC}{2}\right)$.

b) $AC > BD$ (AC là đường kính).

Bài toán 3. Cho AB là dây bất kì (không phải là đường kính) của đường tròn $(0;\ 4\ cm)$. Gọi C và D lần lượt là các điểm đối xứng với A và B qua tâm O.

a) Hai điểm C và D có nằm trên đường tròn (O) không? Vì sao?

b) Biết rằng $ABCD$ là một hình vuông. Tính độ dài cung lớn AB và diện tích hình quạt tròn tạo bởi hai bán kính OA và OB.

Lời giải

a) Vì C đối xứng A qua tâm $O \Rightarrow OC = OA$.

Chứng minh tương tự $OD = OB$

Mà $OA = OB = 4\,cm$

$\Rightarrow$ $OA = OB = OC = OD = 4\ cm$ hay hai điểm C và D nằm trên đường tròn (O).

b) $ABCD$ là hình vuông $AC \perp BD$ tại O hay số đo cung nhỏ AB bằng 90^0.

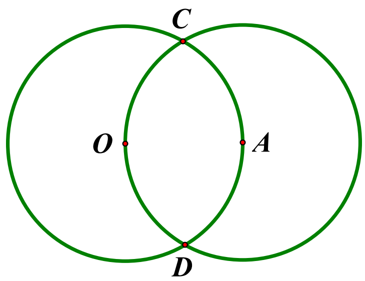
$\Rightarrow$ số đo cung lớn AB bằng $360^0 - 90^0 = 270^0$.

Ta có độ dài cung lớn AB là: $l = \frac{90}{180} \cdot \pi \cdot 4 = 6,28\ (cm)$

Gọi S là diện tích hình quạt tròn tạo bởi hai bán kính OA và OB

Ta có $S = \frac{90}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = 12,56\ (cm^2)$.

Bài toán 4. Cho hai đường tròn $(O;\ 2\ cm)$ và $(A;\ 2\ cm)$ cắt nhau tại $C,\ D$, điểm A nằm trên đường tròn tâm O (hình vẽ).

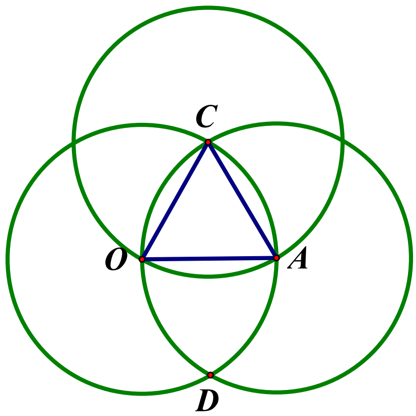


a) Vẽ đường tròn $(C;\ 2\ cm)$

b) Đường tròn $(C;\ 2\ cm)$ có đi qua hai điểm O và A không? Vì sao?

Lời giải

a) Xem hình vẽ.



b) Vì $C \in (O;\ 2\ cm) \Rightarrow CO = 2\ cm$.

Tương tự $C \in (A;\ 2\ cm) \Rightarrow CA = 2\ cm$.

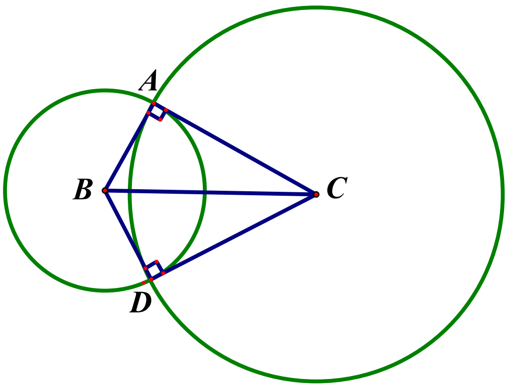
Ta có $CO = CA = 2\ cm$ nên $(C;\ 2\ cm)$ đi qua hai điểm O và A.

Bài toán 5. Cho tam giác vuông ABC ($\hat{A}$ vuông). Vẽ hai đường tròn $(B;\ BA)$ và $(C;\ CA)$ cắt nhau tại A và A'. Chứng minh rằng:

a) BA và BA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(C;\ CA)$.

b) CA và CA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(B;\ BA)$.

Lời giải



a) Xét $\Delta BA'C$ và ΔBAC có:

BC (cạnh chung),

BA = BA',

CA = CA'.

Do đó $\Delta BA'C = \Delta BAC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BA'C} = \widehat{BAC} = 90^0$ (góc tương ứng) hay $BA' \perp CA'$

Chứng tỏ BA' là tiếp tuyến của đường tròn $(C;\ CA)$

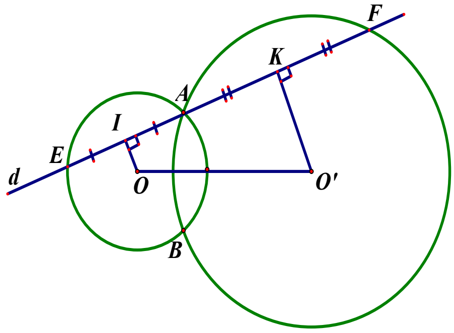
Lại có $BA \perp CA$ (gt) nên BA là tiếp tuyến của đường tròn $(C;\ CA)$

Do đó BA và BA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(C;\ CA)$

b) Chứng minh tương tự CA và CA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(B;\ BA)$.

Bài toán 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng d đi qua A cắt (O) tại E và cắt (O') tại F (E và F khác A).

Biết điểm A nằm trong đoạn EF. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AE và AF (hình vẽ)



a) Chứng minh rằng tứ giác $OO'KI$ là một hình thang vuông.

b) Chứng minh rằng $IK = \frac{1}{2}EF$

c) Khi d ở vị trí nào (d vẫn qua A) thì $OO'KI$ là một hình chữ nhật?

Lời giải

a) Ta có: $OE = OA$ nên tam giác AOE cân tại O có I là trung điểm của AE (gt) nên OI là đường trung tuyến mà ΔAOE cân tại O (cmt)

$\Rightarrow OI$ đồng thời là đường cao hay $OI \perp AE$

Chứng minh tương tự, ta có $O'K \perp AF$ mà $E, A, F \in d$ nên OI, OF cùng vuông góc với d

$\Rightarrow OI // O'K$

Do đó tứ giác $OO'KI$ là hình thang vuông.

b) Ta có: $IK = IA + AK$ mà $IA = \frac{1}{2}EA; AK = \frac{1}{2}\text{AF}$

$\Rightarrow IK = \frac{1}{2}(EA + \text{AF}) = \frac{1}{2}EF$

c) d đi qua A và $d // OO'$ thì $OO'KI$ là hình chữ nhật.

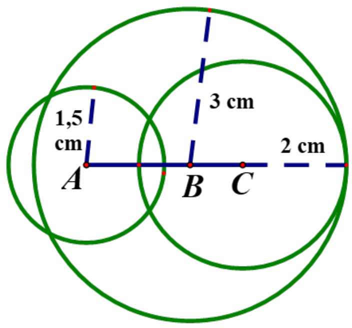
Bài toán 7. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C, sao cho $AB = 2\ cm$ và $BC = 1\ cm$. Vẽ các đường tròn $(A;\ 1,5\ cm)$, $(B;\ 3\ cm)$, $(C;\ 2\ cm)$. Hãy xác định các cặp đường tròn:

a) Cắt nhau; b) Không giao nhau;

c) Tiếp xúc nhau.

Lời giải

a) * Đường tròn $(A;\ 1,5\ cm)$ và đường tròn $(B;\ 3\ cm)$ cắt nhau.

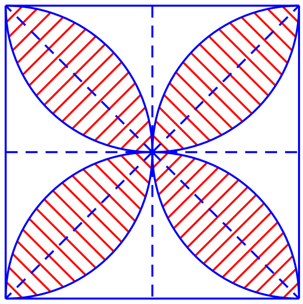


* Đường tròn $(A;\ 1,5\ cm)$ và đường tròn $(C;\ 2\ cm)$ cắt nhau.

b) Không có.

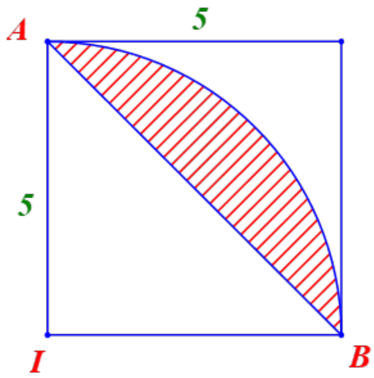
c) Đường tròn $(B;\ 3\ cm)$ và đường tròn $(C;\ 2\ cm)$ tiếp xúc trong.

Bài toán 8. Trong hình vẽ, độ dài cạnh của các hình vuông lớn là $10\ cm$. Tính diện tích và chu vi của phần được tô màu.



Lời giải

Diện tích của phần được tô màu trên hình vẽ là diện tích của 8 hình viên phân tạo bởi cung AB và dây AB (xem hình vẽ).



Gọi S là diện tích hình viên phân, ta có: $S = S_q - S_{AIB}$

(S_q: diện tích hình quạt chắn cung AB, S_{AIB} là diện tích hình tam giác vuông cân cạnh $5\ cm$).

Ta có: $S_q = \dfrac{90}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 = \dfrac{25}{4}\pi\ \left(cm^2\right)$

$S_{AOI} = \dfrac{1}{2} \cdot AI \cdot BI = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \dfrac{25}{2}\ \left(cm^2\right)$

Do đó diện tích 1 hình viên phân là:

$S_{AIO} = \dfrac{25}{2}\pi - \dfrac{25}{2} \approx 7{,}13\ \left(cm^2\right)$

Vậy diện tích phần được tô màu là: $8.7{,}13 \approx 57\ \left(cm^2\right)$

Chu vi phần được tô màu là 8 cung AB.

Gọi l là độ dài cung AB, ta có: $l = \dfrac{90}{180} \cdot \pi \cdot 5 = \dfrac{5}{2} \cdot \pi$

ꟹ HẾT ꟹ