

CHƯƠNG V. ĐƯỜNG TRÒN

BÀI 13. MỞ ĐẦU VỀ ĐƯỜNG TRÒN.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. ĐƯỜNG TRÒN

Đường tròn, điểm thuộc đường tròn

Ta định nghĩa: Đường tròn tâm O bán kính $R (R > 0)$, kí hiệu là $(O; R)$, là hình gồm tất cả các điểm cách điểm O một khoảng bằng R .

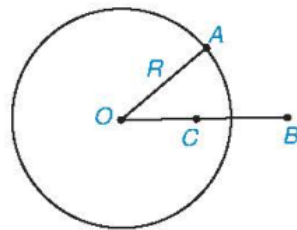
- Khi không cần đề ý đến bán kính ta kí hiệu đường tròn tâm O là (O) .

- Nếu A là một điểm của đường tròn (O) thì ta viết $A \in (O)$. Khi đó, ta còn nói đường tròn (O) đi qua điểm

A , hay điểm A nằm trên đường tròn (O) .

Nhận xét

1) Trên Hình 5.1, ta thấy điểm A nằm trên, điểm C nằm trong và điểm B nằm ngoài đường tròn (O) . Một cách tổng quát, ta có:



Hình 5.1

- Điểm M nằm trên đường tròn $(O; R)$ nếu $OM = R$;

- Điểm M nằm trong đường tròn $(O; R)$ nếu $OM < R$;

- Điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ nếu $OM > R$.

2) Hình tròn tâm O bán kính R là hình gồm các điểm nằm trên và nằm trong đường tròn $(O; R)$.

Ví dụ 1. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Chứng minh rằng đường tròn $(O; OA)$ đi qua B .

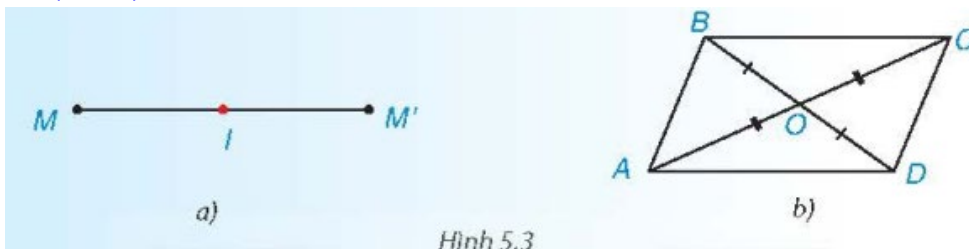
Chú ý. Ở lớp dưới, ta đã biết đoạn AB trong Ví dụ 1 là một đường kính của đường tròn (O) . Do đó (O) còn

gọi là đường tròn đường kính AB .

2. TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Đối xứng tâm và đối xứng trục

1) Đối xứng tâm (H.5.3)

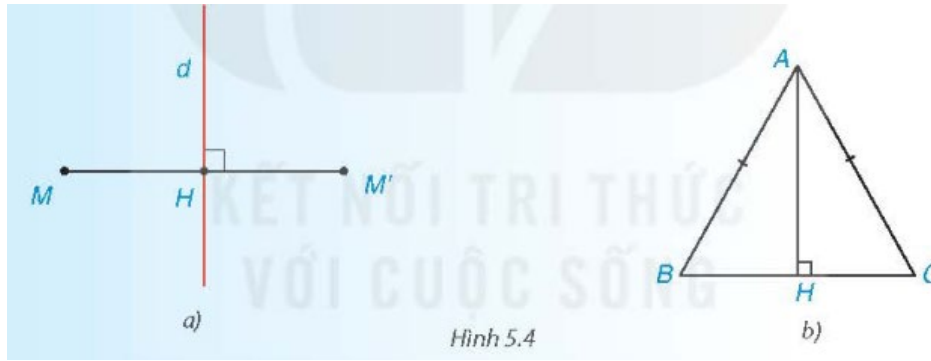


Hình 5.3

Hai điểm M và M' gọi là đối xứng với nhau qua điểm I (hay qua tâm I) nếu I là trung điểm của đoạn MM' .

Chẳng hạn, nếu O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$ thì $OA = OC$ nên A và C đối xứng với nhau qua O . Tương tự, B và D đối xứng với nhau qua O .

2) Đối xứng trục (H.5.4)



Hình 5.4

Hai điểm M và M' gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d (hay qua trục d) nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' :

Chẳng hạn, nếu AH là đường cao trong tam giác ABC cân tại A thì AH cũng là đường trung trực của BC , nên B và C đối xứng với nhau qua AH .

Tâm và trục đối xứng của đường tròn

Đường tròn là hình có tâm đối xứng; tâm của đường tròn là tâm đối xứng của nó.

Đường tròn là hình có trục đối xứng; mỗi đường thẳng qua tâm của đường tròn là một trục đối xứng của nó.

Chú ý: Đường tròn có một tâm đối xứng, nhưng có vô số trục đối xứng.

Ví dụ 2: Cho điểm M nằm trên đường tròn (O) đường kính AB . Sử dụng tính đối xứng của (O) , hãy nêu cách tìm:

- Điểm N đối xứng với điểm M qua tâm O ;
- Điểm P đối xứng với điểm M qua đường thẳng AB .

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

5.1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $M(0;2)$, $N(0;-3)$ và $P(2;-1)$. Vẽ hình và cho biết trong các điểm đã cho, điểm nào nằm trên, điểm nào nằm trong, điểm nào nằm ngoài đường tròn $(O;\sqrt{5})$? Vì sao?

5.2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Chứng minh rằng các điểm A, B, C thuộc cùng một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

5.3. Cho đường tròn (O) , đường thẳng d đi qua O và điểm A thuộc (O) nhưng không thuộc d . Gọi B là điểm đối xứng với A qua d ; C và D lần lượt là điểm đối xứng với A và B qua O .

a) Ba điểm B, C và D có thuộc (O) không? Vì sao?

b) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

c) Chứng minh rằng C và D đối xứng với nhau qua d .

5.4. Cho hình vuông $ABCD$ có E là giao điểm của hai đường chéo.

a) Chứng minh rằng có một đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C và D . Xác định tâm đối xứng và chỉ ra hai trục đối xứng của đường tròn đó.

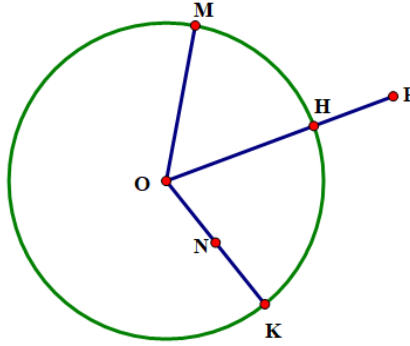
b) Tính bán kính của đường tròn ở câu a, biết rằng hình vuông có cạnh bằng 3 cm.

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH ĐIỂM NẪM TRÊN, NẪM TRONG, NẪM NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $M(0;2)$, $N(0;-3)$ và $P(2;-1)$. Vẽ hình và cho biết trong các điểm đã cho, điểm nào nằm trên, điểm nào nằm trong, điểm nào nằm ngoài đường tròn $(O;\sqrt{5})$? Vì sao?

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O; R)$ và năm điểm M, N, P, Q, K (hình vẽ). So sánh độ dài các đoạn thẳng OM, ON, OH, OK, OP với R .



Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) , bán 5cm và bốn điểm A, B, C, D thoả mã $OA = 3\text{ cm}, OB = 4\text{ cm}, OC = 7\text{ cm}, OD = 5\text{ cm}$. Hãy cho biết mỗi điểm A, B, C, D nằm trên, nằm trong hay nằm ngoài đường tròn (O) .

DẠNG 2. CHỨNG MINH NHIỀU ĐIỂM CÙNG THUỘC ĐƯỜNG TRÒN

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3\text{ cm}, AC = 4\text{ cm}$. Chứng minh rằng các điểm A, B, C thuộc cùng một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC đều có cạnh a , các đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Chứng minh rằng bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn. Hãy xác định tâm và bán kính của đường tròn ấy.

Ví dụ 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 18\text{ cm}$ và $CD = 12\text{ cm}$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng các trung điểm của các cạnh của hình thoi cùng nằm trên một đường tròn.

Ví dụ 5. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M , trên cạnh AD lấy N sao cho $AM = AN$. Kẻ AH vuông góc với $DM (H \in DM)$ và AH cắt BC tại P . Chứng minh rằng năm điểm C, D, N, H, P cùng thuộc một đường tròn.

Ví dụ 6. Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Gọi M, N, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD và AD . Chứng minh rằng: Bốn điểm M, N, R, S cùng thuộc một đường tròn.

Ví dụ 7. Cho đường tròn (O) , đường thẳng d đi qua O và điểm A thuộc (O) nhưng không thuộc d . Gọi B là điểm đối xứng với A qua $d; C$ và D lần lượt là điểm đối xứng với A và B qua O .

a) Ba điểm B, C và D có thuộc (O) không? Vì sao?

b) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

c) Chứng minh rằng C và D đối xứng với nhau qua d .

Ví dụ 8. Cho hình vuông $ABCD$ có E là giao điểm của hai đường chéo.

a) Chứng minh rằng có một đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C và D . Xác định tâm đối xứng và chỉ ra hai trục đối xứng của đường tròn đó.

b) Tính bán kính của đường tròn ở câu a, biết rằng hình vuông có cạnh bằng 3cm.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy xác định vị trí của mỗi điểm $A(-1; -1), B(-1; -2), C(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ đối với đường tròn tâm O bán kính 2.

Câu 2. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC, CA . Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Câu 3. Cho tam giác ABC cân tại $A, BC = 12$ cm, chiều cao $AH = 4$ cm. Tính bán kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC .

Câu 4. Cho tam giác ABC cân tại A có ba đỉnh nằm trên đường tròn (O) . Đường cao AH cắt (O) ở D . Biết $BC = 24$ cm, $AC = 20$ cm. Tính chiều cao AH và bán kính đường tròn (O) .

Câu 5. Cho hình thang cân $ABCD$ (với $AD \parallel BC$) có $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, $BC = 20$ cm. Chứng minh rằng A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

Câu 6. Cho đường tròn (O) đường kính AB, M, N thuộc (O) sao cho $AM = BN$ và M, N nằm trên hai nửa đường tròn khác nhau. Chứng minh MN là đường kính của (O) .

Câu 7. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.

1. Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.
2. Nếu $AC = BD$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

Câu 8. Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ tam giác AEC vuông tại E . Chứng minh năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Từ M là điểm bất kì trên cạnh BC kẻ $MD \perp AB, ME \perp AC$. Chứng minh năm điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 10. Cho tam giác ABC có AQ, BK, CI là ba đường cao và H là trực tâm.

1. Chứng minh A, B, Q, K cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.
2. Chứng minh A, I, H, K cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

Câu 11. tam giác ABC , các đường cao BD và CE . Trên cạnh AC lấy điểm M . Kẻ tia Cx vuông góc với tia BM tại F . Chứng minh rằng năm điểm B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Câu 12. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Lấy M, N thuộc tia BC sao cho $MN = BC$ và M nằm giữa B, C . Gọi D là hình chiếu của M lên AC và E là hình chiếu của N lên AB . Chứng minh rằng các điểm A, D, E, H cùng thuộc một đường tròn.

Câu 13. Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng các trung điểm của ba cạnh, các trung điểm của ba đoạn thẳng nối ba đỉnh với trực tâm của ba đường cao của tam giác cùng thuộc một đường tròn. (Đường tròn 9 điểm hay đường tròn Euler).

Câu 14. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H . Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt thuộc đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 sao cho $S_{A_2BC} + S_{B_2CA} + S_{C_2AB} = S_{ABC}$. Chứng minh rằng A_2, B_2, C_2, H cùng thuộc một đường tròn.

BÀI 14. CUNG VÀ DÂY CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. DÂY VÀ ĐƯỜNG KÍNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN

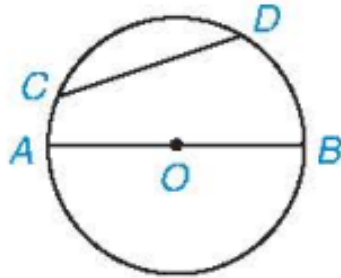
Khái niệm dây và đường kính của đường tròn

Đoạn thẳng nối hai điểm tùy ý của một đường tròn gọi là một dây (hay dây cung) của đường tròn.

Mỗi dây đi qua tâm là một đường kính của đường tròn.

Để thấy đường kính của đường tròn bán kính R có độ dài bằng $2R$.

Trên Hình 5.6, CD là một dây, AB là một đường kính của (O) .

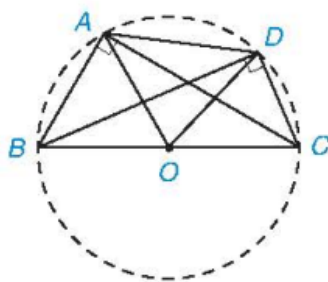


Hình 5.6

Định lí: Trong một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

Ví dụ 1: Tứ giác lồi $ABCD$ có $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$. Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn và $AD < BC$.

Lời giải



Hình 5.8

Gọi O là trung điểm của đoạn BC . Tam giác ABC vuông tại A ($\widehat{BAC} = 90^\circ$) nên đường trung tuyến AO bằng nửa cạnh huyền, nghĩa là $OA = OB = OC = \frac{BC}{2}$. Do đó điểm A nằm trên đường tròn (O) đường kính BC .

Tương tự, bằng cách xét tam giác DBC ta cũng suy ra điểm D thuộc đường tròn (O) .

Vậy AD là một dây (không đi qua tâm) của đường tròn (O) . Áp dụng định lí trên ta có $AD < BC$.

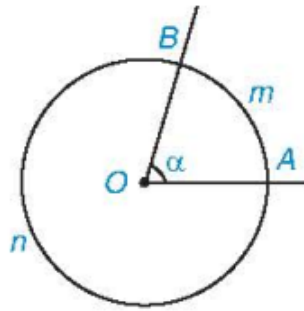
2. GÓC Ở TÂM, CUNG VÀ SỐ ĐO CỦA MỘT CUNG

Khái niệm góc ở tâm và cung tròn

Cho hai điểm A và B cùng thuộc một đường tròn. Hai điểm ấy chia đường tròn thành hai phần, mỗi phần gọi là một cung tròn (hay cung). Hai điểm A và B gọi là hai mút (hay đầu mút) của mỗi cung đó.

Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn.

Trên Hình 5.9 ta có hai cung, kí hiệu là \widehat{AmB} và \widehat{AnB} nhưng chỉ có một góc ở tâm là \widehat{AOB} .



Hình 5.9

Chú ý: Khi góc AOB không bẹt thì cung nằm trong góc AOB gọi là cung nhỏ (trên Hình 5.9, \widehat{AmB} là cung

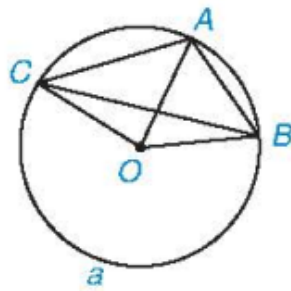
nhỏ). Khi đó \widehat{AmB} còn có thể kí hiệu gọn là \widehat{AB} . Cung còn lại, \widehat{AnB} gọi là cung lớn. Khi góc AOB bẹt thì mỗi cung AB được gọi là một nửa đường tròn.

Ta còn nói góc AOB chắn cung AB hay cung AB bị chắn bởi góc AOB .

Ví dụ 2: Cho ba điểm A, B và C thuộc đường tròn (O) như Hình 5.10.

- Tìm các góc ở tâm có hai cạnh đi qua hai trong ba điểm A, B, C .
- Tìm các cung có hai mút là hai trong ba điểm A, B, C .

Lời giải



Hình 5.10

a) Các góc ở tâm cần tìm là $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}$ và \widehat{COA} .

b) - Các cung có hai mút A, B là $\widehat{AB}, \widehat{ACB}$.

Các cung có hai mút A, C là $\widehat{AC}, \widehat{ABC}$.

Các cung có hai mút B, C là $\widehat{BC}, \widehat{BaC}$.

Cách xác định số đo của một cung

1. Số đo của một cung được xác định như sau:

Số đo của nửa đường tròn bằng 180° .

Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ có chung hai mút.

2. Số đo của cung AB được kí hiệu là số \widehat{AB} .

Trên Hình 5.9, ta có: số $\widehat{AmB} = \widehat{AOB} = \alpha$; số $\widehat{AnB} = 360^\circ - \alpha$.

Chú ý:

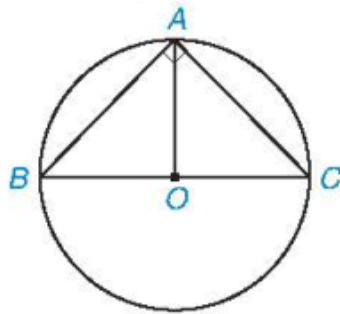
Cung có số đo n° còn gọi là cung n° . Cả đường tròn được coi là cung 360° . Đôi khi ta cũng coi một điểm là cung 0° .

Hai cung trên một đường tròn gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng số đo.

Nhận xét

Nếu A là một điểm thuộc cung BAC thì số đo $sđ\widehat{BAC} = sđ\widehat{BA} + sđ\widehat{AC}$ (H.5.10).

Ví dụ 3: Tính số đo của các cung có các đầu mút là hai trong các điểm A, B, C trong Hình 5.11, biết rằng ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh A .



Hình 5.11

Lời giải

Trên Hình 5.11, ta thấy \widehat{AB} và \widehat{AC} là các cung nhỏ bị chắn bởi các góc ở tâm thứ tự là \widehat{AOB} và \widehat{AOC} .

Do tam giác ABC vuông cân tại A nên đường trung tuyến AO cũng là đường cao, tức là $AO \perp BC$.

Do đó $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 90^\circ$, suy ra số đo $sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AC} = 90^\circ$.

\widehat{ACB} là cung lớn có chung hai mút A, B với cung nhỏ AB nên số đo $sđ\widehat{ACB} = 360^\circ - sđ\widehat{AB} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

Tương tự, ta có: $sđ\widehat{ABC} = 360^\circ - sđ\widehat{AC} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

Ngoài ra còn có hai nửa đường tròn có chung hai mút A và B , có số đo bằng 180° .

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

5.5. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một điểm M tùy ý thuộc nửa đường tròn đó.

Chứng minh rằng khoảng cách từ M đến AB không lớn hơn $\frac{AB}{2}$.

5.6. Cho đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và AB là một dây bất kì của đường tròn đó. Biết $AB = 6 \text{ cm}$.

- a) Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng AB .
- b) Tính $\tan \alpha$ nếu góc ở tâm chắn cung AB bằng 2α .

5.7. Tâm O của một đường tròn cách dây AB của nó một khoảng 3 cm . Tính bán kính của đường tròn (O) , biết rằng cung nhỏ AB có số đo bằng 100° (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

5.8. Trên mặt một chiếc đồng hồ có các vạch chia như Hình 5.12. Hỏi cứ sau mỗi khoảng thời gian 36 phút:

- a) Đầu kim phút vạch nên một cung có số đo bằng bao nhiêu độ?
- b) Đầu kim giờ vạch nên một cung có số đo bằng bao nhiêu độ?



Hình 5.12

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh tính chất hình học

Ví dụ 1. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một điểm M tùy ý thuộc nửa đường tròn đó. Chứng minh rằng khoảng cách từ M đến AB không lớn hơn $\frac{AB}{2}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC . Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại M và N . Chứng minh $MN < BC$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) đường kính AB , dây CD không cắt đường kính AB . Gọi H và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD . Chứng minh rằng $CH = DK$.

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) đường kính AB , dây CD cắt đường kính AB tại E . Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD . Chứng minh rằng $CH = DK$.

Ví dụ 5. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . M là điểm cố định nằm trong đường tròn (M khác O) và CD là dây cung quay quanh M . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A và B lên CD . Xác định vị trí của dây CD để $AH + BK$ lớn nhất.

Ví dụ 6. Cho đường tròn (O) . Các dây AB và CD bằng nhau, các tia BA và DC cắt nhau tại điểm M nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng $MA = MC$.

Ví dụ 7. Cho đường tròn (O) hai dây AB và CD sao cho $AB > CD$. Các tia BA và DC cắt nhau tại M nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD . Hãy so sánh MH và MK .

Ví dụ 8. Cho M là điểm nằm bên trong đường tròn (O) , vẽ qua M , hai dây AB và CD sao cho $AB > CD$. Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng: $MH > MK$.

Ví dụ 9. Từ điểm P nằm bên ngoài đường tròn $(O; R)$ và $OP = 2R$. Một đường thẳng qua P cắt đường tròn (O) tại A và B (A nằm giữa B và P) và $AB = R$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến BP . Qua P kẻ một đường thẳng khác cắt đường tròn (O) tại C và D (C, D ở khác phía với AB so với OP). Kẻ $OK \perp CD$. So sánh AB và CD biết $OK < \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 10. Cho điểm A cố định ở bên trong đường tròn $(O; R)$ và A không trùng với O . BC là dây cung quay quanh A . Xác định vị trí của dây cung BC lúc dây cung BC ngắn nhất.

Dạng 2. Tính toán

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O; 5\text{cm})$ là một dây bất kì của đường tròn đó. Biết $AB = 6\text{cm}$.

- Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng AB .
- Tính $\tan \alpha$ nếu góc ở tâm chắn cung AB bằng 2α .

Ví dụ 2. Tâm O của một đường tròn (cách dây AB của nó một khoảng 3cm . Tính bán kính của đường tròn (O) , biết rằng cung nhỏ AB có số đo bằng 100° (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Ví dụ 3. Cho đường tròn $(O; R)$ và một dây cung AB . Gọi I là trung điểm của AB . Tia OI cắt cung AB tại M .

- Cho $R = 5\text{cm}, AB = 6\text{cm}$. Tính độ dài dây cung MA .

b) Cho MN là đường kính của đường tròn (O;R) biết AN = 10cm và dây AB = 12cm. Tính bán kính R.

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Một dây CD không đi qua tâm O sao cho $\widehat{COD} = 90^\circ$ và CD cắt đường thẳng AB tại E (E nằm giữa hai điểm O và C), biết OE = 2R. Tính độ dài EC và ED theo R.

Ví dụ 5. Cho đường tròn (O;10cm) dây AB = 16cm.

a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.

b) Lấy K thuộc dây AB sao cho AK = 14cm. Vẽ dây PQ vuông góc với AB tại K. Chứng tỏ AB = PQ.

Ví dụ 6. Cho đường tròn (O) hai dây AB và CD song song với nhau, biết AB = 3cm, CD = 4cm. Khoảng cách giữa hai dây là 3,5cm. Tính bán kính đường tròn (O).

Ví dụ 7. Gọi I là trung điểm của dây cung AB không qua tâm của đường tròn (O;R). Qua I vẽ dây cung CD.

a) Chứng tỏ $CD \geq AB$. Tìm độ dài nhỏ nhất, lớn nhất của các dây quay quanh I.

b) Cho R = 5cm, OI = 4cm. Tính độ dài dây cung ngắn nhất qua I.

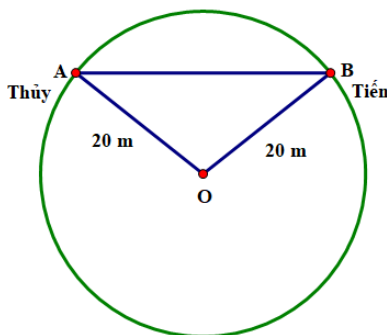
c) Chứng tỏ rằng: $\widehat{OAI} > \widehat{ODI}$.

Dạng 3. Toán thực tế

Ví dụ 1. Kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành một góc ở tâm có số đo là bao nhiêu độ vào những thời điểm sau:

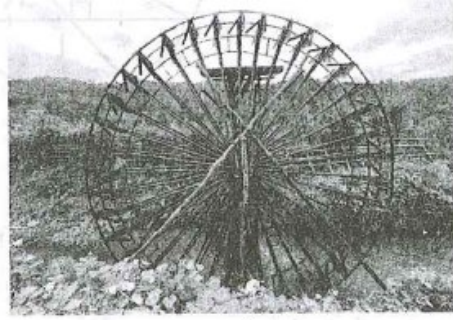
- a) 3 giờ; b) 5 giờ; c) 6 giờ; d) 12 giờ; e) 20 giờ.

Ví dụ 2. Trong một trò chơi, hai bạn Thủy và Tiến cùng chạy trên một đường tròn tâm O có bán kính 20m (hình vẽ). Có thời điểm nào dây AB nối vị trí của hai bạn đó có độ dài bằng 41m hay không? Vì sao?

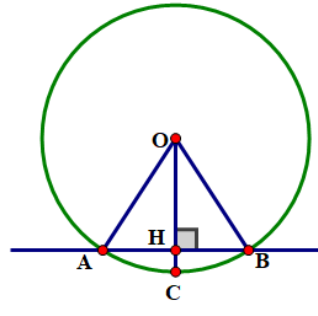


Ví dụ 3. Có thể xem guồng nước (còn gọi là cọn nước) là một công cụ hay cỗ máy có dạng hình tròn, quay được nhờ sức nước chảy (hình a). Guồng nước thường thấy ở các vùng miền núi. Nhiều guồng nước được làm bằng tre, dùng để đưa nước lên ruộng cao, giã gạo hoặc làm một số việc khác.

Giả sử ngán nước ngăn cách giữa phần trên và phần dưới của một guồng nước được biểu thị bởi cung ứng với một cây dài 4m và điểm ngấp sâu nhất là 0,5m (hình b, điểm ngấp sâu nhất là điểm C, ta có AB = 4m và HC = 0,5m). Dựa vào đó, em hãy tính bán kính của guồng nước.



a)



b)

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho đường tròn $(O; R)$. Vẽ dây $AB = R\sqrt{2}$. Tính số đo của hai cung AB.

Bài 2. Cho đường tròn $(O; R)$. Vẽ dây AB sao cho số đo của cung nhỏ AB bằng $\frac{1}{2}$ số đo của cung lớn AB. Tính diện tích của tam giác AOB

Bài 3. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và $\left(O; \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$. Trên đường tròn nhỏ lấy một điểm M. Tiếp tuyến tại M của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B. Tia OM cắt đường tròn lớn tại C.

a) Chứng minh rằng $\widehat{CA} = \widehat{CB}$.

b) Tính số đo của hai cung AB.

Bài 4. Cho đường tròn $(O; 5\text{cm})$ và dây $AB = 8\text{cm}$.

1. Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.

2. Lấy điểm I trên dây AB sao cho $AI = 1\text{cm}$. Qua I kẻ dây CD vuông góc với AB.

Chứng minh rằng $AB = CD$.

Bài 5. Trong hình vẽ bên có một mảnh giấy hình chữ nhật che khuất một phần của đường tròn (O) . Cho biết $AB = 1\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$ và $MN = 2\text{cm}$.

1. Tính độ dài đoạn DN.

2. Cho $AM = 1\text{cm}$. Tính bán kính của đường tròn (O) .

Bài 6. Cho đường tròn $(O; OA)$ và đường kính $AD = 12,5\text{cm}$. Lấy điểm B thuộc đường tròn $(O; OA)$ sao cho $AB = 10\text{cm}$. Kẻ dây BC vuông góc với đường kính AD. Tính các khoảng cách từ tâm O đến các dây AB và BC.

Bài 7. Cho đường tròn (O) và đường kính AB. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của OA, OB. Qua M, N lần lượt vẽ các dây CD, EF song song với nhau (C, E cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

1. Chứng minh tứ giác CDEF là hình chữ nhật

2. Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc 30° . Tính diện tích hình chữ nhật $CDEF$

Bài 8. Cho đường tròn (O) và đường kính $AB = 13\text{cm}$. Dây $CD = 12\text{cm}$ vuông góc với AB tại H .

1. Tính độ dài các đoạn HA, HB

2. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của H lên AC, BC . Tính diện tích tứ giác $CMHN$.

Bài 9. Cho đường tròn $(O; 5\text{cm})$ và điểm M cách O một đoạn là 3cm

1. Tính độ dài dây cung ngắn nhất của (O) đi qua M .

2. Tính độ dài dây cung dài nhất của (O) đi qua M .

Bài 10. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và M là điểm bất kỳ trên cung tròn

\widehat{BC} không chứa A . Gọi D, E lần lượt là điểm đối xứng của M qua AB, AC . Tìm vị trí của M để độ dài DE nhỏ nhất.

BÀI 15. ĐỘ DÀI CỦA CUNG TRÒN. DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN VÀ HÌNH VÀNH KHUYÊN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. ĐỘ DÀI CỦA CUNG TRÒN

Công thức tính độ dài của cung tròn

Trong đời sống, ta thường lấy $\pi \approx 3,14$.

Do đó, ta có công thức tính độ dài C của đường tròn ($O; R$), đường kính $d = 2R$ là: $C = \pi d = 2\pi R$. (1)

Ta có công thức tính độ dài l của cung n° trên đường tròn ($O; R$): $l = \frac{n}{180} \pi R$ (2)

Nhận xét. Từ hai công thức (1) và (2), ta được $l = \frac{n}{360} \pi d = \frac{n}{360} C$ hay $\frac{l}{C} = \frac{n}{360}$, nghĩa là:

Tỉ số giữa độ dài cung n° và độ dài đường tròn (cùng bán kính) đúng bằng $\frac{n}{360}$.

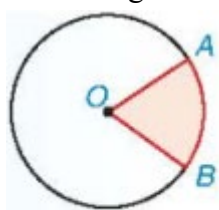
Ví dụ 1. Cho A và B là hai điểm trên đường tròn ($O; 3\text{cm}$) sao cho $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Tính số đo và độ dài các cung có hai mút A, B .

2. HÌNH QUẠT TRÒN VÀ HÌNH VÀNH KHUYÊN

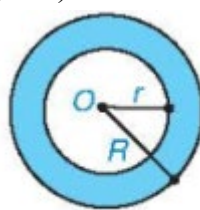
Hình tròn, hình quạt tròn và hình vành khuyên

1) **Hình quạt tròn** là phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai đầu mút của cung đó (H.5.15).

2) **Hình vành khuyên** (còn gọi là hình vành khăn) (H.5.16) là phần nằm giữa hai đường tròn có cùng tâm và bán kính khác nhau (còn gọi là hai đường tròn đồng tâm).



Hình 5.15



Hình 5.16

Diện tích hình quạt tròn và hình vành khuyên

Diện tích S_q của hình quạt tròn bán kính R ứng với cung n° : $S_q = \frac{n}{360} \pi R^2 = \frac{l \cdot R}{2}$. (3)

Diện tích S_v của hình vành khuyên tạo bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính R và r .

$$S_v = \pi(R^2 - r^2); (R > r). (4)$$

Nhận xét:

Công thức (3) có thể viết là $S_q = \frac{n}{360} S$ hay $\frac{S_q}{S} = \frac{n}{360} = \frac{l}{C}$, nghĩa là:

Tỉ số giữa diện tích hình quạt tròn ứng với cung n° và diện tích hình tròn (cùng bán kính) đúng bằng $\frac{n}{360}$

và bằng tỉ số giữa độ dài cung n° và độ dài đường tròn.

Ví dụ 2. Tính diện tích của hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 3 m và 5 m.

Ví dụ 3. Tính diện tích của hình quạt tròn bán kính 5 cm và có độ dài cung tương ứng với nó bằng 4π cm.

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

5.9. Cho đường tròn $(O; 4\text{ cm})$ và ba điểm A, B, C trên đường tròn đó sao cho tam giác ABC cân tại đỉnh A và số đo của cung nhỏ BC bằng 70° .

a) Giải thích tại sao hai cung nhỏ AB và AC bằng nhau.

b) Tính độ dài của các cung BC, AB và AC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

5.10. Tính diện tích của hình quạt tròn bán kính 4 cm , ứng với cung 36° .

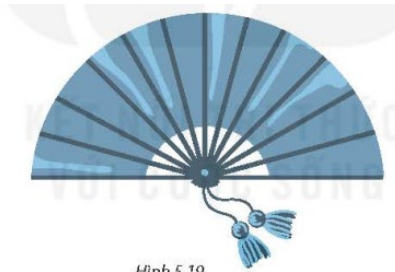
5.11. Tính diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 6 cm và 4 cm .

5.12. Có hai chiếc bánh pizza hình tròn (H.5.18). Chiếc bánh thứ nhất có đường kính 16 cm được cắt thành 6 miếng đều nhau có dạng hình quạt tròn. Chiếc bánh thứ hai có đường kính 18 cm được cắt thành 8 miếng đều nhau có dạng hình quạt tròn. Hãy so sánh diện tích bề mặt của hai miếng bánh cắt ra từ chiếc bánh thứ nhất và thứ hai.



Hình 5.18

5.13. Một chiếc quạt giấy khi xoè ra có dạng nửa hình tròn bán kính $2,2\text{ dm}$ như Hình 5.19. Tính diện tích phần giấy của chiếc quạt, biết rằng khi gấp lại, phần giấy có chiều dài khoảng $1,6\text{ dm}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của dm^2).



Hình 5.19

C. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

Dạng 1. Tính độ dài các cung tròn. Diện tích các hình

Ví dụ 1. Cho A và B là hai điểm trên đường tròn $(O; 0,8)$ sao cho $\widehat{AOB} = 100^\circ$. Tính số đo và độ dài các cung có hai mút A, B .

Ví dụ 2. Tính độ dài cung 90° của đường tròn $(O; 6\text{ cm})$.

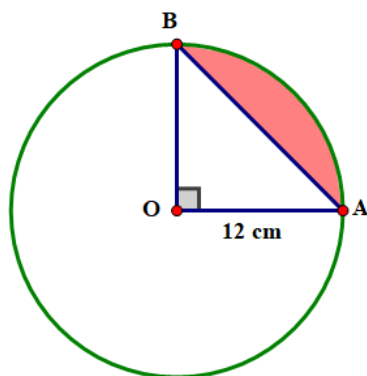
Ví dụ 3. Tính diện tích hình quạt tròn có bán kính 4 cm , ứng với cung 36° .

Ví dụ 4. (Xem hình vẽ)

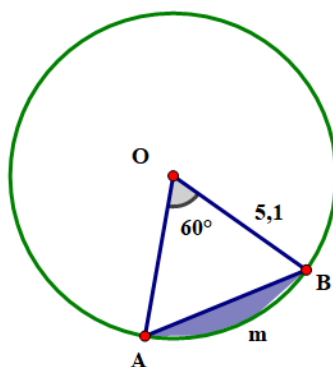
a) Tính diện tích hình quạt tròn tâm O cung nhỏ AB .

b) Tính diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung nhỏ AB (gọi là hình viên phân tâm O cung nhỏ AB).

Làm tròn kết quả đến hàng phần mười centimét vuông).



Ví dụ 5. Phần hình tròn được giới hạn bởi một cung và dây căng cung đó gọi là hình viên phân. Tính diện tích hình viên phân AmB , biết góc ở tâm $\widehat{AOB} = 60^\circ$ và bán kính đường tròn là 5,1 cm (hình vẽ) (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của cm^2).



Ví dụ 6. Tính diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 6 cm và 4 cm.

Ví dụ 7. Cho đường tròn $(O; 4\text{cm})$ và ba điểm A, B, C trên đường tròn đó sao cho tam giác ABC cân tại đỉnh A và số đo cung nhỏ BC bằng 70° .

- Giải thích tại sao hai cung nhỏ AB và AC bằng nhau.
- Tính độ dài của các cung BC, AB và AC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

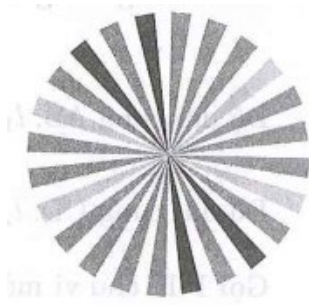
Ví dụ 8. Cho tam giác đều ABC có $AB = 2\sqrt{3}\text{ cm}$. Nửa đường tròn đường kính BC cắt hai cạnh AB và AC lần lượt tại D và E (khác B và C) (hình vẽ).

- Chứng tỏ rằng ba cung nhỏ BD, DE và EC bằng nhau. Tính số đo mỗi cung ấy.
- Tính diện tích của hình viên phân giới hạn bởi dây BD và cung nhỏ BD.

Dạng 2. Toán thực tế

Ví dụ 1. Ba bộ phận truyền chuyển động của một chiếc xe đạp gồm một giø đĩa (bánh răng gắn với bàn đạp), một chiếc líp (cũng có dạng bánh răng gắn với bánh xe và bộ xích (hình vẽ). Biết rằng giø đĩa có bán kính 15 cm, líp có bán kính 4 cm và bánh xe có đường kính 65 cm. Hỏi khi người đi xe đạp một vòng thì xe chạy được quãng đường dài bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?

Ví dụ 2. Một hoạ tiết trang trí có dạng hình tròn bán kính 4 dm được chia thành nhiều hình quạt tròn (hình vẽ), mỗi hình quạt có góc ở tâm là $7,5^\circ$. diện tích của mỗi hình quạt đó là bao nhiêu decimet vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Ví dụ 3. Một chiếc quạt giấy kho xoè ra có dạng nửa hình tròn bán kính 2,2dm như hình vẽ. Tính diện tích phần giấy của chiếc quạt, biết rằng khi gấp lại, phần giấy có chiều dài khoảng 1,6dm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của dm^2)?



Ví dụ 4. Trong hình vẽ chiếc quạt có dạng một hình quạt tròn tâm O cung AB, bán kính $OA = OB = 20\text{ cm}$. Giấy được dán trong phần giới hạn bởi cung AB, cung CD, đoạn thẳng AC và BD với $OC = OD = 10\text{ cm}$. Biết khi mở rộng tối đa, hai nan quạt ngoài cùng tạo thành một góc $AOB = 140^\circ$. Tính chu vi và diện tích mảnh giấy để dán một mặt quạt (diện tích mép dán không đáng kể).

Ví dụ 5. Hình vẽ bên mô tả mặt cắt của một khúc gỗ có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 4dm và 3dm. Diện tích mặt cắt đó là bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Ví dụ 6. Một máy kéo nông nghiệp có đường kính bánh xe sau là 124m và đường kính bánh xe trước là 80cm. Hỏi khi bánh xe sau lăn được 20 vòng thì bánh xe trước lăn được bao nhiêu vòng?

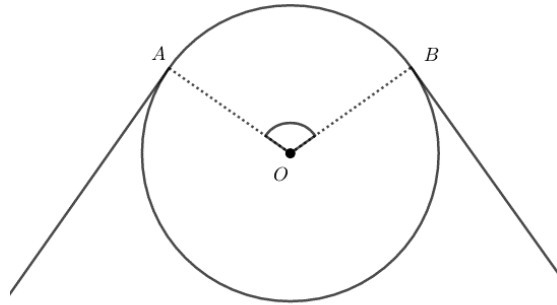
D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1.

- Tính độ dài cung 60° của một đường tròn có bán kính 2 dm.
- Tính chu vi vành xe đạp có đường kính 650mm.

Bài 2. Máy kéo nông nghiệp có hai bánh sau to hơn hai bánh trước. Khi bơm căng, bánh sau xe có đường kính là 1,672m và bánh xe trước có đường kính là 88cm. Hỏi sau khi bánh xe sau lăn được 10 vòng thì bánh xe trước lăn được mấy vòng?

Bài 3. Bánh xe của một rờng rọc có chu vi là 540mm. Dây cua-roa bao bánh xe theo cung AB có độ dài 200mm. Tính góc AOB (h.82).



Hình 82

Bài 4. Vĩ độ của Hà Nội là $20^{\circ}01'$. Mỗi vòng kinh tuyến của Trái Đất dài khoảng $40000km$. Tính độ dài cung kinh tuyến từ Hà Nội đến xích đạo.

Bài 5. Cho đường tròn (O) bán kính OA . Từ trung điểm M của OA vẽ dây $BC \perp OA$. Biết độ dài đường tròn (O) là $4\pi(cm)$. Tính:

- Bán kính của đường tròn (O) ;
- Độ dài hai cung BC của đường tròn.

Bài 6. Tam giác ABC có $AB = AC = 3cm$; $\hat{A} = 120^{\circ}$. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 7. Một tam giác đều và một hình vuông cùng có chu vi là $72cm$. Hỏi độ dài đường tròn ngoại tiếp hình nào lớn hơn? Lớn hơn bao nhiêu?

Bài 8. Cho đường tròn đường kính $BC = 2R$. Trên đường tròn lấy một điểm A sao cho $AB = R\sqrt{3}$. Gọi P_1, P_2, P_3 là chu vi các đường tròn có đường kính lần lượt là CA, AB và BC . Chứng minh: $\frac{P_1^2}{1} = \frac{P_2^2}{3} = \frac{P_3^2}{4}$.

Bài 9. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O) . Vẽ ra phía ngoài của tứ giác này bốn nửa đường tròn có đường kính lần lượt là bốn cạnh của tứ giác. Chứng minh rằng tổng độ dài hai nửa đường tròn có đường kính là hai cạnh đối diện bằng tổng độ dài hai nửa đường tròn kia.

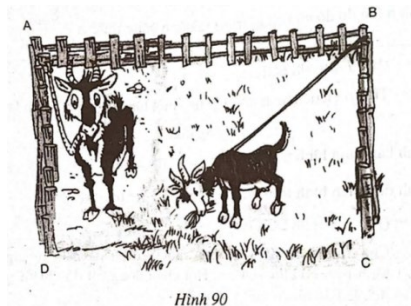
Bài 10. Tính diện tích hình tròn nội tiếp một hình vuông có cạnh là $4cm$.

Bài 11. Chân một đồng cát đổ trên một nền phẳng nằm ngang là một hình tròn có chu vi $12m$. Hỏi chân đồng cát đó chiếm một diện tích là bao nhiêu mét vuông?

Bài 12. Một vườn cỏ hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 40m, AD = 30m$. Người ta muốn buộc hai con dê ở hai góc vườn A, B . Có hai cách buộc:

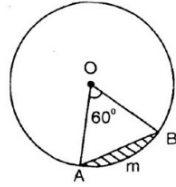
- Mỗi dây thừng dài $20m$.
- Một dây thừng dài $30m$ và dây thừng kia dài $10m$.

Hỏi với cách buộc nào thì diện tích cỏ mà cả hai con dê có thể ăn được sẽ lớn hơn (h.90)?

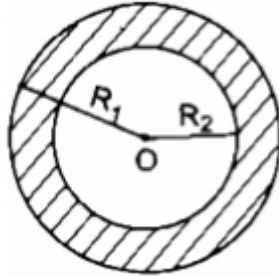


Hình 90

Bài 13. Hình viên phân là phần hình tròn giới hạn bởi một cung và dây căng cung ấy. Hãy tính diện tích hình viên phân AmB , biết góc ở tâm $\widehat{AOB} = 60^{\circ}$ và bán kính đường tròn là $5,1cm$ (h.94).



Bài 14. Hình vành khăn là phần hình tròn giữa hai đường tròn đồng tâm (h.65).



a) Tính diện tích S của hình vành khăn theo R_1 và R_2 (giả sử $R_1 > R_2$).

b) Tính diện tích hình vành khăn khi $R_1 = 10,5 \text{ cm}$, $R_2 = 7,8 \text{ cm}$.

Bài 15. Chứng minh rằng diện tích hình tròn ngoại tiếp hình vuông bằng hai lần diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông đó.

Bài 16. Vẽ lại hình 98 rồi tính:

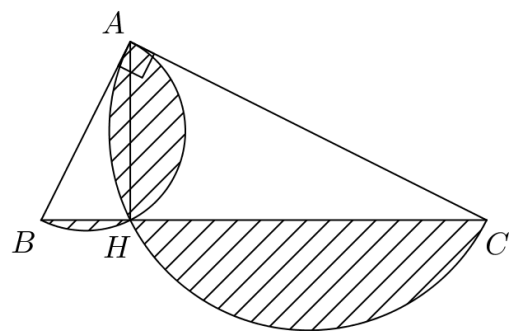
a) Diện tích hình tròn ở giữa;

b) Diện tích miền gạch sọc

Bài 17. Tam giác đều có cạnh a , nội tiếp đường tròn (O) . Tính diện tích hình viên phân tạo thành bởi một cạnh của tam giác và một cung nhỏ căng cạnh đó.

Bài 18. Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH = 2cm. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A ta vẽ ba nửa đường tròn có đường kính lần lượt là BH, CH và BC. Tính diện tích miền giới hạn bởi ba đường tròn đó.

Bài 19. Trong hình 99, biết $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB = 4$; $AC = 6$. Hai nửa đường tròn đường kính AB và AC cắt nhau tại H. Tính diện tích miền gạch sọc



Hình 99

LUYỆN TẬP CHUNG

A. VÍ DỤ SÁCH GIÁO KHOA

Ví dụ 1. Cho tam giác nhọn ABC cân tại A . Từ B và C kẻ lần lượt hai đường cao BH và CK của tam giác ABC .

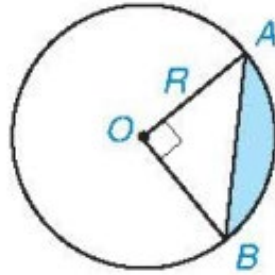
a) Chứng minh rằng đường tròn tâm O đường kính BC đi qua K và H .

b) Chứng minh rằng hai cung nhỏ BH và CK bằng nhau.

c) Tính số đo của cung nhỏ KH nếu $\widehat{BAC} = 40^\circ$.

Ví dụ 2. Ta gọi hình giới hạn bởi một cung nhỏ của một đường tròn và dây căng cung đó là hình Viên phân.

Lập công thức tính diện tích hình Viên phân ứng với cung 90° , biết bán kính của đường tròn là R .



Hình 5.21

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

5.14. Cho dây AB không qua tâm của đường tròn (O). Gọi A' và B' là hai điểm lần lượt đối xứng với A và B qua O . Hỏi đường trung trực của $A'B'$ có phải là trục đối xứng của (O) hay không? Tại sao?

5.15. Cho tam giác ABC không là tam giác vuông. Gọi H và K là chân các đường vuông góc lần lượt hạ từ B và C xuống AC và AB . Chứng minh rằng:

a) Đường tròn đường kính BC đi qua các điểm H và K ;

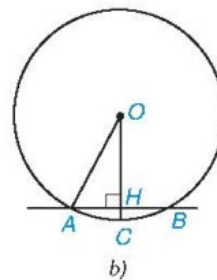
b) $KH < BC$.

5.16. Có thể xem guồng nước (còn gọi là cọn nước) là một công cụ hay cỗ máy có dạng hình tròn, quay được nhờ sức nước chảy (H.5.22a). Guồng nước thường thấy ở các vùng miền núi. Nhiều guồng nước được làm bằng tre, dùng để đưa nước lên ruộng cao, giã gạo hoặc làm một số việc khác.

Giả sử ngăn nước ngăn cách giữa phần trên và phần dưới nước của một guồng nước được biểu thị bởi cung ứng với một dây dài 4 m và điểm ngập sâu nhất là 0,5 m (trên Hình 5.22b, điểm ngập sâu nhất là điểm C , ta có $AB = 4$ m và $HC = 0,5$ m). Dựa vào đó, em hãy tính bán kính của guồng nước.



a)



b)

Hình 5.22

5.17. Cho đường tròn (O ; 5 cm).

a) Hãy nêu cách vẽ dây AB sao cho khoảng cách từ điểm O đến dây AB bằng 2,5 cm.

b) Tính độ dài của dây AB trong câu a (làm tròn đến hàng phần trăm).

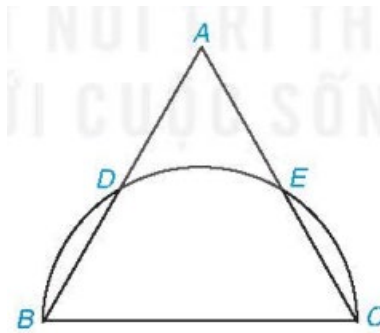
- c) Tính số đo và độ dài của cung nhỏ AB .
- d) Tính diện tích hình quạt tròn ứng với cung nhỏ AB .

5.18. Ba bộ phận truyền chuyển động của một chiếc xe đạp gồm một giò đĩa (bánh răng gắn với bàn đạp), một chiếc líp (cũng có dạng bánh răng) gắn với bánh xe và bộ xích (H.5.23). Biết rằng giò đĩa có bán kính 15 cm, líp có bán kính 4 cm và bánh xe có đường kính 65 cm. Hỏi khi người đi xe đạp một vòng thì xe chạy được quãng đường dài bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?



5.19. Cho tam giác đều ABC có $AB = 2\sqrt{3}$ cm. Nửa đường tròn đường kính BC cắt hai cạnh AB và AC lần lượt tại D và E (khác B và C) (H.5.24).

- a) Chứng tỏ rằng ba cung nhỏ BD, DE và EC bằng nhau. Tính số đo mỗi cung ấy.
- b) Tính diện tích của hình Viên phân (xem Ví dụ 2) giới hạn bởi dây BD và cung nhỏ BD .



C. BÀI TẬP THÊM

Bài 1: Xem hình 6. Tính số đo của góc ở tâm AOB và số đo cung lớn AB .

Bài 2. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại M . Biết $\widehat{AMB} = 45^\circ$.

- a) Tính số đo của góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA, OB .
- b) Tính số đo mỗi cung AB (cung lớn và cung nhỏ)

Bài 3. Cho tam giác đều ABC . Gọi O là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C .

- a) Tính số đo các góc ở tâm tạo bởi hai trong ba bán kính OA, OB, OC .
- b) Tính số đo các cung tạo bởi hai trong ba điểm A, B, C .

Bài 4. Trên đường tròn tâm O lấy ba điểm A, B, C sao cho $\widehat{AOB} = 100^\circ$, số $\widehat{AC} = 45^\circ$. Tính số đo cung nhỏ BC và cung lớn BC . (xét cả hai trường hợp: điểm C nằm trên cung nhỏ AB , điểm C nằm trên cung lớn AB).

Bài 5. Cho đường tròn (O) , bán kính OM . Vẽ đường tròn tâm O' đường kính OM . Một bán kính OA của đường tròn (O) cắt đường tròn (O') ở B . Chứng minh cung MA và cung MB có độ dài bằng nhau.

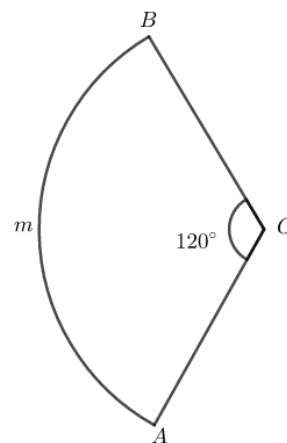
Bài 6. Xem hình 86 và so sánh độ dài của cung AmB với độ dài đường gấp khúc AOB .

Bài 7. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A . Một đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại B , cắt đường tròn (O') tại C . Chứng minh rằng nếu $R' = \frac{1}{2}R$ thì độ dài của cung AC bằng

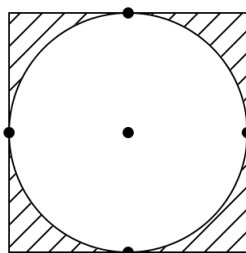
nửa độ dài của cung AB (chỉ xét các cung nhỏ \widehat{AC} , \widehat{AB})

Bài 8. Một hình vuông và một hình tròn có cùng chu vi. Hỏi hình nào có diện tích lớn hơn.

Bài 9. Trong hình 97, biết diện tích miền gạch sọc là 86cm^2 . Tính diện tích hình tròn



Hình 86



Hình 97

Bài 10. Tính diện tích hình vành khăn tạo thành bởi đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác đều có cạnh là 6cm.

BÀI 16. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

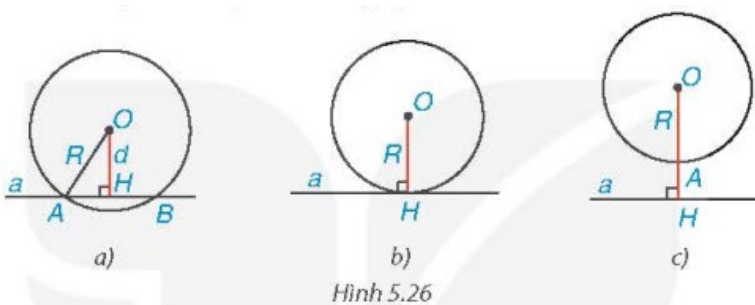
1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Số điểm chung của đường thẳng và đường tròn

- 1) Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là cắt nhau nếu chúng có đúng hai điểm chung (H.5.26a).
- 2) Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là tiếp xúc với nhau nếu chúng có duy nhất một điểm chung H . Điểm chung ấy gọi là tiếp điểm. Khi đó, đường thẳng a còn gọi là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại H (H.5.26b).
- 3) Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là không giao nhau nếu chúng không có điểm chung (H.5.26c).

Nhận xét

- 1) Cho đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$. Gọi d là khoảng cách từ O đến a . Từ HĐ1, ta nhận thấy: Đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ cắt nhau khi $d < R$ (H.5.26a), tiếp xúc với nhau khi $d = R$ (H.5.26b) và không giao nhau khi $d > R$ (H.5.26c).



- 2) Nếu đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn (O) tại H thì $OH \perp a$.

2. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc với nhau

Định lý 1 (Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến)

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm nằm trên một đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

Ví dụ 1. Cho AB là một dây không đi qua tâm của đường tròn (O) . Đường thẳng qua O và vuông góc với AB cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở điểm C . Chứng minh rằng CB là một tiếp tuyến của (O) .

3. HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN

Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

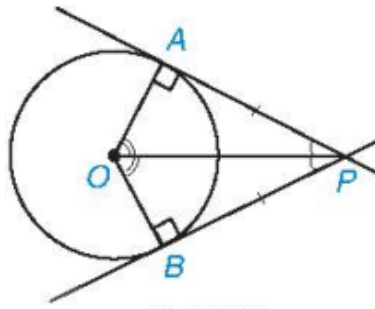
Định lý 2

Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm P thì:

Điểm P cách đều hai tiếp điểm;

PO là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến;

OP là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính qua hai tiếp điểm.



Hình 5.28

Ví dụ 2. Cho hai tiếp tuyến PA và PB của đường tròn $(O;R)$ (A và B là hai tiếp điểm).

- Chứng minh rằng $OP \perp AB$;
- Tính PA và PB , biết $R = 2$ cm và $PO = 4$ cm.

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

5.20. Bạn Thanh cắt 4 hình tròn bằng giấy có bán kính lần lượt là 4 cm, 6 cm, 7 cm và 8 cm để dán trang trí trên một mảnh giấy, trên đó có vẽ trước hai đường thẳng a và b . Biết rằng a và b là hai đường thẳng song song với nhau và cách nhau một khoảng 6 cm (nghĩa là mọi điểm trên đường thẳng b đều cách a một khoảng 6 cm). Hỏi nếu bạn Thanh dán sao cho tâm của cả 4 hình tròn đều nằm trên đường thẳng b thì hình nào đè lên đường thẳng a , hình nào không đè lên đường thẳng a ?

5.21. Cho đường tròn (O) đi qua ba đỉnh A, B và C của một tam giác cân tại A . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua A và song song với BC là một tiếp tuyến của (O) .

5.22. Cho góc xOy với đường phân giác Ot và điểm A trên cạnh Ox , điểm B trên cạnh Oy sao cho $OA = OB$. Đường thẳng qua A và vuông góc với Ox cắt Ot tại P . Chứng minh rằng OA và OB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(P; PA)$.

5.23. Cho SA và SB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O) (A và B là hai tiếp điểm). Gọi M là một điểm tùy ý trên cung nhỏ AB . Tiếp tuyến của (O) tại M cắt SA tại E và cắt SB tại F .

- Chứng minh rằng chu vi của tam giác SEF bằng $SA + SB$.
- Giả sử M là giao điểm của đoạn SO với đường tròn (O) . Chứng minh rằng $SE = SF$.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Ví dụ 1. Cho đường thẳng a và một điểm O cách a một khoảng 7 cm. Hãy xác định vị trí tương đối của a với các đường tròn sau:

- Đường tròn $(O; 5$ cm);
- Đường tròn $(O; 7$ cm);
- Đường tròn $(O; 9$ cm).

Ví dụ 2. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng a đến đường tròn $(O; 7$ cm) nếu khoảng cách từ O đến a bằng:

- 4 cm;
- 9 cm;
- 7 cm.

Ví dụ 3. Cho đường thẳng a và một điểm O cách a một khoảng 4 cm . Vẽ đường tròn tâm O bán kính 5 cm .

a) Giải thích vì sao a và (O) cắt nhau.

b) Gọi B và C là các giao điểm của đường thẳng a và đường tròn $(O; 5\text{ cm})$. Tính độ dài dây BC .

Ví dụ 4. Trong hình vẽ, mép ngoài cửa ra vào có dạng một phần của đường tròn bán kính $1,6\text{ m}$. Hãy tính chiều cao HK của cửa đó, biết $AH = 0,9\text{ m}$.

Dạng 2. Chứng minh đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn

Ví dụ 1. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm). Lấy một điểm C trên đường tròn sao cho $AC = AB$. Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3; AC = 4$ và $BC = 5$. Chứng minh rằng đường thẳng AC là tiếp tuyến của đường tròn $(B; 3)$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) và điểm I ở ngoài đường tròn. Gọi M là giao điểm của đường tròn tâm K đường kính IO và đường tròn (O) . Chứng minh đường thẳng IM là tiếp tuyến của (O) tại M .

Ví dụ 4. Cho A là một điểm thuộc đường tròn (O) , M là một điểm thuộc tiếp tuyến của (O) tại A (M khác A). Đường tròn tâm M bán kính MA cắt (O) tại B (B khác A). Chứng minh rằng MB là một tiếp tuyến của (O) .

Ví dụ 5. Cho đường tròn (O) dây BC khác đường kính, qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn ở A . Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Ví dụ 6. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến tại B với đường tròn (O) , trên tiếp tuyến lấy P . Qua A kẻ đường thẳng song song với OP cắt (O) tại Q . Chứng minh PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH và BK cắt nhau tại I . Chứng minh rằng HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI .

Ví dụ 8. Cho đường tròn (O) đi qua ba điểm A, B và C của một tam giác cân tại A . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua A và song song với BC là một tiếp tuyến của (O) .

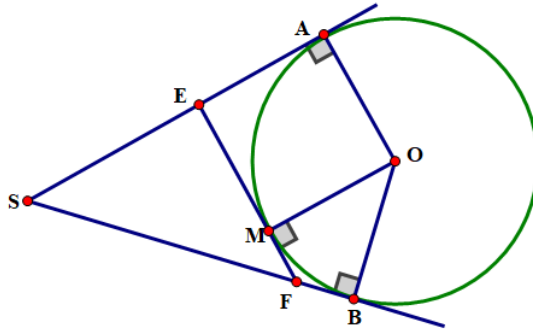
Ví dụ 9. Trong hình vẽ, $AB = 9$, $BC = 12$, $AC = 15$ và BC là đường kính của đường tròn (O) . Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Ví dụ 10. Cho góc xOy với đường phân giác Ot và điểm A trên cạnh Ox , điểm B trên cạnh Oy sao cho $OA = OB$. Đường thẳng qua A và vuông góc với Ox cắt Ot tại P . Chứng minh rằng OA và OB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(P; PA)$.

Ví dụ 11. Cho SA và SB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O) (A và B là hai tiếp điểm). Gọi M là điểm tùy ý trên cung nhỏ AB . Tiếp tuyến của (O) tại M cắt SA tại E và cắt SB tại F .

a) Chứng minh rằng chu vi của tam giác SEF bằng $SA + SB$.

b) Giả sử M là giao điểm của đoạn SO với đường tròn (O) . Chứng minh rằng $SE = SF$.



Ví dụ 12. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Vẽ đường tròn đường kính AO cắt đường tròn $(O;R)$ tại hai điểm B và C.

a) Chứng minh AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$.

b) Chứng minh $AB = AC$.

c) Xác định tia phân giác của \widehat{BAC} và \widehat{BOC} .

Ví dụ 13. Cho đường tròn (O) đường kính AB. C là một điểm nằm trên đường tròn (O) , các tiếp tuyến của đường tròn tại A và C cắt nhau ở D. Gọi H là hình chiếu của C trên AB và I là giao điểm của BD và CH. Chứng minh rằng $CI = HI$.

Ví dụ 14. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến PA, PB (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến đường kính BC. Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm I của AH

Ví dụ 15. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn. Từ một điểm M trên cung nhỏ BC kẻ một tiếp tuyến thứ ba cắt hai tiếp tuyến kia tại P và Q. Chứng minh rằng khi M chuyển động trên cung BC thì chu vi tam giác APQ có giá trị không đổi.

Ví dụ 16. Cho đường tròn (I, r) nội tiếp $\triangle ABC$, các tiếp điểm trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt là D, E, F. Chứng minh rằng: $2AD = AB + AC - BC$ (*)

Ví dụ 17. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB, từ A và B vẽ hai tiếp tuyến Ax và By. Một điểm M di động trên nửa đường tròn này, qua M vẽ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax và By lần lượt tại C và D. Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O) sao cho $3AC + BD$ nhỏ nhất.

Ví dụ 18. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. M là điểm bất kì thuộc nửa đường tròn, kẻ MH vuông góc với AB (H thuộc AB). Vẽ đường tròn tâm M bán kính MH. Kẻ các tiếp tuyến AC, BD với đường tròn tâm M (C, D là các tiếp điểm)

a) Chứng minh ba điểm C, M, D thẳng hàng và CD là tiếp tuyến của (O) .

b) Chứng minh rằng khi M di chuyển trên nửa đường tròn (O) thì $AC + BD$ không đổi.

Dạng 3. Tính toán

Ví dụ 1. Trong hình vẽ, AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B.

a) Tính bán kính r của đường tròn (O) .

b) Tính chiều dài cạnh OA của tam giác ABO.

Ví dụ 2. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(I; 6\text{cm})$ và ME, MF là hai tiếp tuyến của đường tròn này tại E và F. Cho biết $\widehat{EMF} = 60^\circ$.

a) Tính số đo \widehat{EMI} và \widehat{EIF} .

b) Tính độ dài MI.

Ví dụ 3. Cho đường tròn $(O; 6\text{ cm})$. M nằm ngoài đường tròn sao cho $OM = 10\text{ cm}$. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (A, B là hai tiếp điểm). Tính độ dài các cạnh của tam giác MAB .

Ví dụ 4. Cho đường tròn $(O; 5\text{ cm})$. Điểm M nằm ngoài (O) sao cho hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là hai tiếp điểm) vuông góc với nhau tại M .

a) Tính độ dài của MA và MB .

b) Qua giao điểm I của đoạn thẳng MO và đường tròn (O) , vẽ một tiếp tuyến cắt MA, MB lần lượt tại C, D . Tính độ dài của CD .

Ví dụ 5. Cho đường tròn (O) , điểm M nằm ngoài (O) sao cho MA và MB là hai tiếp tuyến (A, B là hai tiếp điểm) thỏa mãn $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Biết chu vi tam giác MAB là 18 cm , tính độ dài dây AB .

Ví dụ 6. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ với $OA = 2R$. Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là tiếp điểm). Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều và tính các cạnh của nó theo R .

Ví dụ 7. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , $MO = 13\text{ cm}$, vẽ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm).

a) Tính độ dài MA, MB .

b) Cho C là điểm bất kì thuộc đường tròn (O) và nằm trong góc AOB . Tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt MA tại N và cắt MB tại P . Tính chu vi tam giác MNP .

Dạng 4. Toán thực tế

Ví dụ 1. Bánh đà của một động cơ được thiết kế có dạng là một đường tròn tâm O , bán kính 15 cm được kéo bởi một dây curoa. Trục của mô tơ truyền lực được biểu diễn bởi điểm M (hình vẽ). Cho biết khoảng cách OM là 35 cm .

a) Tính độ dài của hai đoạn dây curoa MA và MB (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

b) Tính số đo \widehat{AMB} tạo bởi hai tiếp tuyến AM, BM và số đo \widehat{AOB} (kết quả làm tròn đến phút).

Ví dụ 2. Trong hình vẽ, mặt cắt của Trái Đất có thể xem là đường tròn tâm O bán kính $R = 6400\text{ km}$. Từ điểm A nằm ở độ cao h so với mực nước biển, một người có thể thấy xa nhất đến điểm B trên (O) sao cho AB là tiếp tuyến (O). Khoảng cách AB khi đó được gọi là tầm nhìn xa từ điểm A . Tính AB nếu $h = 20\text{ m}$.

Ví dụ 3. Trong hình vẽ, để tàu không trật bánh ray khi chuyển hướng từ đường ray thẳng XA sang đường ray thẳng YB , đoạn dây nối được thiết kế là một phần của đường tròn (O) tiếp xúc với XA tại A và YB tại B . Biết góc chuyển hướng của tàu là $\widehat{AMB} = 105^\circ$ và khoảng cách giữa hai điểm A và B là 730 m . Tính bán kính của đường tròn (O) , làm tròn kết quả đến đơn vị mét.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $a // b$ và cách nhau một khoảng là 2 cm . Lấy điểm $O \in a$, vẽ đường tròn $(O; 2\text{ cm})$. Chứng minh rằng đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng b .

Bài 2. Cho đường thẳng xy đi qua điểm A nằm trong đường tròn $(O; R)$. Chứng minh rằng đường thẳng xy và đường tròn $(O; R)$ cắt nhau.

- Bài 3.** Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau, cách nhau một khoảng là h . Một đường tròn (O) tiếp xúc với a và b . Hỏi tâm O di động trên đường nào?
- Bài 4.** Cho đường tròn ($O; 2cm$) và một điểm A chạy trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy . Trên xy lấy một điểm M sao cho $AM = 2\sqrt{3}$ cm. Hỏi điểm M di động trên đường nào?
- Bài 5.** Cho đường tròn ($O; R$) và dây $AB = 1,6R$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB ; cắt các tia OA , OB theo thứ tự tại M và N . Tính diện tích tam giác OMN .
- Bài 6.** Cho đường tròn ($O; R$) có đường kính AB . Vẽ dây AC sao cho $AC = R$. Gọi I là trung điểm của dây AC . Đường thẳng OI cắt tiếp tuyến Ax tại M . Chứng minh rằng:
- \widehat{ACB} có số đo bằng 90° , từ đó suy ra độ dài của BC theo R ;
 - OM là tia phân giác của \widehat{COA} ;
 - MC là tiếp tuyến của đường tròn ($O; R$).
- Bài 7.** Cho nửa đường tròn ($O; R$) đường kính AB . Kẻ các tiếp tuyến tại A và B với nửa đường tròn. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến tại A và B lần lượt tại C và D .
- Chứng minh rằng: $CD = CA + BD$; $\widehat{COD} = 90^\circ$.
 - Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD .
- Bài 8.** Cho đường tròn ($O; R$) đường kính AB và các đường thẳng m, n, p lần lượt tiếp xúc với đường tròn tại A, B, C (hình vẽ). Chứng minh:
- $AD + BE = DE$;
 - $\widehat{COD} = \frac{1}{2}\widehat{COA}$ và $\widehat{COE} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$;
 - Tam giác ODE vuông;
 - $\frac{OD \cdot OE}{DE} = R$.
- Bài 9.** Cho đường tròn tâm I nội tiếp $\triangle ABC$, các tiếp điểm trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt là D, E, F . Qua D kẻ đường thẳng song song với BC cắt EF tại N và AE tại M . Chứng minh rằng: M là trung điểm của DN .
- Bài 10.** Cho góc $\widehat{xOy} = 60^\circ$. Đường tròn tâm K bán kính R tiếp xúc với Ox tại A và Oy tại B . Từ điểm M trên cung nhỏ AB , vẽ tiếp tuyến với đường tròn, tiếp tuyến này cắt Ox, Oy lần lượt tại C và D .
- Tính chu vi $\triangle COD$ theo R . Chứng tỏ chu vi đó không đổi khi M chạy trên cung nhỏ AB .
 - Chứng tỏ số đo \widehat{CKD} không đổi khi M chạy trên cung nhỏ AB .
- Bài 11.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng: $AB + AC = 2(R + r)$.
- Bài 12.** Cho nửa đường tròn ($O; R$) đường kính AB từ A và B vẽ hai tiếp tuyến Ax và By . Một điểm M di động trên nửa đường tròn này qua M vẽ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax và By lần lượt tại C và D . Hãy xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn ($O; R$) sao cho $AC + BD$ nhỏ nhất.

Bài 13. Cho đường tròn $(O; R)$ một đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại hai điểm D và E . Một điểm A di động trên đường thẳng d và A nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là hai tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của DE , đường thẳng OI cắt đường thẳng BC tại N . Chứng minh rằng: Khi A di động trên đường thẳng d thì BC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 14. Cho đường tròn (O) nội tiếp $\triangle ABC$, các tiếp điểm trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt là M, N và S

a) Chứng minh rằng: $AB + AC - BC = 2AM$.

b) Cho $AB = 4\text{ cm}, BC = 7\text{ cm}$ và $CA = 5\text{ cm}$. Tính các đoạn thẳng AM, BM và CS

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\text{ cm}, AC = 8\text{ cm}$. Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Tính bán kính của đường tròn tâm I .

Bài 16. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 10\text{ cm}, BC = 12\text{ cm}$, và I là tâm của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Tính bán kính của đường tròn (I).

Hướng dẫn: Theo bài 36. Để tính bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ ta tính diện tích của tam giác (S) và nửa chu vi (p).

Bài 17. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 13\text{ cm}, BC = 10\text{ cm}$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính bán kính của đường tròn (O).

Bài 18. Quan sát hình vẽ. Biết AB, AC lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C . Tính giá trị của x .

BÀI 17. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. HAI ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU

Tìm hiểu hai đường tròn cắt nhau

Nếu hai đường tròn có đúng hai điểm chung thì ta nói đó là hai đường tròn cắt nhau. Hai điểm chung gọi là hai giao điểm của chúng.

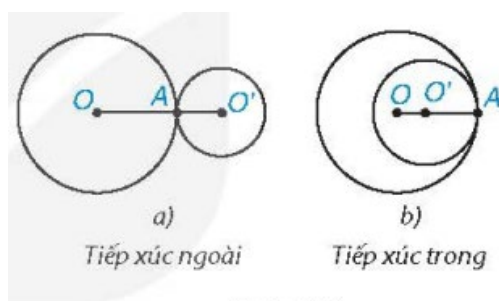
Nhận xét : Hai đường tròn (O, R) và (O', R') cắt nhau khi $R - R' < OO' < R + R'$; ($R > R'$).

Ví dụ 1. Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 5$ cm. Hãy giải thích tại sao hai đường tròn $(O; 4$ cm) và $(O'; 3$ cm) cắt nhau.

2. HAI ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC NHAU

Tìm hiểu hai đường tròn tiếp xúc nhau

Nếu hai đường tròn có duy nhất một điểm chung thì ta nói đó là hai đường tròn tiếp xúc nhau. Điểm chung gọi là tiếp điểm của chúng.



Hình 5.34

Chú ý: Người ta còn phân biệt hai trường hợp: hai đường tròn tiếp xúc ngoài (H.5.34a) và hai đường tròn tiếp xúc trong (H.5.34b).

Nhận xét

1) Ta nhận thấy: Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài khi $OO' = R + R'$, và tiếp xúc trong khi $OO' = R - R'$; ($R > R'$).

2) Nếu hai đường tròn tiếp xúc với nhau thì tiếp điểm thẳng hàng với hai tâm.

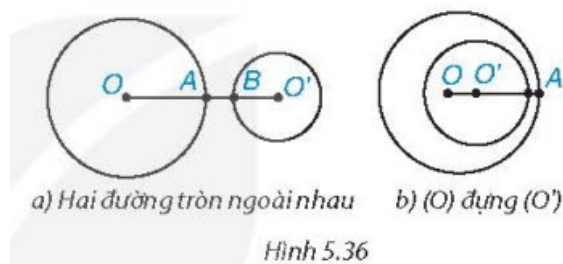
Ví dụ 2. Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 5$ cm. Giải thích tại sao hai đường tròn $(O; 3$ cm) và $(O'; 2$ cm) tiếp xúc với nhau. Chúng tiếp xúc trong hay tiếp xúc ngoài?

3. HAI ĐƯỜNG TRÒN KHÔNG GIAO NHAU

Tìm hiểu hai đường tròn không giao nhau

Nếu hai đường tròn không có điểm chung nào thì ta nói đó là hai đường tròn không giao nhau.

Chú ý: Người ta còn phân biệt hai trường hợp: hai đường tròn ngoài nhau (H.5.36a) và đường tròn này đựng đường tròn kia (H.5.36b).



Hình 5.36

Nhận xét: Ta nhận thấy:

Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ ngoài nhau khi $OO' > R + R'$.

Đường tròn $(O; R)$ đựng đường tròn $(O'; R')$ khi $R > R'$ và $OO' < R - R'$. Đặc biệt, khi O trùng với O' và $R \neq R'$ thì ta có hai đường tròn đồng tâm.

Ví dụ 3. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; 3 \text{ cm})$ và $(O'; 5 \text{ cm})$, biết rằng $OO' > 8 \text{ cm}$.

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

5.24. Hình 5.37 cho thấy hình ảnh của những đường tròn qua cách trình bày một số sản phẩm mây tre đan. Bằng cách đánh số các đường tròn, em hãy chỉ ra một vài cặp đường tròn cắt nhau và vài cặp đường tròn không giao nhau.



Hình 5.37

5.25. Cho hai điểm O và O' cách nhau một khoảng 5 cm . Mỗi đường tròn sau đây có vị trí tương đối như thế nào đối với đường tròn $(O; 3 \text{ cm})$.

- Đường tròn $(O'; 3 \text{ cm})$
- Đường tròn $(O'; 1 \text{ cm})$
- Đường tròn $(O'; 8 \text{ cm})$.

5.26. Cho ba điểm thẳng hàng O, A và O' . Với mỗi trường hợp sau, hãy Viết hệ thức giữa các độ dài OO', OA và $O'A$ rồi xét xem hai đường tròn $(O; OA)$ và $(O'; O'A)$ tiếp xúc trong hay tiếp xúc ngoài với nhau; vẽ hình để khẳng định dự đoán của mình.

- Điểm A nằm giữa hai điểm O và O' ;
- Điểm O nằm giữa hai điểm A và O' ;
- Điểm O' nằm giữa hai điểm A và O .

5.27. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A . Một đường thẳng qua A cắt (O) tại B và cắt (O') tại C . Chứng minh rằng $OB \parallel O'C$.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn

Ví dụ 1. Cho hai điểm O và O' cách nhau một khoảng 5 cm . Mỗi đường tròn sau đây có vị trí tương đối như thế nào đối với đường tròn $(O; 3 \text{ cm})$.

- a) Đường tròn $(O'; 3cm)$;
- b) Đường tròn $(O'; 1cm)$;
- c) Đường tròn $(O'; 8cm)$.

Ví dụ 2. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn (O, R) và $(O'; R')$ trong mỗi trường hợp sau:

- a) $OO' = 12; R = 5; R' = 3$;
- b) $OO' = 8; R = 5; R' = 3$;
- c) $OO' = 7; R = 5; R' = 3$;
- d) $OO' = 0; R = 5; R' = 4$;
- e) $OO' = 3; R = 4; R' = 7$

Ví dụ 3. Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 3 cm$. Giải thích tại sao hai đường tròn $(O, 8cm)$ và $(O'; 5cm)$ tiếp xúc nhau. Chúng tiếp xúc trong hay tiếp xúc ngoài?

Ví dụ 4. Xác định vị trí của hai đường tròn $(O; 3cm)$ và $(O'; 2cm)$ biết $OO' > 5 cm$.

Ví dụ 5. Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 2 cm$. Xác định vị trí của hai đường tròn $(O; 5cm)$ và $(O'; r)$ biết $r < 3 cm$.

Ví dụ 6. Cho ba điểm thẳng hàng O, A và O' . Với mỗi trường hợp sau, hãy viết hệ thức giữa các độ dài OO', OA và $O'A$ rồi xét xem hai đường tròn $(O; OA)$ và $(O'; O'A)$ tiếp xúc trong hay tiếp xúc ngoài với nhau; vẽ các hình để khẳng định dự đoán của mình.

- a) Điểm A nằm giữa hai điểm O và O' ;
- b) Điểm O nằm giữa hai điểm O và A ;
- c) Điểm O' nằm giữa hai điểm O và A .

Ví dụ 7. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A . Một đường thẳng qua A cắt (O) tại B và cắt (O') tại C . Chứng minh rằng $OB // O'C$.

Ví dụ 8. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Trên cung nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ nửa đường tròn tâm O' đường kính OA .

- a) Xác định vị trí tương đối của đường tròn (O) và đường tròn (O') .
- b) Vẽ dây cung AC của nửa đường tròn (O) cắt nửa đường tròn (O') tại D . Chứng minh OC và OD song song với nhau.

Ví dụ 9. Cho đoạn thẳng OO' và điểm A nằm giữa hai điểm O và O' . Vẽ đường tròn $(O; OA)$ và đường tròn $(O'; O'A)$. Qua A vẽ đường thẳng cắt (O) tại B và cắt (O') tại C .

- a) Chứng minh rằng (O) và (O') tiếp xúc nhau.
- b) Vẽ đường kính BD của (O) và CE của (O') , chứng minh rằng D, A, E thẳng hàng.

Ví dụ 10. Cho hình bình hành $ABCD$ ($AB > AD$). Vẽ đường tròn tâm A bán kính AD , đường tròn (A) cắt AB tại E . Vẽ đường tròn tâm B bán kính BE , đường tròn (B) cắt đường thẳng DE tại F . Chứng minh đường tròn $(A; AD)$ và $(B; BE)$ tiếp xúc với nhau và ba điểm F, B, C thẳng hàng.

Ví dụ 11. Cho đường tròn (O) đường kính BC . Một dây AD vuông góc với BC tại H . Gọi E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC . Gọi (I) và (K) lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBE và HCF . Xác định vị trí tương đối của đường tròn (I) và (O) ; (K) và (O) ; (I) và (K) .

Ví dụ 12. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Một điểm C (khác A, B) nằm trên đường tròn. Tiếp tuyến Cx của đường tròn cắt tia AB tại I , phân giác của góc CIA cắt OC tại O' .

a) Xác định vị trí tương đối của đường tròn (O) và đường tròn $(O'; O'C)$.

b) Chứng minh rằng đường tròn $(O'; O'C)$ tiếp xúc với AB .

Ví dụ 13. Cho đường thẳng $OO' = 13cm$. Dựng đường tròn $(O; 12cm)$ và $(O'; 5cm)$.

a) Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (O') .

b) Vẽ đường kính AC của (O) và AD của (O') . Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng.

Dạng 2. Tính toán

Áp dụng tính chất của hai đường tròn tiếp xúc

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O; 3cm)$ và đường tròn $(O'; 1cm)$ tiếp xúc ngoài nhau tại A , vẽ hai bán kính OB và $O'C$ song song với nhau và cùng thuộc mặt phẳng có bờ là OO' .

a) Tính \widehat{BAC} ;

b) Gọi I là giao điểm của BC và OO' . Tính OI .

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O; 5cm)$ và đường tròn $(O'; 3cm)$ tiếp xúc ngoài nhau tại A . Một đường thẳng qua A hợp với OO' một góc 30° cắt (O) tại B và (O') tại C .

a) Chứng minh $\widehat{AOB} = \widehat{AO'C}$ và $OB \parallel O'C$.

b) Tiếp tuyến tại C của (O') cắt OO' tại D . Tính $CD, O'D$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi S là trung điểm của OA vẽ đường tròn tâm S đi qua A .

a) Chứng minh đường tròn (O) và đường tròn (S) tiếp xúc nhau tại A .

b) Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (S) tại M và cắt (O) tại N (M, N khác A) chứng minh $SM \parallel ON$.

c) Gọi I là trung điểm của ON , đường thẳng AI cắt NB tại K . Chứng minh rằng $BK = 2KN$.

Ví dụ 4. Cho đường tròn (K) có đường kính BC . Gọi D là trung điểm của KC và I là tâm đường tròn có đường kính BD .

- a) Chứng tỏ đường tròn (K) và (I) tiếp xúc nhau.
- b) Qua B vẽ đường thẳng (không trùng với BC) cắt (K) tại A và cắt (I) tại E . Chứng tỏ rằng $KA // IE$ và tỉ số $\frac{CA}{DE}$ không đổi.

Ví dụ 5. Cho đường tròn $(O; 4cm)$ và $(O'; 3cm)$ và đoạn nối tâm $OO' = 5cm$.

- a) Chứng tỏ đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B .
- b) Tính độ dài AB .
- c) Gọi AC, AD lần lượt là đường kính của đường tròn (O) và (O') . Chứng minh rằng C, B, D thẳng hàng.

Ví dụ 6. Cho hai đường tròn $(O; 10cm)$ và $(O'; 17cm)$ cắt nhau tại hai điểm A và B , biết $AB = 16cm$. Tính độ dài đoạn OO' .

Ví dụ 7. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Vẽ hình bình hành $OBO'C$. Chứng minh rằng $AC // OO'$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC , $B \in (O), C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC tại I .

- a) Chứng minh $\widehat{BAC} = 90^\circ$.
- b) Tính số đo $\widehat{OIO'}$
- c) Tính độ dài BC , biết $OA = 9cm, O'A = 4cm$.

Bài 2. Cho hai đường tròn $(O; 20cm)$ và $(O'; 15cm)$ cắt nhau tại A và B . Tính đoạn nối tâm OO' biết rằng $AB = 24cm$.

(Xét hai trường hợp: O và O' nằm khác phía đối với AB ; O và O' nằm cùng phía đối với AB ;))

Bài 3. Cho đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn (O') đường kính OA .

- a) Hãy xác định vị trí của hai đường tròn (O) và (O') .
- b) Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở C . Chứng minh rằng: $AC = CD$.

Bài 4. Cho ba đường tròn tâm O_1, O_2, O_3 cùng có bán kính R và tiếp xúc ngoài với nhau đôi một. Tính diện tích tam giác có ba đỉnh là ba tiếp điểm.

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc với nhau tại A . Qua A vẽ một cát tuyến cắt đường tròn (O) tại B và cắt đường tròn (O') tại C . Từ B vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn (O) . Từ C vẽ đường thẳng $uv // xy$. Chứng minh rằng uv là tiếp tuyến của đường tròn (O') .

Bài 6. Cho hai đường tròn $(O; 17)$ và $(O'; 10)$ cắt nhau tại A và B . Biết $OO' = 21$, tính AB .

Bài 7. Cho hình vuông $ABCD$. Vẽ đường tròn $(D; DC)$ và đường tròn đường kính BC . Chúng cắt nhau tại một điểm thứ hai là E . Tia CE cắt AB tại M , tia BE cắt AD tại N . Chứng minh rằng:

- a) N là trung điểm của AD .

b) M là trung điểm của AB.

Bài 8. Cho góc vuông xOy . Lấy các điểm I và K thứ tự trên các tia Ox và Oy. Vẽ đường tròn (I; OK) cắt tia Ox tại M (I nằm giữa O và M). Vẽ đường tròn (K; OI) cắt tia Oy tại N (K nằm giữa O và N)

a) Chứng minh hai đường tròn (I) và (K) luôn cắt nhau

b) Tiếp tuyến tại M của đường tròn (I), tiếp tuyến tại N của đường tròn (K) cắt nhau tại C. Chứng minh tứ giác OMCN là hình vuông

c) Gọi A, B là các giao điểm của (I) và (K) trong đó B ở miền trong góc xOy . Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng

d) Giả sử I và K thứ tự di động trên các tia Ox và Oy sao cho $OI + OK = a$ không đổi. Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định

Bài 9. Cho đoạn thẳng $OO' = 4\text{cm}$. Vẽ các đường tròn (O; 2cm) và (O'; 1cm)

a) Hãy xác định vị trí tương đối giữa hai đường tròn đó.

b) Dựng đường tròn (I; 1,5cm) tiếp xúc ngoài với hai đường tròn (O) và (O')

LUYỆN TẬP CHUNG

A. VÍ DỤ SÁCH GIÁO KHOA

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O, R) và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B . Gọi M là điểm đối xứng với A qua O , N là điểm đối xứng với A qua O' .

- Chứng minh rằng $M \in (O)$, $N \in (O)$ và ba điểm M, B, N thẳng hàng.
- Chứng minh rằng đường thẳng MN tiếp xúc với đường tròn đường kính AB .

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn ngoài nhau $(O; R)$ và $(O'; R')$ với giả thiết $R > R'$. Một đường thẳng d tiếp xúc với $(O; R)$ tại A và tiếp xúc với $(O'; R')$ tại B sao cho O và O' nằm cùng phía đối với d . Giả sử d cắt đường thẳng OO' tại điểm P (Hình 5.39).

- Chứng minh rằng $\frac{PO}{PO'} = \frac{R}{R'}$;
- Gọi A' là điểm đối xứng với A qua OO' . Chứng minh rằng đường thẳng PA' tiếp xúc với (O) và với (O') .

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

5.28. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau, điểm O nằm trong phần mặt phẳng ở giữa hai đường thẳng đó. Biết rằng khoảng cách từ O đến a và b lần lượt bằng 2 cm và 3 cm

- Hỏi bán kính R của đường tròn (O, R) phải thỏa mãn điều kiện gì để $(O; R)$ cắt cả hai đường thẳng a và b ?
- Biết rằng đường tròn $(O; R)$ tiếp xúc với đường thẳng a . Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng b .

5.29. Khi chuyển động, giả sử đầu mũi kim dài của một chiếc đồng hồ vạch nên một đường tròn, kí hiệu là $(T1)$, trong khi đầu mũi kim ngắn vạch nên một đường tròn khác, kí hiệu là $(T2)$.

- Hai đường tròn $(T1)$ và $(T2)$ có vị trí tương đối như thế nào?
- Giả sử bán kính của $(T1)$ và $(T2)$ lần lượt là R_1 và R_2 . Người ta vẽ trên mặt đồng hồ một họa tiết hình tròn có tâm nằm cách điểm trục kim đồng hồ một khoảng bằng $\frac{1}{2}R_1$ và có bán kính bằng $\frac{1}{2}R_2$. Hãy cho biết vị trí tương đối của đường tròn $(T3)$ đối với mỗi đường tròn $(T1)$ và $(T2)$. Vẽ ba đường tròn đó nếu $R_1 = 3$ cm và $R_2 = 2$ cm.



5.30. Cho đường tròn (O) đường kính AB , tiếp tuyến xx' tại A và tiếp tuyến yy' tại B của (O) . Một tiếp tuyến thứ ba của (O) tại điểm P (P khác A và B) cắt xx' tại M và cắt yy' tại N .

a) Chứng minh rằng $MN = MA + NB$.

b) Đường thẳng đi qua O và vuông góc với AB cắt NM tại Q . Chứng minh rằng Q là trung điểm của đoạn MN .

c) Chứng minh rằng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính MN .

5.31. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A và cùng tiếp xúc với đường thẳng d tại B và C (khác A), trong đó $B \in (O)$ và $C \in (O')$. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC tại M . Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng MA tiếp xúc với (O) ;

b) Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng BC từ đó suy ra ABC là tam giác vuông.

C. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), $AB = 4\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$ và $CD = 9\text{cm}$. Tính AD và chứng minh rằng đường thẳng AD tiếp xúc với đường tròn có đường kính là BC .

Bài 2. Cho điểm O cách đường thẳng l là 6cm . Vẽ đường tròn $(O, 10\text{cm})$.

1. Chứng minh rằng (O) có hai giao điểm với đường thẳng l .

2. Gọi hai giao điểm nói trên là B và C . Tính diện tích tam giác OBC .

Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm E trên cạnh BC và điểm F trên cạnh CD sao cho $AB = 3BE = 2DF$. Chứng minh EF tiếp xúc với cung tròn tâm A , bán kính AB .

Bài 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = \frac{8R}{5}$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB , cắt các tia OA, OB theo thứ tự tại M và N . Tính diện tích tam giác OMN .

Bài 5. Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$. Lấy các điểm I, K theo thứ tự trên các tia Ox, Oy . Vẽ đường tròn $(I; OK)$ cắt tia Ox tại M (I nằm giữa O và M). Vẽ đường tròn $(K; OI)$ cắt tia Oy tại N (K nằm giữa O và N).

1. Chứng minh hai đường tròn (I) và (K) luôn cắt nhau.

2. Tiếp tuyến tại M của đường tròn (I) và tiếp tuyến tại N của đường tròn (K) cắt nhau tại C . Chứng minh tứ giác $OMCN$ là hình vuông.

3. Gọi giao điểm của hai đường tròn (I) và (K) là A và B . Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

4. Giả sử I và K theo thứ tự di động trên Ox và Oy sao cho $OI + OK = a$ không đổi. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 6. Cho đường tròn (O) và một điểm A trên đường tròn đó. Trên đoạn OA lấy điểm B sao cho

$OB = \frac{1}{3}OA$. Vẽ đường tròn đường kính AB .

1. Chứng minh đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường tròn (O) .

2. Vẽ đường tròn đồng tâm O với đường tròn (O) cho trước, cắt đường tròn đường kính AB tại C . Tia AC cắt hai đường tròn đồng tâm tại D, E (D nằm giữa C và E). Chứng minh $AC = CD = DE$.

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB , điểm C nằm giữa A và O . Vẽ đường tròn (I) có đường kính CB .

1. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (I) .
2. Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC . Tứ giác $ADCE$ là hình gì? Vì sao?
3. Gọi K giao điểm của DB và đường tròn (I) . Chứng minh ba điểm E, C, K thẳng hàng.
4. Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (I) .

Bài 8. Cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ có cùng bán kính R và cùng đi qua điểm O . Gọi giao điểm thứ hai của từng cặp trong ba đường tròn là A, B, C . Chứng minh

1. Đường tròn đi qua ba điểm A, B, C có bán kính bằng R .
2. Ba đường thẳng xác định bởi tâm của một đường tròn và giao điểm của hai đường tròn còn lại cắt nhau tại một điểm.

Bài 9. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc với (O) và (O') lần lượt ở B và C . Tiếp tuyến chung trong cắt BC ở I . Gọi E và F theo thứ tự là giao điểm của IO và AB và của IO' và AC .

1. Chứng minh A, E, I, F cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm K của đường tròn đó.
2. Chứng minh $IE \cdot IO + IF \cdot IO' = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2)$.
3. Gọi P là trung điểm của OA . Chứng minh PE tiếp xúc với (K) .
4. Cho OO' cố định và có độ dài là $2a$. Tìm điều kiện của R và R' để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Bài 10. Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm C di động trên đoạn AB . Vẽ các đường tròn tâm I đường kính AC và đường tròn tâm K đường kính BC . Tia Cx vuông góc với AB tại C , cắt (O) tại M . Đoạn thẳng MA cắt đường tròn (I) tại E và đoạn thẳng MB cắt đường tròn tâm (K) tại F .

1. Chứng minh tứ giác $MECF$ là hình chữ nhật và EF là tiếp tuyến chung của (I) và (K) .
2. Cho $AB = 4cm$, xác định vị trí điểm C trên AB để diện tích tứ giác $IEFK$ lớn nhất.
3. Khi C khác O , đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $MECF$ cắt đường tròn (O) tại P (khác M), đường thẳng PM cắt đường thẳng AB tại N . Chứng minh tam giác MPF đồng dạng với tam giác MBN .
4. Chứng minh ba điểm N, E, F thẳng hàng.

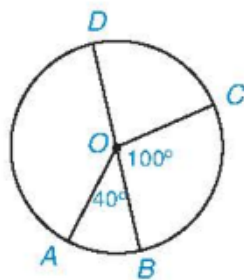
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

A. TRẮC NGHIỆM SÁCH GIÁO KHOA

5.32. Cho đường tròn $(O; 4 \text{ cm})$ và hai điểm A, B . Biết rằng $OA = \sqrt{15} \text{ cm}$ và $OB = 4 \text{ cm}$. Khi đó:

- A. Điểm A nằm trong (O) , điểm B nằm ngoài (O) .
- B. Điểm A nằm ngoài (O) , điểm B nằm trên (O) .
- C. Điểm A nằm trên (O) , điểm B nằm trong (O) .
- D. Điểm A nằm trong (O) , điểm B nằm trên (O) .

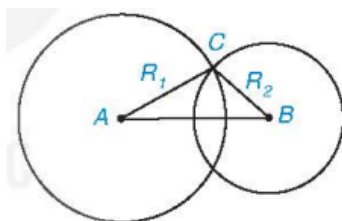
5.33. Cho Hình 5.43, trong đó BD là đường kính, $\widehat{AOB} = 40^\circ$; $\widehat{BOC} = 100^\circ$. Khi đó:



Hình 5.43

- A. số đo $\widehat{DC} = 80^\circ$ và số đo $\widehat{AD} = 220^\circ$.
- B. số đo $\widehat{DC} = 280^\circ$ và số đo $\widehat{AD} = 220^\circ$.
- C. số đo $\widehat{DC} = 280^\circ$ và số đo $\widehat{AD} = 140^\circ$.
- D. số đo $\widehat{DC} = 80^\circ$ và số đo $\widehat{AD} = 140^\circ$.

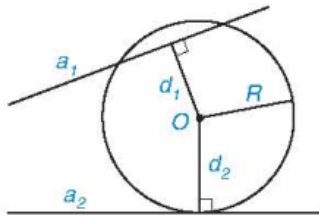
5.34. Cho hai đường tròn $(A; R_1), (B; R_2)$, trong đó $R_2 < R_1$. Biết rằng hai đường tròn (A) và (B) cắt nhau (H.5.44). Khi đó:



Hình 5.44

- A. $AB < R_1 - R_2$.
- B. $R_1 - R_2 < AB < R_1 + R_2$.
- C. $AB > R_1 + R_2$.
- D. $AB = R_1 + R_2$.

5.35. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai đường thẳng a_1 và a_2 . Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ điểm O đến a_1 và a_2 . Biết rằng (O) cắt a_1 và tiếp xúc với a_2 (H.5.45). Khi đó:



Hình 5.45

- A. $d_1 < R$ và $d_2 = R$.
 B. $d_1 = R$ và $d_2 < R$.
 C. $d_1 > R$ và $d_2 = R$.
 D. $d_1 < R$ và $d_2 < R$.

B. TỰ LUẬN SÁCH GIÁO KHOA

5.36. Cho đường tròn (O) đường kính BC và điểm A (khác B và C).

- a) Chứng minh rằng nếu A nằm trên (O) thì ABC là một tam giác vuông; ngược lại, nếu ABC là tam giác vuông tại A thì A nằm trên (O) .
 b) Giả sử A là một trong hai giao điểm của đường tròn $(B; BO)$ với đường tròn (O) . Tính các góc của tam giác ABC .
 c) Với cùng giả thiết câu b , tính độ dài cung AC và diện tích hình quạt nằm trong (O) giới hạn bởi các bán kính OA và OC , biết rằng $BC = 6$ cm.

5.37. Cho AB là một dây bất kì (không phải là đường kính) của đường tròn $(O; 4$ cm). Gọi C và D lần lượt là các điểm đối xứng với A và B qua tâm O .

- a) Hai điểm C và D có nằm trên đường tròn (O) không? Vì sao?
 b) Biết rằng $ABCD$ là một hình vuông. Tính độ dài cung lớn AB và diện tích hình quạt tròn tạo bởi hai bán kính OA và OB .

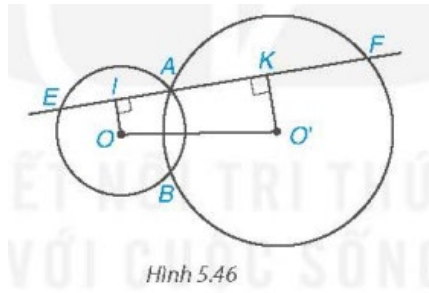
5.38. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C , sao cho $AB = 2$ cm và $BC = 1$ cm. Vẽ các đường tròn $(A; 1,5$ cm), $(B; 3$ cm) và $(C; 2$ cm). Hãy xác định các cặp đường tròn:

- a) Cắt nhau;
 b) Không giao nhau;
 c) Tiếp xúc với nhau.

5.39. Cho tam giác vuông ABC (\hat{A} vuông). Vẽ hai đường tròn $(B; BA)$ và $(C; CA)$ cắt nhau tại A và A' . Chứng minh rằng:

- a) BA và BA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(C; CA)$.
 b) CA và CA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(B; BA)$.

5.40. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Một đường thẳng d đi qua A cắt (O) tại E và cắt (O') tại F (E và F khác A). Biết điểm A nằm trong đoạn EF . Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AE và AF (H.5.46).



Hình 5.46

- Chứng minh rằng tứ giác $OO'KI$ là một hình thang vuông.
- Chứng minh rằng $K = \frac{1}{2}EF$.
- Khi d ở vị trí nào (d vẫn qua A) thì $OO'KI$ là một hình chữ nhật?

C. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính BC và điểm A (khác B và C).

- Chứng minh rằng nếu A nằm trên (O) thì ABC là một tam giác vuông; ngược lại, nếu ABC là một tam giác vuông tại A thì A nằm trên (O) .
- Giả sử A là một trong hai giao điểm của đường tròn $(B; BO)$ với đường tròn (O) . Tính các góc của tam giác ABC .
- Với cùng giả thiết câu b, tính độ dài cung AC và diện tích hình quạt nằm trong (O) giới hạn bởi các bán kính OA và OC biết rằng $BC = 6 \text{ cm}$.

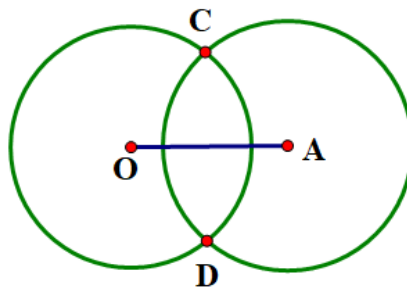
Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.

- Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.
- So sánh độ dài của AC và BD .

Bài 3. Cho AB là dây bất kì (không phải là đường kính) của đường tròn $(O; 4\text{cm})$. Gọi C và D lần lượt là các điểm đối xứng với A và B qua tâm O .

- Hai điểm C và D có nằm trên đường tròn (O) không? Vì sao?
- Biết rằng $ABCD$ là một hình vuông. Tính độ dài cung lớn AB và diện tích hình quạt tròn tạo bởi hai bán kính OA và OB .

Bài 4. Cho hai đường tròn $(O; 2\text{cm})$ và $(A; 2\text{cm})$ cắt nhau tại C, D , điểm A nằm trên đường tròn tâm O .

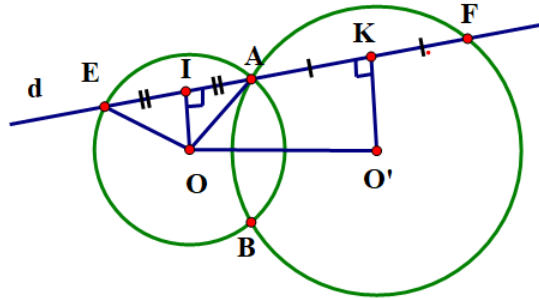


- Vẽ đường tròn $(C; 2\text{cm})$.
- Đường tròn $(C; 2\text{cm})$ có đi qua hai điểm O và A không? Vì sao?

Bài 5. Cho tam giác vuông ABC (\widehat{A} vuông). Vẽ hai đường tròn $(B; BA)$ và $(C; CA)$ cắt nhau tại A và A' . Chứng minh rằng:

- a) BA và BA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(C; CA)$.
- b) CA và CA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(B; BA)$.

Bài 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Một đường thẳng d đi qua A cắt (O) tại E và cắt (O') tại F (E và F khác A). Biết điểm A nằm trong đoạn EF . Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AE và AF .

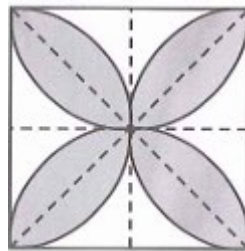


- a) Chứng minh rằng tứ giác $OO'KI$ là một hình thang vuông.
- b) Chứng minh rằng $IK = \frac{1}{2}EF$.
- c) Khi d ở vị trí nào (d vẫn qua A) thì $OO'KI$ là một hình chữ nhật?

Bài 7. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C , sao cho $AB = 2cm$ và $BC = 1cm$. Vẽ các đường tròn $(A; 1,5cm), (B; 3cm), (C; 2cm)$. Hãy xác định các cặp đường tròn:

- a) Cắt nhau;
- b) Không giao nhau;
- c) Tiếp xúc nhau.

Bài 8. Trong hình vẽ, độ dài cạnh của các hình vuông lớn là 10 cm. Tính diện tích và chu vi của phần được tô màu.



CHƯƠNG V. ĐƯỜNG TRÒN

BÀI 13. MỞ ĐẦU VỀ ĐƯỜNG TRÒN.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. ĐƯỜNG TRÒN

Đường tròn, điểm thuộc đường tròn

Ta định nghĩa: Đường tròn tâm O bán kính $R (R > 0)$, kí hiệu là $(O; R)$, là hình gồm tất cả các điểm cách điểm O một khoảng bằng R .

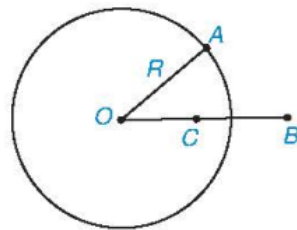
- Khi không cần đề ý đến bán kính ta kí hiệu đường tròn tâm O là (O) .

- Nếu A là một điểm của đường tròn (O) thì ta viết $A \in (O)$. Khi đó, ta còn nói đường tròn (O) đi qua điểm

A , hay điểm A nằm trên đường tròn (O) .

Nhận xét

1) Trên Hình 5.1, ta thấy điểm A nằm trên, điểm C nằm trong và điểm B nằm ngoài đường tròn (O) . Một cách tổng quát, ta có:



Hình 5.1

- Điểm M nằm trên đường tròn $(O; R)$ nếu $OM = R$;

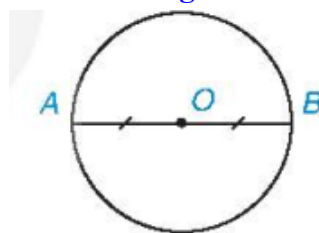
- Điểm M nằm trong đường tròn $(O; R)$ nếu $OM < R$;

- Điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ nếu $OM > R$.

2) Hình tròn tâm O bán kính R là hình gồm các điểm nằm trên và nằm trong đường tròn $(O; R)$.

Ví dụ 1. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Chứng minh rằng đường tròn $(O; OA)$ đi qua B .

Lời giải



Hình 5.2

Vì O là trung điểm của đoạn AB nên $OB = OA$. Do đó $B \in (O; OA)$, nói cách khác, đường tròn $(O; OA)$ đi qua B .

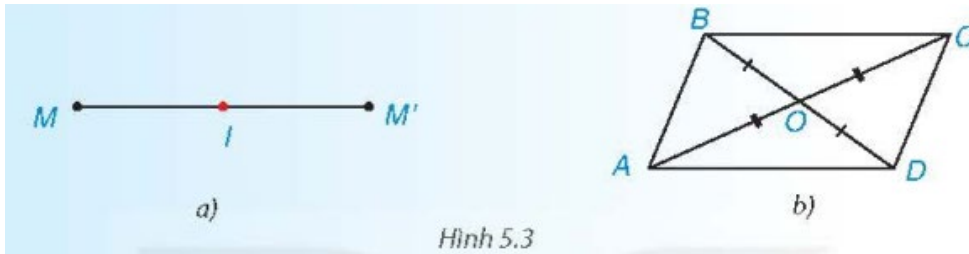
Chú ý. Ở lớp dưới, ta đã biết đoạn AB trong Ví dụ 1 là một đường kính của đường tròn (O) . Do đó (O) còn

gọi là đường tròn đường kính AB .

2. TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Đối xứng tâm và đối xứng trục

1) Đối xứng tâm (H.5.3)



Hình 5.3

Hai điểm M và M' gọi là đối xứng với nhau qua điểm I (hay qua tâm I) nếu I là trung điểm của đoạn MM' .

Chẳng hạn, nếu O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$ thì $OA = OC$ nên A và C đối xứng với nhau qua O . Tương tự, B và D đối xứng với nhau qua O .

2) Đối xứng trục (H.5.4)



Hình 5.4

Hai điểm M và M' gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d (hay qua trục d) nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' :

Chẳng hạn, nếu AH là đường cao trong tam giác ABC cân tại A thì AH cũng là đường trung trực của BC , nên B và C đối xứng với nhau qua AH .

Tâm và trục đối xứng của đường tròn

Đường tròn là hình có tâm đối xứng; tâm của đường tròn là tâm đối xứng của nó.

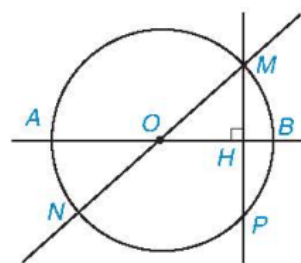
Đường tròn là hình có trục đối xứng; mỗi đường thẳng qua tâm của đường tròn là một trục đối xứng của nó.

Chú ý: Đường tròn có một tâm đối xứng, nhưng có vô số trục đối xứng.

Ví dụ 2: Cho điểm M nằm trên đường tròn (O) đường kính AB . Sử dụng tính đối xứng của (O) , hãy nêu cách tìm:

- Điểm N đối xứng với điểm M qua tâm O ;
- Điểm P đối xứng với điểm M qua đường thẳng AB .

Lời giải



Hình 5.5

a) Do O là tâm đối xứng của (O) nên điểm N đối xứng với điểm M qua tâm O phải vừa thuộc (O) , vừa thuộc OM .

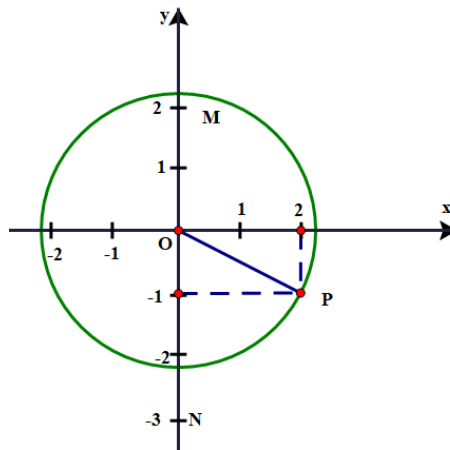
Vậy N là giao điểm của (O) với đường thẳng OM .

b) Do AB là trục đối xứng của (O) nên điểm P đối xứng với điểm M qua AB phải vừa thuộc (O) , vừa thuộc đường vuông góc hạ từ M xuống AB . Vậy P là giao điểm của (O) với đường thẳng đi qua M và vuông góc với AB .

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

5.1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $M(0;2)$, $N(0;-3)$ và $P(2;-1)$. Vẽ hình và cho biết trong các điểm đã cho, điểm nào nằm trên, điểm nào nằm trong, điểm nào nằm ngoài đường tròn $(O; \sqrt{5})$? Vì sao?

Lời giải



Ta có: $OM = 2 < \sqrt{5}$ nên điểm M nằm trong đường tròn $(O; \sqrt{5})$.

$ON = 3 > \sqrt{5}$ nên điểm N nằm ngoài đường tròn $(O; \sqrt{5})$.

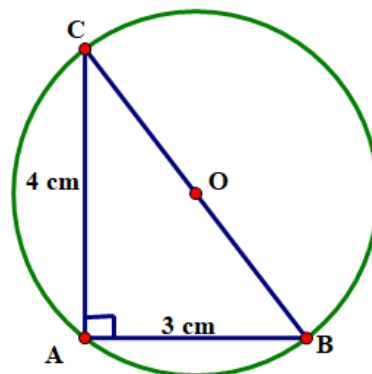
Mặt khác, $OP^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ (theo định lí Pythagore).

Suy ra $OP = \sqrt{5}$ nên điểm P nằm trên đường tròn $(O; \sqrt{5})$.

Vậy trong các điểm đã cho, điểm P nằm trên, điểm M nằm trong, điểm N nằm ngoài đường tròn $(O; \sqrt{5})$

5.2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Chứng minh rằng các điểm A, B, C thuộc cùng một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải



Gọi O là trung điểm của BC .

Ta có AO là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $OA = OB = OC = \frac{1}{2} BC$.

Suy ra A, B, C cùng thuộc đường tròn bán kính OA . Tâm O là trung điểm của BC nên BC là đường kính. Do đó, các điểm A, B, C thuộc cùng một đường tròn.

Xét tam giác ABC vuông tại A , áp dụng định lý Pythagore, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.
Suy ra $BC = 5$ cm.

Khi đó $OA = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2} = 2,5$ (cm).

Vậy các điểm A, B, C thuộc cùng một đường tròn và có bán kính là $2,5$ cm.

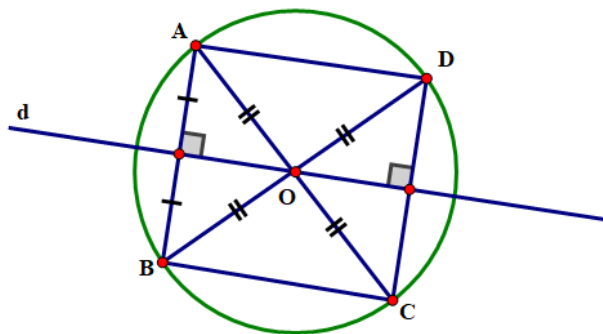
5.3. Cho đường tròn (O) , đường thẳng d đi qua O và điểm A thuộc (O) nhưng không thuộc d . Gọi B là điểm đối xứng với A qua d ; C và D lần lượt là điểm đối xứng với A và B qua O .

a) Ba điểm B, C và D có thuộc (O) không? Vì sao?

b) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

c) Chứng minh rằng C và D đối xứng với nhau qua d .

Lời giải



a) Ta có d là đường thẳng đi qua tâm O nên d là trục đối xứng của đường tròn.

Vì A thuộc (O) và B là điểm đối xứng của A qua d nên B cũng thuộc (O) .

Vì C, D lần lượt là điểm đối xứng của A, B qua O nên C, D cũng thuộc (O) .

b) C đối xứng với A qua O nên O là trung điểm của AC .

D đối xứng với B qua O nên O là trung điểm của BD .

Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

Mà $BD = CD$ (bằng 2 lần bán kính (O)).

Do đó, tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

c) Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AB \parallel CD$, mà $AB \perp d$ nên $d \perp CD$.

Xét tam giác OCD có $OC = OD$ nên tam giác OCD cân tại O .

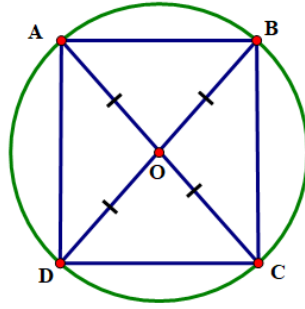
Mà đường thẳng d là đường cao của tam giác OCD nên d cũng là trung trực của CD . Hay C và D đối xứng nhau qua đường thẳng d .

5.4. Cho hình vuông $ABCD$ có E là giao điểm của hai đường chéo.

a) Chứng minh rằng có một đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C và D . Xác định tâm đối xứng và chỉ ra hai trục đối xứng của đường tròn đó.

b) Tính bán kính của đường tròn ở câu a, biết rằng hình vuông có cạnh bằng 3 cm.

Lời giải



a) Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC = BD$ và E là trung điểm của AC và BD . Suy ra: $EA = EB = EC = ED$.

Do đó các điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn hay chỉ có một đường tròn duy nhất đi qua bốn điểm này.

Đường tròn (E) có tâm E là tâm đối xứng và có hai trục đối xứng là AC và BD .

b) Hình vuông có cạnh bằng 3 cm nên $AB = BC = CD = DA = 3$ cm.

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác ABC vuông tại B , ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 3^2 = 18.$$

Suy ra $AC = 3\sqrt{2}$ cm.

$$\text{Khi đó } EA = \frac{AC}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (cm)}.$$

Vậy bán kính của đường tròn ở câu a là $EA = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm.

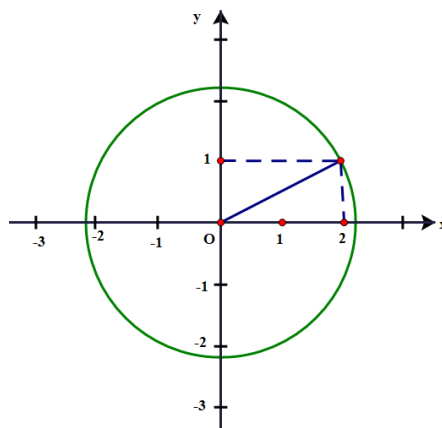
C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH ĐIỂM NẪM TRÊN, NẪM TRONG, NẪM NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

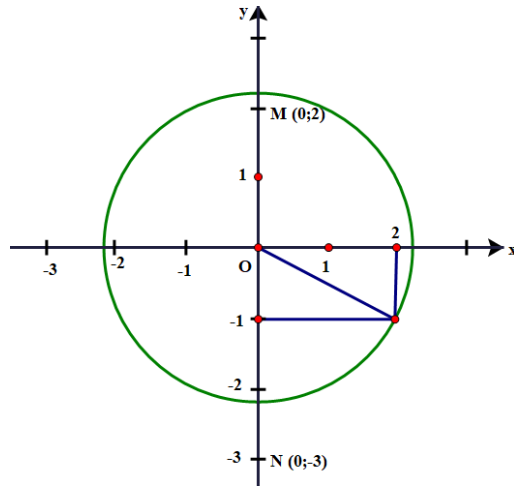
Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $M(0; 2), N(0; -3)$ và $P(2; -1)$. Vẽ hình và cho biết trong các điểm đã cho, điểm nào nằm trên, điểm nào nằm trong, điểm nào nằm ngoài đường tròn $(O; \sqrt{5})$? Vì sao?

Lời giải

Dựng đường tròn tâm O , bán kính $\sqrt{5}$ trên mặt phẳng tọa độ (xem hình vẽ bên).



Giả sử điểm $A(2; 1) \Rightarrow OA = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.



* Điểm $M(0;2) \Rightarrow OM = 2$ và M thuộc Oy .

* Điểm $N(0;-3) \Rightarrow ON = 3$ và N thuộc Oy .

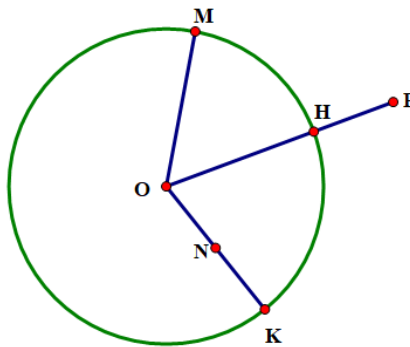
* Điểm $P(2;-1) \Rightarrow OP = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Ta có: $OM = 2 < \sqrt{5}$ nên M nằm trong đường tròn tâm O , bán kính $\sqrt{5}$.

$ON = 3 > \sqrt{5}$ nên N nằm ngoài $(O; \sqrt{5})$

$OP = \sqrt{5}$ nên điểm P nằm trên $(O; \sqrt{5})$.

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O; R)$ và năm điểm M, N, P, Q, K (hình vẽ). So sánh độ dài các đoạn thẳng OM, ON, OH, OK, OP với R .



Lời giải

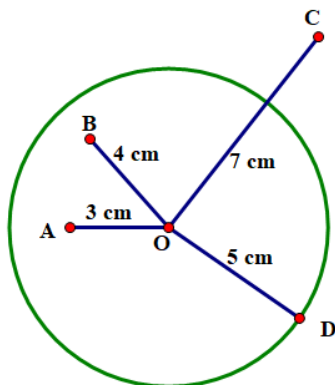
Ta có ba điểm M, H, K nằm trên đường tròn $(O; R)$ nên $OM = OH = OK = R$.

Điểm N nằm bên trong $(O; R)$ nên $ON < R$

Điểm P nằm bên ngoài $(O; R)$ nên $OP > R$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) , bán 5cm và bốn điểm A, B, C, D thoả mã $OA = 3\text{cm}, OB = 4\text{cm}, OC = 7\text{cm}, OD = 5\text{cm}$. Hãy cho biết mỗi điểm A, B, C, D nằm trên, nằm trong hay nằm ngoài đường tròn (O) .

Lời giải



$OA = 3\text{ cm} (3 < 5)$ nên điểm A nằm trong đường tròn $(O; 5)$.

$OB = 4\text{ cm} (4 < 5)$ nên điểm B nằm trong đường tròn $(O; 5)$.

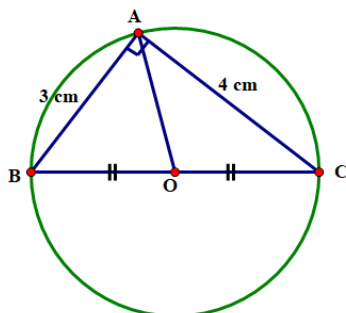
$OC = 7\text{ cm} (7 > 5)$ nên điểm C nằm ngoài đường tròn $(O; 5)$.

$OD = 5\text{ cm}$ nên điểm D nằm trên đường tròn $(O; 5)$ hay $D \in (O; 5)$.

DẠNG 2. CHỨNG MINH NHIỀU ĐIỂM CÙNG THUỘC ĐƯỜNG TRÒN

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$. Chứng minh rằng các điểm A, B, C thuộc cùng một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải



Xét tam giác ABC vuông tại A.

Theo định lí Pythagore, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm})$

Gọi O là trung điểm của BC, ta có: $OB = OC = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2} = 2,5(\text{cm})$

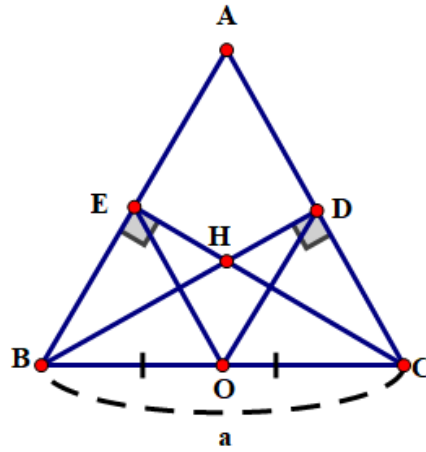
Mặt khác OA là trung tuyến của tam giác ABC vuông tại A

Ta có $OA = OB = OC = 2,5(\text{cm})$

Nên ba điểm A, B, C thuộc đường tròn tâm O là trung điểm đoạn BC và bán kính $R = 2,5(\text{cm})$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC đều có cạnh a, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Chứng minh rằng bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn. Hãy xác định tâm và bán kính của đường tròn ấy.

Lời giải



Gọi O là trung điểm của BC .

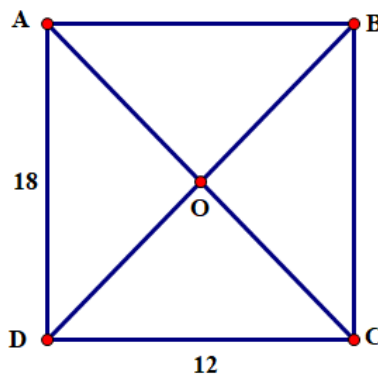
Các tam giác vuông BDC và BEC có chung cạnh huyền BC và OD, OE là các trung tuyến tương ứng

$$\text{Ta có } OD = OE \left(= \frac{1}{2} BC \right) \Rightarrow OD = OE = OB = OC = \frac{1}{2} a.$$

Vậy bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc đường tròn tâm O là trung điểm của BC và bán kính bằng $\frac{a}{2}$.

Ví dụ 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 18\text{cm}$ và $CD = 12\text{cm}$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD

Ta có: $OA = OB = OC = OD$ (Tính chất hai đường chéo của hình chữ nhật)

Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn tâm O bán kính OA .

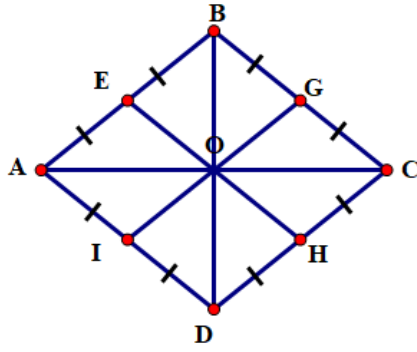
Xét tam giác vuông ADC vuông tại D .

$$\text{Theo định lý Pythagore ta có: } AC^2 = AD^2 + CD^2 = 18^2 + 12^2 \Rightarrow AC = \sqrt{18^2 + 12^2} = 6\sqrt{13}(\text{cm})$$

Vậy bán kính của đường tròn (O) đi qua bốn điểm A, B, C, D là $\frac{6\sqrt{13}}{2}$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng các trung điểm của các cạnh của hình thoi cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải



Gọi E, G, H, I lần lượt là trung điểm của bốn cạnh AB, BC, CD, DA của hình thoi và O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Ta có OE, OG, OH, OI lần lượt là các đường trung tuyến của các tam giác vuông $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle DOA$

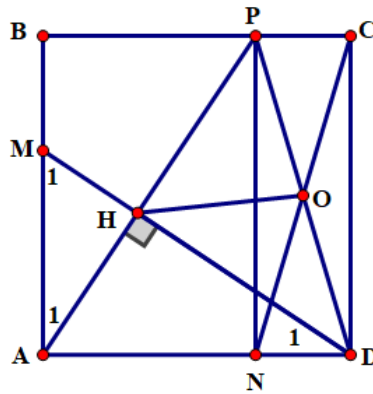
$$\Rightarrow OE = \frac{1}{2}AB, OG = \frac{1}{2}BC, OH = \frac{1}{2}CD, OI = \frac{1}{2}AD$$

Mà $AB = BC = CD = AD$ (cạnh hình thoi) $\Rightarrow OE = OG = OH = OI$

Chứng tỏ bốn điểm E, G, H, I cùng thuộc đường tròn (O).

Ví dụ 5. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên cạnh AD lấy N sao cho $AM = AN$. Kẻ AH vuông góc với DM ($H \in DM$) và AH cắt BC tại P. Chứng minh rằng năm điểm C, D, N, H, P cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ (cùng phụ với $\widehat{M_1}$). Do đó $\triangle ABP = \triangle DAM$ (g.c.g) $\Rightarrow BP = AM \Rightarrow PC = ND$.

Lại có $PC \parallel ND$ và $\widehat{BCD} = 90^\circ$ (gt)

\Rightarrow PCDN là hình chữ nhật.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo PD và CN ta có O là tâm đường tròn đi qua bốn điểm P, C, D, N.

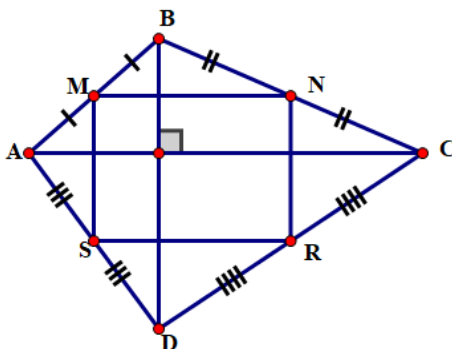
Mặt khác $\triangle PHD$ vuông (gt) có HO là trung tuyến

$\Rightarrow HO = OP = OD$ hay H thuộc đường tròn tâm O.

Vậy năm điểm C, D, N, H, P cùng thuộc đường tròn (O).

Ví dụ 6. Tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Gọi M, N, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD và AD. Chứng minh rằng: Bốn điểm M, N, R, S cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Ta có MN là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow MN // AC$ và $MN = \frac{AC}{2}$

tương tự $SR // AC$ và $SR = \frac{AC}{2}$. Do đó MNRS là hình bình hành

Mặt khác $BD \perp AC$ (gt) $\Rightarrow MN \perp BD$. Ta còn có $MS // NR // BD$

Do đó $MN \perp MS$ hay MNRS là hình chữ nhật

\Rightarrow 4 điểm M, N, R, S cùng thuộc đường tròn tâm O là giao điểm của hai đường chéo MR và NS bán kính $\frac{MR}{2}$.

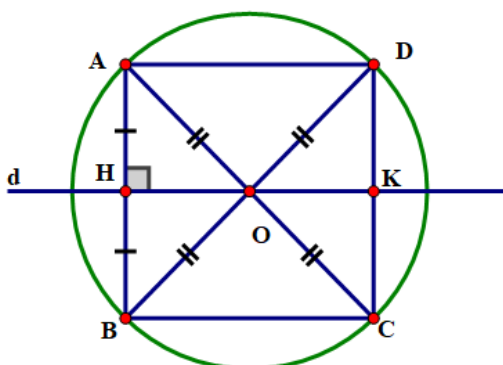
Ví dụ 7. Cho đường tròn (O), đường thẳng d đi qua O và điểm A thuộc (O) nhưng không thuộc d. Gọi B là điểm đối xứng với A qua d; C và D lần lượt là điểm đối xứng với A và B qua O.

a) Ba điểm B, C và D có thuộc (O) không? Vì sao?

b) Chứng minh tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

c) Chứng minh rằng C và D đối xứng với nhau qua d.

Lời giải



a) Xét tứ giác ABCD có hai đường chéo AC cắt BD tại (O).

Ta có B là điểm đối xứng với A qua d nên $d \perp AB$ tại H và $HA = HB$.

Xét tam giác AOB có đường cao OH đồng thời là đường trung tuyến (cmt) nên $\triangle AOB$ cân tại O $\Rightarrow OB = OA$.

$A \in (O) \Rightarrow B \in (O)$. Điểm C đối xứng với A qua O $\Rightarrow OC = OA$, tương tự $OD = OB$.

Do đó $OD = OC = OB = OA$ mà $A \in (O) \Rightarrow B, C, D \in (O)$.

b) Xét tứ giác ABCD có AC cắt BD tại O và $OA = OB = OC = OD$ nên ABCD là hình bình hành (tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

Lại có $AC = BD$ nên tứ giác ABCD là hình chữ nhật (hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau).

c) Tứ giác ABCD là hình chữ nhật (cmt) $\Rightarrow CD // AB$ mà $AB \perp d$ (tính chất đối xứng qua một đường thẳng) $\Rightarrow CD \perp d$.

Tam giác COD cân tại O có OK là đường cao nên đồng thời là trung trực $\Rightarrow DK = KC$.

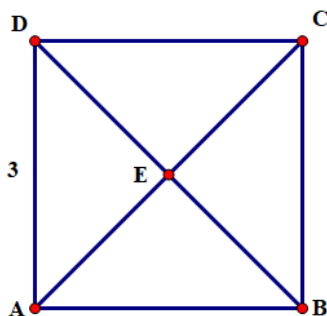
Ta có: $\begin{cases} d \perp CD \\ DK = CK \end{cases}$ chứng tỏ C đối xứng với D qua d.

Ví dụ 8. Cho hình vuông ABCD có E là giao điểm của hai đường chéo.

a) Chứng minh rằng có một đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C và D. Xác định tâm đối xứng và chỉ ra hai trục đối xứng của đường tròn đó.

b) Tính bán kính của đường tròn ở câu a, biết rằng hình vuông có cạnh bằng 3 cm.

Lời giải



a) E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của hình vuông ABCD.

Nên $EA = EB = EC = ED$. Chứng tỏ 4 điểm A, B, C, D thuộc đường tròn tâm E.

Tâm đối xứng là điểm E. Hai trục đối xứng là AC và BD.

b) Ta có: $AC \perp BD$ (tính chất hai đường chéo của hình vuông)

Tam giác AEB vuông cân tại E có cạnh huyền $AB = 3$ cm.

Đặt $EB = EA = R$.

Theo định lý Pythagore ta có:

$$AB^2 = R^2 + R^2 \Rightarrow AB^2 = 2R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{AB^2}{2} \text{ hay } R^2 = \frac{3^2}{2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy bán kính của đường tròn ở câu a là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (cm).

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy xác định vị trí của mỗi điểm $A(-1; -1)$, $B(-1; -2)$, $C(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ đối với đường tròn tâm O bán kính 2.

Lời giải

☑ OA là cạnh huyền trong tam giác vuông cân cạnh bằng 1 nên

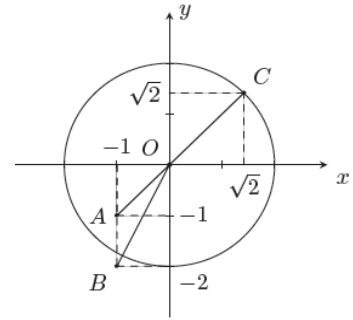
$$OA = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} < 2, \text{ suy ra } A \text{ nằm bên trong } (O; 2).$$

☑ OB là cạnh huyền trong tam giác vuông có hai cạnh là 1 ; 2 nên

$$OB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} > 2, \text{ suy ra } B \text{ nằm bên ngoài } (O; 2).$$

☑ OC là cạnh huyền trong tam giác vuông cân cạnh bằng $\sqrt{2}$ nên

$$OC = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2, \text{ suy ra } C \text{ nằm trên } (O; 2).$$



Câu 2. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC, CA . Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

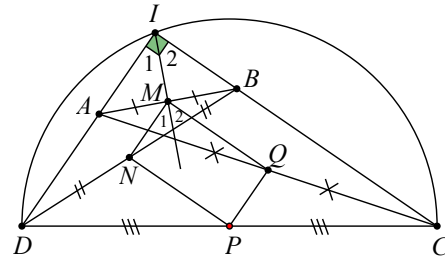
Lời giải

Gọi I là giao điểm của AD và BC .

Vì $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$ nên $\widehat{DIC} = 90^\circ$.

Do M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC và CA nên MN, NP, PQ, QM lần lượt là đường trung bình của tam giác ABD, BCD, ACD, ABC .

Suy ra $MN \parallel AD, PQ \parallel AD, MQ \parallel BC, NP \parallel BC$
do đó $MN \parallel PQ, NP \parallel MQ$.



Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lại có: $\begin{cases} \widehat{M}_1 = \widehat{I}_1 \\ \widehat{M}_2 = \widehat{I}_2 \end{cases}$ (góc đồng vị). Khi đó $\widehat{NMQ} = \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = \widehat{I}_1 + \widehat{I}_2 = 90^\circ$.

Do đó $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Theo ví dụ 4 thì bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

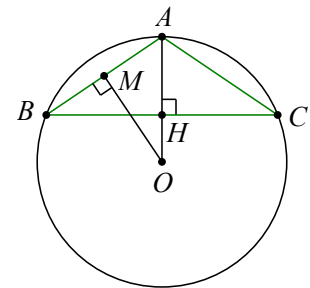
Câu 3. Cho tam giác ABC cân tại $A, BC = 12 \text{ cm}$, chiều cao $AH = 4 \text{ cm}$. Tính bán kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC .

Lời giải

Vì tam giác ABC cân tại A nên đường cao AH cũng là đường trung trực của đoạn BC .

Qua trung điểm M của AB kẻ đường trung trực của AB cắt đường thẳng AH tại O . Khi đó O là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC .

Bán kính của đường tròn (O) là $R = OA = OB$.



Tam giác BOH vuông tại H nên $BO^2 = BH^2 + OH^2 \Leftrightarrow BO^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + (OA - AH)^2$

$$\Leftrightarrow R^2 = 36 + (R - 4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8R = 52$$

$$\Leftrightarrow R = 6,5.$$

Vậy bán kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC bằng 6,5 cm.

Câu 4. Cho tam giác ABC cân tại A có ba đỉnh nằm trên đường tròn (O) . Đường cao AH cắt (O) ở D .

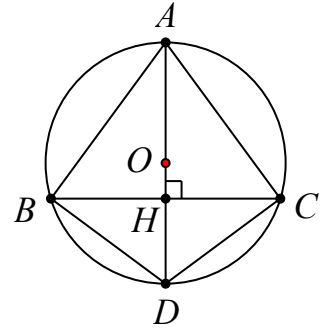
Biết $BC = 24$ cm, $AC = 20$ cm. Tính chiều cao AH và bán kính đường tròn (O) .

Lời giải

Vì tam giác ABC cân tại A nên đường cao AH cũng là đường trung trực của đoạn BC , suy ra H là trung điểm của đoạn BC và tâm O của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC nằm trên đường cao AH .

Tam giác ACH vuông tại H nên

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ (cm)}$$



Vì AD là đường kính của đường tròn (O) nên tam giác ACD vuông tại C . Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông ACD ta có

$$AC^2 = AD \cdot AH \Leftrightarrow AD = \frac{AC^2}{AH} \Rightarrow AD = \frac{20^2}{16} = 25 \text{ (cm)}.$$

Vậy $AH = 16$ cm và bán kính đường tròn (O) là $R = \frac{AD}{2} = \frac{25}{2}$ cm.

Câu 5. Cho hình thang cân $ABCD$ (với $AD \parallel BC$) có $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, $BC = 20$ cm. Chứng minh rằng A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

Lời giải

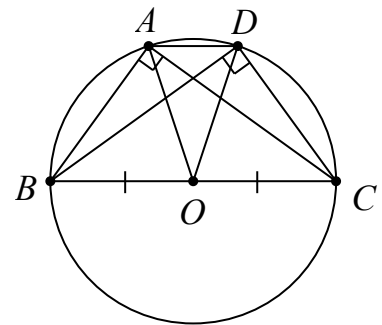
Vì $ABCD$ là hình thang cân với hai đáy AD, BC nên

$$AB = CD = 12 \text{ cm và } BD = AC = 16 \text{ cm}.$$

Gọi O là trung điểm của BC .

Xét tam giác ABC có:

$$\left. \begin{array}{l} AB^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2 = 400 \\ BC^2 = 20^2 = 400 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } A.$$



Do tam giác ABC vuông tại A nên ba đỉnh của tam giác ABC cùng thuộc đường tròn (O) .

Tương tự ta cũng có tam giác BCD vuông tại D nên ba đỉnh của tam giác BCD cùng thuộc đường tròn (O) .

Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) có bán kính $R = \frac{BC}{2} = 10$ cm.

Câu 6. Cho đường tròn (O) đường kính AB, M, N thuộc (O) sao cho $AM = BN$ và M, N nằm trên hai nửa đường tròn khác nhau. Chứng minh MN là đường kính của (O) .

Lời giải

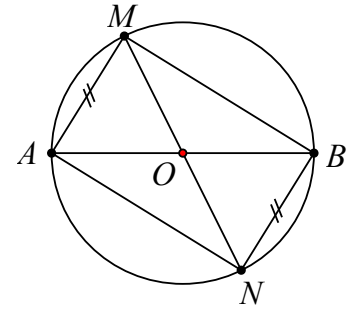
Vì M, N thuộc (O) đường tròn đường kính AB nên tam giác ABM, ABN là các tam giác vuông lần lượt tại M, N .

$\triangle ABM$ vuông tại M và $\triangle ABN$ vuông tại N có cạnh huyền AB chung và $AM = BN$ nên $\triangle ABM = \triangle ABN$, suy ra $BM = AN$.

Tứ giác $AMBN$ có $AM = BN$ và $BM = AN$ nên $AMBN$ là hình bình hành.

Lại có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.

Do đó MN là đường kính của đường tròn (O) .



Câu 7. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.

1. Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.
2. Nếu $AC = BD$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

Lời giải

1. Gọi O là trung điểm của AC .

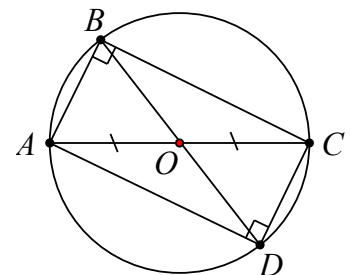
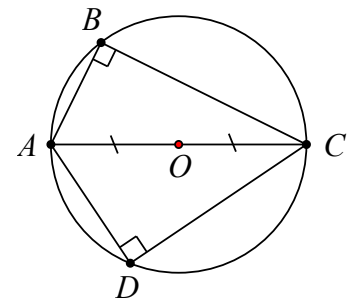
Vì tam giác ABC vuông tại B nên ba đỉnh A, B, C cùng thuộc đường tròn (O) .

Vì tam giác ADC vuông tại D nên ba đỉnh A, D, C cùng thuộc đường tròn (O) .

Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) có đường kính AC .

2. Nếu $BD = AC$ thì BD là đường kính của đường tròn (O) , suy ra $\widehat{BAD} = 90^\circ$.

Khi đó tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$ nên $ABCD$ là hình chữ nhật.



Câu 8. Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ tam giác AEC vuông tại E . Chứng minh năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

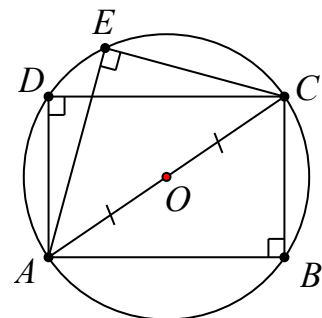
Lời giải

Gọi O là trung điểm của AC .

Vì tam giác ABC vuông tại B nên ba điểm A, B, C cùng thuộc đường tròn (O) đường kính AC .

Vì tam giác ADC vuông tại D nên ba điểm A, D, C cùng thuộc đường tròn (O) đường kính AC .

Vì tam giác AEC vuông tại E nên ba điểm A, E, C cùng thuộc đường tròn (O) đường kính AC .



Vậy năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc đường tròn (O) đường kính AC .

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Từ M là điểm bất kì trên cạnh BC kẻ $MD \perp AB$, $ME \perp AC$. Chứng minh năm điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải

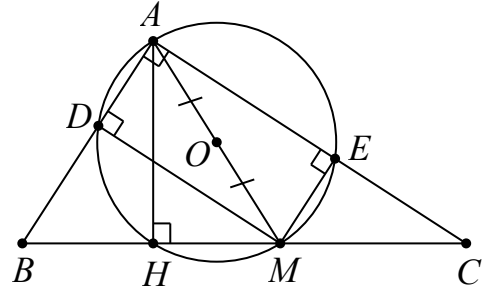
Vì $MD \perp AB$ và $MC \perp AB$ nên $MD \parallel AE$.

Vì $ME \perp AC$ và $AB \perp AC$ nên $ME \parallel AD$.

Từ hai điều trên suy ra $ADME$ là hình bình hành.

Mà $\widehat{DAE} = 90^\circ$ nên $ADME$ là hình chữ nhật, suy ra bốn điểm A, D, M, E thuộc đường tròn (O) đường kính AM (với O là trung điểm của đoạn AM).

Lại có tam giác AHM vuông tại H nên ba điểm A, H, M thuộc đường tròn (O) đường kính AM .



Vậy năm điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên một đường tròn (O) đường kính AM .

Câu 10. Cho tam giác ABC có AQ, BK, CI là ba đường cao và H là trực tâm.

1. Chứng minh A, B, Q, K cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.
2. Chứng minh A, I, H, K cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

Lời giải

1. Gọi O là trung điểm AB .

Vì tam giác ABQ vuông tại Q nên ba điểm A, B, Q thuộc đường tròn (O) đường kính AB .

Vì tam giác ABK vuông tại K nên ba điểm A, B, K thuộc đường tròn (O) đường kính AB .

Từ đó suy ra bốn điểm A, B, Q, K cùng thuộc đường tròn (O) đường kính AB .

2. Gọi O' là trung điểm AH .

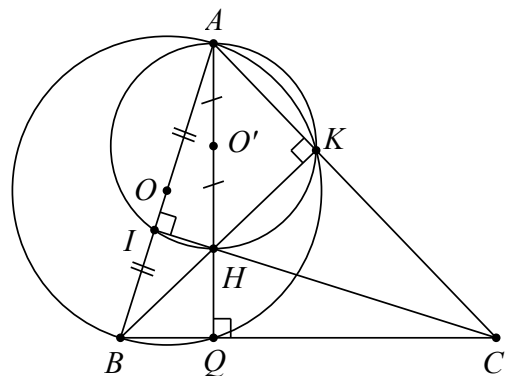
Vì tam giác AHI vuông tại I nên ba điểm A, H, I thuộc đường tròn (O') đường kính AH .

Vì tam giác AHK vuông tại K nên ba điểm A, H, K thuộc đường tròn (O') đường kính AH .

Từ đó suy ra bốn điểm A, I, H, K cùng thuộc đường tròn (O') đường kính AH .

Câu 11. tam giác ABC , các đường cao BD và CE . Trên cạnh AC lấy điểm M . Kẻ tia Cx vuông góc với tia BM tại F . Chứng minh rằng năm điểm B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải

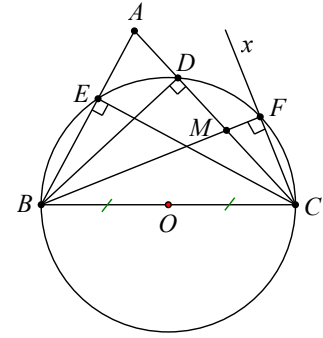


Gọi O là trung điểm BC .

Vì tam giác BCD vuông tại D nên ba điểm B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) đường kính BC .

Vì tam giác BCE vuông tại E nên ba điểm B, C, E cùng thuộc đường tròn (O) đường kính BC .

Vì tam giác BCF vuông tại F nên ba điểm B, C, F cùng thuộc đường tròn (O) đường kính BC .



Vậy năm điểm B, C, D, E, F cùng thuộc đường tròn (O) đường kính BC .

Câu 12. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Lấy M, N thuộc tia BC sao cho $MN = BC$ và M nằm giữa B, C . Gọi D là hình chiếu của M lên AC và E là hình chiếu của N lên AB . Chứng minh rằng các điểm A, D, E, H cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải

Gọi K là giao điểm của MD, NE .

Ta thấy $HB \parallel MK$ do cùng vuông góc AC suy ra cặp góc đồng vị $\widehat{HBC} = \widehat{KMN}$.

Tương tự $\widehat{HCB} = \widehat{KNM}$.

Kết hợp giả thiết $BC = MN$ suy ra tam giác $\triangle BHC = \triangle MKN$.

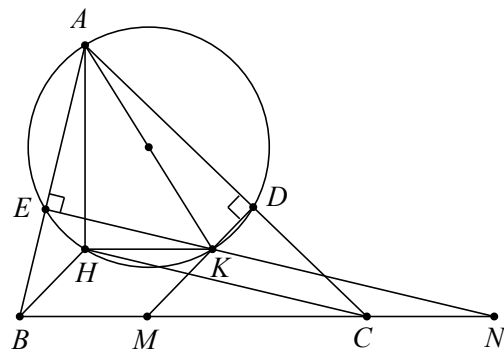
Do đó $S_{BHC} = S_{MKN}$, suy ra $HK \parallel BC$.

Mà $AH \perp BC$ nên $AH \perp HK$, suy ra H thuộc đường tròn đường kính AK .

Vì tam giác ADK vuông tại D nên ba điểm A, D, K thuộc đường tròn đường kính AK .

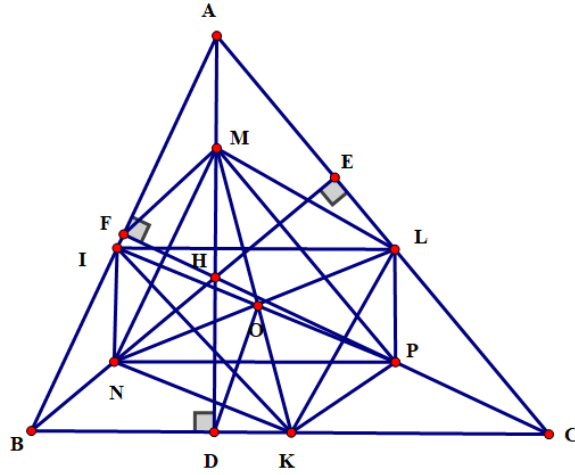
Vì tam giác AEK vuông tại E nên ba điểm A, E, K thuộc đường tròn đường kính AK .

Vậy các điểm A, D, E, H cùng thuộc đường tròn đường kính AK .



Câu 13. Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng các trung điểm của ba cạnh, các trung điểm của ba đoạn thẳng nối ba đỉnh với trực tâm của ba đường cao của tam giác cùng thuộc một đường tròn. (Đường tròn 9 điểm hay đường tròn Euler).

Lời giải



Gọi I,K,L lần lượt là trung điểm của ba cạnh AB,BC,AC M,N,P lần lượt là trung điểm của HA,HB,HC

Chân ba đường cao kẻ từ A,B,C lần lượt là D,E,F.

Ta có IL là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow IL // BC$ và $IL = \frac{BC}{2}$

Tương tự $NP // BC$ và $NP = \frac{BC}{2}$. Do đó ILPN là hình bình hành.

Mặt khác $AD \perp BC$ (gt) $\Rightarrow IL \perp AD$.

Ta còn có $IN // LP // AD \Rightarrow IN \perp IL$ hay ILPN là hình chữ nhật.

Chứng minh tương tự KLMN cũng là hình chữ nhật, hai hình chữ nhật này có chung đường chéo NL.

Nên NL,PI,MK cắt nhau tại một điểm O là trung điểm của NL

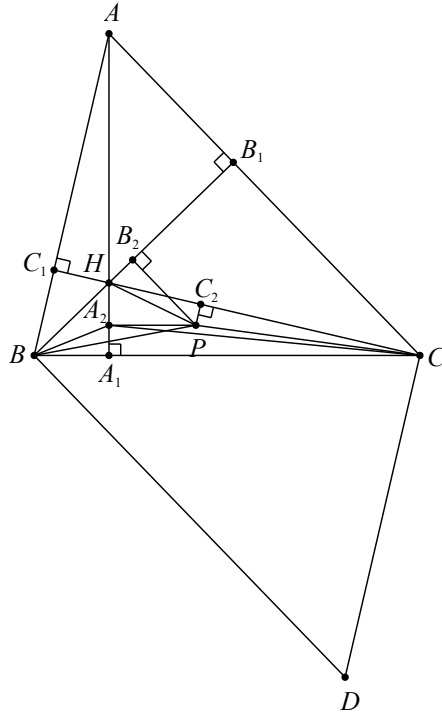
Từ đó ta có 6 điểm M,L,P,K,N,I cùng nằm trên đường tròn đồng tâm O. Lại có $\triangle MDK$ vuông tại D có DO

là trung tuyến $\Rightarrow OD = OM = OK$ hay D thuộc đường tròn đường kính MK.

Chứng minh tương tự ta có hai điểm E,F cùng thuộc đường tròn O.

Câu 14. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt thuộc đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 sao cho $S_{A_2BC} + S_{B_2CA} + S_{C_2AB} = S_{ABC}$. Chứng minh rằng A_2, B_2, C_2, H cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Qua B_2, C_2 lần lượt dựng các đường thẳng vuông góc với BB_1, CC_1 chúng cắt nhau tại P . Dựng hình bình hành $ABCD$. Vì B_2, C_2 lần lượt thuộc BB_1, CC_1 nên P nằm ở miền trong hình bình hành $ABCD$.

Ta dễ thấy $PB_2 \parallel CA, PC_2 \parallel AB$ nên

$$S_{PCA} = S_{B_2CA} \text{ và } S_{PAB} = S_{C_2AB}. \quad (2.1)$$

Nếu P nằm ở miền trong tam giác BCD thì $S_{B_2CA} + S_{C_2AB} = S_{PCA} + S_{PAB} > S_{ABC}$ vô lý vì trái với giả thiết, vậy P nằm ở miền trong tam giác ABC .

Khi đó kết hợp giả thiết có: $S_{PCA} + S_{PBA} + S_{PBC} = S_{ABC} = S_{A_2BC} + S_{B_2CA} + S_{C_2AB}$.

Theo (2.1) suy ra $S_{PBC} = S_{A_2BC}$, suy ra $PA_2 \parallel BC$ hay $PA_2 \perp AA_1$.

Từ đây dễ thấy A_2, B_2, C_2 thuộc đường tròn đường kính PH hay A_2, B_2, C_2, H cùng thuộc một đường tròn.

BÀI 14. CUNG VÀ DÂY CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. DÂY VÀ ĐƯỜNG KÍNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN

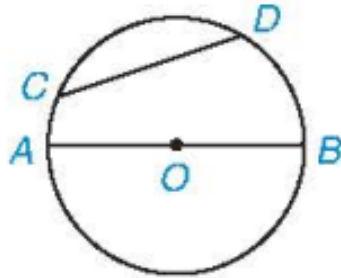
Khái niệm dây và đường kính của đường tròn

Đoạn thẳng nối hai điểm tùy ý của một đường tròn gọi là một dây (hay dây cung) của đường tròn.

Mỗi dây đi qua tâm là một đường kính của đường tròn.

Để thấy đường kính của đường tròn bán kính R có độ dài bằng $2R$.

Trên Hình 5.6, CD là một dây, AB là một đường kính của (O) .

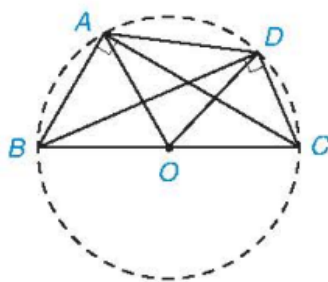


Hình 5.6

Định lí: Trong một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

Ví dụ 1: Tứ giác lồi $ABCD$ có $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$. Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn và $AD < BC$.

Lời giải



Hình 5.8

Gọi O là trung điểm của đoạn BC . Tam giác ABC vuông tại A ($\widehat{BAC} = 90^\circ$) nên đường trung tuyến AO bằng nửa cạnh huyền, nghĩa là $OA = OB = OC = \frac{BC}{2}$. Do đó điểm A nằm trên đường tròn (O) đường kính BC .

Tương tự, bằng cách xét tam giác DBC ta cũng suy ra điểm D thuộc đường tròn (O) .

Vậy AD là một dây (không đi qua tâm) của đường tròn (O) . Áp dụng định lí trên ta có $AD < BC$.

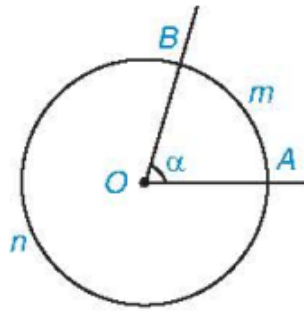
2. GÓC Ở TÂM, CUNG VÀ SỐ ĐO CỦA MỘT CUNG

Khái niệm góc ở tâm và cung tròn

Cho hai điểm A và B cùng thuộc một đường tròn. Hai điểm ấy chia đường tròn thành hai phần, mỗi phần gọi là một cung tròn (hay cung). Hai điểm A và B gọi là hai mút (hay đầu mút) của mỗi cung đó.

Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn.

Trên Hình 5.9 ta có hai cung, kí hiệu là \widehat{AmB} và \widehat{AnB} nhưng chỉ có một góc ở tâm là \widehat{AOB} .



Hình 5.9

Chú ý: Khi góc AOB không bẹt thì cung nằm trong góc AOB gọi là cung nhỏ (trên Hình 5.9, \widehat{AmB} là cung

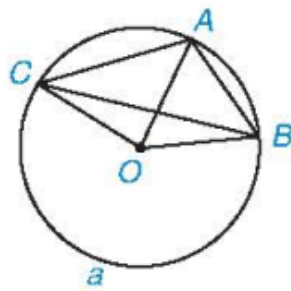
nhỏ). Khi đó \widehat{AmB} còn có thể kí hiệu gọn là \widehat{AB} . Cung còn lại, \widehat{AnB} gọi là cung lớn. Khi góc AOB bẹt thì mỗi cung AB được gọi là một nửa đường tròn.

Ta còn nói góc AOB chắn cung AB hay cung AB bị chắn bởi góc AOB .

Ví dụ 2: Cho ba điểm A, B và C thuộc đường tròn (O) như Hình 5.10.

- Tìm các góc ở tâm có hai cạnh đi qua hai trong ba điểm A, B, C .
- Tìm các cung có hai mút là hai trong ba điểm A, B, C .

Lời giải



Hình 5.10

a) Các góc ở tâm cần tìm là $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}$ và \widehat{COA} .

b) - Các cung có hai mút A, B là $\widehat{AB}, \widehat{ACB}$.

Các cung có hai mút A, C là $\widehat{AC}, \widehat{ABC}$.

Các cung có hai mút B, C là $\widehat{BC}, \widehat{BaC}$.

Cách xác định số đo của một cung

1. Số đo của một cung được xác định như sau:

Số đo của nửa đường tròn bằng 180° .

Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ có chung hai mút.

2. Số đo của cung AB được kí hiệu là số \widehat{AB} .

Trên Hình 5.9, ta có: số $\widehat{AmB} = \widehat{AOB} = \alpha$; số $\widehat{AnB} = 360^\circ - \alpha$.

Chú ý:

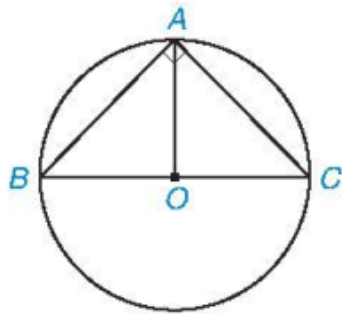
Cung có số đo n° còn gọi là cung n° . Cả đường tròn được coi là cung 360° . Đôi khi ta cũng coi một điểm là cung 0° .

Hai cung trên một đường tròn gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng số đo.

Nhận xét

Nếu A là một điểm thuộc cung BAC thì số đo $sđ\widehat{BAC} = sđ\widehat{BA} + sđ\widehat{AC}$ (H.5.10).

Ví dụ 3: Tính số đo của các cung có các đầu mút là hai trong các điểm A, B, C trong Hình 5.11, biết rằng ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh A .



Hình 5.11

Lời giải

Trên Hình 5.11, ta thấy \widehat{AB} và \widehat{AC} là các cung nhỏ bị chắn bởi các góc ở tâm thứ tự là \widehat{AOB} và \widehat{AOC} .

Do tam giác ABC vuông cân tại A nên đường trung tuyến AO cũng là đường cao, tức là $AO \perp BC$.

Do đó $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 90^\circ$, suy ra $sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AC} = 90^\circ$.

\widehat{ACB} là cung lớn có chung hai mút A, B với cung nhỏ AB nên $sđ\widehat{ACB} = 360^\circ - sđ\widehat{AB} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

Tương tự, ta có: $sđ\widehat{ABC} = 360^\circ - sđ\widehat{AC} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

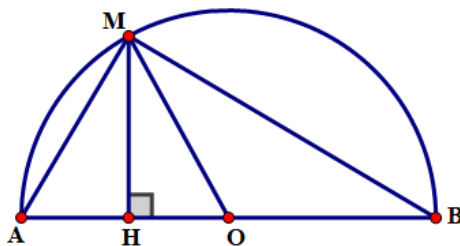
Ngoài ra còn có hai nửa đường tròn có chung hai mút A và B , có số đo bằng 180° .

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

5.5. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một điểm M tùy ý thuộc nửa đường tròn đó.

Chứng minh rằng khoảng cách từ M đến AB không lớn hơn $\frac{AB}{2}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của M trên AB .

Khi đó khoảng cách từ M đến AB bằng độ dài đoạn MH .

Xét tam giác MHO vuông tại H có: $MH \leq MO$.

Lại có $OM = \frac{AB}{2}$ (do AB là đường kính, OM là bán kính của đường tròn (O)).

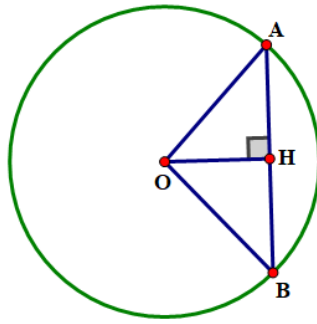
Vậy $MH \leq \frac{AB}{2}$

5.6. Cho đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và AB là một dây bất kì của đường tròn đó. Biết $AB = 6 \text{ cm}$.

a) Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng AB .

b) Tính $\tan \alpha$ nếu góc ở tâm chắn cung AB bằng 2α .

Lời giải



a) Gọi H là trung điểm của AB . Suy ra $AH = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (cm).

Xét $\triangle OAH$ và $\triangle OBH$ có:

$OA = OB = R$; Cạnh OH chung; $HA = HB$ (do H là trung điểm của AB)

Do đó $\triangle OAH = \triangle OBH$ (c.c.c).

Suy ra $\widehat{OHA} = \widehat{OHB}$ (hai góc tương ứng)

Mà \widehat{OHA} và \widehat{OHB} là hai góc bù nhau nên $\widehat{OHA} + \widehat{OHB} = 180^\circ$ hay $2\widehat{OHB} = 180^\circ$

Suy ra $\widehat{OHA} = \widehat{OHB} = 90^\circ$ nên $OH \perp AB$.

Do đó khoảng cách từ O đến đường thẳng AB bằng độ dài đoạn OH .

Xét tam giác OAH vuông tại H có: $AH^2 + OH^2 = OA^2$ (định lý Pythagore)

Hay $OH^2 = OA^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2 = 16$. Nên $OH = 4$ cm.

Vậy khoảng cách từ O đến đường thẳng AB bằng 4 cm.

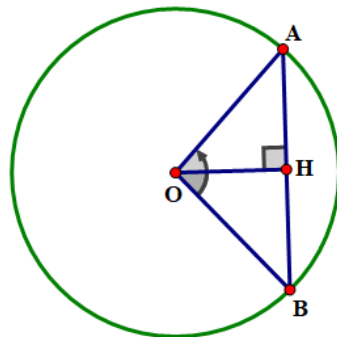
b) Theo giả thiết, góc ở tâm chắn cung AB là $\widehat{AOB} = 2\alpha$.

Từ câu a) $\triangle OAH = \triangle OBH$ suy ra $\widehat{HOA} = \widehat{HOB}$ (hai góc tương ứng).

Lại có: $\widehat{HOA} + \widehat{HOB} = \widehat{AOB}$ nên $2\widehat{HOA} = 2\alpha$ hay $\widehat{HOA} = \alpha$. Suy ra $\tan \alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{3}{4}$.

5.7. Tâm O của một đường tròn cách dây AB của nó một khoảng 3 cm. Tính bán kính của đường tròn (O), biết rằng cung nhỏ AB có số đo bằng 100° (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB . Theo giả thiết, góc ở tâm chắn cung AB là $\widehat{AOB} = 100^\circ$.

Xét $\triangle OAH$ và $\triangle OBH$ có:

$OA = OB = R$; Cạnh OH chung; $HA = HB$ (do H là trung điểm của AB)

Do đó $\triangle OAH = \triangle OBH$ (c.c.c). Suy ra $\widehat{HOA} = \widehat{HOB}$ (hai góc tương ứng).

Lại có: $\widehat{HOA} + \widehat{HOB} = \widehat{AOB}$ nên $2\widehat{HOA} = \widehat{AOB} = 100^\circ$ hay $\widehat{HOA} = 50^\circ$.

Xét tam giác OAH vuông tại H có: $\cos \widehat{HOA} = \frac{OH}{OA}$. Suy ra $OA = \frac{OH}{\cos \widehat{HOA}} = \frac{3}{\cos 50^\circ} \approx 4,7(\text{cm})$.

Vậy bán kính của đường tròn (O) khoảng 4,7 cm.

5.8. Trên mặt một chiếc đồng hồ có các vạch chia như Hình 5.12. Hỏi cứ sau mỗi khoảng thời gian 36 phút:

- Đầu kim phút vạch nên một cung có số đo bằng bao nhiêu độ?
- Đầu kim giờ vạch nên một cung có số đo bằng bao nhiêu độ?



Hình 5.12

Lời giải

a) Cứ 60 phút kim phút chạy hết 1 vòng đồng hồ, tức là vạch trên 1 cung có số đo bằng 360° .

Mỗi phút kim phút vạch trên một cung có số đo là: $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$.

Như vậy sau 36 phút, kim phút vạch trên 1 cung có số đo bằng: $6^\circ \cdot 36 = 216^\circ$.

b) Sau 1 giờ, kim giờ vạch trên 1 cung có số đo bằng: $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.

Mỗi phút kim giờ vạch trên một cung có số đo là: $\frac{30^\circ}{60} = 0,5^\circ$.

Như vậy sau 36 phút, kim giờ vạch trên 1 cung có số đo bằng: $0,5^\circ \cdot 36 = 18^\circ$.

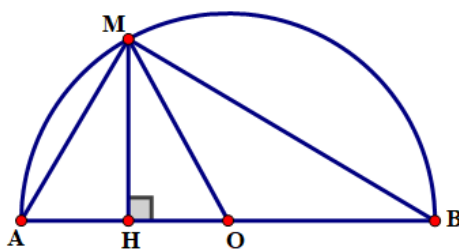
C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh tính chất hình học

Ví dụ 1. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một điểm M tùy ý thuộc nửa đường tròn đó. Chứng minh rằng khoảng cách từ M đến AB không lớn hơn $\frac{AB}{2}$.

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với $a, b \geq 0$, ta có $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Lời giải



Gọi khoảng cách từ M đến AB là MH và bán kính đường tròn (O) là R. Ta có $OM = OA = OB (= R)$

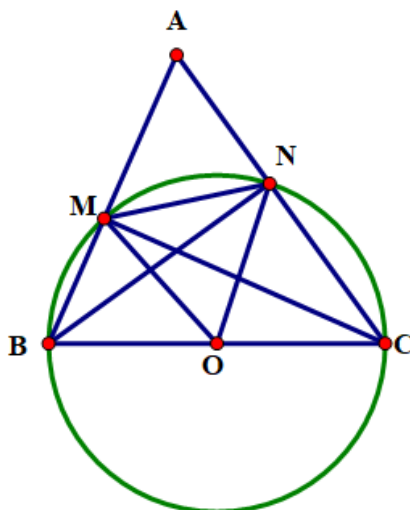
Do đó $\triangle AMB$ vuông tại M.

$$\text{Ta có } \triangle MHA \sim \triangle BHM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MH}{HA} = \frac{BH}{HM}$$

$$\Rightarrow MH^2 = HA \cdot HB \Rightarrow MH = \sqrt{HA \cdot HB} \leq \frac{HA + HB}{2} \leq \frac{AB}{2} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh $MN < BC$.

Lời giải



Dễ thấy các tam giác BMC và BNC đều là các tam giác vuông lần lượt tại M và N và OM, ON lần lượt là các trung tuyến.

Ta có $OM = ON = OB = OC (= R)$, trong đó R là bán kính đường tròn đường kính BC.

Xét tam giác MON, ta có $MN < OM + ON$ (bất đẳng thức tam giác)

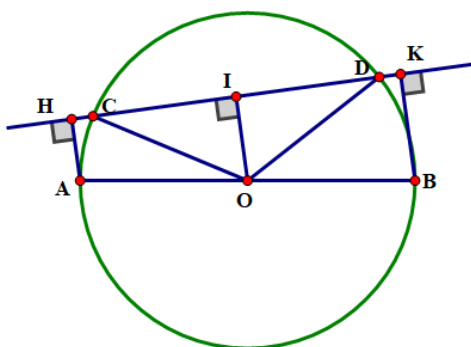
Mà $OM + ON = OB + OC = BC$

Vậy $MN < BC$.

Ta có thể kết luận theo bài học "Trong một đường tròn dây lớn nhất là đường kính).

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD không cắt đường kính AB. Gọi H và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng $CH = DK$.

Lời giải



Kẻ $OI \perp CD$, tam giác COD cân tại O nên đường cao OI đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow IC = ID$.

Lại có AHKB là hình thang vuông

($AH \parallel BK (\perp HK)$) mà OI là đường trung bình nên I là trung điểm của HK ta có $IH = IK$

$$\Rightarrow HI - CI = KI - ID \text{ hay } CH = DK$$

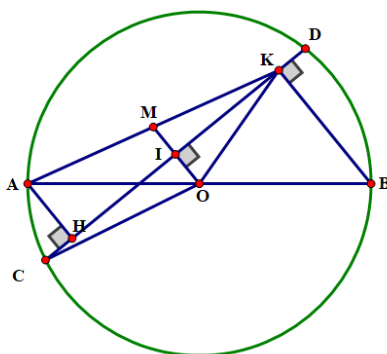
Nhận xét: Do $HI = KI$ và $IC = ID$ nên ta có $HI + ID = IK + IC$ hay $HD = KC$ ta có Ví dụ sau:

Cho đường tròn (O) đường kính AB , dây CD không cắt đường kính AB . Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ A, B đến CD . Chứng minh rằng $HD = CK$ (Học sinh tự giải).

Trường hợp dây CD cắt đường kính AB đưa ta đến Ví dụ 4 sau đây.

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) đường kính AB , dây CD cắt đường kính AB tại E . Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD . Chứng minh rằng $CH = DK$.

Lời giải



Kẻ $OI \perp CD$ ta có $IC = ID$ (tam giác COD cân tại O nên đường cao đồng thời là đường trung tuyến).(1)

$$OI // KB$$

Gọi M là giao điểm của OI và AK ta có M là trung điểm của AK .

Xét $\triangle AKH$ có M là trung điểm của AK

$$MI // AH (\perp CD)$$

$$\Rightarrow I \text{ là trung điểm của } HK \text{ hay } IH = IK \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow IC - IH = ID - IK \text{ hay } CH = DK$$

Nhận xét: Theo Ví dụ 1. Trên dây CD ta lấy thêm điểm M .

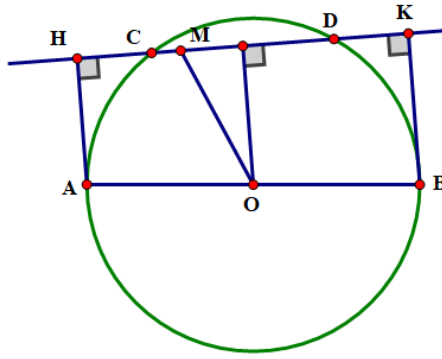
$$\text{Khi đó } OI \leq OM. \text{ Mà } OM = \frac{AH + BK}{2} \text{ (tính chất đường trung bình của hình thang)}$$

$$\Rightarrow AH + BK \leq 2OM. \text{ Chúng ta sẽ có Ví dụ sau:}$$

Ví dụ 5. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . M là điểm cố định nằm trong đường tròn (M khác O) và CD là dây cung quay quanh M . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A và B lên CD . Xác định vị trí của dây CD để $AH + BK$ lớn nhất.

Hướng dẫn: Kẻ $OI \perp CD$.

Lời giải



Ta có AH, BK cùng vuông góc với CD

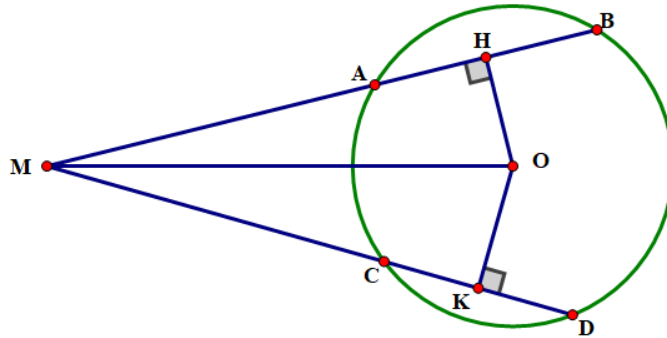
\Rightarrow Tứ giác ABKH là hình thang và có OI là đường trung bình: $OI = \frac{AH + BK}{2} \Rightarrow AH + BK = 2OI$

Ta có $OI \leq OM$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên)

Dấu "=" xảy ra khi $OM \perp CD$

Ví dụ 6. Cho đường tròn (O). Các dây AB và CD bằng nhau, các tia BA và DC cắt nhau tại điểm M nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng $MA = MC$.

Lời giải



Ta có $AB = CD(gt) \Rightarrow OH = OK$ (liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm)

Xét tam giác vuông MHO theo định lý Pythagore: $MH^2 = MO^2 - OH^2$

Tương tự với ΔMKO $MK^2 = MO^2 - OK^2$ mà $OH = OK \Rightarrow MH = MK$ (1)

Lại có $OH \perp AB(gt) \Rightarrow HA = HB = \frac{AB}{2}$. Tương tự $KC = KD = \frac{CD}{2}$ mà $AB = CD \Rightarrow HA = CK$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MH - HA = MK - CK$ hay $MA = MC$

Nhận xét: Trường hợp hai dây AB, CD không bằng nhau, chẳng hạn $AB > CD$ ta có Ví dụ sau:

Ví dụ 7. Cho đường tròn (O) hai dây AB và CD sao cho $AB > CD$. Các tia BA và DC cắt nhau tại M nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Hãy so sánh MH và MK.

Lời giải

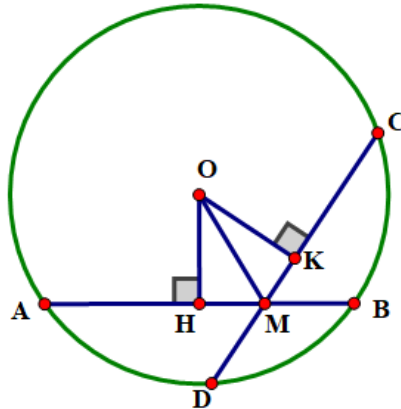
Ta có $MH^2 = MO^2 - OH^2$ và

$MK^2 = MO^2 - OK^2$ mà $OH < OK$ (vì $AB > CD$) $\Rightarrow MH > MK$

Nhận xét: Trường hợp điểm M nằm bên trong đường tròn ta có Ví dụ tương tự.

Ví dụ 8. Cho M là điểm nằm bên trong đường tròn (O), vẽ qua M, hai dây AB và CD sao cho $AB > CD$. Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng: $MH > MK$.

Lời giải



Nối M với O. Xét tam giác vuông OHM có: $MH^2 = OM^2 - OH^2$

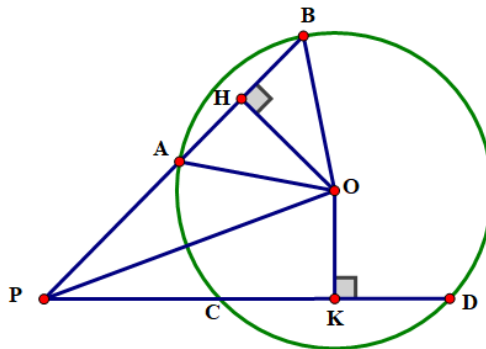
Tương tự với tam giác vuông OKM: $MK^2 = OM^2 - OK^2$

Mà $AB > CD$ (gt) $\Rightarrow OH < OK \Rightarrow MH > MK$.

Ví dụ 9. Từ điểm P nằm bên ngoài đường tròn (O; R) và $OP = 2R$. Một đường thẳng qua P cắt đường tròn (O) tại A và B (A nằm giữa B và P) và $AB = R$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến BP. Qua P kẻ một đường thẳng khác cắt đường tròn (O) tại C và D (C, D ở khác phía với AB so với OP). Kẻ $OK \perp CD$. So sánh AB và CD biết $OK < \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

OP). Kẻ $OK \perp CD$. So sánh AB và CD biết $OK < \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Ta có $OH \perp BP$. Tam giác AOB cân tại O nên đường cao OH đồng thời là đường trung tuyến hay H

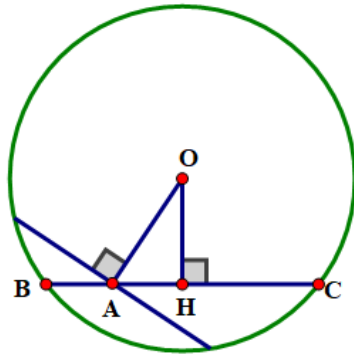
là trung điểm của AB: $HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{R}{2}$.

Xét tam giác vuông AHO ta có: $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Mà $OK < \frac{R\sqrt{3}}{2}$ (gt) $\Rightarrow OK < OH \Rightarrow AB < CD$.

Ví dụ 10. Cho điểm A cố định ở bên trong đường tròn (O; R) và A không trùng với O. BC là dây cung quay quanh A. Xác định vị trí của dây cung BC lúc dây cung BC ngắn nhất.

Lời giải



Kẻ $OH \perp BC$ (H thuộc BC). Ta có $OH \leq OA$ (không đổi)

BC ngắn nhất $\Leftrightarrow OH$ lớn nhất $\Leftrightarrow OH = OA \Leftrightarrow H \equiv A$.

Vậy: Khi BC vuông góc với OA tại A thì độ dài dây BC ngắn nhất.

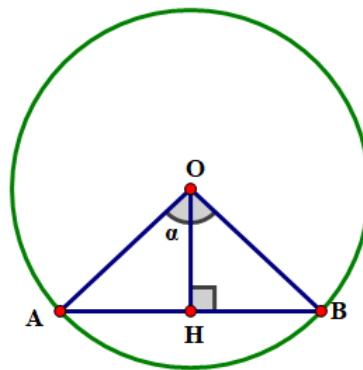
Dạng 2. Tính toán

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ là một dây bất kì của đường tròn đó. Biết $AB = 6\text{ cm}$.

a) Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng AB .

b) Tính $\tan \alpha$ nếu góc ở tâm chắn cung AB bằng 2α .

Lời giải



a) Gọi khoảng cách từ O đến đường thẳng AB là OH . Tam giác AOB cân tại O nên đường cao OH cũng đồng thời là đường trung tuyến hay $AH = BH = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3(\text{cm})$.

Xét tam giác AHO vuông tại H , theo định lí Pythagore, ta có:

$$OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow OH^2 = OA^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow OH = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(\text{cm})$$

b) Khi $\widehat{AOB} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{BOH} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$ (vì tam giác AOB cân tại O nên đường cao OH đồng

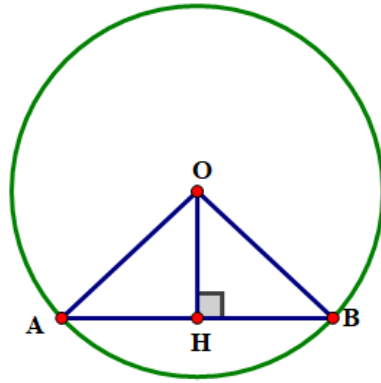
thời là đường phân giác).

Xét tam giác AHO vuông tại H , ta có: $\tan \alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{3}{4}$.

Ví dụ 2. Tâm O của một đường tròn (cách dây AB của nó một khoảng

3 cm . Tính bán kính của đường tròn (O) , biết rằng cung nhỏ AB có số đo bằng 100° (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải



Ta biết rằng số đo cung nhỏ chính là số đo của góc ở tâm hay $\widehat{AOB} = 100^\circ$.

Tam giác AOB cân tại O có OH là đường cao đồng thời cũng là đường phân giác.

$$\widehat{AOH} = \widehat{BOH} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ.$$

Tam giác AOH vuông tại H có cạnh góc vuông OH = 3 cm, góc nhọn $\widehat{AOH} = 50^\circ$ (cmt).

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $OH = OA \cos \widehat{AOH} \Rightarrow OA = \frac{OH}{\cos 50^\circ} \approx 4,7$.

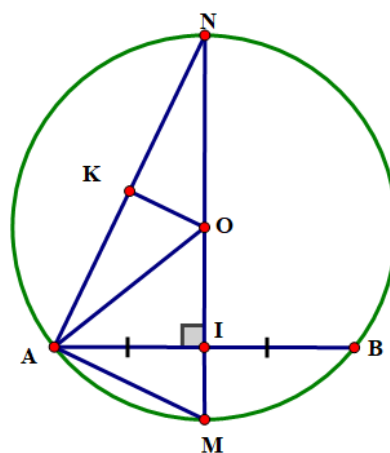
Vậy bán kính của đường tròn (O) là 4,7(cm).

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O; R) và một dây cung AB. Gọi I là trung điểm của AB. Tia OI cắt cung AB tại M.

a) Cho $R = 5$ cm, $AB = 6$ cm. Tính độ dài dây cung MA.

b) Cho MN là đường kính của đường tròn (O; R) biết $AN = 10$ cm và dây $AB = 12$ cm. Tính bán kính R.

Lời giải



a) Ta có I là trung điểm của dây AB (gt) $\Rightarrow IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (cm) (định lý đường kính và dây cung)

Trong tam giác vuông AIO ta có: $OI = \sqrt{AO^2 - AI^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (cm) (định lý Pythagore)

$$\Rightarrow IM = OM - OI = 5 - 4 = 1$$
(cm)

Xét tam giác vuông AIM lại có: $AM = \sqrt{AI^2 + IM^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ (cm) (định lý Pythagore)

b) Chứng minh như trên ta có: $IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6(\text{cm})$

Xét tam giác vuông AIN ta có: $NI = \sqrt{AN^2 - AI^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8(\text{cm})$

Kẻ $OK \perp AN$ ta có $KA = KN = \frac{AN}{2} = \frac{10}{2} = 5(\text{cm})$

Và các tam giác vuông AIN và OKN đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{NO}{NA} = \frac{NK}{NI} \Rightarrow NO = \frac{NA \cdot NK}{NI} = \frac{10 \cdot 5}{8} = 6,25(\text{cm})$$

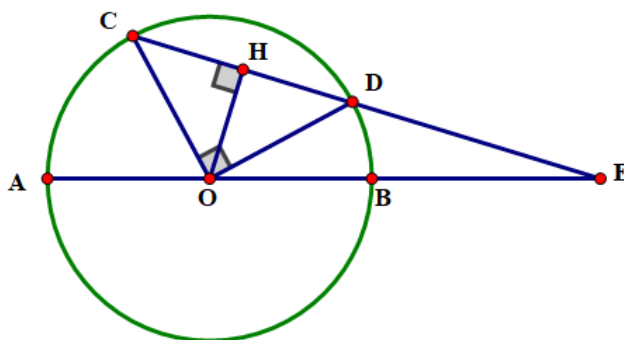
Vậy $R = 6,25(\text{cm})$.

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Một dây CD không đi qua tâm O sao cho $\widehat{COD} = 90^\circ$ và CD cắt đường thẳng AB tại E (D nằm giữa hai điểm E và C), biết $OE = 2R$. Tính độ dài EC và ED theo R.

Hướng dẫn: Bạn hãy vẽ hình theo thứ tự sau:

- Dựng (O; R)
- Vẽ hai bán kính $OC \perp OD$
- Nối CD kéo dài.
- Dựng (O; 2R)
- Lấy E là giao điểm của (O; 2R) và đường thẳng CD.

Lời giải



Ta có $\widehat{COD} = 90^\circ$ (gt) nên $\triangle COD$ vuông cân tại O, ta có: $CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$

Kẻ $OH \perp CD$, tam giác COD cân tại O nên đường cao OH đồng thời là đường trung tuyến hay $HC = HD$.

$$\Rightarrow HC = HD = OH = \frac{CD}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Xét tam giác vuông OHE, ta có: $EH = \sqrt{OE^2 - OH^2}$ (định lí Pythagore)

$$EH = \sqrt{(2R)^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{14}}{2}$$

$$\Rightarrow ED = EH - HD = \frac{R\sqrt{14}}{2} - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R\sqrt{14} - R\sqrt{2}}{2} = \frac{R\sqrt{2}(\sqrt{7} - 1)}{2}$$

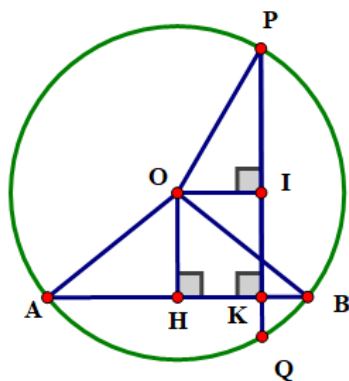
$$\text{Và } EC = EH + HC = \frac{R\sqrt{14} + R\sqrt{2}}{2} = \frac{R\sqrt{2}(\sqrt{7} + 1)}{2}.$$

Ví dụ 5. Cho đường tròn $(O; 10\text{ cm})$ dây $AB = 16\text{ cm}$.

a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB .

b) Lấy K thuộc dây AB sao cho $AK = 14\text{ cm}$. Vẽ dây PQ vuông góc với AB tại K . Chứng tỏ $AB = PQ$.

Lời giải



a) Kẻ $OH \perp AB$, ta có: $HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{16}{2} = 8(\text{cm})$

Xét tam giác vuông AOH , ta có: $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2}$ (định lí Pythagore) $= \sqrt{10^2 - 8^2} = 6(\text{cm})$.

b) Ta có: $KB = AB - AK = 16 - 14 = 2(\text{cm})$. Do đó $HK = HB - KB = 8 - 2 = 6(\text{cm})$

Kẻ $OI \perp PQ$, khi đó tứ giác $OHKI$ là hình chữ nhật có hai cạnh kề, $OH = KH = 6(\text{cm})$ nên là hình vuông.

Do đó: $OH = OI = 6(\text{cm})$. Tam giác OHB vuông tại H .

Theo định lí Pythagore, ta có: $OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow HB^2 = OB^2 - OH^2 \Rightarrow HB = \sqrt{OB^2 - OH^2}$.

Tương tự với tam giác OIP , ta có: $IP = \sqrt{OP^2 - OI^2}$

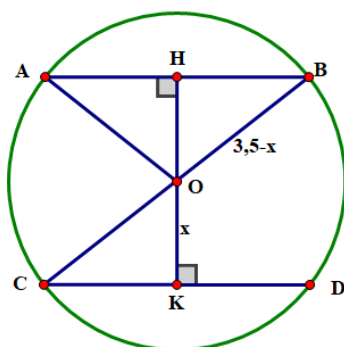
Mà $OB = OP (= R)$ và $OH = OI(\text{cmt}) \Rightarrow HB = IP$

Tam giác AOB cân tại O có OH là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến hay H là trung điểm của AB , tương tự I là trung điểm của PQ mà $HB = IP(\text{cmt}) \Rightarrow AB = PQ$ (đpcm).

Ví dụ 6. Cho đường tròn (O) hai dây AB và CD song song với nhau, biết $AB = 3\text{ cm}$, $CD = 4\text{ cm}$.

Khoảng cách giữa hai dây là $3,5\text{ cm}$. Tính bán kính đường tròn (O) .

Lời giải



Kẻ $OH \perp AB$ tam giác AOB cân tại O nên đường cao OH đồng thời là đường trung tuyến hay

$$HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2} = 1,5(\text{cm}).$$

Mặt khác vì $AB // CD$ nên $OH \perp CD$ tại K ta cũng có: $KC = KD = \frac{CD}{2} = \frac{4}{2} = 2(\text{cm})$

Khi đó các tam giác AHO và CKO vuông. Theo định lí Pythagore:

$$\left. \begin{array}{l} AH^2 + OH^2 = OA^2 (= R^2) \\ CK^2 + OK^2 = OC^2 (= R^2) \end{array} \right\} \Rightarrow AH^2 + OH^2 = CK^2 + OK^2 (*)$$

Đặt $OK = x \Rightarrow OH = 3,5 - x (**)$

Thay $(**)$ vào $(*)$ ta có

$$1,5^2 + (3,5 - x)^2 = 2^2 + x^2 \Leftrightarrow 2,25 + 3,5^2 - 7x + x^2 = 4 + x^2 \Leftrightarrow -7x = -10,5 \Leftrightarrow x = 1,5 (\text{cm}).$$

Xét tam giác vuông CKO ta có: $CO^2 = OK^2 + CK^2$ (định lí Pythagore)

$$R^2 = 1,5^2 + 2^2 = 6,25 \Rightarrow R = 2,5(\text{cm}).$$

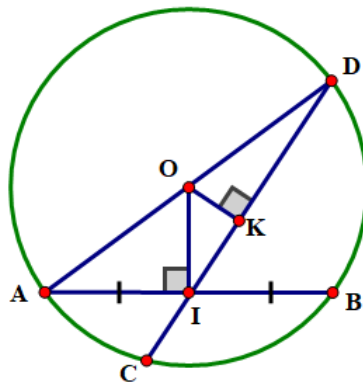
Ví dụ 7. Gọi I là trung điểm của dây cung AB không qua tâm của đường tròn $(O;R)$. Qua I vẽ dây cung CD .

a) Chứng tỏ $CD \geq AB$. Tìm độ dài nhỏ nhất, lớn nhất của các dây quay quanh I .

b) Cho $R = 5 \text{ cm}, OI = 4 \text{ cm}$. Tính độ dài dây cung ngắn nhất qua I .

c) Chứng tỏ rằng: $\widehat{OAI} > \widehat{ODI}$.

Lời giải



a) Kẻ $OK \perp CD$, ta có tam giác OKI vuông tại $K \Rightarrow OI \geq OK$ (cạnh huyền lớn hơn cạnh góc vuông).

Ta có I là trung điểm của AB (gt).

Tam giác AOB cân tại $O(OA = OB = R)$ nên đường trung tuyến OI đồng thời là đường cao hay $OI \perp AB$.

Xét tam giác vuông AIO , theo định lí Pythagore: $AI = \sqrt{OA^2 - OI^2}$.

Tương tự với tam giác vuông OKD : $KD = \sqrt{OD^2 - OK^2}$

Mà $OI > OK$ (cmt) $\Rightarrow KD > AI$, mà K là trung điểm của CD và I là trung điểm của $AB \Rightarrow CD \geq AB$.

Dấu "=" xảy ra khi $CD = AB$.

Do đó độ dài nhỏ nhất của CD bằng AB hay CD trùng với AB . Hiển nhiên đường kính qua I là dây lớn nhất.

b) Ta có $\triangle OIA$ vuông tại I : $AI = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3(\text{cm})$

Do đó dây cung $AB = 6(\text{cm})$.

$$\text{c) } \sin \widehat{OAI} = \frac{OI}{OA} = \frac{OI}{R}; \sin \widehat{ODI} = \frac{OK}{OD} = \frac{OK}{R}$$

Mà $OI > OK \Rightarrow \frac{OI}{R} > \frac{OK}{R}$ hay $\sin \widehat{OAI} > \sin \widehat{ODI} \Rightarrow \widehat{OAI} > \widehat{ODI}$.

Dạng 3. Toán thực tế

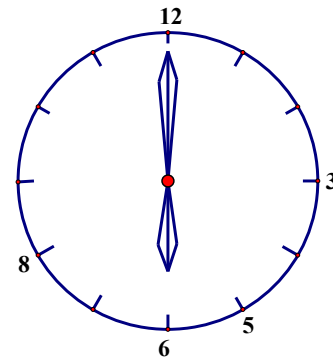
Ví dụ 1. Kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành một góc ở tâm có số đo là bao nhiêu độ vào những thời điểm sau:

- a) 3 giờ; b) 5 giờ; c) 6 giờ; d) 12 giờ; e) 20 giờ.

Lời giải (h.2)

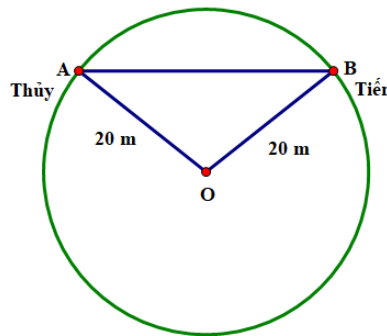
Cung cả đường tròn là 360° , được chia làm 12 cung bằng nhau, mỗi cung có số đo là 30° .

- Góc ở tâm lúc 3 giờ là $30^\circ \cdot 3 = 90^\circ$;
- Góc ở tâm lúc 5 giờ là $30^\circ \cdot 5 = 150^\circ$;
- Góc ở tâm lúc 6 giờ là $30^\circ \cdot 6 = 180^\circ$;
- Góc ở tâm lúc 20 giờ là $30^\circ \cdot 4 = 120^\circ$;



Hình 2

Ví dụ 2. Trong một trò chơi, hai bạn Thủy và Tiến cùng chạy trên một đường tròn tâm O có bán kính 20 m (hình vẽ). Có thời điểm nào dây AB nối vị trí của hai bạn đó có độ dài bằng 41 m hay không? Vì sao?



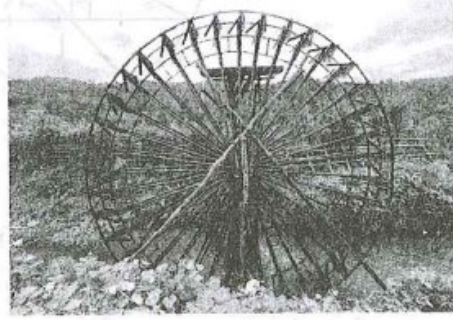
Lời giải

Không có thời điểm nào dây AB nối vị trí của hai bạn đó có độ dài bằng 41 m, vì:

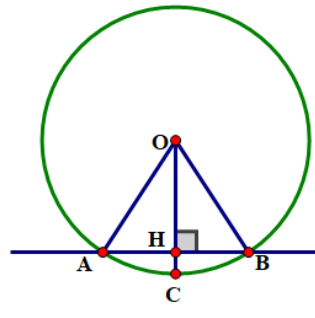
Độ dài của dây AB không vượt quá độ dài đường kính $2 \cdot 20 = 40$ (m) của đường tròn. Do đó $AB \leq 40$.

Ví dụ 3. Có thể xem guồng nước (còn gọi là cọn nước) là một công cụ hay cỗ máy có dạng hình tròn, quay được nhờ sức nước chảy (hình a). Guồng nước thường thấy ở các vùng miền núi. Nhiều guồng nước được làm bằng tre, dùng để đưa nước lên ruộng cao, giã gạo hoặc làm một số việc khác.

Giả sử ngăn nước ngăn cách giữa phần trên và phần dưới của một guồng nước được biểu thị bởi cung ứng với một cây dài 4 m và điểm ngấp sâu nhất là 0,5 m (hình b, điểm ngấp sâu nhất là điểm C , ta có $AB = 4$ m và $HC = 0,5$ m). Dựa vào đó, em hãy tính bán kính của guồng nước.



a)



b)

Lời giải

Gọi bán kính của đường tròn (O) là R , ta có: $OA = OB = OC = R$ và $OH = OC - HC = R - 0,5 = R - \frac{1}{2}$.

Tam giác AOB cân tại O nên đường cao OH đồng thời là đường trung tuyến hay H là trung điểm của AB, ta có: $HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2(\text{cm})$

Xét tam giác AHO vuông tại H. Theo định lí Pythagore, ta có:

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \text{ hay } R^2 = \left(R - \frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 \Leftrightarrow R^2 = R^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}R + \frac{1}{4} + 4$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{1}{4} + 4 \Leftrightarrow R = \frac{17}{4} = 4,25(\text{m}).$$

Vậy bán kính của guồng nước là 4,25(m).

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho đường tròn (O; R). Vẽ dây $AB = R\sqrt{2}$. Tính số đo của hai cung AB.

Hướng dẫn giải

Xét $\triangle AOB$ có

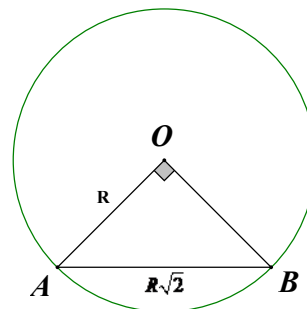
$$OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$$

$$AB^2 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2$$

Vậy $\triangle AOB$ vuông tại O.

Do đó số đo $\widehat{AB} = 90^\circ$; Số đo cung lớn

$$\widehat{AB} = 270^\circ.$$



Hình 166

Bài 2. Cho đường tròn (O; R). Vẽ dây AB sao cho số đo của cung nhỏ AB bằng $\frac{1}{2}$ số đo của cung lớn AB. Tính diện tích của tam giác AOB

Hướng dẫn giải

Xét $\triangle AOB$ có

$$OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$$

$$AB^2 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2$$

Vậy $\triangle AOB$ vuông tại O .

Do đó số đo $\widehat{AB} = 90^\circ$; Số đo cung lớn $\widehat{AB} = 270^\circ$.

Vì số đo của cung \widehat{AB} nhỏ bằng $\frac{1}{2}$ số đo của cung \widehat{AB} lớn, nên

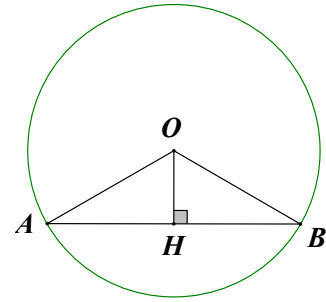
số đo $\widehat{AB}_{\text{nhỏ}} = 360^\circ : 3 = 120^\circ$. Do đó $\widehat{AOB} = 120^\circ$.

Mà $\triangle AOB$ cân tại O , suy ra $\widehat{A} = 30^\circ$.

Vẽ $OH \perp AB$, ta được $OH = OA \cdot \sin A = R \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}R$.

Diện tích tam giác AOB là

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot OH = \frac{1}{2}R\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}R = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$



Hình 167

Bài 3. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và $(O; \frac{R\sqrt{3}}{2})$. Trên đường tròn nhỏ lấy một điểm M . Tiếp tuyến tại M của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B . Tia OM cắt đường tròn lớn tại C .

a) Chứng minh rằng $\widehat{CA} = \widehat{CB}$.

b) Tính số đo của hai cung AB .

Hướng dẫn giải

a. Ta có $OM \perp AB$ (tính chất của tiếp tuyến),

$\triangle AOB$ cân tại O , suy ra $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$, do đó

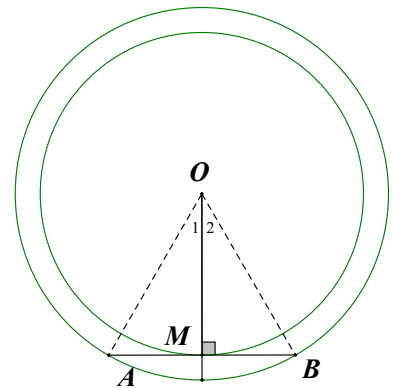
$\widehat{CA} = \widehat{CB}$ (vì hai góc ở tâm bằng nhau thì hai cung bị chắn bằng nhau).

b. Ta có $MA = MB$ (đường kính vuông góc với dây cung).

$$MA^2 = OA^2 - OM^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}$$

$\Rightarrow MA = \frac{R}{2}$, do đó $AB = R$. Tam giác AOB có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều. Vậy

$\widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow$ số đo $\widehat{AB}_{\text{nhỏ}} = 60^\circ$ và số đo $\widehat{AB}_{\text{lớn}} = 300^\circ$.



Hình 168

Bài 4. Cho đường tròn $(O; 5\text{cm})$ và dây $AB = 8\text{cm}$.

1. Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB .

2. Lấy điểm I trên dây AB sao cho $AI = 1\text{ cm}$. Qua I kẻ dây CD vuông góc với AB .

Chứng minh rằng $AB = CD$.

Lời giải

1. Kẻ $OE \perp AB$ tại E . Khi đó E là trung điểm của AB , do vậy

$$EA = EB = \frac{AB}{2} = 4$$

Ta có $OE = \sqrt{OB^2 - EB^2} = \sqrt{25 - 16} = 3\text{ cm}$.

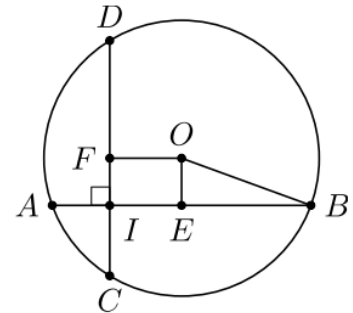
2. Kẻ $OF \perp CD$ tại $F \Rightarrow F$ là trung điểm của CD .

$$\text{Do vậy } FC = FD = \frac{CD}{2}.$$

Ta có $IE = AE - AI = 4 - 1 = 3\text{ cm}$, suy ra $OEIF$ là hình vuông. Do đó $OF = 3\text{ cm}$.

Xét tam giác OFD vuông tại F , ta có $FD = \sqrt{OD^2 - OF^2} = \sqrt{25 - 9} = 4\text{ cm}$.

Do vậy $CD = 2FD = 8\text{ cm}$, suy ra $AB = CD$.



Bài 5. Trong hình vẽ bên có một mảnh giấy hình chữ nhật che khuất một phần của đường tròn (O) . Cho biết $AB = 1\text{ cm}$, $BC = 4\text{ cm}$ và $MN = 2\text{ cm}$.

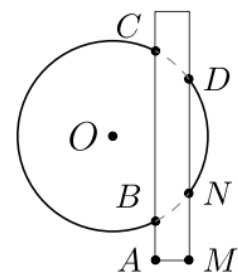
1. Tính độ dài đoạn DN .

2. Cho $AM = 1\text{ cm}$. Tính bán kính của đường tròn (O) .

Lời giải

1. Kẻ $OH \perp BC$ tại H , OH cắt DN tại I . Khi đó H, I lần lượt là trung điểm của BC, DN .

Ta có $HB = HC = \frac{BC}{2} = 2\text{ cm}$. Vì $AMIH$ là hình chữ nhật



nên $IM = AH = AB + BH = 1 + 2 = 3 \text{ cm}$

Do đó $IN = IM - MN = 3 - 2 = 1 \text{ cm}$

Vậy $DN = 2IN = 2 \text{ cm}$.

b) Xét tam giác OHB vuông tại H có $OB = \sqrt{OH^2 + 4}$

Xét tam giác OIN vuông tại I có $OI = OH + HI = OH + 1$, do đó

$$ON = \sqrt{OI^2 + IN^2} = \sqrt{(OH + 1)^2 + 1}$$

$$\text{Mà } ON = OB \Leftrightarrow \sqrt{OH^2 + 4} = \sqrt{(OH + 1)^2 + 1} \Leftrightarrow OH^2 + 4 = OH^2 + 2OH + 2 \Leftrightarrow OH = 1$$

$$\text{Khi đó } OB = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \text{ cm}$$

Bài 6. Cho đường tròn $(O; OA)$ và đường kính $AD = 12,5 \text{ cm}$. Lấy điểm B thuộc đường tròn $(O; OA)$ sao cho $AB = 10 \text{ cm}$. Kẻ dây BC vuông góc với đường kính AD . Tính các khoảng cách từ tâm O đến các dây AB và BC .

Lời giải

Vì $OA = OD = OB$ nên tam giác ABD vuông tại B , do đó

$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{12,5^2 - 10^2} = 7,5 \text{ cm}.$$

$$\text{Kẻ } OH \perp AB \text{ tại } H \Rightarrow OH = \frac{BD}{2} = 3,75 \text{ cm}.$$

Gọi K là giao điểm của AD và BC , khi đó $OK \perp BC$.

Xét tam giác ABD vuông tại B ta có

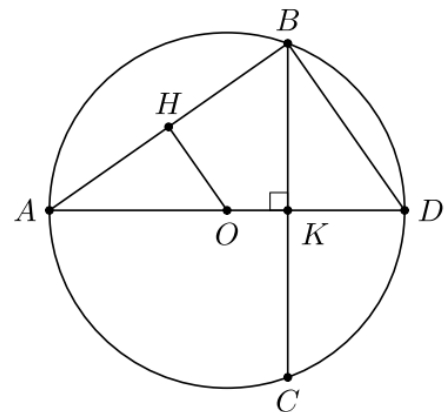
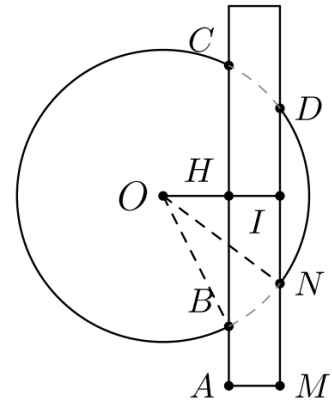
$$AB^2 = AK \cdot AD \Rightarrow AK = \frac{10^2}{12,5} = 8 \text{ cm}$$

$$\text{Do đó } OK = AK - AO = 8 - \frac{12,5}{2} = 1,75 \text{ cm}.$$

Bài 7. Cho đường tròn (O) và đường kính AB . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của OA, OB . Qua M, N lần lượt vẽ các dây CD, EF song song với nhau (C, E cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

1. Chứng minh tứ giác $CDEF$ là hình chữ nhật

2. Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc 30° . Tính diện tích hình chữ nhật $CDEF$



Lời giải

1. Kẻ $OP \perp CD$ tại \bar{P}

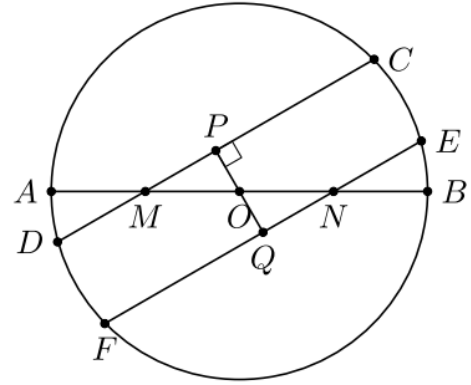
$\Rightarrow P$ là trung điểm CD và $OP \perp EF$ (do $CD \parallel EF$).

Giả sử OP cắt EF tại $Q \Rightarrow Q$ là trung điểm của EF .

Xét hai tam giác vuông OPM và OQN có

$$OM = \frac{OA}{2} = \frac{OB}{2} = ON \text{ và } \widehat{MOP} = \widehat{NOQ} \text{ nên}$$

$\triangle OPM = \triangle OQN$, do đó $OP = OQ \Rightarrow CD = EF$.



Xét tứ giác $CDEF$ có $CD = EF$ và $CD \parallel EF$ nên $CDEF$ là hình bình hành.

Lại có PQ là đường trung bình của hình bình hành $CDEF$ và $PQ \perp CE \Rightarrow CD \perp CE$

Do đó $CDEF$ là hình chữ nhật.

2. Xét tam giác OPM vuông tại P có $\widehat{OMP} = 30^\circ$, suy ra

$$OP = \frac{OM}{2} = \frac{OA}{4} = \frac{R}{4} \Rightarrow CE = PQ = 2OP = \frac{R}{2}.$$

Xét tam giác OPC vuông tại P , ta có

$$CP = \sqrt{OC^2 - OP^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{16}} = \frac{R\sqrt{15}}{4} \Rightarrow CD = 2CP = \frac{R\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } S_{CDEF} = CD \cdot CE = \frac{R}{2} \cdot \frac{R\sqrt{15}}{2} = \frac{R^2\sqrt{15}}{4}.$$

Bài 8. Cho đường tròn (O) và đường kính $AB = 13\text{cm}$. Dây $CD = 12\text{cm}$ vuông góc với AB tại H .

1. Tính độ dài các đoạn HA, HB

2. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của H lên AC, BC . Tính diện tích tứ giác $CMHN$.

Lời giải

1. Vì $CD \perp AB$ tại H nên $CH = \frac{CD}{2} = 6\text{cm}$.

Giả sử $HA < HB$. Xét tam giác OCH vuông tại H có

$$OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = \sqrt{6.5^2 - 6^2} = 2,5 \text{ cm}$$

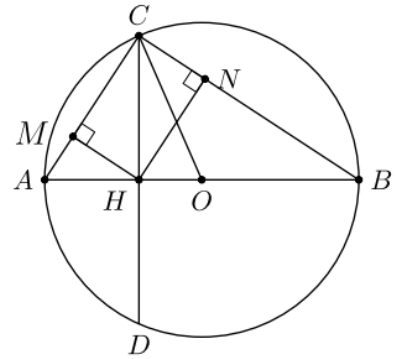
Do đó $HA = 6,5 - 2,5 = 4 \text{ cm}$ và $HB = 13 - 4 = 9 \text{ cm}$

2. Vì $\triangle CHN \sim \triangle ABC$ nên

$$\frac{S_{CHN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{CH}{AB}\right)^2 = \frac{6^2}{13^2} = \frac{36}{169}$$

Mà $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39 \text{ cm}^2$ nên

$$S_{CHN} = 39 \cdot \frac{36}{169} = \frac{108}{13} \text{ cm}^2 \Rightarrow S_{CMHN} = \frac{216}{13} \text{ cm}^2$$



Bài 9. Cho đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và điểm M cách O một đoạn là 3 cm

1. Tính độ dài dây cung ngắn nhất của (O) đi qua M .

2. Tính độ dài dây cung dài nhất của (O) đi qua M .

Lời giải

Giả sử EF là một dây cung tùy ý qua M , CD là dây cung đi qua M và vuông góc với OM , AB là đường kính chứa M của đường tròn (O) .

Kẻ $OH \perp EF$ tại $H \Rightarrow H$ là trung điểm EF .

1. Ta có $HE = \sqrt{OE^2 - OH^2}$. Vì $EF = 2HE, OE = 5 \text{ cm}$

nên EF nhỏ nhất khi HE lớn nhất.

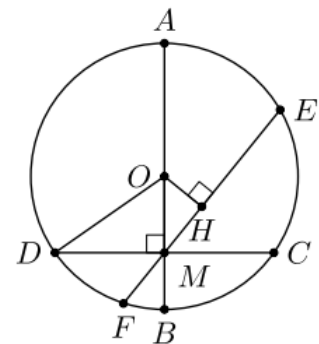
Lại có tam giác OHM vuông tại H nên $OH \leq OM$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $H \equiv M \Leftrightarrow EF \equiv CD$

Ta có $MC = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \Rightarrow CD = 8 \text{ cm}$.

Vậy EF nhỏ nhất bằng 8 cm khi $EF \perp OM$.

2. Vì AB là đường kính đi qua $M \Rightarrow EF \leq AB$. Do vậy EF lớn nhất bằng 10 cm khi EF là đường kính đi qua M .



Bài 10. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và M là điểm bất kỳ trên cung tròn

\widehat{BC} không chứa A . Gọi D, E lần lượt là điểm đối xứng của M qua AB, AC . Tìm vị trí của M để độ dài DE nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi AA' là đường kính của đường tròn (O) .

Vì D, E lần lượt là điểm đối xứng của M qua AB, AC

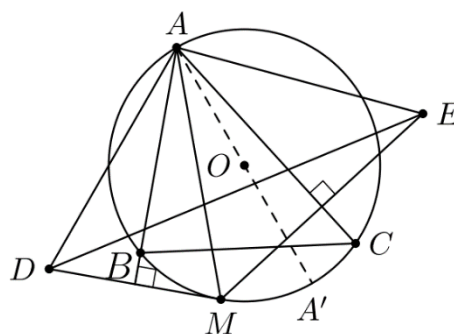
nên $AD = AM = AE$, do đó tam giác AED cân tại A .

Lại có $\widehat{DAE} = \widehat{DAM} + \widehat{MAE} = 2(\widehat{BAM} + \widehat{MAC}) = 2\widehat{BAC}$

(không đổi).

Vì vậy DE lớn nhất khi AD lớn nhất, tức là AM lớn nhất

$\Leftrightarrow M \equiv A'$



BÀI 15. ĐỘ DÀI CỦA CUNG TRÒN. DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN VÀ HÌNH VÀNH KHUYÊN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. ĐỘ DÀI CỦA CUNG TRÒN

Công thức tính độ dài của cung tròn

Trong đời sống, ta thường lấy $\pi \approx 3,14$.

Do đó, ta có công thức tính độ dài C của đường tròn $(O; R)$, đường kính $d = 2R$ là: $C = \pi d = 2\pi R$. (1)

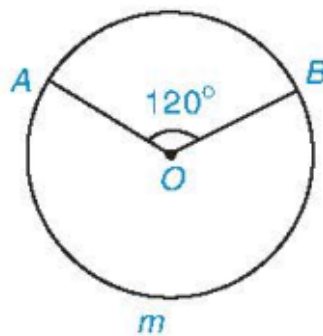
Ta có công thức tính độ dài l của cung n° trên đường tròn $(O; R)$: $l = \frac{n}{180} \pi R$ (2)

Nhận xét. Từ hai công thức (1) và (2), ta được $l = \frac{n}{360} \pi d = \frac{n}{360} C$ hay $\frac{l}{C} = \frac{n}{360}$, nghĩa là:

Tỉ số giữa độ dài cung n° và độ dài đường tròn (cùng bán kính) đúng bằng $\frac{n}{360}$.

Ví dụ 1. Cho A và B là hai điểm trên đường tròn $(O; 3\text{ cm})$ sao cho $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Tính số đo và độ dài các cung có hai mút A, B .

Lời giải



Hình 5.13

Ta có hai cung:

Cung nhỏ AB bị chắn bởi góc ở tâm AOB . Do đó $sđ \widehat{AB} = \widehat{AOB} = 120^\circ$;

Độ dài l_1 của cung AB là: $l_1 = \frac{120}{180} \pi \cdot 3 = 2\pi$ (cm).

Cung lớn AmB có số đo là: $sđ \widehat{AmB} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$.

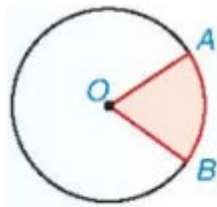
Độ dài l_2 của cung AmB là: $l_2 = \frac{240}{180} \pi \cdot 3 = 4\pi$ (cm).

2. HÌNH QUẠT TRÒN VÀ HÌNH VÀNH KHUYÊN

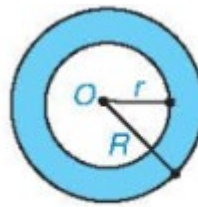
Hình tròn, hình quạt tròn và hình vành khuyên

1) Hình quạt tròn là phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai đầu mút của cung đó (H.5.15).

2) Hình vành khuyên (còn gọi là hình vành khăn) (H.5.16) là phần nằm giữa hai đường tròn có cùng tâm và bán kính khác nhau (còn gọi là hai đường tròn đồng tâm).



Hình 5.15



Hình 5.16

Diện tích hình quạt tròn và hình vành khuyên

Diện tích S_q của hình quạt tròn bán kính R ứng với cung n° : $S_q = \frac{n}{360} \pi R^2 = \frac{l \cdot R}{2}$. (3)

Diện tích S_v của hình vành khuyên tạo bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính R và r .

$$S_v = \pi(R^2 - r^2) ; (R > r). (4)$$

Nhận xét:

Công thức (3) có thể viết là $S_q = \frac{n}{360} S$ hay $\frac{S_q}{S} = \frac{n}{360} = \frac{l}{C}$, nghĩa là:

Tỉ số giữa diện tích hình quạt tròn ứng với cung n° và diện tích hình tròn (cùng bán kính) đúng bằng $\frac{n}{360}$

và bằng tỉ số giữa độ dài cung n° và độ dài đường tròn.

Ví dụ 2. Tính diện tích của hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 3 m và 5 m.

Lời giải

Gọi S_v là diện tích cần tính. Ta có $S_v = \pi(5^2 - 3^2) = 16\pi (\text{m}^2)$.

Ví dụ 3. Tính diện tích của hình quạt tròn bán kính 5 cm và có độ dài cung tương ứng với nó bằng 4π cm.

Lời giải

Theo đề bài, hình quạt tròn có độ dài cung tương ứng với nó là $l = 4\pi$ cm, bán kính là $R = 5$ cm. Do đó theo

(3), diện tích S của nó là: $S = \frac{l \cdot R}{2} = \frac{4\pi \cdot 5}{2} = 10\pi (\text{cm}^2)$.

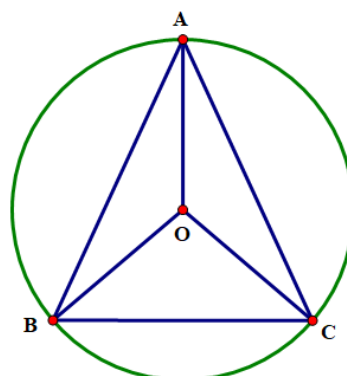
B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

5.9. Cho đường tròn $(O; 4 \text{ cm})$ và ba điểm A, B, C trên đường tròn đó sao cho tam giác ABC cân tại đỉnh A và số đo của cung nhỏ BC bằng 70° .

a) Giải thích tại sao hai cung nhỏ AB và AC bằng nhau.

b) Tính độ dài của các cung BC, AB và AC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải



a) Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OAC$ có:

Cạnh OA chung; $OA = OC = R$; $AB = AC$ (do $\triangle ABC$ cân tại A).

Do đó $\triangle OAB = \triangle OAC$ (c.c.c). Suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$ (hai góc tương ứng).

Khi đó $sđ \widehat{AB} = sđ \widehat{AC}$ nên $\widehat{AB} = \widehat{AC}$.

Vậy hai cung nhỏ AB và AC bằng nhau.

b) Độ dài cung BC là: $\frac{70}{180} \cdot \pi \cdot 4 = \frac{14}{9} \pi \approx 4,9$ (cm).

Ta có: $\widehat{AOB} + \widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 360^\circ \Leftrightarrow 2 \cdot \widehat{AOB} + 70^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow 2 \cdot \widehat{AOB} = 290^\circ \Leftrightarrow \widehat{AOB} = 145^\circ$

Độ dài cung AB và cung AC là: $\frac{145}{180} \cdot \pi \cdot 4 = \frac{29}{9} \pi \approx 10,1$ (cm).

Vậy độ dài cung BC khoảng 4,9 cm và độ dài cung AB và cung AC khoảng 10,1 cm.

5.10. Tính diện tích của hình quạt tròn bán kính 4cm, ứng với cung 36° .

Lời giải

Diện tích của hình quạt tròn bán kính 4cm, ứng với cung 36° là: $\frac{36}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = 1,6\pi$ (cm²).

Vậy diện tích của hình quạt tròn bán kính 4cm, ứng với cung 36° là $1,6\pi$ cm².

5.11. Tính diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 6cm và 4cm.

Lời giải

Diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 5cm và 4cm là:

$$\pi(5^2 - 4^2) = 9\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 5cm và 4cm là 9π cm².

5.12. Có hai chiếc bánh pizza hình tròn (H.5.18). Chiếc bánh thứ nhất có đường kính 16cm được cắt thành 6 miếng đều nhau có dạng hình quạt tròn. Chiếc bánh thứ hai có đường kính 18cm được cắt thành 8 miếng đều nhau có dạng hình quạt tròn. Hãy so sánh diện tích bề mặt của hai miếng bánh cắt ra từ chiếc bánh thứ nhất và thứ hai.



Hình 5.18

Lời giải

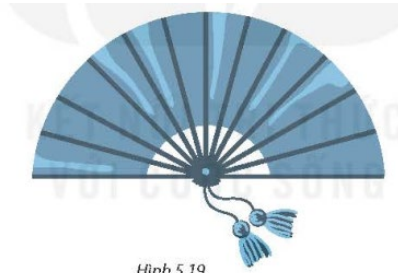
Diện tích bề mặt của mỗi miếng bánh cắt ra từ chiếc bánh thứ nhất là $\frac{\pi \cdot 16^2}{6} = \frac{128}{3} \pi$ (cm²)

Diện tích bề mặt của mỗi miếng bánh cắt ra từ chiếc bánh thứ hai là: $\frac{\pi \cdot 18^2}{8} = \frac{81}{2} \pi$ (cm²)

Vì $\frac{128}{3} \pi > \frac{81}{2} \pi$ nên miếng bánh cắt ra từ chiếc bánh thứ nhất lớn hơn miếng bánh thứ hai.

Vậy diện tích bề mặt của hai miếng bánh cắt ra từ chiếc bánh thứ nhất lớn hơn miếng bánh thứ hai.

5.13. Một chiếc quạt giấy khi xoè ra có dạng nửa hình tròn bán kính 2,2dm như Hình 5.19. Tính diện tích phần giấy của chiếc quạt, biết rằng khi gấp lại, phần giấy có chiều dài khoảng 1,6dm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của dm^2).



Hình 5.19

Lời giải

Diện tích phần giấy của chiếc quạt là: $\pi(2,2^2 - 1,6^2) = 2,28\pi(\text{dm}^2)$.

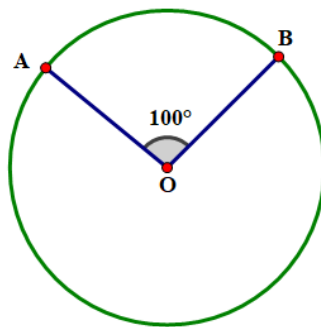
Vậy diện tích phần giấy của chiếc quạt là $2,28\pi(\text{dm}^2)$.

C. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

Dạng 1. Tính độ dài các cung tròn. Diện tích các hình

Ví dụ 1. Cho A và B là hai điểm trên đường tròn (O; 8) sao cho $\widehat{AOB} = 100^\circ$. Tính số đo và độ dài các cung có hai mút A, B.

Lời giải



A, B là hai điểm trên (O) nên sẽ có hai cung.

Cung nhỏ AB bị chắn bởi góc ở tâm AOB : $sđ\widehat{AB} = \widehat{AOB} = 100^\circ$.

Do đó độ dài của cung nhỏ AB là: $l = \frac{100}{180} \cdot \pi \cdot 8 = \frac{40}{9}\pi(\text{cm})$

Cung lớn AnB có số đo: $sđ\widehat{AnB} = 360^\circ - 100^\circ = 260^\circ$

Do đó độ dài của cung lớn là: $l = \frac{260}{180} \cdot \pi \cdot 8 = \frac{104}{9}\pi(\text{cm})$.

Ví dụ 2. Tính độ dài cung 90° của đường tròn (O; 6 cm).

Lời giải

Ta có: $n = 90^\circ$ và $R = 6\text{cm}$. Do đó độ dài cung: $l = \frac{90}{180} \cdot \pi \cdot 6 = 3\pi(\text{cm})$.

Ví dụ 3. Tính diện tích hình quạt tròn có bán kính 4 cm, ứng với cung 36° .

Lời giải

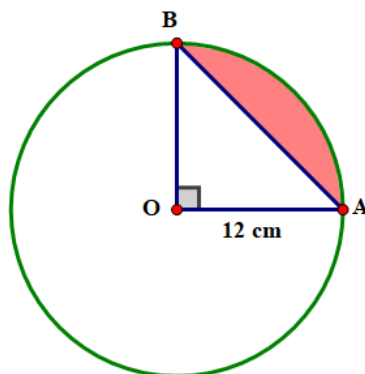
Ta có: $n = 90^\circ$ và $R = 6\text{ cm}$. Do đó độ dài cung: $S_q = \frac{36}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = 1,6\pi (\text{cm}^2)$.

Ví dụ 4. (Xem hình vẽ)

a) Tính diện tích hình quạt tròn tâm O cung nhỏ AB.

b) Tính diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung nhỏ AB (gọi là hình viên phân tâm O cung nhỏ AB).

Làm tròn kết quả đến hàng phần mười centimet vuông).



Lời giải

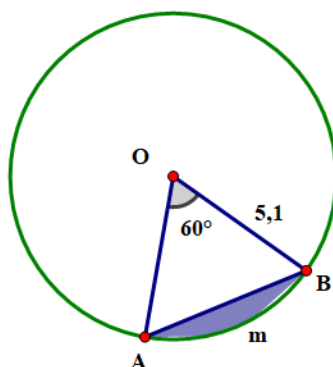
a) Ta có: $\widehat{AOB} = 90^\circ$ nên số đo $sđ \widehat{AB} = \widehat{AOB} = 90^\circ$.

Do đó: $S_q = \frac{90}{360} \cdot \pi \cdot 12^2 = 36\pi (\text{cm}^2)$.

b) Ta có: $S_{vp} = S_q - S_{AOB}$ (S_{vp} là diện tích hình viên phân; S_{AOB} là diện tích tam giác AOB).

$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 = 72 (\text{cm}^2)$. Vậy $S_{vp} = 36\pi - 72 \approx 41,0 (\text{cm}^2)$.

Ví dụ 5. Phần hình tròn được giới hạn bởi một cung và dây căng cung đó gọi là hình viên phân. Tính diện tích hình viên phân AmB, biết góc ở tâm $\widehat{AOB} = 60^\circ$ và bán kính đường tròn là 5,1 cm (hình vẽ) (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của cm^2).



Lời giải

Gọi S_{vp} là diện tích hình viên phân, S_q là diện tích hình quạt và S_{AOB} là diện tích tam giác AOB.

Ta có: $S_q = \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot (5,1)^2 \approx 13,62 (\text{cm}^2)$.

Xét $\triangle AOB$ cân tại O ($OA = OB = R$) có $\widehat{AOB} = 60^\circ$ nên tam giác AOB đều.

$$\text{Do đó } S_{AOB} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(5,1)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx 11,26 (\text{cm}^2)$$

$$\text{Do đó } S_{vp} = S_q - S_{AOB} = 13,62 - 11,26 \approx 2,36 (\text{cm}^2).$$

Ví dụ 6. Tính diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 6cm và 4cm.

Lời giải

Gọi S_v là diện tích hình vành khuyên cần tính.

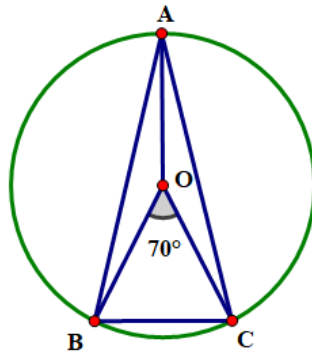
$$\text{Ta có: } S_v = \pi \cdot (6^2 - 4^2) = 20\pi (\text{cm}^2).$$

Ví dụ 7. Cho đường tròn $(O; 4\text{cm})$ và ba điểm A, B, C trên đường tròn đó sao cho tam giác ABC cân tại đỉnh A và số đo cung nhỏ BC bằng 70° .

a) Giải thích tại sao hai cung nhỏ AB và AC bằng nhau.

b) Tính độ dài của các cung BC, AB và AC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải



a) Nối O với A . Xét tam giác AOB và tam giác AOC có:

OA : cạnh chung, $AB = AC$ (gt), $OB = OC (= 4\text{cm})$

$$\text{Do đó } \triangle AOB = \triangle AOC \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{AOC} \Rightarrow sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AC}.$$

b) Gọi độ dài của cung BC là l_1 , ta có: $l_1 = \frac{70}{180} \cdot \pi \cdot 4 = \frac{14}{9} \pi \approx 4,9(\text{cm})$.

$$\text{Ta có: } sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AC} = \frac{360^\circ - 70^\circ}{2} = 145^\circ.$$

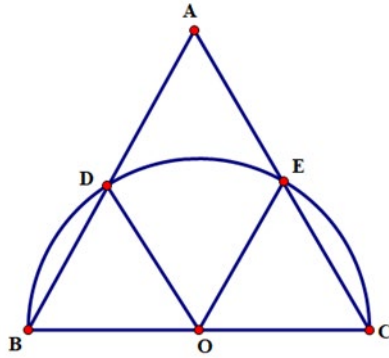
Gọi l_2, l_3 lần lượt là độ dài của cung AB và AC , ta có: $l_2 = l_3 = \frac{145}{180} \cdot \pi \cdot 4 = \frac{29}{9} \pi \approx 10,1(\text{cm})$.

Ví dụ 8. Cho tam giác đều ABC có $AB = 2\sqrt{3}\text{cm}$. Nửa đường tròn đường kính BC cắt hai cạnh AB và AC lần lượt tại D và E (khác B và C) (hình vẽ).

a) Chứng tỏ rằng ba cung nhỏ BD, DE và EC bằng nhau. Tính số đo mỗi cung ấy.

b) Tính diện tích của hình viên phân giới hạn bởi dây BD và cung nhỏ BD .

Lời giải



a) Tam giác ABC đều (gt) $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$.

Gọi O là tâm của nửa đường tròn đường kính BC, ta có tam giác BOD cân tại O có $\widehat{B} = 60^\circ$ (cmt) $\Rightarrow \triangle BOD$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{BOD} = 60^\circ$.

Tương tự với tam giác COE $\Rightarrow \widehat{COE} = 60^\circ$.

Do đó $\widehat{DOE} = 180^\circ - (\widehat{BOD} + \widehat{COE}) = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$.

Ta có $\widehat{BOD} = \widehat{DOE} = \widehat{COE} = 60^\circ \Rightarrow sđ\widehat{BD} = sđ\widehat{DE} = sđ\widehat{EC} = 60^\circ$.

b) Ta có $S_{vp} = S_q - S_{BOD}$

Tam giác ABC đều $\Rightarrow BC = AC = AB = 2\sqrt{3}$ (cm)

$$\Rightarrow OB = OC = \frac{BC}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}(\text{cm}) \quad S_q = \frac{60}{360} \cdot \pi(\sqrt{3})^2 = \frac{1}{2}\pi = 1,57(\text{cm}^2)$$

$$S_{BOD} = \frac{(\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(\text{cm}^2) \approx 1,30(\text{cm}^2)$$

Vậy $S_{vp} = 1,57 - 1,30 \approx 0,27(\text{cm}^2)$.

Dạng 2. Toán thực tế

Ví dụ 1. Ba bộ phận truyền chuyển động của một chiếc xe đạp gồm một giò đĩa (bánh răng gắn với bàn đạp), một chiếc líp (cũng có dạng bánh răng gắn với bánh xe và bộ xích (hình vẽ). Biết rằng giò đĩa có bán kính 15cm, líp có bán kính 4cm và bánh xe có đường kính 65cm. Hỏi khi người đi xe đạp một vòng thì xe chạy được quãng đường dài bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?

Lời giải



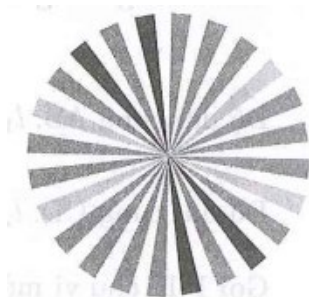
Chu vi bánh xe 65π , chu vi líp 8π , chu vi giò đĩa 30π .

Khi người đi xe đạp đạp một vòng giò đĩa thì líp quay được: $30\pi : 8\pi = \frac{15}{4}$ (vòng)

Do đó xe chạy được quãng đường là: $65\pi \cdot \frac{15}{4} = \frac{975}{4}\pi \approx 765,76(\text{cm}) \approx 7,7(\text{m})$

Khi người đi xe đạp một vòng thì xe chạy được quãng đường dài khoảng 7,7 (m).

Ví dụ 2. Một hoạ tiết trang trí có dạng hình tròn bán kính 4dm được chia thành nhiều hình quạt tròn (hình vẽ), mỗi hình quạt có góc ở tâm là $7,5^\circ$. diện tích của mỗi hình quạt đó là bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Lời giải

Mỗi hình quạt được chia ra chẵn cung $7,5^\circ$ và có bán kính đường tròn là 4dm.

Do đó diện tích của mỗi hình quạt là: $S_q = \frac{7,5}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = \frac{1}{3}\pi \approx 1,05(\text{dm}^2)$.

Ví dụ 3. Một chiếc quạt giấy kho xoè ra có dạng nửa hình tròn bán kính 2,2dm như hình vẽ. Tính diện tích phần giấy của chiếc quạt, biết rằng khi gấp lại, phần giấy có chiều dài khoảng 1,6dm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của dm^2)?



Lời giải

Phần giấy của chiếc quạt có dạng hình vành khuyên.

Gọi diện tích của phần giấy là S_v , ta có: $S_v = \frac{1}{2}\pi(R^2 - r^2)$

trong đó $r = R - 1,6 = 2,2 - 1,6 = 0,6(\text{dm}) = \frac{1}{2}\pi(2,2^2 - 0,6^2) \approx 7,03(\text{dm}^2)$.

Ví dụ 4. Trong hình vẽ chiếc quạt có dạng một hình quạt tròn tâm O cung AB, bán kính $OA = OB = 20\text{cm}$. Giấy được dán trong phần giới hạn bởi cung AB, cung CD, đoạn thẳng AC và BD với $OC = OD = 10\text{cm}$. Biết khi mở rộng tối đa, hai nan quạt ngoài cùng tạo thành một góc $AOB = 140^\circ$. Tính chu vi và diện tích mảnh giấy để dán một mặt quạt (diện tích mép dán không đáng kể).

Lời giải



Độ dài cung AB: $l_1 = \frac{140}{180} \cdot \pi \cdot 20 = \frac{140}{9} \pi$

Độ dài cung CD: $l_2 = \frac{140}{180} \cdot \pi \cdot 10 = \frac{70}{9} \pi$

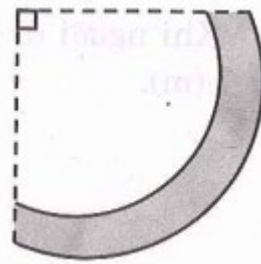
Gọi P là chu vi mảnh giấy, ta có:

$$P = l_1 + BD + l_2 + AC = \frac{140}{9} \pi + 10 + \frac{70}{9} \pi + 10 = 20 + \left(\frac{140}{9} + \frac{70}{9} \right) \pi = 20 + \frac{70}{3} \pi \approx 93(\text{cm})$$

Gọi S_v là diện tích mảnh giấy, ta có: $S_v = \frac{140}{360} \pi (20^2 - 10^2) = \frac{350}{3} \pi \approx 366,5(\text{cm}^2)$.

Ví dụ 5. Hình vẽ bên mô tả mặt cắt của một khúc gỗ có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 4dm và 3dm. Diện tích mặt cắt đó là bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải



Mặt cắt khúc gỗ có dạng hình vành khuyên, gọi S_v là diện tích mặt cắt.

Ta có: $S_v = \frac{1}{4} \pi (4^2 - 3^2) = \frac{7}{4} \pi \approx 5,5(\text{dm}^2)$.

Ví dụ 6. Một máy kéo nông nghiệp có đường kính bánh xe sau là 124m và đường kính bánh xe trước là 80cm. Hỏi khi bánh xe sau lăn được 20 vòng thì bánh xe trước lăn được bao nhiêu vòng?

Lời giải



Chu vi bánh xe sau là 124π , khi bánh xe sau lăn được 20 vòng, ta có: $124\pi \cdot 20 = 2480\pi(\text{cm})$

Chu vi bánh xe trước là 80π

Do đó khi bánh xe sau lăn được 20 vòng thì bánh xe trước lăn được: $2480\pi : 80\pi = 31$ (vòng).

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1.

- Tính độ dài cung 60° của một đường tròn có bán kính 2 dm.
- Tính chu vi vành xe đạp có đường kính 650mm.

Lời giải

- Áp dụng công thức $l = \frac{\pi R n}{180}$ trong đó $n = 60^\circ$; $R = 2$ ta được

$$l \approx \frac{3,14 \cdot 2 \cdot 60}{180} = 2,09 \text{ (dm)}$$

- Chu vi vành xe đạp là
 $C = \pi \cdot d \approx 3,14 \cdot 650 = 2041 \text{ (mm)}$

Bài 2. Máy kéo nông nghiệp có hai bánh sau to hơn hai bánh trước. Khi bơm căng, bánh sau xe có đường kính là 1,672m và bánh xe trước có đường kính là 88cm. Hỏi sau khi bánh xe sau lăn được 10 vòng thì bánh xe trước lăn được mấy vòng?

Lời giải

Chu vi bánh xe trước là: $\pi \cdot 0,88 \text{ (m)}$

Chu vi bánh xe sau là: $\pi \cdot 1,672 \text{ (m)}$

Số vòng bánh xe trước lăn được khi bánh sau quay 10 vòng là: $\frac{10 \cdot \pi \cdot 1,672}{\pi \cdot 0,88} = 19$ (vòng)

Bài 3.

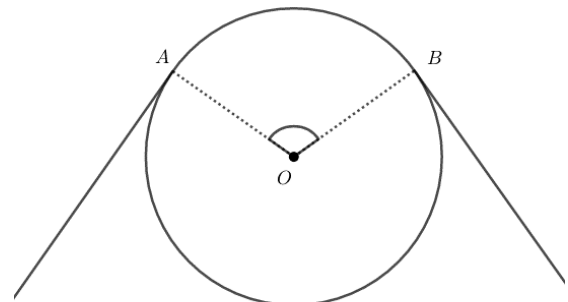
Bánh xe của một ròng rọc có chu vi là 540mm. Dây cua-roa bao bánh xe theo cung AB có độ dài 200mm. Tính góc AOB (h.82).

Lời giải

Từ công thức $l = \frac{\pi R n}{180}$

$$\text{Suy ra: } n = \frac{180 \cdot l}{\pi R} = \frac{360 \cdot l}{2\pi R} = \frac{360 \cdot 200}{540} \approx 133^\circ.$$

Vậy: $\widehat{AOB} = \text{sđ } \widehat{AB} \approx 133^\circ.$



Hình 82

Bài 4. Vĩ độ của Hà Nội là $20^\circ 01'$. Mỗi vòng kinh tuyến của Trái Đất dài khoảng 40000km. Tính độ dài cung kinh tuyến từ Hà Nội đến xích đạo.

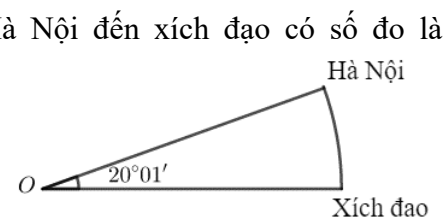
Lời giải

Vĩ độ của Hà Nội là $20^\circ 01'$ có nghĩa là cung kinh tuyến từ Hà Nội đến xích đạo có số đo là:

$$20^\circ 01' = \left(20 \frac{1}{60}\right)^\circ$$

Áp dụng công thức:

$$l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{2\pi R n}{360}, \text{ ta tính được: } l \approx 2224 \text{ km.}$$



Hình 83

Bài 5. Cho đường tròn (O) bán kính OA . Từ trung điểm M của OA vẽ dây $BC \perp OA$. Biết độ dài đường tròn (O) là $4\pi \text{ (cm)}$. Tính:

- a) Bán kính của đường tròn (O);
 b) Độ dài hai cung BC của đường tròn.

Lời giải

a) $R = \frac{4\pi}{2\pi} 2 (cm)$

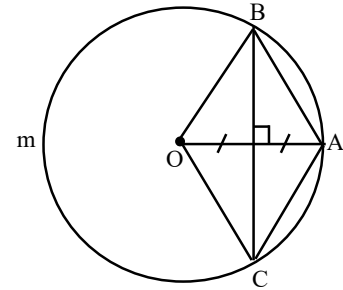
b) ΔBOA có BM vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên là tam giác cân, suy ra $OB = BA$

Mặt khác $OB = OA$ nên ΔBOA là tam giác đều, do đó:

$$\widehat{BOA} = 60^\circ, \widehat{BOC} = 120^\circ; sđ\widehat{BAC} = 120^\circ$$

Độ dài của cung BAC là $l_1 = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 120}{180} = \frac{4\pi}{3} (cm)$

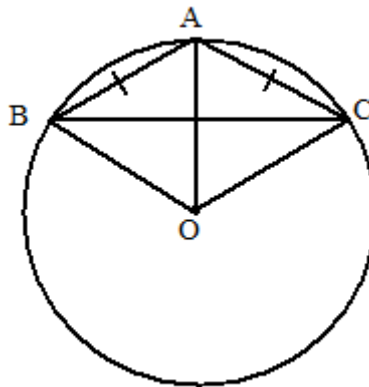
Độ dài của cung BmC là $l_2 = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 240}{180} = \frac{8\pi}{3} (cm)$



Hình 214

Bài 6. Tam giác ABC có $AB = AC = 3cm; \hat{A} = 120^\circ$. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải



Hình 215

Ta có $AB = AC = \widehat{AB} = \widehat{AC}$ do đó $OA \perp BC$. ΔABC là tam giác cân có OA là đường cao nên cũng là đường phân giác do đó $\widehat{BAO} = 60^\circ$ và ΔBAO là tam giác đều.

$\Rightarrow R = OA = AB = 3cm$

Độ dài đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $C = 2\pi R \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 3 = 18,84 (cm)$

Bài 7. Một tam giác đều và một hình vuông cùng có chu vi là $72cm$. Hỏi độ dài đường tròn ngoại tiếp hình nào lớn hơn? Lớn hơn bao nhiêu?

Lời giải

Độ dài mỗi cạnh của tam giác đều là: $72 : 3 = 24 (cm)$

Độ dài mỗi cạnh hình vuông là: $72 : 4 = 18 (cm)$

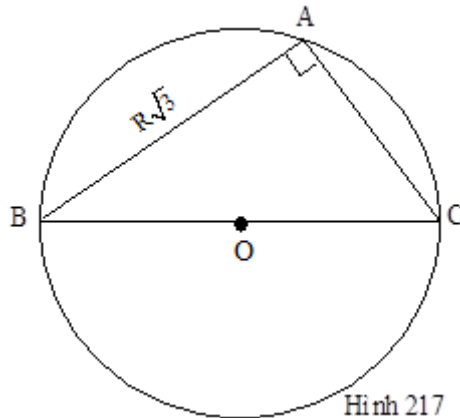
Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều là: $R_1 = \frac{24}{2 \sin 60^\circ} = \frac{24}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 8\sqrt{3} (cm)$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông là: $R_2 = \frac{18}{2 \sin 45^\circ} = \frac{18}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 9\sqrt{2} \text{ (cm)}$

Vì $8\sqrt{3} > 9\sqrt{2}$ nên $R_1 > R_2$, do đó độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác đều lớn hơn độ dài đường tròn ngoại tiếp hình vuông. Hiệu các độ dài đó là: $C_1 - C_2 = 2\pi(R_1 - R_2) = 2\pi(8\sqrt{3} - 9\sqrt{2}) \text{ (cm)}$

Bài 8. Cho đường tròn đường kính $BC = 2R$. Trên đường tròn lấy một điểm A sao cho $AB = R\sqrt{3}$. Gọi P_1, P_2, P_3 là chu vi các đường tròn có đường kính lần lượt là CA, AB và BC . Chứng minh: $\frac{P_1^2}{1} = \frac{P_2^2}{3} = \frac{P_3^2}{4}$.

Lời giải



Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = (2R)^2 - (R\sqrt{3})^2 = R^2$$

Do đó $AC = R$

Chu vi các hình tròn có đường kính AC, AB và BC lần lượt là:

$$P_1 = \pi \cdot R; P_2 = \pi R\sqrt{3}; P_3 = \pi \cdot 2R$$

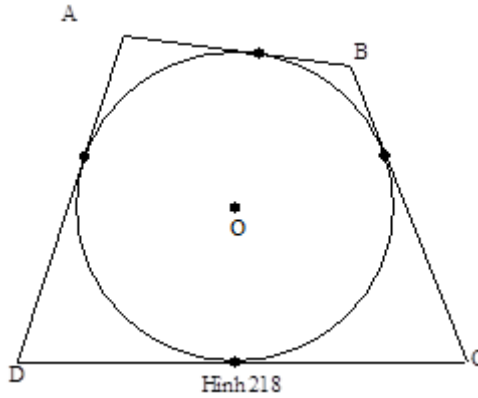
$$\text{Ta có: } \frac{P_1^2}{1} = \pi^2 R^2; \frac{P_2^2}{3} = \frac{\pi^2 R^2 \cdot 3}{3} = \pi^2 R^2;$$

$$\frac{P_3^2}{4} = \frac{\pi^2 \cdot 4R^2}{4} = \pi^2 R^2$$

$$\text{Do đó } \frac{P_1^2}{1} = \frac{P_2^2}{3} = \frac{P_3^2}{4}$$

Bài 9. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O) . Vẽ ra phía ngoài của tứ giác này bốn nửa đường tròn có đường kính lần lượt là bốn cạnh của tứ giác. Chứng minh rằng tổng độ dài hai nửa đường tròn có đường kính là hai cạnh đối diện bằng tổng độ dài hai nửa đường tròn kia.

Lời giải



Dùng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta chứng minh được
 $AB + CD = AD + BC$ (1)

Tổng độ dài hai nửa đường tròn đường kính AB và CD là:

$$l_1 = \frac{\pi \cdot AB}{2} + \frac{\pi \cdot CD}{2} = \frac{\pi}{2}(AB + CD) \quad (2)$$

Tổng độ dài hai nửa đường tròn đường kính AD và BC là:

$$l_2 = \frac{\pi \cdot AD}{2} + \frac{\pi \cdot BC}{2} = \frac{\pi}{2}(AD + BC) \quad (3)$$

Từ (1); (2); (3) suy ra $l_1 = l_2$

Bài 10. Tính diện tích hình tròn nội tiếp một hình vuông có cạnh là 4cm .

Lời giải

Tính bán kính hình tròn nội tiếp được $r = 2\text{cm}$.

Tính diện tích hình tròn nội tiếp được $S = 4\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Bài 11. Chân một đồng cát đồ trên một nền phẳng nằm ngang là một hình tròn có chu vi 12m . Hỏi chân đồng cát đó chiếm một diện tích là bao nhiêu mét vuông?

Lời giải

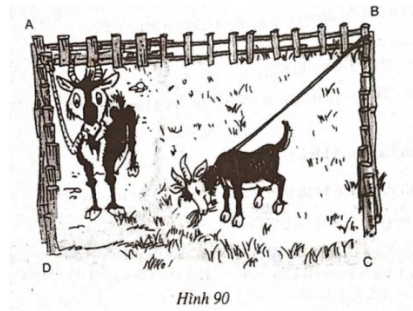
Trước hết ta tính R theo công thức $R = \frac{C}{2\pi}$ ta được: $R = \frac{6}{\pi}(\text{m})$

Sau đó tính S theo công thức $S = \pi R^2$ ta được: $S = \frac{36}{\pi} \approx 11,46(\text{m}^2)$

Bài 12. Một vườn cỏ hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 40\text{m}$, $AD = 30\text{m}$. Người ta muốn buộc hai con dê ở hai góc vườn A, B . Có hai cách buộc:

- Mỗi dây thừng dài 20m .
- Một dây thừng dài 30m và dây thừng kia dài 10m .

Hỏi với cách buộc nào thì diện tích cỏ mà cả hai con dê có thể ăn được sẽ lớn hơn (h.60) ?



Hình 90

Lời giải

Theo cách buộc thứ nhất thì tổng diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn được là:

$$S_1 = \frac{1}{4}\pi \cdot 20^2 + \frac{1}{4}\pi \cdot 10^2 = 200\pi (m^2)$$

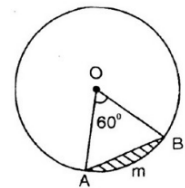
Theo cách buộc thứ hai thì tổng diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn được là:

$$S_2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 30^2 + \frac{1}{4}\pi \cdot 10^2 = 250\pi (m^2)$$

Vì $S_2 > S_1$ nên cách buộc thứ hai thì diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn được sẽ lớn hơn.

Bài 13. Hình viên phân là phần hình tròn giới hạn bởi một cung và dây căng cung ấy. Hãy tính diện tích hình viên phân AmB , biết góc ở tâm $\widehat{AOB} = 60^\circ$

và bán kính đường tròn là $5,1cm$ (h.94).



Giải

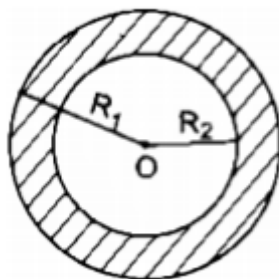
Tam giác OAB có $OA = OB$ và $\widehat{O} = 60^\circ$ nên là tam giác đều cạnh $5,1cm$.

Diện tích ΔOAB là: $S_1 = \frac{(5,1)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Diện tích hình quạt OAB là: $S_2 = \frac{\pi \cdot 5,1^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi \cdot (5,1)^2}{6}$

Diện tích hình viên phân là: $S = S_2 - S_1 = (5,1)^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \approx 2,35 (cm^2)$

Bài 14. Hình vành khăn là phần hình tròn giữa hai đường tròn đồng tâm (h.65).



a) Tính diện tích S của hình vành khăn theo R_1 và R_2 (giả sử $R_1 > R_2$).

b) Tính diện tích hình vành khăn khi $R_1 = 10,5 \text{ cm}$, $R_2 = 7,8 \text{ cm}$.

Lời giải

a) Diện tích hình tròn $(O; R_1)$ là $S_1 = \pi R_1^2$.

Diện tích hình tròn $(O; R_2)$ là $S_2 = \pi R_2^2$.

b) Diện tích hình vành khăn là:

$$S = S_1 - S_2 = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi (R_1^2 - R_2^2)$$

$$S = 3,14(10,5^2 - 7,8^2) = 155,1 (\text{cm}^2)$$

Bài 15. Chứng minh rằng diện tích hình tròn ngoại tiếp hình vuông bằng hai lần diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông đó.

Lời giải

Gọi độ dài cạnh hình vuông là a .

Suy ra $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $r = \frac{a}{2}$

Diện tích hình tròn ngoại tiếp hình vuông là:

$$S_1 = \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{2} \quad (1)$$

Diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông là:

$$S_2 = \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{4} \quad (2)$$

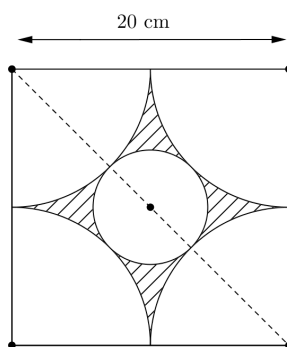
Từ (1) và (2) suy ra $S_1 = 2S_2$

Bài 16. Vẽ lại hình 98 rồi tính:

a) Diện tích hình tròn ở giữa;

b) Diện tích miền gạch sọc

Lời giải



Hình 98

a) Ta có $AC = AB \cdot \sqrt{2} = 20\sqrt{2} (\text{cm})$

Đường kính hình tròn ở giữa là:

$$d = AC - (10 + 10) = 20\sqrt{2} - 20 = 20(\sqrt{2} - 1) (\text{cm}).$$

Bán kính hình tròn ở giữa là $r = 10(\sqrt{2} - 1) \approx 4,14 (\text{cm})$

Diện tích hình tròn ở giữa là:

$$S_1 = \pi r^2 = \pi \cdot (4,14)^2 \approx 54 \text{ (cm}^2\text{)}$$

b) Muốn tìm diện tích miền gạch sọc ta lấy diện tích hình vuông trừ đi diện tích bốn hình quạt tròn và trừ đi diện tích hình tròn ở giữa.

Diện tích hình vuông là $S = 20^2 = 400 \text{ (cm}^2\text{)}$

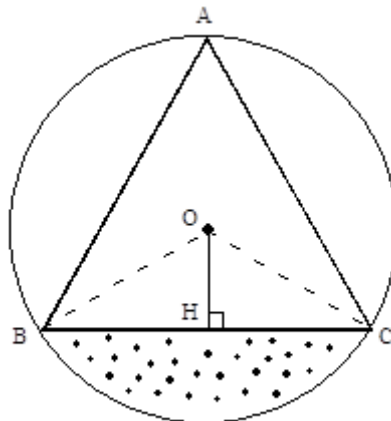
Diện tích bốn hình quạt tròn là: $S_2 = \pi \cdot 10^2 \approx 314 \text{ (cm}^2\text{)}$

Vậy diện tích miền gạch sọc là:

$$S_3 = S - (S_1 + S_2) \approx 400 - (54 + 314) = 32 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Bài 17. Tam giác đều có cạnh a, nội tiếp đường tròn (O) . Tính diện tích hình viên phân tạo thành bởi một cạnh của tam giác và một cung nhỏ căng cạnh đó.

Lời giải



Hình 221

Trước hết ta tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Sau đó ta tính diện tích hình quạt OnmC được:

$$S_1 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi a^2}{9}$$

Diện tích ΔBOC là:

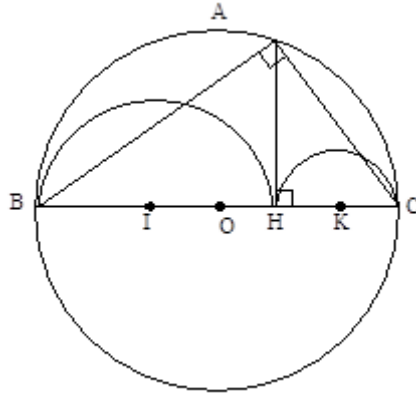
$$S_2 = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$$

Diện tích hình viên phân cần tìm là:

$$S = S_1 - S_2 = \frac{\pi a^2}{9} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12} = \frac{a^2}{36} (4\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0,205a^2 \text{ (đvdt)}$$

Bài 18. Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH = 2cm. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A ta vẽ ba nửa đường tròn có đường kính lần lượt là BH, CH và BC. Tính diện tích miền giới hạn bởi ba đường tròn đó.

Lời giải



Hình 222

Ta đặt $HB = 2R; HC = 2r$ thì

$$BC = 2(R+r)$$

Gọi diện tích các nửa hình tròn đường kính HB, HC và BC lần lượt là S

Ta có:

$$\begin{aligned} S &= S_3 - (S_1 + S_2) \\ &= \frac{1}{2}\pi(R+r)^2 - \frac{1}{2}\pi(R^2 + r^2) \\ &= \pi Rr \end{aligned}$$

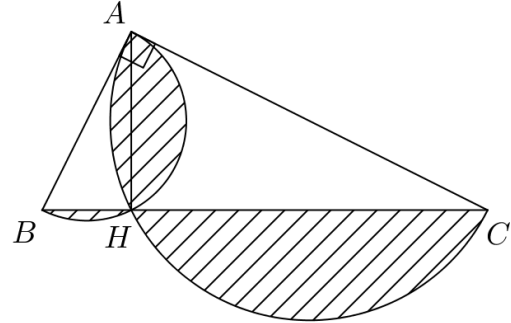
Vì AH là đường cao của tam giác vuông ABC

Nên $AH^2 = HB \cdot HC = 2R \cdot 2r = 4Rr$

Do đó $4Rr = 2^2 \Rightarrow R \cdot r = 1$

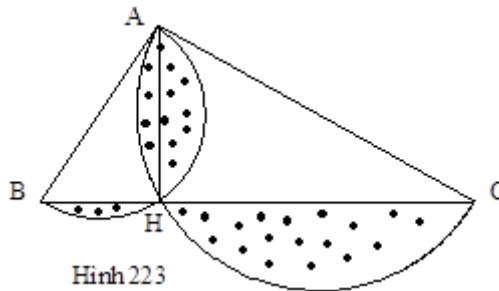
Suy ra $S = \pi Rr = \pi (cm^2)$

Bài 19. Trong hình 99, biết ΔABC vuông tại A, $AB = 4$; $AC = 6$. Hai nửa đường tròn đường kính AB và AC cắt nhau tại H. Tính diện tích miền gạch sọc



Hình 99

Lời giải



Hình 223

Diện tích miền gạch sọc bằng tổng diện tích của nửa hình tròn đường kính AB và AC trừ đi diện tích ΔABC

Diện tích nửa hình tròn đường kính AB là:

$$S_1 = \frac{1}{2}\pi \cdot R_1^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 2\pi \text{ (đvdt)}$$

Diện tích nửa hình tròn đường kính AC là:

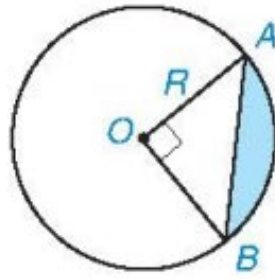
$$S_2 = \frac{1}{2} \pi R_2^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2} \pi \text{ (đvdt)}$$

Diện tích ΔABC là:

$$S_3 = \frac{1}{2} \pi R_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12 \text{ (đvdt)}$$

Diện tích miền gạch sọc là:

$$S = S_1 + S_2 - S_3 = 2\pi + \frac{9}{2}\pi - 12 \approx 8,4 \text{ (đvdt)}$$



Hình 5.21

Lời giải

Giả sử AB là cung có số đo 90° ; S là diện tích hình Viên phân (phần tô màu trên Hình 5.21) và S_q là diện tích của hình quạt ứng với cung đó; S_t là diện tích hình tam giác OAB.

$$\text{Ta có } S_q = \frac{90}{360} \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi R^2, S_t = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} R^2.$$

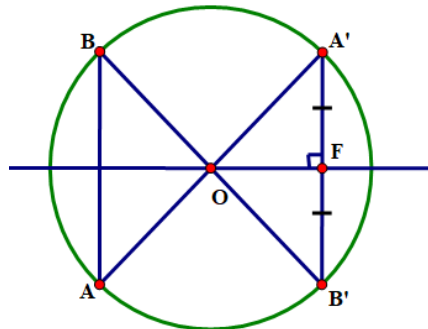
$$\text{Do đó } S = S_q - S_t = \frac{1}{4} \pi R^2 - \frac{1}{2} R^2 = R^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right).$$

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

5.14. Cho dây AB không qua tâm của đường tròn (O). Gọi A' và B' là hai điểm lần lượt đối xứng với A và B qua O. Hỏi đường trung trực của A'B' có phải là trục đối xứng của (O) hay không? Tại sao?

Lời giải

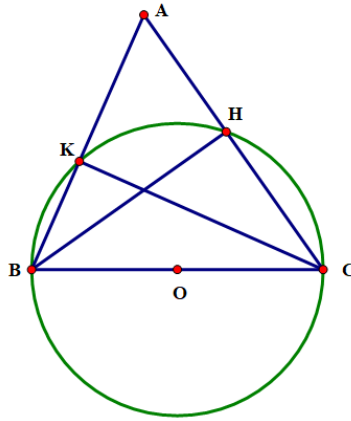
Vì A' và B' là hai điểm lần lượt đối xứng với A và B qua (O) nên $OA = OA'$, $OB = OB'$.
 Mà dây AB không qua tâm của đường tròn (O) nên $OA = OB$ (đều là bán kính của đường tròn (O)). Suy ra $OA = OA' = OB = OB'$. Do đó, O thuộc đường trung trực của A'B'.
 Vậy đường trung trực của A'B' là một trục đối xứng của (O).



5.15. Cho tam giác ABC không là tam giác vuông. Gọi H và K là chân các đường vuông góc lần lượt hạ từ B và C xuống AC và AB. Chứng minh rằng:

- a) Đường tròn đường kính BC đi qua các điểm H và K;
- b) $KH < BC$.

Lời giải



a) Gọi trung điểm của BC là O.

Tam giác vuông BKC có KO là đường trung tuyến KO ứng với cạnh huyền BC nên $KO = OB = OC$ hay B, K, C thuộc đường tròn tâm O đường kính BC. (1)

Tam giác BHC vuông tại H có HO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC nên $HO = BO = OB$ hay B, H, C thuộc đường tròn tâm O đường kính BC. (2)

Từ (1) và (2) ta có K, H thuộc đường tròn tâm O đường kính BC.

Vậy đường tròn đường kính BC đi qua các điểm H và K.

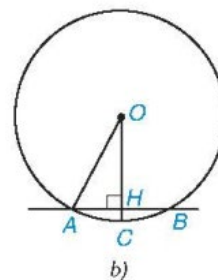
b) Đường tròn tâm O có BC là đường kính và KH là dây không qua tâm O. Do đó $KH < BC$

5.16. Có thể xem guồng nước (còn gọi là cọn nước) là một công cụ hay cỗ máy có dạng hình tròn, quay được nhờ sức nước chảy (H.5.22a). Guồng nước thường thấy ở các vùng miền núi. Nhiều guồng nước được làm bằng tre, dùng để đưa nước lên ruộng cao, giã gạo hoặc làm một số việc khác.

Giả sử ngăn nước ngăn cách giữa phần trên và phần dưới nước của một guồng nước được biểu thị bởi cung ứng với một dây dài 4 m và điểm ngập sâu nhất là 0,5 m (trên Hình 5.22b, điểm ngập sâu nhất là điểm C, ta có $AB = 4$ m và $HC = 0,5$ m. Dựa vào đó, em hãy tính bán kính của guồng nước.



a)



b)

Hình 5.22

Lời giải

Tam giác OAB có $OA = OB$ nên tam giác OAB cân tại O.

Mà OH là đường cao nên OH cũng là đường trung trực của AB hay H là trung điểm của AB.

Do đó $AH = HB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ (m).

Xét đường tròn tâm O bán kính R nên ta có : $OH = OC - HC = R - 0,5$ (m).

Tam giác OAH vuông tại H nên ta có: $OA^2 = OH^2 + AH^2$ (theo định lí Pythagore)

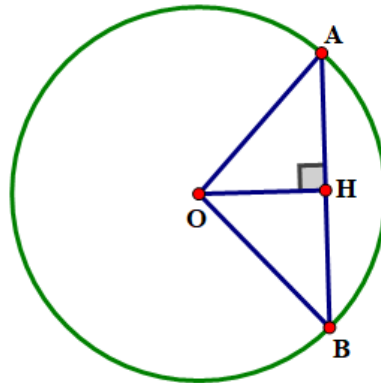
Thay số ta có: $R^2 = (R - 0,5)^2 + 4^2$ Hay $R^2 = R^2 - R + 0,25 + 16$ suy ra $R = 16,25$ m.

Vậy bán kính của guồng nước là 16,25 m.

5.17. Cho đường tròn (O; 5 cm).

- a) Hãy nêu cách vẽ dây AB sao cho khoảng cách từ điểm O đến dây AB bằng $2,5$ cm .
 b) Tính độ dài của dây AB trong câu a (làm tròn đến hàng phần trăm).
 c) Tính số đo và độ dài của cung nhỏ AB .
 d) Tính diện tích hình quạt tròn ứng với cung nhỏ AB .

Lời giải



- a) Vẽ bán kính OM của đường tròn, trên OM lấy điểm H sao cho $OH = 2,5$ cm .
 Kẻ đoạn thẳng AB vuông góc với OH tại H , cắt đường tròn tại A và B ta được dây cung AB cần vẽ.
 b) Gọi H là trung điểm của AB .
 Xét $\triangle OAH$ và $\triangle OBH$ có:

$OA = OB = R$; Cạnh OH chung; $\widehat{OHA} = \widehat{OHB} = 90^\circ$ Do đó $\triangle OAH = \triangle OBH$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông).
 Suy ra $AH = BH$ (hai cạnh tương ứng). Nên $AB = 2AH$.

Xét tam giác OAH vuông tại H có: $AH^2 + OH^2 = OA^2$ (định lý Pythagore)

Hay $AH^2 = OA^2 - OH^2 = 5^2 - 2,5^2 = 18,75$. Suy ra $AH = 2,5\sqrt{3}$ cm .

Do đó $AB = 2 \cdot 2,5\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \approx 8,66$ (cm) .

Vậy độ dài của dây AB khoảng $8,66$ cm .

c) Xét tam giác OAH vuông tại H có:

$$\sin \widehat{AOH} = \frac{OH}{OA} = \frac{2,5\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ suy ra } \widehat{AOH} = 60^\circ .$$

Mà $\triangle OAH = \triangle OBH$ suy ra $\widehat{OAH} = \widehat{OBH} = 60^\circ$ (hai góc tương ứng)

$\widehat{AOB} = \widehat{BOH} + \widehat{AOH} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$. Suy ra $sđ \widehat{AB} = 120^\circ$.

Độ dài cung AB là: $\frac{120}{180} \cdot \pi \cdot 5 = \frac{10}{3} \pi$ (cm) .

Vậy số đo của cung nhỏ AB là 120° và độ dài của cung nhỏ AB là $\frac{10}{3} \pi$ (cm) .

d) Diện tích hình quạt tròn ứng với cung nhỏ AB là: $\frac{120}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{\pi}{10}$ (cm²) .

Vậy diện tích hình quạt tròn ứng với cung nhỏ AB là $\frac{\pi}{10}$ cm² .

5.18. Ba bộ phận truyền chuyển động của một chiếc xe đạp gồm một giò đĩa (bánh răng gắn với bàn đạp), một chiếc líp (cũng có dạng bánh răng) gắn với bánh xe và bộ xích (H.5.23). Biết rằng giò đĩa có bán kính 15 cm, líp có bán kính 4 cm và bánh xe có đường kính 65 cm . Hỏi khi người đi xe đạp một vòng thì xe chạy được quãng đường dài bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?



Lời giải

Bán kính tỉ lệ nghịch với số vòng quay được của líp và giò đĩa.

Khi đạp 1 vòng thì bánh xe (hoặc líp) quay được số vòng là: $15:4 = \frac{15}{4}$ (vòng).

Chu vi một vòng bánh xe là: $2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi$ (cm).

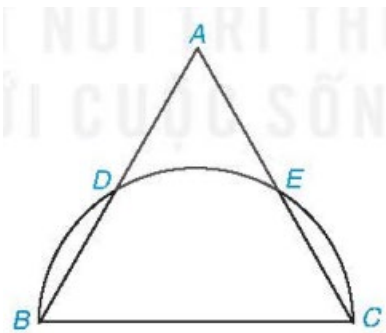
Khi người đi xe đạp một vòng thì xe chạy được quãng đường là: $8\pi \cdot \frac{15}{4} = 30\pi$ (cm) $= \frac{3}{10}\pi$ (m) $\approx 0,9$ (m)

Vậy khi người đi xe đạp một vòng thì xe chạy được quãng đường dài khoảng 0,9 mét.

5.19. Cho tam giác đều ABC có $AB = 2\sqrt{3}$ cm. Nửa đường tròn đường kính BC cắt hai cạnh AB và AC lần lượt tại D và E (khác B và C) (H.5.24).

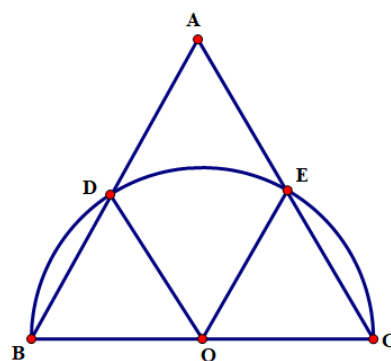
a) Chứng tỏ rằng ba cung nhỏ BD, DE và EC bằng nhau. Tính số đo mỗi cung ấy.

b) Tính diện tích của hình Viên phân (xem Ví dụ 2) giới hạn bởi dây BD và cung nhỏ BD .



Hình 5.24

Lời giải



a) Gọi O là trung điểm của BC .

Vì $OB = OD$ nên tam giác OBD là tam giác cân.

Mà $\widehat{OBD} = 60^\circ$ (do tam giác ABC đều). Suy ra tam giác OBD đều.

Do đó $\widehat{BOD} = 60^\circ$.

Tương tự ta có: $\widehat{COE} = 60^\circ$.

Lại có: $\widehat{BOD} + \widehat{DOE} + \widehat{COE} = 180^\circ$ hay $\widehat{DOE} = 60^\circ$.

Khi đó $\widehat{BOD} = \widehat{DOE} = \widehat{COE} = 60^\circ$.

b) Đường tròn (O) có bán kính $OA = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (cm).

Diện tích hình Viên phân giới hạn bởi dây BD và cung nhỏ BD là:

$$S = R^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = (\sqrt{3})^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích của hình Viên phân giới hạn bởi dây BD và cung nhỏ BD là $\frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2}$ (cm²)

C. BÀI TẬP THÊM

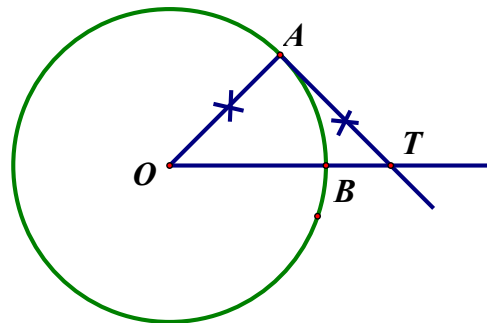
Bài 1: Xem hình 6. Tính số đo của góc ở tâm AOB và số đo cung lớn AB.

Giải (h.6)

ΔAOT vuông cân $\Rightarrow \widehat{AOB} = 45^\circ$

\Rightarrow số đo $\widehat{AB}_{\text{nhỏ}} = 45^\circ$

\Rightarrow số đo $\widehat{AB}_{\text{lớn}} = 315^\circ$



Hình 6

Bài 2. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại M. Biết $\widehat{AMB} = 45^\circ$.

a) Tính số đo của góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA, OB.

b) Tính số đo mỗi cung AB (cung lớn và cung nhỏ).

Hướng dẫn (h.7)

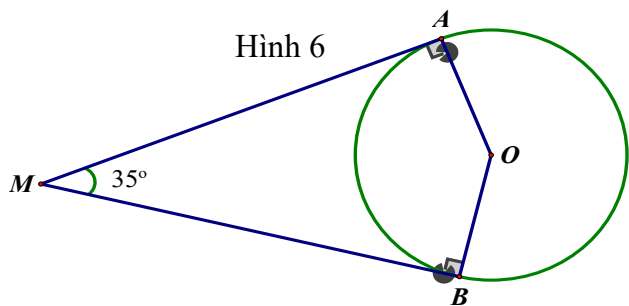
Dùng định lý tổng các góc của tứ giác, ta tính được $\widehat{AOB} = 145^\circ$.

$$\text{sđ } \widehat{AB}_{\text{nhỏ}} = 145^\circ; \text{sđ } \widehat{AB}_{\text{lớn}} = 215^\circ$$

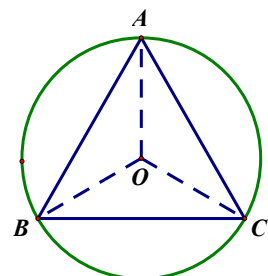
Bài 3. Cho tam giác đều ABC. Gọi O là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C.

a) Tính số đo các góc ở tâm tạo bởi hai trong ba bán kính OA, OB, OC.

b) Tính số đo các cung tạo bởi hai trong ba điểm A, B, C.



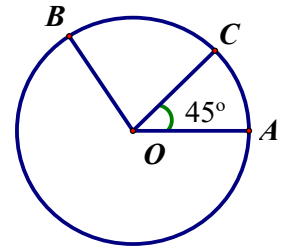
Hình 7



Hình 8

Hướng dẫn (h.8)

- a) Có ba góc ở tâm bằng nhau, mỗi góc là 120° .
 b) Ứng với ba góc ở tâm thì có 3 cung nhỏ, mỗi cung bằng 120° .
 Số đo của ba cung lớn ứng với 3 cung nhỏ là 240° .



Hình 9a

Bài 4. Trên đường tròn tâm O lấy ba điểm A, B, C sao cho $\widehat{AOB} = 100^\circ$, số đo $\widehat{AC} = 45^\circ$. Tính số đo cung nhỏ BC và cung lớn BC. (xét cả hai trường hợp: điểm C nằm trên cung nhỏ AB, điểm C nằm trên cung lớn AB).

Giải

- Trường hợp điểm C nằm trên cung nhỏ AB (h.9a)

$$\text{sđ } \widehat{AB} = \text{sđ } \widehat{AC} + \text{sđ } \widehat{BC}$$

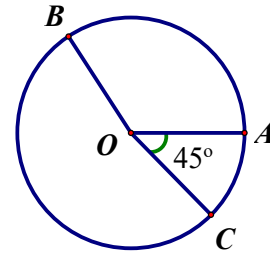
$$\Rightarrow \text{sđ } \widehat{BC} = \text{sđ } \widehat{AB} - \text{sđ } \widehat{AC} = 100^\circ - 45^\circ = 55^\circ$$

$$\text{sđ } \widehat{BC}_{\text{lớn}} = 360^\circ - 55^\circ = 305^\circ$$

- Trường hợp điểm C nằm trên cung lớn AB (h.9b)

$$\Rightarrow \text{sđ } \widehat{BC} = \text{sđ } \widehat{BA} + \text{sđ } \widehat{AC} = 100^\circ + 45^\circ = 145^\circ$$

$$\text{sđ } \widehat{BC}_{\text{lớn}} = 360^\circ - 145^\circ = 215^\circ.$$



Hình 9b

Bài 5. Cho đường tròn (O), bán kính OM. Vẽ đường tròn tâm O' đường kính OM. Một bán kính OA của đường tròn (O) cắt đường tròn (O') ở B. Chứng minh cung MA và cung MB có độ dài bằng nhau.

Giải

Ta có: $\widehat{MOB} = \frac{1}{2} \widehat{MO'B}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung)

Giả sử $\widehat{MOB} = \frac{1}{2} \widehat{MO'B}$ thì $\widehat{MO'B} = 2n^\circ$

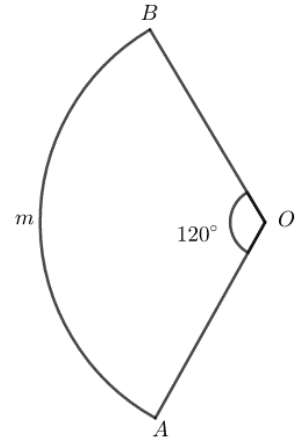
Suy ra: số đo $\widehat{AM} = n^\circ$; số đo $\widehat{MB} = 2n^\circ$

$$l_{\widehat{MA}} = \frac{\pi \cdot OM \cdot n}{180} \quad (1)$$

$$l_{\widehat{MB}} = \frac{\pi \cdot O'M \cdot 2n}{180} = \frac{\pi \cdot OM \cdot n}{180} \quad (2) \text{ (vì } OM = 2O'M \text{)}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $l_{\widehat{MA}} = l_{\widehat{MB}}$.

Bài 6. Xem hình 86 và so sánh độ dài của cung AmB với độ dài đường gấp khúc AOB .



Hình 86

Giải

Ta có: $l_{\widehat{AmB}} = \frac{\pi \cdot R \cdot 120}{180} = 2R \cdot \frac{\pi}{3}$ (1)

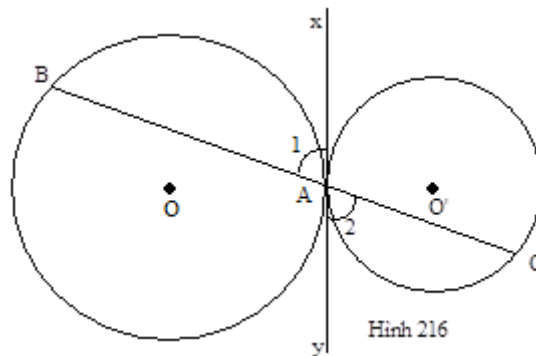
Độ dài đường gấp khúc AOB là: $d = OA + OB = 2R$. (2)

Vì $\pi > 3$ nên $\frac{\pi}{3} > 1$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $l_{\widehat{AmB}} > d$.

Bài 7. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A . Một đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại B , cắt đường tròn (O') tại C . Chứng minh rằng nếu $R' = \frac{1}{2}R$ thì độ dài của cung AC bằng nửa độ dài của cung AB (chỉ xét các cung nhỏ $\widehat{AC}, \widehat{AB}$)

Hướng dẫn giải



Hình 216

Qua A vẽ tiếp tuyến chung xy

$$\widehat{A}_1 = \frac{sđ\widehat{AB}}{2}; \widehat{A}_2 = \frac{sđ\widehat{AC}}{2}$$

Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ nên $sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AC}$

Đặt $sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AC} = m^\circ$

Độ dài của cung AB là: $l_1 = \frac{\pi R m}{180}$ (1)

Độ dài của cung AC là: $l_2 = \frac{\pi R' m}{180} = \frac{\pi R m}{2 \cdot 180}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $l_2 = \frac{l_1}{2}$

Bài 8. Một hình vuông và một hình tròn có cùng chu vi. Hỏi hình nào có diện tích lớn hơn.

Hướng dẫn giải

Gọi chu vi của mỗi hình là $4a$.

Suy ra độ dài mỗi cạnh hình vuông là a , bán kính hình tròn là

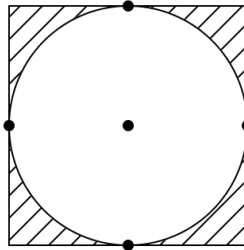
$$R = \frac{4a}{2\pi} = \frac{2a}{\pi}$$

Diện tích hình vuông là $S_1 = a^2$

Diện tích hình tròn là $S_2 = \pi R^2 = \pi \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 = \frac{4}{\pi} \cdot a^2$

Vì $\frac{4}{\pi} > 1$ nên diện tích hình tròn lớn hơn diện tích hình vuông.

Bài 9. Trong hình 97, biết diện tích miền gạch sọc là 86cm^2 . Tính diện tích hình tròn



Hình 97

Hướng dẫn giải

Gọi cạnh hình vuông là $2a$. Diện tích hình vuông là $4a^2$, diện tích hình tròn là πa^2 .

Ta có $4a^2 - \pi a^2 = 86$

$$a^2(4 - \pi) = 86$$

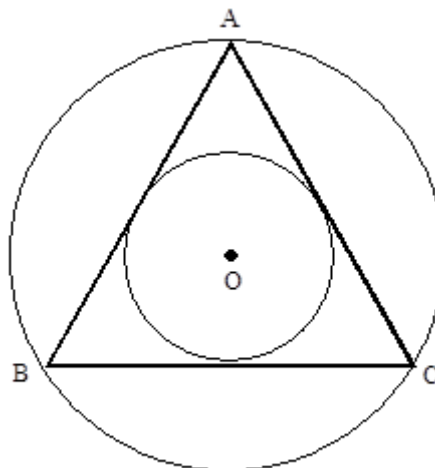
$$0,86a^2 \approx 86$$

$$a^2 \approx 100$$

Vậy diện tích hình tròn là $S = \pi a^2 \approx 100\pi(\text{cm}^2)$

Bài 10. Tính diện tích hình vành khăn tạo thành bởi đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác đều có cạnh là 6cm.

Hướng dẫn giải



Hình 220

Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}} = \frac{6}{2 \sin 60^\circ} = \frac{6}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}(\text{cm})$$

Bán kính đường tròn nội tiếp là:

$$r = \frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}} = \frac{6}{2 \tan 60^\circ} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} (cm)$$

Vậy diện tích hình vành khăn là:

$$S = \pi(R^2 - r^2) = \pi \left[(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 \right] = 9\pi (cm^2)$$

BÀI 16. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

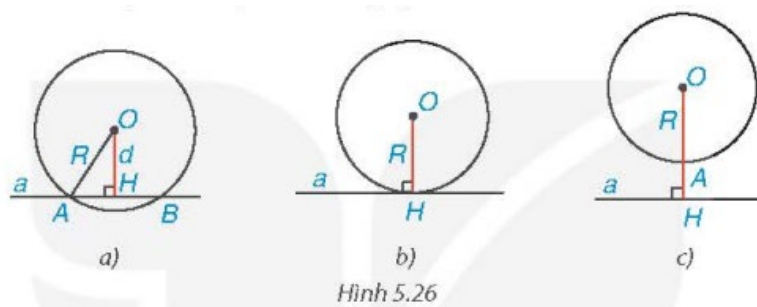
1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Số điểm chung của đường thẳng và đường tròn

- 1) Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là cắt nhau nếu chúng có đúng hai điểm chung (H.5.26a).
- 2) Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là tiếp xúc với nhau nếu chúng có duy nhất một điểm chung H . Điểm chung ấy gọi là tiếp điểm. Khi đó, đường thẳng a còn gọi là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại H (H.5.26b).
- 3) Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là không giao nhau nếu chúng không có điểm chung (H.5.26c).

Nhận xét

- 1) Cho đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$. Gọi d là khoảng cách từ O đến a . Từ HĐ1, ta nhận thấy: Đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ cắt nhau khi $d < R$ (H.5.26a), tiếp xúc với nhau khi $d = R$ (H.5.26b) và không giao nhau khi $d > R$ (H.5.26c).



- 2) Nếu đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn (O) tại H thì $OH \perp a$.

2. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

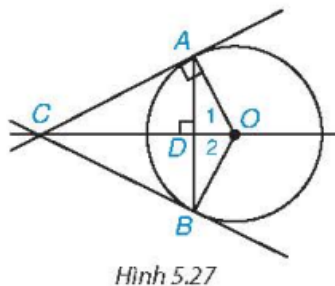
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc với nhau

Định lý 1 (Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến)

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm nằm trên một đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

Ví dụ 1. Cho AB là một dây không đi qua tâm của đường tròn (O) . Đường thẳng qua O và vuông góc với AB cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở điểm C . Chứng minh rằng CB là một tiếp tuyến của (O) .

Lời giải



Gọi D là giao điểm của AB và OC .

Trong tam giác cân AOB ($OA = OB$), đường cao OD (do $OC \perp AB$) cũng là đường phân giác của góc O , suy ra $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$. Ta có $\triangle AOC = \triangle BOC$ (c.g.c), vì OC là cạnh chung, $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ và $OA = OB$. Từ đó $\widehat{OBC} = \widehat{OAC} = 90^\circ$ (do OA là tiếp tuyến), tức là CB vuông góc với bán kính OB tại B . Do đó theo định lí 1, CB cũng là tiếp tuyến của (O) .

3. HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN

Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

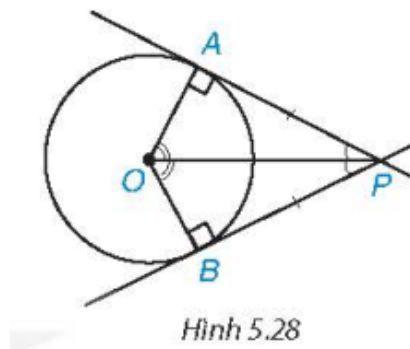
Định lí 2

Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm P thì:

Điểm P cách đều hai tiếp điểm;

PO là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến;

OP là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính qua hai tiếp điểm.



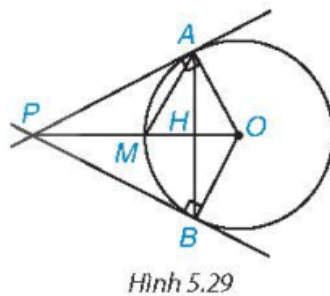
Hình 5.28

Ví dụ 2. Cho hai tiếp tuyến PA và PB của đường tròn $(O; R)$ (A và B là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng $OP \perp AB$;

b) Tính PA và PB , biết $R = 2$ cm và $PO = 4$ cm.

Lời giải



Hình 5.29

a) Do OA và OB là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O) nên theo Định lí 2, ta có OP là tia phân giác của góc AOB . Trong tam giác cân AOB ($OA = OB$), đường phân giác OP cũng là đường cao nên ta có $OP \perp AB$.

b) Tam giác OAP có $\widehat{OAP} = 90^\circ$ (do PA tiếp xúc với đường tròn (O) tại A) và $OA = R = 2$ cm và $OP = 4$ cm (giả thiết).

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông OAP ta có $AP^2 + OA^2 = OP^2$. Từ đó suy ra: $AP^2 = OP^2 - OA^2 = 4^2 - 2^2 = 12$.

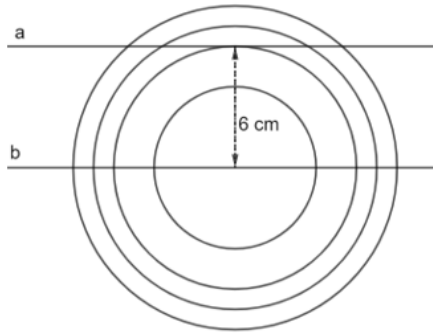
Vậy $AP = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (cm).

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta cũng có $BP = AP = 2\sqrt{3}$ cm .

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

5.20. Bạn Thanh cắt 4 hình tròn bằng giấy có bán kính lần lượt là 4 cm, 6 cm, 7 cm và 8 cm để dán trang trí trên một mảnh giấy, trên đó có vẽ trước hai đường thẳng a và b . Biết rằng a và b là hai đường thẳng song song với nhau và cách nhau một khoảng 6 cm (nghĩa là mọi điểm trên đường thẳng b đều cách a một khoảng 6 cm). Hỏi nếu bạn Thanh dán sao cho tâm của cả 4 hình tròn đều nằm trên đường thẳng b thì hình nào đề lên đường thẳng a , hình nào không đề lên đường thẳng a ?

Lời giải



- Vì a và b là hai đường thẳng song song với nhau và cách nhau một khoảng 6 cm nên đường thẳng a tiếp xúc với hình tròn bán kính 6 cm, hay hình tròn bán kính 6 cm đề lên đường thẳng a .

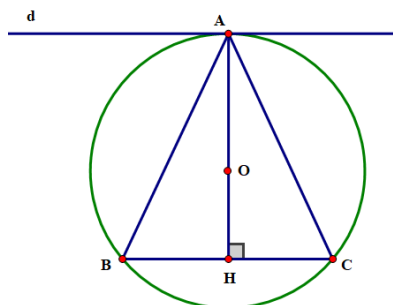
- Vì $4\text{ cm} < 6\text{ cm}$ nên đường thẳng a và hình tròn bán kính 4 cm không cắt nhau, hay hình tròn bán kính 4 cm không đề lên đường thẳng a .

- Vì $7\text{ cm} > 6\text{ cm}; 8\text{ cm} > 6\text{ cm}$ nên đường thẳng a và hình tròn bán kính 4 cm cắt nhau, hay hình tròn bán kính 7 cm và 8 cm đề lên đường thẳng a .

Vậy hình tròn bán kính 4 cm không đề lên đường thẳng a , hình tròn bán kính 6 cm, 7 cm và 8 cm đề lên đường thẳng a .

5.21. Cho đường tròn (O) đi qua ba đỉnh A, B và C của một tam giác cân tại A . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua A và song song với BC là một tiếp tuyến của (O) .

Lời giải



Ta có đường thẳng AO là trục đối xứng của đường tròn.

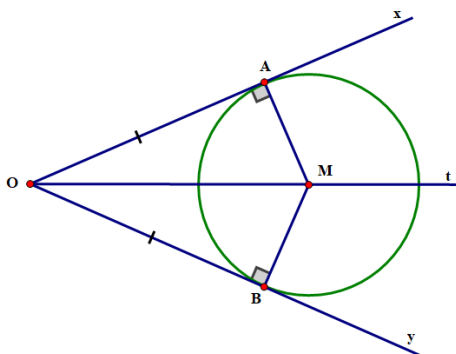
Nên B là điểm đối xứng của C qua AO . Gọi H là giao điểm của AO và BC .

Khi đó ta có: $AH \perp BC$ mà $d \parallel BC$ nên $AH \perp d$.

Vậy d là một tiếp tuyến của đường tròn.

5.22. Cho góc xOy với đường phân giác Ot và điểm A trên cạnh Ox , điểm B trên cạnh Oy sao cho $OA = OB$. Đường thẳng qua A và vuông góc với Ox cắt Ot tại P . Chứng minh rằng OA và OB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(P; PA)$.

Lời giải



Xét $\triangle OAM$ và $\triangle OBM$ có:

OM chung; $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ (do OM là tia phân giác của góc \widehat{AOB}); $OA = OB$

Do đó $\triangle OAM = \triangle OBM$ (c.g.c). Suy ra $AM = BM$ (hai cạnh tương ứng).

Và $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^\circ$ (hai góc tương ứng) hay $OB \perp MB$.

Do đó OA là tiếp tuyến của đường tròn (M; MA).

Vậy OA và OB là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O).

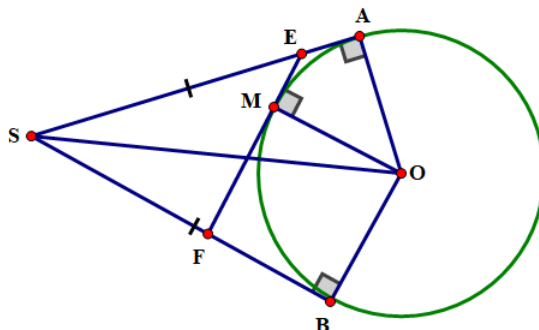
5.23. Cho SA và SB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O) (A và B là hai tiếp điểm). Gọi M là một điểm tùy ý trên cung nhỏ AB. Tiếp tuyến của (O) tại M cắt SA tại E và cắt SB tại F.

a) Chứng minh rằng chu vi của tam giác SEF bằng $SA + SB$.

b) Giả sử M là giao điểm của đoạn SO với đường tròn (O). Chứng minh rằng $SE = SF$.

Lời giải

a)



Hai tiếp tuyến EM và EA cắt nhau tại E nên $EM = EA$.

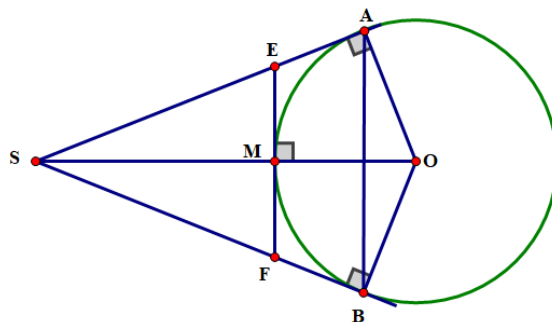
Hai tiếp tuyến FM và EB cắt nhau tại F nên $FM = FB$.

Chu vi tam giác SEF là:

$$C_{SEF} = SE + SF + EF = SE + SF + EM + MF = SE + EA + SF + BF = SA + SB.$$

Vậy chu vi của tam giác SEF bằng $SA + SB$.

b)



Vì SA và SB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại S nên SO là phân giác của.

Suy ra $\widehat{OSA} = \widehat{OSB}$ hay $\widehat{MSE} = \widehat{MSF}$.

Xét $\triangle SME$ và $\triangle SMF$ có:

$\widehat{SME} = \widehat{SMF} = 90^\circ$; SM chung; $\widehat{MSE} = \widehat{MSF}$

Do đó $\triangle SME = \triangle SMF$ (g.c.g). Suy ra $SE = SF$ (hai cạnh tương ứng).

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Ví dụ 1. Cho đường thẳng a và một điểm O cách a một khoảng 7 cm. Hãy xác định vị trí tương đối của a với các đường tròn sau:

- Đường tròn (O; 5 cm);
- Đường tròn (O; 7 cm);
- Đường tròn (O; 9 cm).

Lời giải

- Vì $d > R (7 > 5)$ nên a và đường tròn (O; 5 cm) không giao nhau.
- Vì $d = R = 7$ cm nên a và đường tròn (O; 7 cm) tiếp xúc.
- Vì $d < R (7 < 9)$ nên a và đường tròn (O; 9 cm) cắt nhau tại hai điểm.

Ví dụ 2. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng a đến đường tròn (O; 7 cm) nếu khoảng cách từ O đến a bằng:

- 4 cm;
- 9 cm;
- 7 cm.

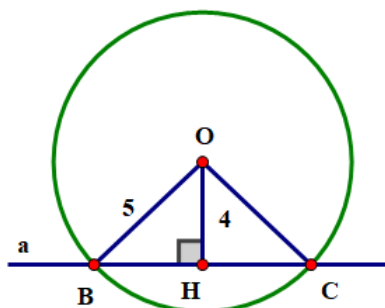
Lời giải

- Vì $d < R (4 < 7)$ nên a cắt đường tròn (O; 7 cm) tại hai điểm.
- Vì $d > R (9 > 7)$ nên a và đường tròn (O; 7 cm) không giao nhau.
- Vì $d = R = 7$ cm nên a và đường tròn (O; 7 cm) tiếp xúc.

Ví dụ 3. Cho đường thẳng a và một điểm O cách a một khoảng 4 cm. Vẽ đường tròn tâm O bán kính 5 cm.

- Giải thích vì sao a và (O) cắt nhau.
- Gọi B và C là các giao điểm của đường thẳng a và đường tròn (O; 5 cm). Tính độ dài dây BC.

Lời giải



a) Gọi OH là khoảng cách từ O đến đường thẳng a, khi đó $OH < OB(4 < 5)$ hay $d < R$, nên đường thẳng O cắt đường tròn (O; 5 cm) tại 2 điểm.

b) Dễ thấy tam giác BOC cân tại O ($OB = OC = R$) nên đường cao OH đồng thời là đường trung tuyến hay H là trung điểm của BC.

Xét tam giác BHO vuông tại H.

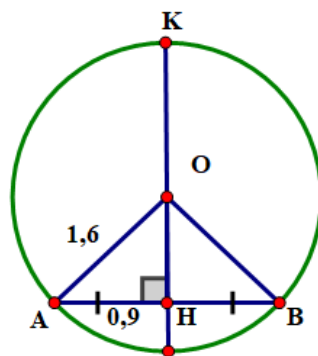
Theo định lí Pythagore, ta có: $OB^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow BH^2 = OB^2 - OH^2 = 5^2 - 4^2$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3(\text{cm})$$

Do đó $BC = 2BH = 2.3 = 6(\text{cm})$.

Ví dụ 4. Trong hình vẽ, mép ngoài cửa ra vào có dạng một phần của đường tròn bán kính 1,6 m. Hãy tính chiều cao HK của cửa đó, biết $AH = 0,9\text{ m}$.

Lời giải



Xét tam giác AHO vuông tại H. Theo định lí Pythagore, ta có:

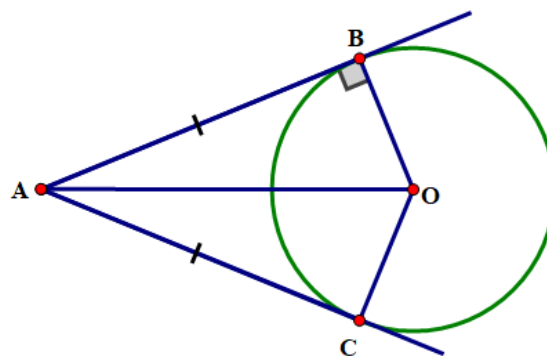
$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow OH^2 = OA^2 - AH^2 = 1,6^2 - 0,9^2 \Rightarrow OH = \sqrt{1,6^2 - 0,9^2} = 1,3(\text{m})$$

Chiều cao $HK = HO + OK = 1,3 + 1,6 = 2,9(\text{m})$.

Dạng 2. Chứng minh đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn

Ví dụ 1. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O; R) vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm). Lấy một điểm C trên đường tròn sao cho $AC = AB$. Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



Nối A với O.

Xét $\triangle ACO$ và $\triangle ABO$ có:

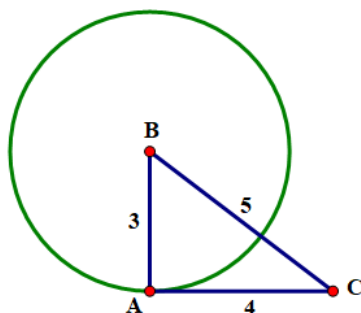
OA cạnh chung, $AC = AB$ (gt), $OC = OB (= R)$

Do đó $\triangle ACO = \triangle ABO$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{ABO} = 90^\circ$

Chứng tỏ $AC \perp OC$ hay AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3; AC = 4$ và $BC = 5$. Chứng minh rằng đường thẳng AC là tiếp tuyến của đường tròn $(B; 3)$.

Lời giải



Xét tam giác ABC , ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = (5^2 = 3^2 + 4^2)$.

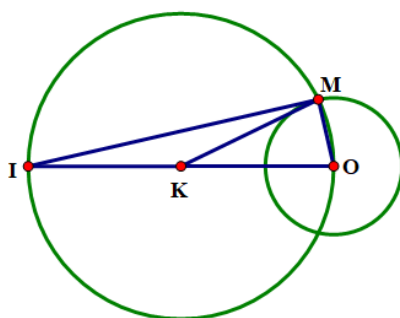
Theo định lí Pythagore đảo, tam giác ABC vuông tại A hay $AB \perp AC$ (1)

Lại có $AB = 3$ nên điểm A thuộc đường tròn $(B; 3)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của đường tròn $(B; 3)$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) và điểm I ở ngoài đường tròn. Gọi M là giao điểm của đường tròn tâm K đường kính IO và đường tròn (O) . Chứng minh đường thẳng IM là tiếp tuyến của (O) tại M .

Lời giải



M là giao điểm của đường tròn tâm K đường kính IO và đường tròn (O) nên M thuộc $(K; \frac{IO}{2})$, ta

có: $KM = KI = KO$ hay $KM = \frac{IO}{2}$ (*)

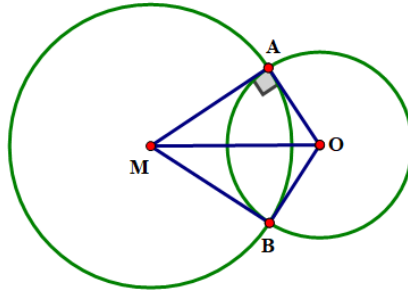
Xét tam giác IMO có K là trung điểm của IO nên KM là đường trung tuyến và (*) nên tam giác IMO vuông tại M hay $IM \perp OM$ (1)

Mặt khác $M \in (O)$ (2)

Từ (1) và (2) \Rightarrow đường thẳng IM là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M .

Ví dụ 4. Cho A là một điểm thuộc đường tròn (O) , M là một điểm thuộc tiếp tuyến của (O) tại A (M khác A). Đường tròn tâm M bán kính MA cắt (O) tại B (B khác A). Chứng minh rằng MB là một tiếp tuyến của (O) .

Lời giải



Ta có MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A nên $MA \perp OA$ hay $\widehat{MAO} = 90^\circ$.

Đường tròn tâm M bán kính MA cắt (O) tại B nên $MB = MA$ và $B \in (O)$.

Xét $\triangle MAO$ và $\triangle MBO$ có:

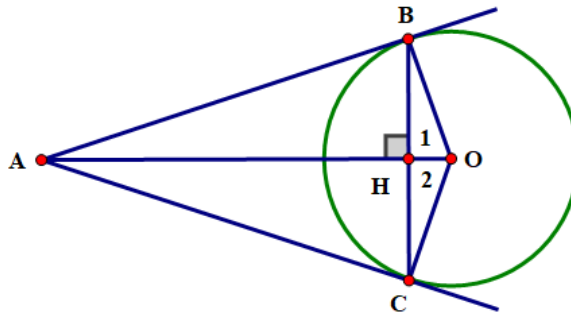
OM chung, $OA = OB = r$ (r là bán kính đường tròn (O)), $MA = MB = R$ (R là bán kính đường tròn (M))

Do đó $\triangle MAO = \triangle MBO$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{MBO} = \widehat{MAO} = 90^\circ$ hay $MB \perp OB$

Mà $B \in (O) \Rightarrow MB$ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Ví dụ 5. Cho đường tròn (O) dây BC khác đường kính, qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn ở A. Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



Gọi H là giao điểm của OA và BC

$\triangle BOC$ cân tại O có OH là đường cao (gt) nên đồng thời là đường phân giác: $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$

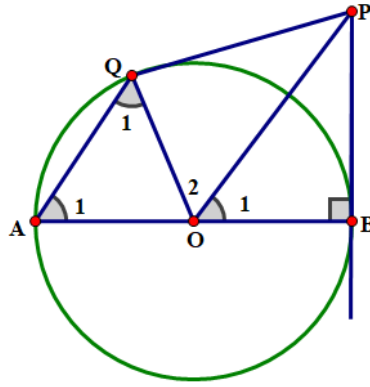
Xét $\triangle ACO$ và $\triangle ABO$ có: $OB = OC = R$, $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (cmt), AO chung

$\Rightarrow \triangle ACO = \triangle ABO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{ABO} = 90^\circ$

Chứng tỏ AC là tiếp tuyến của (O).

Ví dụ 6. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến tại B với đường tròn (O), trên tiếp tuyến lấy P. Qua A kẻ đường thẳng song song với OP cắt (O) tại Q. Chứng minh PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



Ta có: $AQ // OP$ (gt)

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{A}_1 = \widehat{O}_1 \text{ (cặp góc đồng vị)} \\ \widehat{Q}_1 = \widehat{O}_2 \text{ (cặp góc so le trong)} \end{cases}$$

Mà $\widehat{A}_1 = \widehat{Q}_1$ ($\triangle AOQ$ cân) $\Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$

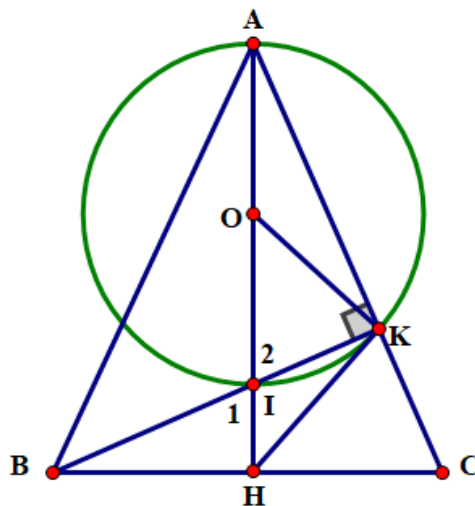
Xét $\triangle PQO$ và $\triangle PBO$ có: OP chung, $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (cmt), $OQ = OB (= R)$

Vậy $\triangle PQO = \triangle PBO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{PQO} = \widehat{PBO} = 90^\circ$.

Hay $PQ \perp OQ$, chứng tỏ PQ là tiếp tuyến của (O) .

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH và BK cắt nhau tại I . Chứng minh rằng HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI .

Lời giải



Gọi O là tâm đường tròn đường kính AI . Hiển nhiên K thuộc (O) (vì $\widehat{AKI} = 90^\circ$).

$\triangle ABC$ cân tại A có AH là đường cao (gt) nên AH đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow HB = HC$.

Xét $\triangle BKC$ vuông tại K có KH là đường trung tuyến nên $KH = BH = \frac{BC}{2}$

Do đó $\triangle BHK$ cân tại $H \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{BKH}$. (1)

Lại có $\triangle IOK$ cân tại O ($OI = OK = R$) $\Rightarrow \widehat{I}_2 = \widehat{OKI}$ mà $\widehat{I}_2 = \widehat{I}_1$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{OKI} = \widehat{I}_1$ (2)

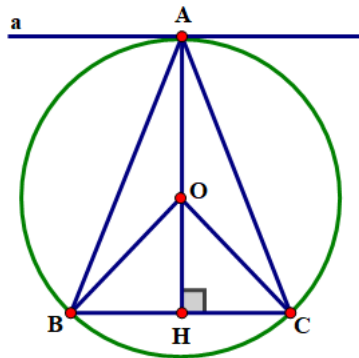
Mặt khác $\triangle BHI$ vuông tại H (gt) nên $\widehat{B}_1 + \widehat{I}_1 = 90^\circ$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: $\widehat{BKH} + \widehat{OKI} = 90^\circ$ hay $HK \perp OK$

Vậy HK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Ví dụ 8. Cho đường tròn (O) đi qua ba điểm A, B và C của một tam giác cân tại A. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua A và song song với BC là một tiếp tuyến của (O).

Lời giải

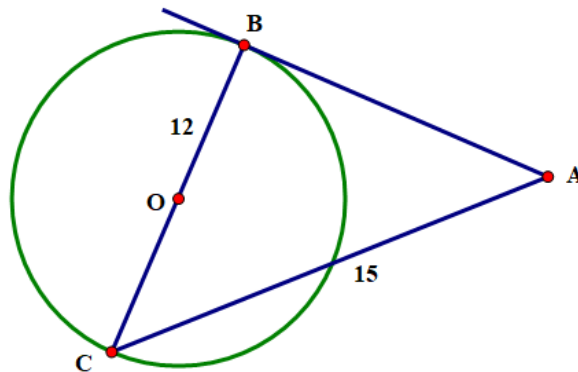


Ta có: $AB = AC$ (gt), $OB = OC = R$ (R là bán kính của đường tròn (O)) nên OA thuộc đường trung trực của đoạn BC hay $OA \perp BC$ tại H. a qua A và $a \parallel BC \Rightarrow a \perp OA$ tại A.

Chứng tỏ a là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Ví dụ 9. Trong hình vẽ, $AB = 9$, $BC = 12$, $AC = 15$ và BC là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



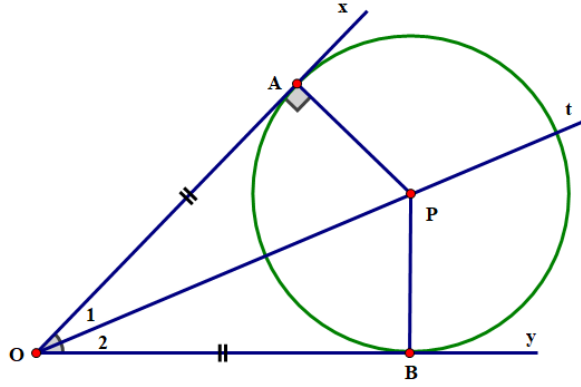
Ta có: $BC^2 + AB^2 = AC^2$ ($12^2 + 9^2 = 15^2$)

Theo định lí Pythagore đảo, tam giác ABC vuông tại B hay $AB \perp CB$ mà BC là đường kính của đường tròn

(O)(gt) \Rightarrow AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Ví dụ 10. Cho góc xOy với đường phân giác Ot và điểm A trên cạnh Ox, điểm B trên cạnh Oy sao cho $OA = OB$. Đường thẳng qua A và vuông góc với Ox cắt Ot tại P. Chứng minh rằng OA và OB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (P; PA).

Lời giải



Xét $\triangle OBP$ và $\triangle OAP$ có: OP cạnh chung, $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (gt), $OB = OA$ (gt)

Do đó $\triangle OBP = \triangle OAP$ (c.g.c)

$\Rightarrow PB = PA$, chứng tỏ B thuộc đường tròn tâm P .

Lại có $\widehat{OBP} = \widehat{OAP} = 90^\circ$ (góc tương ứng)

$\Rightarrow OB \perp PB$, chứng tỏ OB là tiếp tuyến của đường tròn $(P; PA)$.

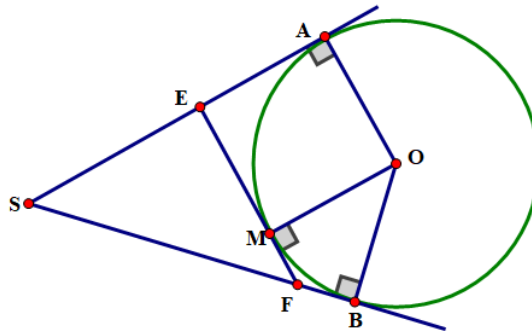
Vậy PA, PB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(P; PA)$.

Ví dụ 11. Cho SA và SB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O) (A và B là hai tiếp điểm).

Gọi M là điểm tùy ý trên cung nhỏ AB . Tiếp tuyến của (O) tại M cắt SA tại E và cắt SB tại F .

a) Chứng minh rằng chu vi của tam giác SEF bằng $SA + SB$.

b) Giả sử M là giao điểm của đoạn SO với đường tròn (O) . Chứng minh rằng $SE = SF$.



Lời giải

a) Gọi P là chu vi của tam giác SEF .

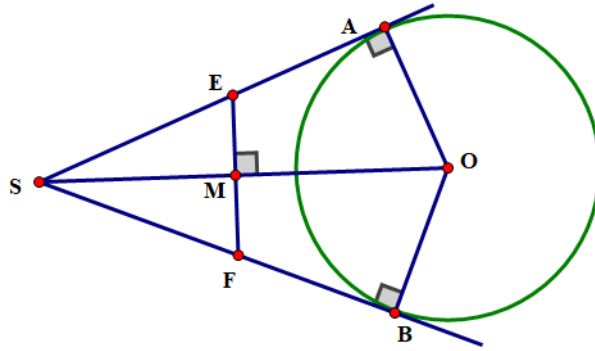
Ta có $P = SE + EM + FM + SF$ mà $EA = EM$ (tính chất tiếp tuyến cắt nhau)

Tương tự $FM = FB \Rightarrow P = SE + EA + FB + SF$ mà $SE + EA = SA$ và $FB + SF = SB$

$\Rightarrow P = SA + SB$ (dpcm).

Vậy chu vi của tam giác SEF bằng $SA + SB$.

b) (Xem hình vẽ).



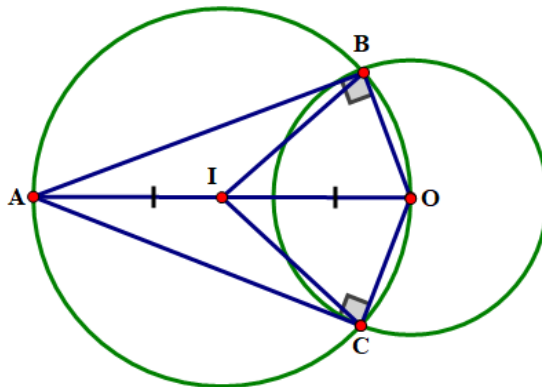
Khi M là giao điểm của SO với đường tròn (O) , ta có: $EF \perp SO$ tại M .

Xét tam giác ESF có SM là đường cao (vì M là tiếp điểm của tiếp tuyến tại M) đồng thời SM hay SO là đường phân giác (tính chất tiếp tuyến cắt nhau) nên tam giác SEF cân tại $S \Rightarrow SE = SF$ (đpcm).

Ví dụ 12. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Vẽ đường tròn đường kính AO cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm B và C .

- Chứng minh AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.
- Chứng minh $AB = AC$.
- Xác định tia phân giác của \widehat{BAC} và \widehat{BOC} .

Lời giải



- Gọi I là tâm của đường tròn đường kính OA , ta có I là trung điểm của OA .

Đường tròn đường kính OA cắt đường tròn $(O; R)$ tại B và C nên ta có $IA = IB = IO = \frac{OA}{2}$.

Xét tam giác ABO có $IB = \frac{OA}{2}$ (cmt) nên tam giác ABO vuông tại B hay $AB \perp OB$.

Chứng minh tương tự, ta có $AC \perp OC$ mà $B, C \in (O)$

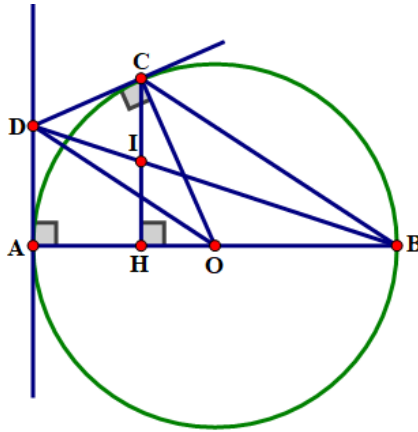
Do đó AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.

- Theo tính chất hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm, ta có $AB = AC$.

- Tia phân giác của góc BAC và góc BOC là tia OA .

Ví dụ 13. Cho đường tròn (O) đường kính AB . C là một điểm nằm trên đường tròn (O) , các tiếp tuyến của đường tròn tại A và C cắt nhau ở D . Gọi H là hình chiếu của C trên AB và I là giao điểm của BD và CH . Chứng minh rằng $CI = HI$.

Lời giải



Ta có $DA = DC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$OA = OC (= R)$ Nên DO là đường trung trực của $AC \Rightarrow DO \perp AC$

Lại có $CB \perp AC$ (AB là đường kính) $\Rightarrow DO \parallel BC \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{ABC}$ (đồng vị).

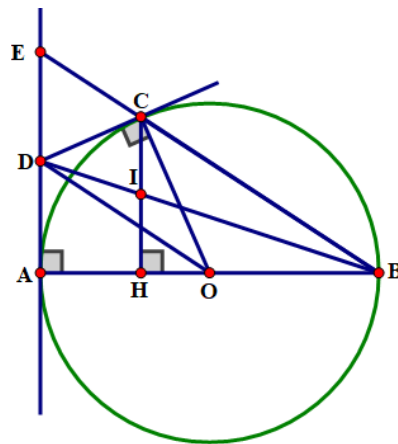
Do đó $\triangle DAO \sim \triangle CHB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AO}{HB} = \frac{AD}{HC} \Rightarrow AO \cdot HC = AD \cdot HB$ (1)

Lại có $IH \parallel AD$ ($\perp AB$) theo hệ quả của định lí Thalès: $\frac{IH}{AD} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow AD \cdot HB = IH \cdot AB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AO \cdot HC = IH \cdot AB$ mà $AB = 2AO \Rightarrow AO \cdot HC = IH \cdot 2AO \Rightarrow HC = 2IH$

Chứng tỏ I là trung điểm của HC hay $CI = HI$.

Cách khác:



Có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (AB là đường kính) $\Rightarrow \widehat{ACE} = 90^\circ$ hay $\widehat{ACD} + \widehat{DCE} = 90^\circ$ (1)

$\triangle ACE$ vuông tại $C \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{E} = 90^\circ$ (2)

Lại có $\triangle ADC$ cân tại D (tính chất tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{DCA}$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{DCE}$

Hay $\triangle EDC$ cân tại $D \Rightarrow DE = DC$. Mà $DC = DA \Rightarrow DE = DA$

Lại có $AE \parallel CH$ ($\perp AB$). Xét $\triangle DAB$ có $IH \parallel AD$

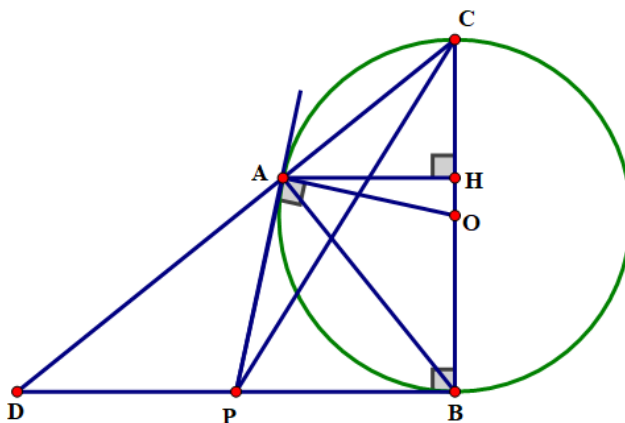
Theo hệ quả của định lí Thalès $\frac{IH}{AD} = \frac{BI}{BD}$ (4)

Tương tự với tam giác BDE có $CI \parallel DE \Rightarrow \frac{CI}{DE} = \frac{BI}{BD}$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \frac{IH}{AD} = \frac{CI}{DE}$ mà $AD = DE$ (cmt) $\Rightarrow IH = CI$.

Ví dụ 14. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến PA, PB (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến đường kính BC. Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm I của AH

Lời giải



Gọi D là giao điểm của đường thẳng AC và BP

Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (BC là đường kính) $\Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{DAP} + \widehat{PAB} = 90^\circ$ (1)

$\triangle ABD$ vuông tại A (cmt) $\Rightarrow \widehat{ABD} + \widehat{ADB} = 90^\circ$ (2)

Mặt khác PA, PB là hai tiếp tuyến của (O) nên $PA = PB$ và $\widehat{PAB} = \widehat{PBA}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{DAP} = \widehat{ADP}$

Do đó $\triangle APD$ cân tại P $\Rightarrow PA = PD$ mà $PA = PB$ (tính chất tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow PD = PB$

Lại có $DB \parallel AH$ ($\perp BC$)

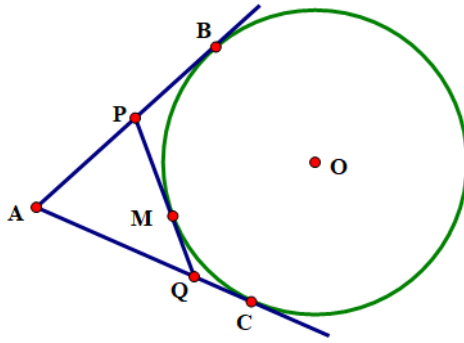
Xét $\triangle PBC$ có $IH \parallel PB \Rightarrow \frac{IH}{PB} = \frac{IC}{PC}$ (định lí Thalès) (4)

Tương tự $\triangle PCD$ có $AI \parallel PD \Rightarrow \frac{AI}{DP} = \frac{IC}{PC}$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \frac{IH}{PB} = \frac{AI}{DP} \Rightarrow IH = IA$ (vì $PB = PD$).

Ví dụ 15. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn. Từ một điểm M trên cung nhỏ BC kẻ một tiếp tuyến thứ ba cắt hai tiếp tuyến kia tại P và Q. Chứng minh rằng khi M chuyển động trên cung BC thì chu vi tam giác APQ có giá trị không đổi.

Lời giải



Ta có chu vi $\triangle APQ$ bằng $AP + PQ + QA$ và $PQ = PM + MQ$ nên chu vi $\triangle APQ$ bằng $AP + PM + MQ + QA$ (1)

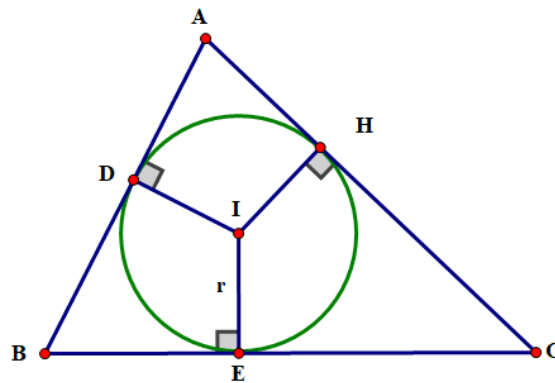
Mặt khác ta có: $PB = PM$ và $QC = QM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)(2)

Từ (1) và (2) ta có: $AP + PM + MQ + QA = AP + PB + QC + QA = AB + AC$

Vậy chu vi $\triangle APQ$ bằng $AB + AC$ không đổi.

Ví dụ 16. Cho đường tròn (I, r) nội tiếp $\triangle ABC$, các tiếp điểm trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt là D, E, F . Chứng minh rằng: $2AD = AB + AC - BC$ (*)

Lời giải



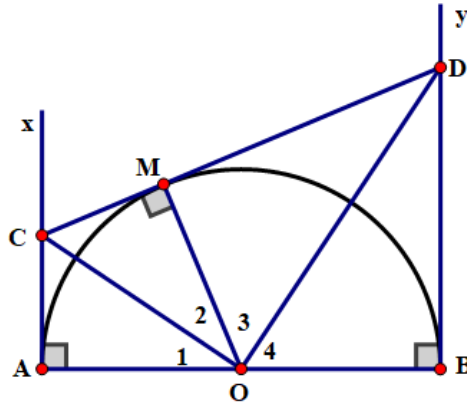
Ta có $AD = AF$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Tương tự $BD = BE$ và $CE = CF$

Do đó: $AB + AC - BC = AD + BD + AF + CF - (BE + CE) = AD + BE + AF + CE - BE - CE = AD + AF = 2AD$.

Ví dụ 17. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB , từ A và B vẽ hai tiếp tuyến Ax và By . Một điểm M di động trên nửa đường tròn này, qua M vẽ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax và By lần lượt tại C và D . Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O) sao cho $3AC + BD$ nhỏ nhất.

Lời giải



Ta có CM và CA là hai tiếp tuyến nên $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$

Tương tự $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$ mà $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 90^\circ$ hay $\triangle COD$ vuông tại O.

CD là tiếp tuyến tại M nên $CD \perp OM$.

Xét $\triangle CMO$ và $\triangle DMO$ có: $\widehat{CMO} = \widehat{DMO} = 90^\circ, \widehat{O}_2 = \widehat{CDO}$ (cùng phụ với DCO)

Nên $\triangle CMO \sim \triangle OMD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CM}{OM} = \frac{OM}{MD} \Rightarrow CM \cdot DM = OM^2 = R^2$ (không đổi)

Mà $CM = AC, DM = BD \Rightarrow AC \cdot BD = R^2$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$\frac{3AC + BD}{2} \geq \sqrt{3 \cdot AC \cdot BD} \Leftrightarrow 3AC + BD \geq 2\sqrt{3AC \cdot BD} \Leftrightarrow 3AC + BD \geq 2\sqrt{3}R$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 3AC = BD = \sqrt{3}R \Leftrightarrow \widehat{AOC} = 30^\circ \Leftrightarrow \widehat{AOM} = 60^\circ$

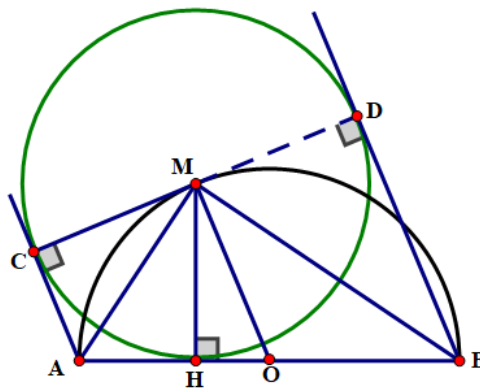
Vậy M di động ở trên (O) sao cho $\widehat{AOM} = 60^\circ$ thì $3AC + BD$ nhỏ nhất.

Ví dụ 18. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. M là điểm bất kì thuộc nửa đường tròn, kẻ MH vuông góc với AB (H thuộc AB). Vẽ đường tròn tâm M bán kính MH. Kẻ các tiếp tuyến AC, BD với đường tròn tâm M (C, D là các tiếp điểm)

a) Chứng minh ba điểm C, M, D thẳng hàng và CD là tiếp tuyến của (O).

b) Chứng minh rằng khi M di chuyển trên nửa đường tròn (O) thì $AC + BD$ không đổi.

Lời giải



a) Ta có AC, AH là tiếp tuyến của đường tròn (M; MH) nên AM là phân giác của góc \widehat{CMH} hay

$$\widehat{CMA} = \widehat{AMH}$$

Chứng minh tương tự có $\widehat{HMB} = \widehat{BMD}$

Mà $\widehat{AMH} + \widehat{HMB} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ (AB là đường kính) $\Rightarrow \widehat{CMA} + \widehat{AMH} + \widehat{HMB} + \widehat{BMD} = 180^\circ$

Hay ba điểm C, M, D thẳng hàng $\Rightarrow CA // BD (\perp CD)$ hay tứ giác ABDC là hình thang vuông có OM là đường trung bình nên $OM // AC$ và $BD \Rightarrow OM \perp CD$.

Chứng tỏ CD là tiếp tuyến của (O).

b) Ta có $AC = AH, BD = BH$ (tính chất tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow AC + BD = AH + BH = AB = 2R$ không đổi.

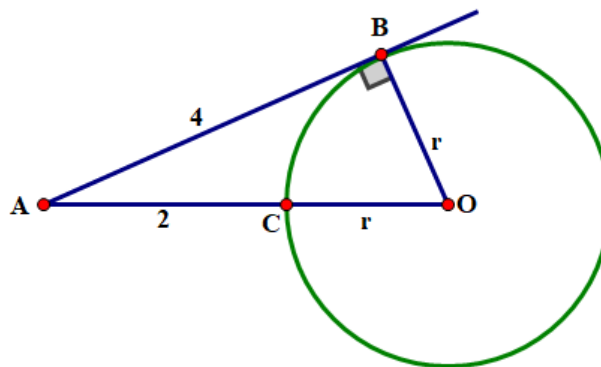
Dạng 3. Tính toán

Ví dụ 1. Trong hình vẽ, AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B.

a) Tính bán kính r của đường tròn (O).

b) Tính chiều dài cạnh OA của tam giác ABO.

Lời giải



a) AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B $\Rightarrow AB \perp OB$.

Xét tam giác ABO vuông tại B, theo định lý Pythagore:

$$OA^2 = OB^2 + AB^2 \text{ hay } (r+2)^2 = r^2 + 4^2 \Rightarrow r^2 + 4r + 4 = r^2 + 16 \Rightarrow 4r = 16 - 4 = 12 \Rightarrow r = 3.$$

Vậy bán kính của đường tròn (O) là $r = 3$.

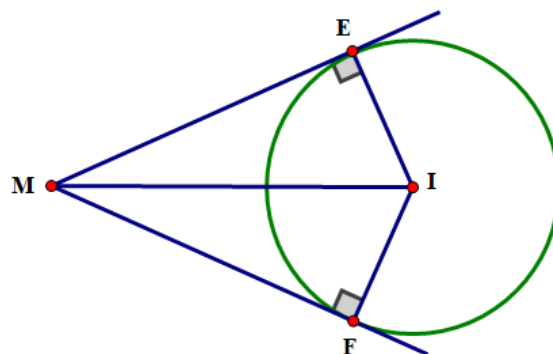
b) $OA = OC + AC = r + 2 \Rightarrow OA = 3 + 2 = 5$.

Ví dụ 2. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (I; 6 cm) và ME, MF là hai tiếp tuyến của đường tròn này tại E và F. Cho biết $\widehat{EMF} = 60^\circ$.

a) Tính số đo \widehat{EMI} và \widehat{EIF} .

b) Tính độ dài MI.

Lời giải



a) Ta có MI là đường phân giác của góc EMF (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

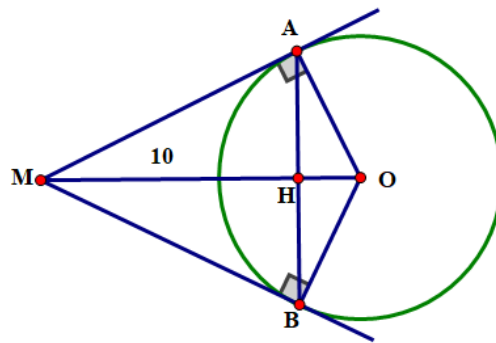
$$\Rightarrow \widehat{EMI} = \widehat{FMI} = \frac{\widehat{EMF}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ. \text{ Xét tứ giác MEIF có: } \widehat{MEI} = \widehat{MFI} = 90^\circ \text{ (tính chất của tiếp tuyến)}$$

$$\Rightarrow \widehat{EIF} = 360^\circ - (\widehat{MEI} + \widehat{MFI} + \widehat{EMF}) = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 60^\circ) = 120^\circ.$$

b) Xét tam giác MEI vuông tại E có $\widehat{EMI} = 30^\circ$ (cmt) $\Rightarrow MI = 2EI = 2 \cdot 6 = 12$ (cm).

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O; 6 cm). M nằm ngoài đường tròn sao cho OM = 10 cm. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (A, B là hai tiếp điểm). Tính độ dài các cạnh của tam giác MAB.

Lời giải



$\triangle MAO$ vuông tại A (tính chất tiếp tuyến). Theo định lý Pythagore $MA^2 = MO^2 - OA^2$

$$MA^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow MA = 8(\text{cm})$$

Ta có $MB = MA = 8(\text{cm})$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Để thấy MO là đường trung trực của AB ($OA = OB, MA = MB$) $\Rightarrow MO \perp AB$ tại H.

Xét $\triangle MAO$ và $\triangle AHO$ có: $\widehat{MAO} = \widehat{AHO} = 90^\circ, \widehat{MOA}$ chung

$$\text{Do đó } \triangle MAO \sim \triangle AHO \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MO}{AO} = \frac{AO}{HO} \Rightarrow AO^2 = MO \cdot HO \Rightarrow HO = \frac{AO^2}{MO} = \frac{6^2}{10} = 3,6(\text{cm})$$

$\Rightarrow HM = MO - HO = 10 - 3,6 = 6,4(\text{cm})$. Chứng minh tương tự, ta có: $\triangle AHM \sim \triangle OHA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{MH} = \frac{HO}{AH} \Rightarrow AH^2 = MH \cdot HO = 6,4 \cdot 3,6 \Rightarrow AH = \sqrt{6,4 \cdot 3,6} \approx 4,8(\text{cm}).$$

Vì MO là đường trung trực của AB (cmt) $\Rightarrow HA = HB = 4,8$ (cm)

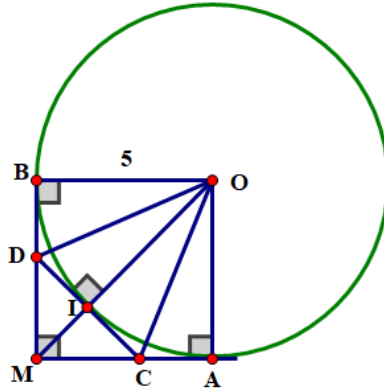
$$\Rightarrow AB = HA + HB = 4,8 + 4,8 = 9,6(\text{cm})$$

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O; 5 cm). Điểm M nằm ngoài (O) sao cho hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là hai tiếp điểm) vuông góc với nhau tại M.

a) Tính độ dài của MA và MB.

b) Qua giao điểm I của đoạn thẳng MO và đường tròn (O), vẽ một tiếp tuyến cắt MA, MB lần lượt tại C, D. Tính độ dài của CD.

Lời giải



a) Dễ thấy tứ giác MBOA là hình chữ nhật (có ba góc vuông)

Lại có $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Nên MBOA là hình vuông (hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông)

$\Rightarrow MA = MB = 5$ cm. b) DB và DI là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O)

nên OD là tia phân giác của góc $\widehat{MOB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{DOB} = \widehat{DOI} = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ$.

Xét tam giác DBO vuông tại B, có $\widehat{DOB} = 22,5^\circ$ và cạnh góc vuông $OB = 5$ cm.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$BD = OB \cdot \tan \widehat{DOB} = 5 \cdot \tan 22,5^\circ \approx 2,1$ (cm) $\Rightarrow DI = DB \approx 2,1$ (cm) (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Ta có $MD = MC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Tam giác DMC cân có MI là đường cao nên đồng thời là trung tuyến

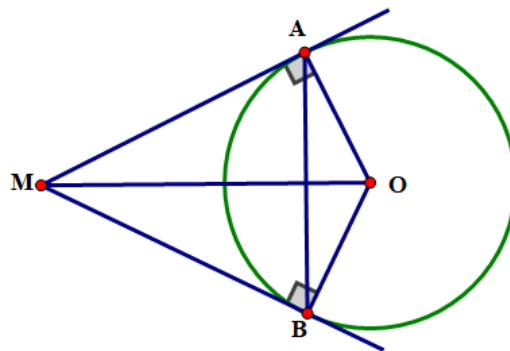
Hay $IC = DI \approx 2,1$ (cm) $\Rightarrow CD = 2 \cdot 2,1 \approx 4,2$ (cm).

Ví dụ 5. Cho đường tròn (O), điểm M nằm ngoài (O) sao cho MA và MB là hai tiếp tuyến (A, B là hai tiếp điểm) thỏa mãn $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Biết chu vi tam giác MAB là 18cm, tính độ dài dây AB.

Lời giải

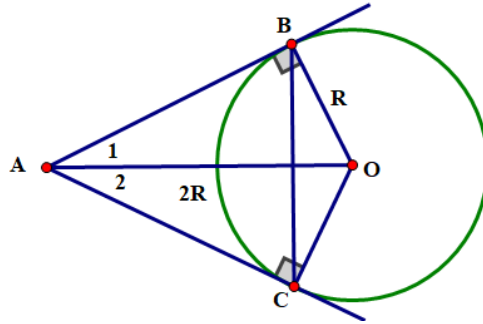
Ta có $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên tam giác AMB cân tại M có $\widehat{AMB} = 60^\circ$ (gt)

nên tam giác AMB đều $\Rightarrow MA = MB = AM$. Mà $MA + MB + AB = 18$ (cm) $\Rightarrow AB = \frac{18}{3} = 6$ (cm).



Ví dụ 6. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O; R) với $OA = 2R$. Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là tiếp điểm). Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều và tính các cạnh của nó theo R.

Lời giải



$\triangle ABO$ vuông tại B (tính chất tiếp tuyến)

$$\text{Ta có: } \sin A_1 = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A}_1 = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$$

$$AB^2 = AO^2 - OB^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$$

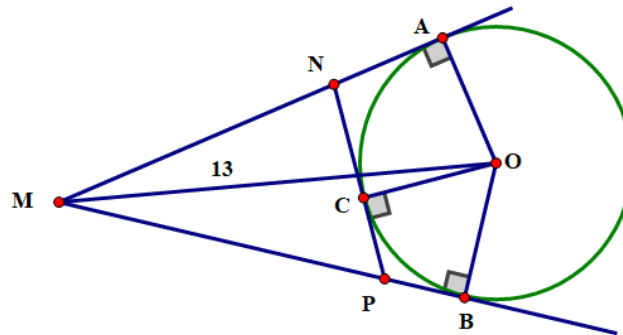
$\triangle ABC$ cân (tính chất tiếp tuyến cắt nhau) có $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên là tam giác đều $\Rightarrow AC = BC = AB = R\sqrt{3}$.

Ví dụ 7. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), $MO = 13\text{ cm}$, vẽ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm).

a) Tính độ dài MA, MB.

b) Cho C là điểm bất kì thuộc đường tròn (O) và nằm trong góc AOB. Tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt MA tại N và cắt MB tại P. Tính chu vi tam giác MNP.

Lời giải



a) Ta có: $MA \perp OA$ (tính chất tiếp tuyến) hay tam giác MAO vuông tại A.

Theo định lý Pythagore, ta có: $MO^2 = MA^2 + OA^2 \Rightarrow MA^2 = MO^2 - OA^2 = 13^2 - 5^2$

$$\Rightarrow MA = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(\text{cm})$$

Vậy $MB = MA = 12(\text{cm})$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

b) Gọi P là chu vi của tam giác MNP, ta có:

$$P = MN + NC + CP + MP \text{ mà } NC = NA \text{ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)}$$

$$\text{Tương tự } CP = PB \Rightarrow P = (MN + NA) + (PB + MP) = MA + MB = 12 + 12 = 24(\text{cm})$$

Vậy chu vi tam giác MNP bằng 24(cm).

Dạng 4. Toán thực tế

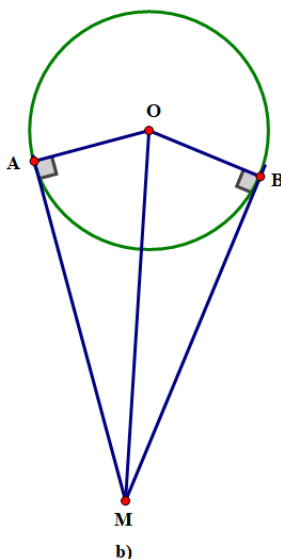
Ví dụ 1. Bánh đà của một động cơ được thiết kế có dạng là một đường tròn tâm O, bán kính 15 cm được kéo bởi một dây curoa. Trục của mô tơ truyền lực được biểu diễn bởi điểm M (hình vẽ). Cho biết khoảng cách OM là 35 cm.

a) Tính độ dài của hai đoạn dây curoa MA và MB (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

b) Tính số đo \widehat{AMB} tạo bởi hai tiếp tuyến AM, BM và số đo \widehat{AOB} (kết quả làm tròn đến phút).

Lời giải

a) Xem hình vẽ.



Ta có $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

MA là tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow MA \perp OA$ hay tam giác OAM vuông tại A .

Theo định lý Pythagore, ta có: $MO^2 = MA^2 + OA^2 \Rightarrow MA^2 = MO^2 - OA^2 = 35^2 - 15^2$

$$\Rightarrow MA = \sqrt{35^2 - 15^2} \approx 31,6(\text{cm})$$

Vậy $MA = MB \approx 31,6(\text{cm})$

b) Tam giác vuông OAM có cạnh huyền $MO = 35\text{ cm}$, cạnh góc vuông $OA = 15\text{ cm}$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$OA = OM \cdot \sin \widehat{AMO} \Rightarrow \sin \widehat{AMO} = \frac{OA}{OM} = \frac{15}{35} \Rightarrow \widehat{AMO} = 25^\circ 23'$$

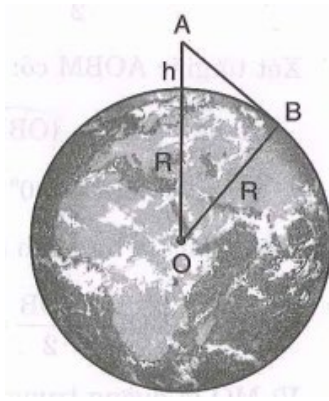
Vì MO là tia phân giác của góc $AMB \Rightarrow \widehat{AMB} = 2 \cdot 25^\circ 23' = 50^\circ 46'$

Xét tứ giác $MAOB$, ta có:

$$\widehat{AOB} = 360^\circ - (\widehat{MAO} + \widehat{MBO} + \widehat{AMB}) = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 50^\circ 46') \approx 129^\circ 32'$$

Ví dụ 2. Trong hình vẽ, mặt cắt của Trái Đất có thể xem là đường tròn tâm O bán kính $R = 6400\text{ km}$. Từ điểm A nằm ở độ cao h so với mực nước biển, một người có thể thấy xa nhất đến điểm B trên (O) sao cho AB là tiếp tuyến (O) . Khoảng cách AB khi đó được gọi là tầm nhìn xa từ điểm A . Tính AB nếu $h = 20\text{ m}$.

Lời giải



Đổi: $h = 20\text{ m} = 0,02\text{ km}$.

Vì AB là tiếp tuyến của đường tròn $(O, 6400\text{ km})$ nên $AB \perp OB$.

Tam giác ABO vuông tại B , có cạnh huyền $OA = R + h$ và cạnh góc vuông $OB = R$.

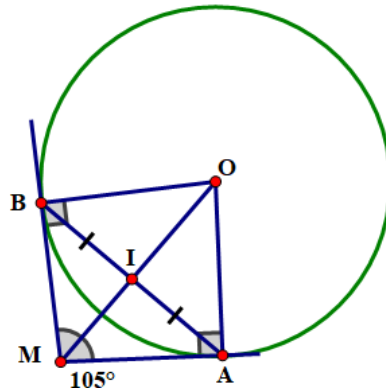
Trong đó $R = 6400\text{ km}$. Theo định lý Pythagore, ta có: $OA^2 = OB^2 + AB^2$

$$\Rightarrow AB^2 = OA^2 - OB^2 = (R + h)^2 - R^2 = (6400 + 0,02)^2 - 6400^2$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(6400 + 0,02)^2 - 6400^2} \approx 16(\text{km})$$

Ví dụ 3. Trong hình vẽ, đề tàu không trật bánh ray khi chuyển hướng từ đường ray thẳng XA sang đường ray thẳng YB , đoạn dây nối được thiết kế là một phần của đường tròn (O) tiếp xúc với XA tại A và YB tại B . Biết góc chuyển hướng của tàu là $\widehat{AMB} = 105^\circ$ và khoảng cách giữa hai điểm A và B là 730 m . Tính bán kính của đường tròn (O) , làm tròn kết quả đến đơn vị mét.

Lời giải



Ta có $OA = OB = R$; $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên MO là đường trung trực của đoạn AB .

Gọi I là giao điểm của MO và AB , ta có I là trung điểm của đoạn AB

$$\text{hay } IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{730}{2} = 365(\text{m}).$$

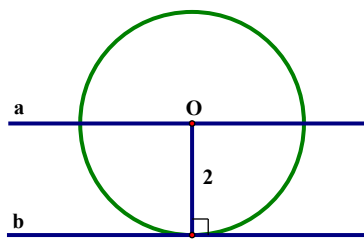
Xét tứ giác $AOBM$ có: $\widehat{AOB} = 360^\circ - (\widehat{OBM} + \widehat{AMB} + \widehat{OAM}) = 360^\circ - (90^\circ + 105^\circ + 90^\circ) = 75^\circ$

Lại có MO là tia phân giác của góc AOB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $a // b$ và cách nhau một khoảng là 2 cm . Lấy điểm $O \in a$, vẽ đường tròn $(O; 2\text{ cm})$. Chứng minh rằng đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng b .

Hướng dẫn giải

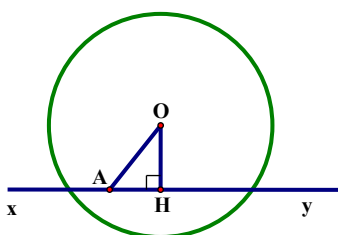


Hình 139

Dùng dấu hiệu nếu $d=R$ thì đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau.

Bài 2. Cho đường thẳng xy đi qua điểm A nằm trong đường tròn $(O; R)$. Chứng minh rằng đường thẳng xy và đường tròn $(O; R)$ cắt nhau.

Hướng dẫn giải

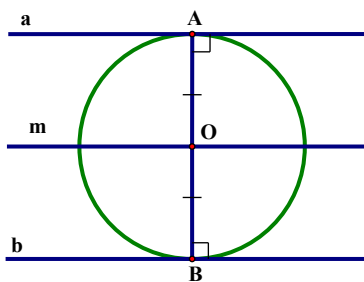


Hình 140

Vẽ $OH \perp xy$ ta được $OH \leq OA, OA < R$ (vì A nằm trong đường tròn) nên $OH < R$ hay $d < R$, suy ra đường thẳng xy cắt đường tròn (O) .

Bài 3. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau, cách nhau một khoảng là h . Một đường tròn (O) tiếp xúc với a và b . Hỏi tâm O di động trên đường nào?

Hướng dẫn giải



Hình 141

Qua O vẽ $OA \perp a$ đường thẳng OA cắt b tại B , ta cũng có $OB \perp b$.

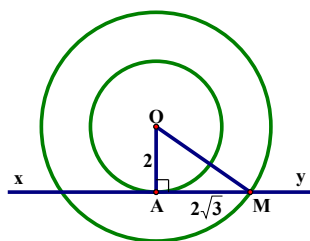
Gọi h là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song thì $AB=h$.

Vì đường tròn (O) tiếp xúc với a và b nên $OA=R; OB=R$ suy ra $OA = OB = \frac{h}{2}$

Vậy tâm O nằm trên đường thẳng $m // a // b$ và cách hai đường thẳng này một khoảng $\frac{h}{2}$.

Bài 4. Cho đường tròn $(O; 2\text{cm})$ và một điểm A chạy trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy . Trên xy lấy một điểm M sao cho $AM = 2\sqrt{3}$ cm. Hỏi điểm M di động trên đường nào?

Hướng dẫn giải



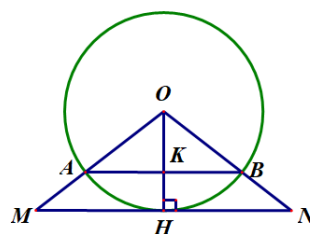
Hình 142

Trước hết chứng minh $OA \perp xy$, sau đó tính OM được 4cm.

Điểm M di động trên đường tròn (O; 4cm).

Bài 5. Cho đường tròn (O; R) và dây $AB = 1,6R$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB ; cắt các tia OA , OB theo thứ tự tại M và N . Tính diện tích tam giác OMN .

Hướng dẫn giải



Hình 143

Nối tâm O với tiếp điểm H ta được $OH \perp MN$ nên $OH \perp AB$ tại K.

$$\text{Ta có: } KA = KB = \frac{1,6R}{2} = 0,8R$$

$$\text{Suy ra: } OK^2 = OA^2 - KA^2 = R^2 - (0,8R)^2 = 0,36R^2 \Rightarrow OK = 0,6R$$

Xét $\triangle OMN$ có $AB \parallel MN$ nên $\triangle OAB \sim \triangle OMN$

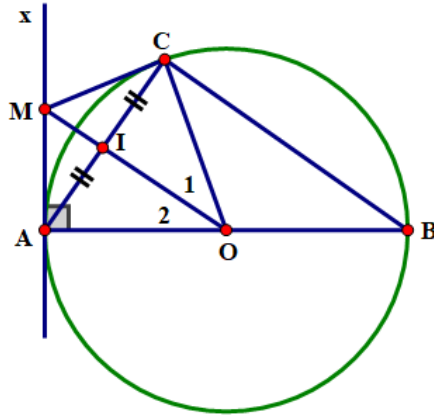
$$\text{Suy ra: } \frac{AB}{MN} = \frac{OK}{OH} \Rightarrow MN = \frac{AB \cdot OH}{OK} = \frac{1,6R \cdot R}{0,6R} = \frac{8}{3}R$$

$$\text{Vậy } S_{OMN} = \frac{1}{2}MN \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}R \cdot R = \frac{4}{3}R^2$$

Bài 6. Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $AC = R$. Gọi I là trung điểm của dây AC. Đường thẳng OI cắt tiếp tuyến Ax tại M. Chứng minh rằng:

- \widehat{ACB} có số đo bằng 90° , từ đó suy ra độ dài của BC theo R;
- OM là tia phân giác của \widehat{COA} ;
- MC là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

Lời giải



a) Xét tam giác AOC có $OA = OC (= R)$ nên tam giác AOC cân tại O.

Lại có $AC = R$ (gt) nên tam giác AOC đều $\Rightarrow \widehat{AOC} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{COB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ (kề bù)

Mặt khác tam giác COB cũng cân tại O có góc ở đỉnh 120°

$\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. ΔAOC đều (cmt) $\Rightarrow \widehat{ACO} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ACO} + \widehat{OCB} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

Ta có ACB là nửa tam giác đều có cạnh $2R \Rightarrow$ đường cao $BC = \frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

b) Vì $AC = R$ (gt) nên tam giác AOC đều (cmt) có OI là đường trung tuyến nên đồng thời là đường phân giác của góc COA hay OM là tia phân giác của \widehat{AOC} .

c) Xét ΔMCO và ΔMAO có: OM cạnh chung, $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (cmt), $OC = OA (= R)$

Do đó $\Delta MCO = \Delta MAO$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MCO} = \widehat{MAO} = 90^\circ$ hay $MC \perp OC$ Mà $C \in (O)$ nên MC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.

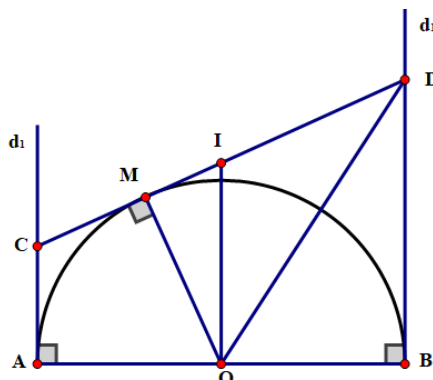
Bài 7. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến tại A và B với nửa đường tròn.

Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến tại A và B lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh rằng: $CD = CA + BD$; $\widehat{COD} = 90^\circ$.

b) Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

Lời giải



a) Ta có: $CA = CM; DB = DM$ (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau) mà

$$CD = CM + DM \Rightarrow CD = CA + BD$$

Lại có CO và DO là các tia phân giác của góc kề bù \widehat{AOM} và \widehat{BOM} nên $\widehat{COD} = 90^\circ$.

b) Gọi I là trung điểm của CD ta có OI là đường trung tuyến của tam giác vuông COD nên $IO = IC = ID$

hay I là tâm của đường tròn đường kính CD .

Để thấy tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông có OI là đường trung bình nên $IO // AC$ và BD mà AC và BD cùng vuông góc với AB (gt) $\Rightarrow IO \perp AB$.

Chứng tỏ AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD .

Bài 8. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và các đường thẳng m, n, p lần lượt tiếp xúc với đường tròn tại A, B, C (hình vẽ). Chứng minh:

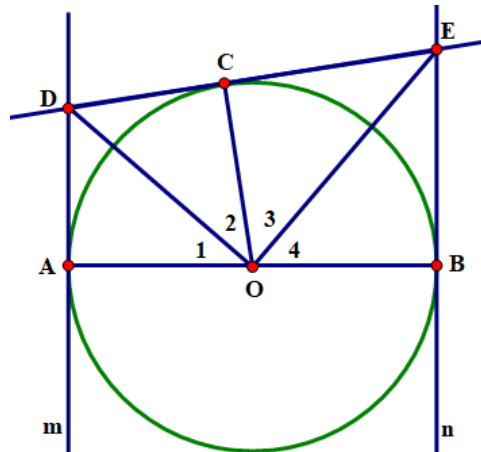
a) $AD + BE = DE$;

b) $\widehat{COD} = \frac{1}{2}\widehat{COA}$ và $\widehat{COE} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$;

c) Tam giác ODE vuông;

d) $\frac{OD \cdot OE}{DE} = R$.

Lời giải



a) Ta có các đường thẳng m, n, p lần lượt là các tiếp tuyến tại các điểm A, B, C với đường tròn $(O; R)$.

Ta có $AD = CD$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Tương tự $BE = CE$ mà $CD + CE = DE \Rightarrow AD + BE = DE$ (đpcm)

b) Do DC và DA là hai tiếp tuyến cắt nhau tại D , ta có:

$$OD \text{ là tia phân giác của góc } COA \text{ hay } \widehat{COD} = \widehat{AOD} = \frac{1}{2}\widehat{COA} .$$

$$\text{Tương tự } OE \text{ là tia phân giác của góc } COB \text{ nên } \widehat{COE} = \widehat{BOE} = \frac{1}{2}\widehat{COB} .$$

c) Ta có $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2; \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$ (cmt) mà $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 90^\circ$

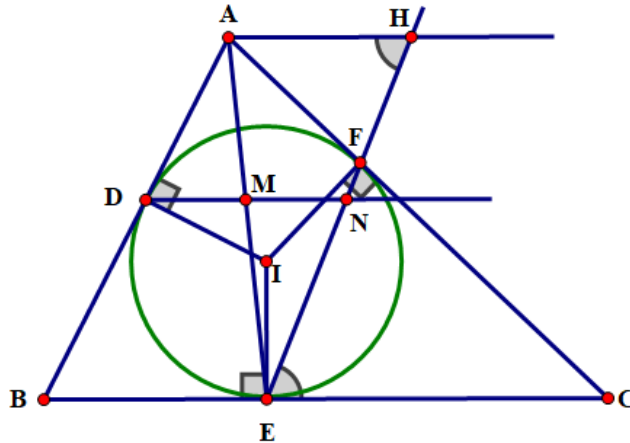
Chứng tỏ $\triangle ODE$ vuông tại O .

d) Gọi diện tích tam giác DOE là S_{DOE} , ta có:

$$S_{DOE} = \frac{1}{2} OC \cdot DE = \frac{1}{2} OD \cdot OE \Rightarrow OD \cdot OE = R \cdot DE \text{ (vì } OC = R) \Rightarrow \frac{OD \cdot OE}{DE} = R \text{ (đpcm)}$$

Bài 9. Cho đường tròn tâm I nội tiếp $\triangle ABC$, các tiếp điểm trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt là D, E, F. Qua D kẻ đường thẳng song song với BC cắt EF tại N và AE tại M. Chứng minh rằng: M là trung điểm của DN.

Lời giải



Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng EF tại H.

Ta có $\widehat{AHF} = \widehat{FEC}$ (1) (so le trong).

Lại có $CE = CF$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau). Nên $\triangle ECF$ cân tại C $\Rightarrow \widehat{FEC} = \widehat{EFC}$ (2)

mà $\widehat{EFC} = \widehat{AFH}$ (3) (đối đỉnh)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{AHF} = \widehat{AFH}$. Hay $\triangle AHF$ cân tại A $\Rightarrow AH = AF = AD$

Xét $\triangle ABE$ có $DM \parallel BE$ (gt)

Theo hệ quả của định lí Thalès ta có:

$$\frac{DM}{BE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{DM}{AD} = \frac{BE}{AB} \text{ mà } AD = AH \text{ (cmt) và } BE = BD \text{ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).}$$

$$\Rightarrow \frac{DM}{AH} = \frac{BD}{AB} = \frac{EM}{AE} \text{ (4) (Định lí Thalès)}$$

Mặt khác xét $\triangle AEH$ có $MN \parallel AH$ (gt). Theo hệ quả định lí Thalès ta có $\frac{EM}{AE} = \frac{MN}{AH}$ (5)

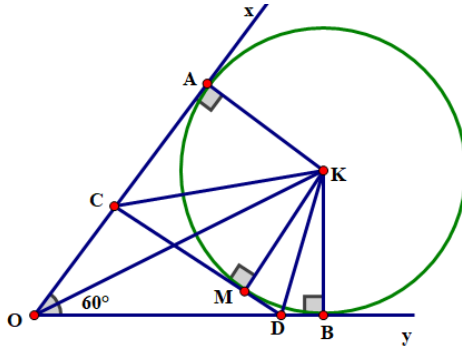
Từ (4) và (5) $\Rightarrow \frac{DM}{AH} = \frac{MN}{AH} \Rightarrow DM = MN$ hay M là trung điểm của DN.

Bài 10. Cho góc $\widehat{xOy} = 60^\circ$. Đường tròn tâm K bán kính R tiếp xúc với Ox tại A và Oy tại B. Từ điểm M trên cung nhỏ AB, vẽ tiếp tuyến với đường tròn, tiếp tuyến này cắt Ox, Oy lần lượt tại C và D.

a) Tính chu vi $\triangle COD$ theo R. Chứng tỏ chu vi đó không đổi khi M chạy trên cung nhỏ AB.

b) Chứng tỏ số đo \widehat{CKD} không đổi khi M chạy trên cung nhỏ AB.

Lời giải



a) Ta có OA, OB là hai tiếp tuyến của (O) nên $OA = OB$ và OK là phân giác của \widehat{AOB}

$$\Rightarrow \widehat{AOK} = \widehat{BOK} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Do đó $\triangle OAK$ là nửa tam giác đều có cạnh $AK = R \Rightarrow OK = 2R$

$$\text{nên } OA = OB = \sqrt{OK^2 - AK^2} = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}$$

Lại có CD tiếp xúc với (K) tại M nên $CM = CA$ và $DM = DB$. Gọi p là chu vi của $\triangle OCD$, ta có:

$$p_{OCD} = OC + CM + MD + OD = OC + CA + DB + OD = 2OA = 2R\sqrt{3} \text{ (không đổi)}$$

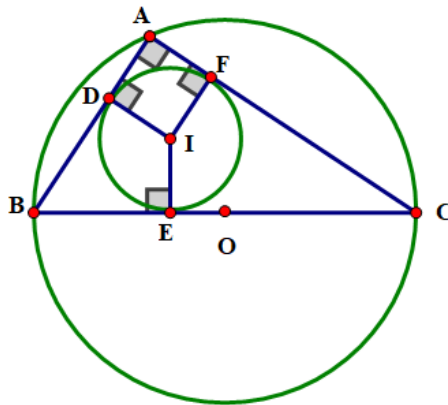
b) Ta có CK là phân giác của \widehat{AKM}

DK là phân giác của \widehat{BKM} . Mà $\widehat{AKM} + \widehat{BKM} = \widehat{AKB} = 120^\circ$ (vì $\widehat{O} = 60^\circ$ và $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{CKD} = \frac{1}{2} \widehat{AKB} = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ \text{ (không đổi)}.$$

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng: $AB + AC = 2(R + r)$.

Lời giải



Dễ thấy $AFID$ là hình chữ nhật (có 3 góc vuông)

Lại có $AD = AF$ nên $AFID$ là hình vuông $\Rightarrow AD = AF = ID = r$

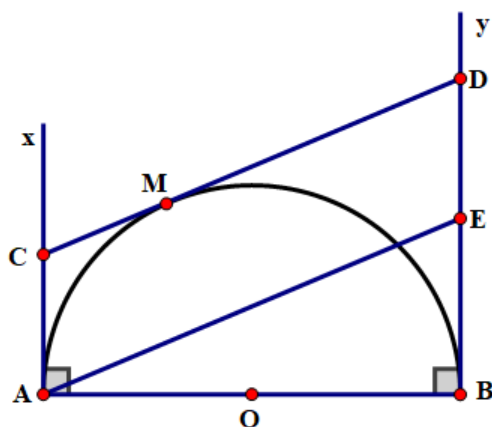
Ta có $BD = BE$ và $CE = CF$. Mà $BE + CE = BC = 2R \Rightarrow AB + AC = AD + BD + AF + CF$

Mà $BE + CE = BC = 2R \Rightarrow AB + AC = AD + BD + AF + CF$

$$= AD + AF + BD + CF = 2r + 2R = 2(r + R).$$

Bài 12. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB từ A và B vẽ hai tiếp tuyến Ax và By . Một điểm M di động trên nửa đường tròn này qua M vẽ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax và By lần lượt tại C và D . Hãy xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn $(O; R)$ sao cho $AC + BD$ nhỏ nhất.

Lời giải



Kẻ $AE \parallel CD$ (E thuộc By).

Dễ thấy tứ giác $ACDE$ là hình bình hành $\Rightarrow AE = CD$ mà $AC = MC$ (tính chất tiếp tuyến cắt nhau)

Tương tự $BD = MD$ nên $AC + BD = MC + MD = CD$

Lại có $AE \geq AB \Rightarrow AC + BD \geq AB$ (không đổi)

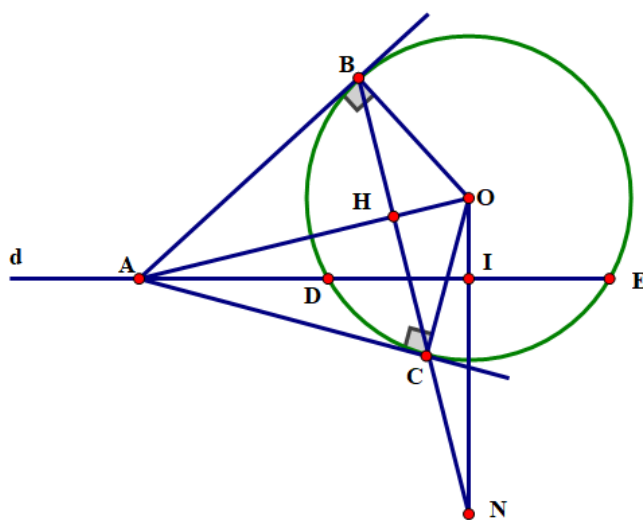
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow E$ trùng với $B \Leftrightarrow CD \parallel AB \Leftrightarrow OM \perp AB$

Vậy khi M là giao điểm của đường thẳng vuông góc với AB .

Kẻ từ O với nửa đường tròn (O) đường kính AB thì $AC + BD$ nhỏ nhất.

Bài 13. Cho đường tròn $(O; R)$ một đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại hai điểm D và E . Một điểm A di động trên đường thẳng d và A nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là hai tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của DE , đường thẳng OI cắt đường thẳng BC tại N . Chứng minh rằng: Khi A di động trên đường thẳng d thì BC luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



I là trung điểm của $DE(gt) \Rightarrow OI \perp DE$ hay $\triangle OIA$ vuông tại I

Gọi H là giao điểm của OA và BC .

Ta có $\triangle OHN$ vuông tại H . Ta có $\triangle OHN \sim \triangle OIA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{ON}{OA} = \frac{OH}{OI} \Rightarrow ON = \frac{OA \cdot OH}{OI}.$$

Xét $\triangle ABO$ và $\triangle HBO$ có: $\widehat{ABO} = \widehat{BOH} = 90^\circ$, \widehat{AOB} chung.

$$\text{Do đó } \triangle ABO \sim \triangle HBO \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OB}{OH} = \frac{OA}{OB}$$

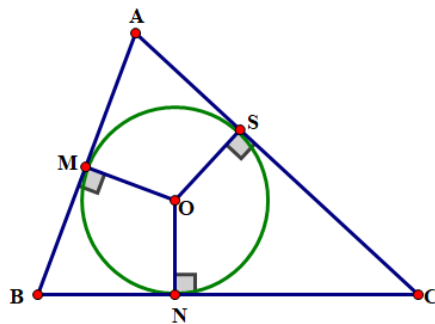
$\Rightarrow OA \cdot OH = OB^2 = R^2$ Do đó $ON = \frac{R^2}{OI}$ (không đổi) d cho trước, O cố định $\Rightarrow I$ cố định $\Rightarrow N$ cố định.

Bài 14. Cho đường tròn (O) nội tiếp $\triangle ABC$, các tiếp điểm trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt là M, N và S

a) Chứng minh rằng: $AB + AC - BC = 2AM$.

b) Cho $AB = 4\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$ và $CA = 5\text{cm}$. Tính các đoạn thẳng AM, BM và CS

Lời giải



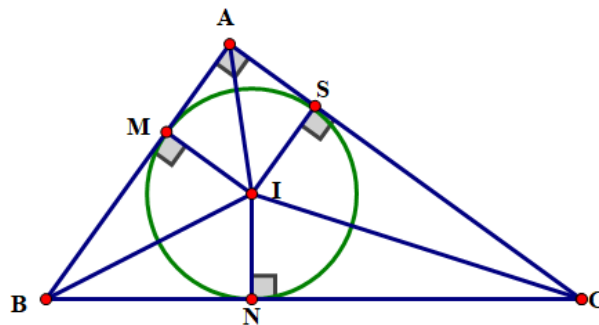
a) Ta có $AB + AC - BC = AM + MB + AS + SC - BN - NC = AM + AS = 2AM$

b) Theo câu a ta có: $AB + AC - BC = 2AM \Rightarrow AM = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{4 + 5 - 7}{2} = 1$

$BM = 4 - 1 = 3$; $AS = AM = 1 \Rightarrow SC = 5 - 1 = 4$.

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Tính bán kính của đường tròn tâm I.

Lời giải



Ta có tam giác ABC vuông tại A (gt)

Theo định lý Pythagore: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10(\text{cm})$

Gọi S_{ABC} là diện tích tam giác ABC, Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24(\text{cm}^2)$

Gọi bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ là r

Ta có $S_{ABC} = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA} = \frac{1}{2} r \cdot AB + \frac{1}{2} r \cdot BC + \frac{1}{2} r \cdot AC$

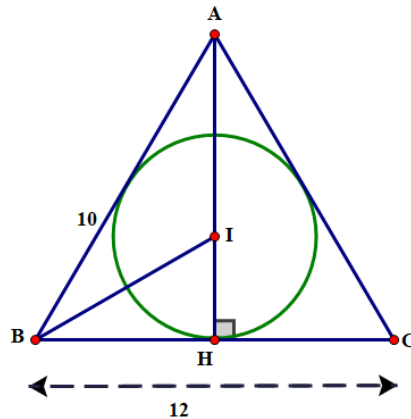
$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} r(AB + BC + AC) \Rightarrow 24 \cdot 2 = r(AB + BC + AC) \Rightarrow r = \frac{48}{AB + BC + AC} = \frac{48}{6 + 8 + 10} = 2$$

Vậy bán kính đường tròn tâm I nội tiếp $\triangle ABC$ là $r = 2(\text{cm})$.

Bài 16. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 10\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$, và I là tâm của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Tính bán kính của đường tròn (I).

Hướng dẫn: Theo bài 36. Để tính bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ ta tính diện tích của tam giác (S) và nửa chu vi (p).

Lời giải



$\triangle ABC$ cân tại A, kẻ đường cao AH ta có AH đồng thời là đường trung tuyến

$$HB = HC = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6(\text{cm}).$$

Theo định lí Pythagore: $AH^2 = AB^2 - HB^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow AH = 8(\text{cm})$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48(\text{cm}^2)$$

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{2 \cdot 10 + 12}{2} = 16(\text{cm}).$$

$$\text{Vậy } r = \frac{48}{16} = 3(\text{cm}).$$

Cách khác:

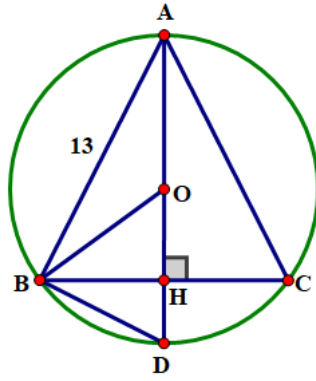
$\triangle ABC$ cân nên đường cao AH cũng đồng thời là đường phân giác, I là tâm của đường tròn nội tiếp nên CI là phân giác của $\triangle AHC$.

$$\text{Ta có } \frac{IA}{IH} = \frac{CA}{CH} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{IA}{5} = \frac{IH}{3} = \frac{IA + IH}{5 + 3} = \frac{AH}{8} = 1 \Rightarrow \frac{IH}{3} = 1 \Rightarrow IH = 3(\text{cm}).$$

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ là $3(\text{cm})$.

Bài 17. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 13\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính bán kính của đường tròn (O).

Lời giải



Kẻ đường kính AD cắt BC tại H ta có $HB = HC = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Theo định lí Pythagore $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 13^2 - 5^2 \Rightarrow AH = \sqrt{13^2 - 5^2} \Rightarrow AH = 12(\text{cm}).$$

Xét tam giác ABD có BO là đường trung tuyến mà $BO = AO = DO$ hay $BO = \frac{1}{2}AD$ nên tam giác ABD vuông tại B .

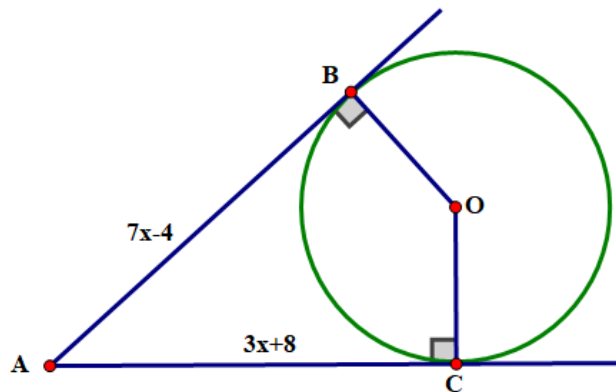
Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AHB$ có: \widehat{BAD} chung và $\widehat{ABD} = \widehat{AHB} = 90^\circ$ Do đó $\triangle ABD \sim \triangle AHB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AH \Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AH} = \frac{13^2}{12} \approx 14,1(\text{cm})$$

Vậy bán kính đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle ABC$: $R \approx \frac{14,1}{2} \approx 7,05(\text{cm})$.

Bài 18. Quan sát hình vẽ. Biết AB, AC lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C . Tính giá trị của x .

Lời giải



Ta có: $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$\text{hay } 7x - 4 = 3x + 8 \Rightarrow 7x - 3x = 8 + 4 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$$

BÀI 17. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. HAI ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU

Tìm hiểu hai đường tròn cắt nhau

Nếu hai đường tròn có đúng hai điểm chung thì ta nói đó là hai đường tròn cắt nhau. Hai điểm chung gọi là hai giao điểm của chúng.

Nhận xét : Hai đường tròn (O, R) và (O', R') cắt nhau khi $R - R' < OO' < R + R'$; ($R > R'$).

Ví dụ 1. Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 5$ cm. Hãy giải thích tại sao hai đường tròn $(O; 4$ cm) và $(O'; 3$ cm) cắt nhau.

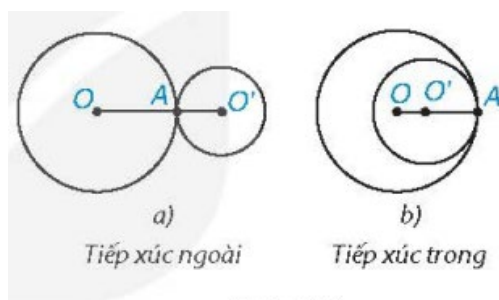
Lời giải

Đặt $R = 4$ cm; $R' = 3$ cm, ta thấy 1 cm < 5 cm < 7 cm, nên $R - R' < OO' < R + R'$. Do đó, hai đường tròn đã cho cắt nhau.

2. HAI ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC NHAU

Tìm hiểu hai đường tròn tiếp xúc nhau

Nếu hai đường tròn có duy nhất một điểm chung thì ta nói đó là hai đường tròn tiếp xúc nhau. Điểm chung gọi là tiếp điểm của chúng.



Hình 5.34

Chú ý: Người ta còn phân biệt hai trường hợp: hai đường tròn tiếp xúc ngoài (H.5.34a) và hai đường tròn tiếp xúc trong (H.5.34b).

Nhận xét

1) Ta nhận thấy: Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài khi $OO' = R + R'$, và tiếp xúc trong khi $OO' = R - R'$; ($R > R'$).

2) Nếu hai đường tròn tiếp xúc với nhau thì tiếp điểm thẳng hàng với hai tâm.

Ví dụ 2. Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 5$ cm. Giải thích tại sao hai đường tròn $(O; 3$ cm) và $(O'; 2$ cm) tiếp xúc với nhau. Chúng tiếp xúc trong hay tiếp xúc ngoài?

Lời giải

Đặt $R = 3$ cm và $R' = 2$ cm, ta thấy 5 cm $= 3$ cm $+ 2$ cm, nghĩa là $OO' = R + R'$.

Vậy hai đường tròn đã cho tiếp xúc ngoài với nhau.

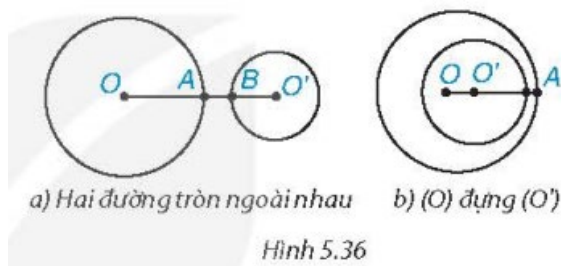
3. HAI ĐƯỜNG TRÒN KHÔNG GIAO NHAU

Tìm hiểu hai đường tròn không giao nhau

Nếu hai đường tròn không có điểm chung nào thì ta nói đó là hai đường tròn không giao nhau.

Chú ý: Người ta còn phân biệt hai trường hợp: hai đường tròn ngoài nhau (H.5.36a) và đường tròn này đựng

đường tròn kia (H.5.36b).



Nhận xét: Ta nhận thấy:

Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ ngoài nhau khi $OO' > R + R'$.

Đường tròn $(O;R)$ đựng đường tròn $(O';R')$ khi $R > R'$ và $OO' < R - R'$. Đặc biệt, khi O trùng với O' và $R \neq R'$ thì ta có hai đường tròn đồng tâm.

Ví dụ 3. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn $(O;3\text{ cm})$ và $(O';5\text{ cm})$, biết rằng $OO' > 8\text{ cm}$.

Lời giải

Đặt $R = 3\text{ cm}$ và $R' = 5\text{ cm}$, ta có $OO' = 8\text{ cm} > R + R'$.

Vậy $(O;3\text{ cm})$ và $(O';5\text{ cm})$ là hai đường tròn ngoài nhau.

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

5.24. Hình 5.37 cho thấy hình ảnh của những đường tròn qua cách trình bày một số sản phẩm mây tre đan. Bằng cách đánh số các đường tròn, em hãy chỉ ra một vài cặp đường tròn cắt nhau và vài cặp đường tròn không giao nhau.



Hình 5.37

Lời giải

Ta đánh số các đường tròn như hình dưới đây.



Từ hình vẽ trên, ta có:

- Một vài cặp đường tròn cắt nhau: 2 và 3; 4 và 5; 7 và 8; 6 và 9.
- Một vài cặp đường tròn không giao nhau: 1 và 2; 1 và 3; 2 và 5; 3 và 6; 5 và 8; ...

5.25. Cho hai điểm O và O' cách nhau một khoảng 5 cm . Mỗi đường tròn sau đây có vị trí tương đối như thế nào đối với đường tròn $(O;3\text{ cm})$.

a) Đường tròn $(O';3\text{ cm})$

- b) Đường tròn $(O'; 1 \text{ cm})$
 c) Đường tròn $(O'; 8 \text{ cm})$.

Lời giải

Ta có: $OO' = 5 \text{ cm}$.

- a) Vì $3 - 3 < 5 < 3 + 3$ nên hai đường tròn $(O; 3 \text{ cm})$ và $(O'; 3 \text{ cm})$ cắt nhau.
 b) Vì $5 > 3 - 1$ nên hai đường tròn $(O; 3 \text{ cm})$ và $(O'; 1 \text{ cm})$ nằm ngoài nhau.
 c) Vì $5 = 8 - 3$ nên hai đường tròn $(O; 3 \text{ cm})$ và $(O'; 8 \text{ cm})$ tiếp xúc trong.

5.26. Cho ba điểm thẳng hàng O, A và O' . Với mỗi trường hợp sau, hãy Viết hệ thức giữa các độ dài OO', OA và $O'A$ rồi xét xem hai đường tròn $(O; OA)$ và $(O'; O'A)$ tiếp xúc trong hay tiếp xúc ngoài với nhau; vẽ hình để khẳng định dự đoán của mình.

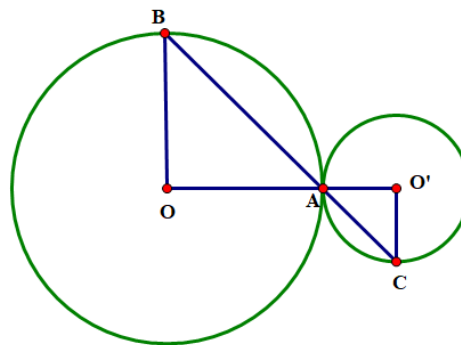
- a) Điểm A nằm giữa hai điểm O và O' ;
 b) Điểm O nằm giữa hai điểm A và O' ;
 c) Điểm O' nằm giữa hai điểm A và O .

Lời giải

- a) Nếu điểm A nằm giữa hai điểm O và O' thì $OO' = OA + O'A$.
 Do đó $(O; OA)$ và $(O'; O'A)$ tiếp xúc ngoài.
 b) Nếu điểm O nằm giữa hai điểm A và O' thì $OO' = O'A - OA$.
 Do đó $(O; OA)$ và $(O'; O'A)$ tiếp xúc trong.
 c) Nếu điểm O' nằm giữa hai điểm A và O thì $OO' = OA - O'A$.
 Do đó $(O; OA)$ và $(O'; O'A)$ tiếp xúc trong.

5.27. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A . Một đường thẳng qua A cắt (O) tại B và cắt (O') tại C . Chứng minh rằng $OB \parallel O'C$.

Lời giải



Vì $OA = OB$ nên tam giác OAB cân tại O , suy ra $\widehat{OBA} = \widehat{OAB}$. Vì $O'A = O'C$ nên tam giác $O'AC$ cân tại O' , suy ra $\widehat{O'AC} = \widehat{O'CA}$. Lại có $\widehat{OAB} = \widehat{O'AC}$ nên $\widehat{OBA} = \widehat{O'CA}$. Vậy $OB \parallel O'C$.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn

Ví dụ 1. Cho hai điểm O và O' cách nhau một khoảng 5 cm . Mỗi đường tròn sau đây có vị trí tương đối như thế nào đối với đường tròn $(O; 3 \text{ cm})$.

- a) Đường tròn $(O'; 3 \text{ cm})$;

b) Đường tròn $(O'; 1cm)$;

c) Đường tròn $(O'; 8cm)$.

Lời giải

a) Đặt $R = 3cm$; $R' = 3cm$. Ta có $3 - 3 < 5 < 3 + 3 \Leftrightarrow R - R' < OO' < R + R'$ hay $0 < 5 < 6$.

Do đó hai đường tròn $(O; 3cm)$ và $(O'; 3cm)$ cắt nhau.

b) Đặt $R = 3cm$; $R' = 1cm$. Ta có $5 > 3 + 1 \Leftrightarrow OO' > R + R'$.

Do đó hai đường tròn $(O; 3cm)$ và $(O'; 1cm)$ ở ngoài nhau.

c) Đặt $R = 3cm$; $R' = 8cm$. Ta có $5 = 8 - 3 \Leftrightarrow OO' = R' - R$.

Do đó hai đường tròn $(O; 3cm)$ và $(O'; 8cm)$ tiếp xúc nhau.

Ví dụ 2. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn (O, R) và (O', R') trong mỗi trường hợp sau:

a) $OO' = 12$; $R = 5$; $R' = 3$;

b) $OO' = 8$; $R = 5$; $R' = 3$;

c) $OO' = 7$; $R = 5$; $R' = 3$;

d) $OO' = 0$; $R = 5$; $R' = 4$;

e) $OO' = 3$; $R = 4$; $R' = 7$

Lời giải

a) Ta có $12 > 5 + 3$ hay $OO' > RR'$. Do đó hai đường tròn (O, R) và (O', R') ở ngoài nhau.

b) Ta có $8 = 5 + 3$ hay $OO' = RR'$. Do đó hai đường tròn (O, R) và (O', R') tiếp xúc ngoài.

c) Ta có $5 - 3 < 7 < 5 + 3$ hay $R - R' < OO' < R + R'$. Do đó hai đường tròn (O, R) và (O', R') cắt nhau.

d) Ta có $0 < 5 - 4$ hay $OO' < R - R'$. Do đó hai đường tròn (O, R) đựng đường tròn (O', R') .

e) Ta có $OO' = R' - R$ hay $3 = 7 - 4$. Do đó hai đường tròn (O, R) và (O', R') tiếp xúc trong.

Ví dụ 3. Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 3 cm$. Giải thích tại sao hai đường tròn $(O, 8cm)$ và $(O', 5cm)$ tiếp xúc nhau. Chúng tiếp xúc trong hay tiếp xúc ngoài?

Lời giải

Đặt $R = 8cm$; $R' = 5cm$. Ta có $3cm = 8cm - 5cm \Leftrightarrow OO' = R - R'$.

Do đó hai đường tròn đã cho tiếp xúc trong với nhau.

Ví dụ 4. Xác định vị trí của hai đường tròn $(O; 3cm)$ và $(O'; 2cm)$ biết $OO' > 5 cm$.

Lời giải

Đặt $R = 3cm$; $R' = 2cm$. Ta có $OO' = 5 > R + R'$.

Do đó hai đường tròn $(O; 3cm)$ và $(O'; 2cm)$ là hai đường tròn ở ngoài nhau.

Ví dụ 5. Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 2 cm$. Xác định vị trí của hai đường tròn $(O; 5cm)$ và $(O'; r)$ biết $r < 3 cm$.

Lời giải

Đặt $R = 8\text{cm}$ và đường tròn tâm O' có bán kính $r < 3\text{ cm}$. Ta có $OO' = 2 < 5 - r (r < 3\text{cm})$.

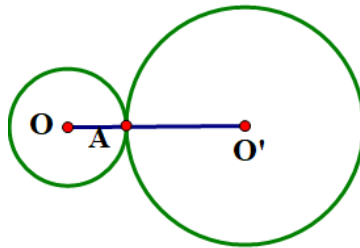
Do đó hai đường tròn $(O; 5\text{cm})$ đựng đường tròn $(O'; r)$ khi $r < 3\text{ cm}$.

Ví dụ 6. Cho ba điểm thẳng hàng O, A và O' . Với mỗi trường hợp sau, hãy viết hệ thức giữa các độ dài OO', OA và $O'A$ rồi xét xem hai đường tròn $(O; OA)$ và $(O'; O'A)$ tiếp xúc trong hay tiếp xúc ngoài với nhau; vẽ các hình để khẳng định dự đoán của mình.

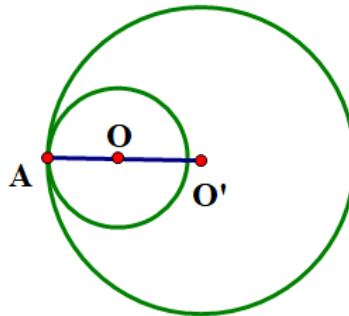
- a) Điểm A nằm giữa hai điểm O và O' ;
- b) Điểm O nằm giữa hai điểm O và A ;
- c) Điểm O' nằm giữa hai điểm O và A .

Lời giải

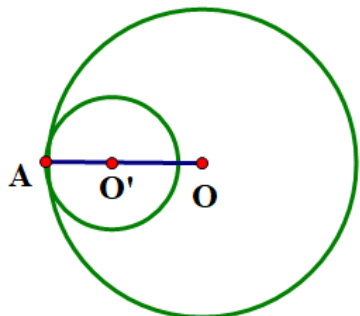
a) Điểm A nằm giữa hai điểm O và O' . Ta có $OO' = OA + O'A$. Hai đường tròn $(O; OA)$ và $(O'; O'A)$ tiếp xúc ngoài.



b) Điểm O nằm giữa hai điểm O và A . Ta có $OO' = O'A - OA$. Hai đường tròn $(O; OA)$ và $(O'; O'A)$ tiếp xúc trong.

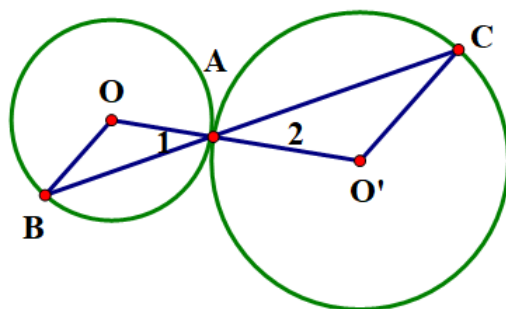


c) Điểm O' nằm giữa hai điểm O và A . Ta có $OO' = O'A - OA$. Hai đường tròn $(O; OA)$ và $(O'; O'A)$ tiếp xúc trong.



Ví dụ 7. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A . Một đường thẳng qua A cắt (O) tại B và cắt (O') tại C . Chứng minh rằng $OB \parallel O'C$.

Lời giải



Gọi bán kính đường tròn (O) là R . Ta có $OA = OB = R$ hay tam giác AOB cân tại $O \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{A}_1$.

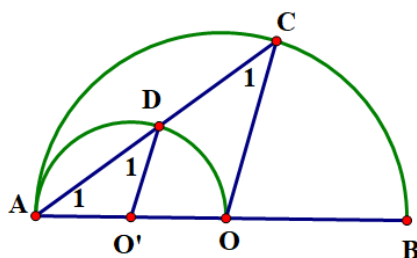
Tương tự ta có $\triangle AOC$ cân tại $O' \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A}_2$ mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (đối đỉnh). Do đó $\widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow OB \parallel O'C$ (cặp góc so le trong bằng nhau).

Ví dụ 8. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ nửa đường tròn tâm O' đường kính OA .

a) Xác định vị trí tương đối của đường tròn (O) và đường tròn (O') .

b) Vẽ dây cung AC của nửa đường tròn (O) cắt nửa đường tròn (O') tại D . Chứng minh OC và OD song song với nhau.

Lời giải



a) Ta có ba điểm A, O', O thẳng hàng và $OO' = OA - O'A (d = R - R')$. Chứng tỏ (O) và (O') tiếp xúc trong tại A .

b) Ta có $\triangle AO'D$ cân (vì $O'A = O'D = R'$) $\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ (1). Tương tự $\triangle AOC$ cân $\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{D}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow O'D \parallel OC$ (cặp góc đồng vị bằng nhau).

Chú ý: Các bạn có thể giải thêm câu c) sau đây: Chứng minh D là trung điểm của AC và OD song song với BC .

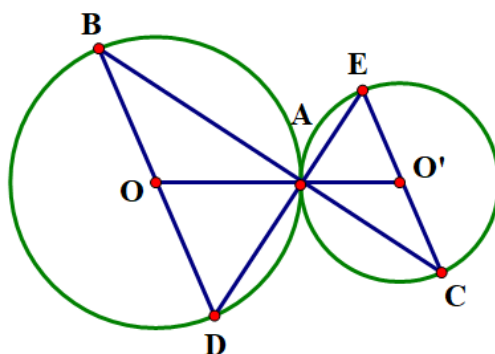
Hướng dẫn: D thuộc nửa đường tròn đường kính AO nên $\widehat{ADO} = 90^\circ$. Khi đó D là trung điểm của AC (định lý đường kính dây cung) ta chứng minh OD là đường trung bình của $\triangle AOC$ để suy ra $OD \parallel BC$.

Ví dụ 9. Cho đoạn thẳng OO' và điểm A nằm giữa hai điểm O và O' . Vẽ đường tròn $(O; OA)$ và đường tròn $(O'; O'A)$. Qua A vẽ đường thẳng cắt (O) tại B và cắt (O') tại C .

a) Chứng minh rằng (O) và (O') tiếp xúc nhau.

b) Vẽ đường kính BD của (O) và CE của (O') , chứng minh rằng D, A, E thẳng hàng.

Lời giải

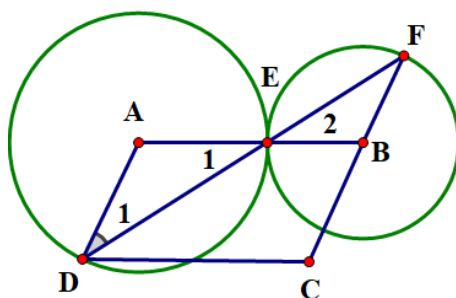


a) Ta có $OO' = OA + O'A$ ($d = R + R'$). Chứng tỏ (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A .

b) Ta có BD là đường kính của (O) nên $OA = \frac{1}{2}BD$ (1). Xét $\triangle ABD$ có AO là đường trung tuyến (1) nên $\triangle ABD$ vuông tại A hay $AD \perp AB$, mà A, C, B thẳng hàng nên $AD \perp BC$, tương tự $AE \perp BC$. Vì vậy AD và AE phải trùng nhau hay ba điểm D, A, E thẳng hàng.

Ví dụ 10. Cho hình bình hành $ABCD$ ($AB > AD$). Vẽ đường tròn tâm A bán kính AD , đường tròn (A) cắt AB tại E . Vẽ đường tròn tâm B bán kính BE , đường tròn (B) cắt đường thẳng DE tại F . Chứng minh đường tròn $(A; AD)$ và $(B; BE)$ tiếp xúc với nhau và ba điểm F, B, C thẳng hàng.

Lời giải

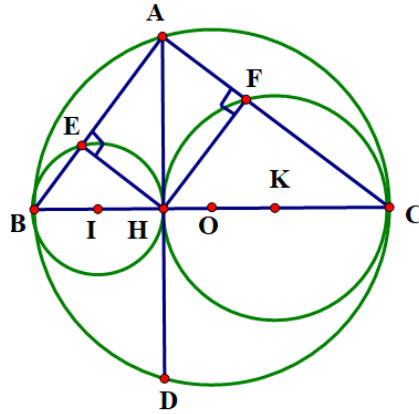


Ta có $AB = AE + EB$ ($d = R + R'$). Chứng tỏ rằng $(A; AD)$ và $(B; BE)$ tiếp xúc với nhau tại E .

Ta có $\triangle ADE$ cân tại A ($AD = AE = R$) $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{E}_1$. Tương tự ta có $\triangle EBF$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{F} = \widehat{E}_2$ mà $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{F}$. Do đó $AD \parallel BF$. Lại có $AD \parallel BC$ (gt). Theo tiên đề O – clit BF, BC phải trùng nhau hay ba điểm F, B, C thẳng hàng.

Ví dụ 11. Cho đường tròn (O) đường kính BC . Một dây AD vuông góc với BC tại H . Gọi E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC . Gọi (I) và (K) lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBE và HCF . Xác định vị trí tương đối của đường tròn (I) và (O) ; (K) và (O) ; (I) và (K) .

Lời giải



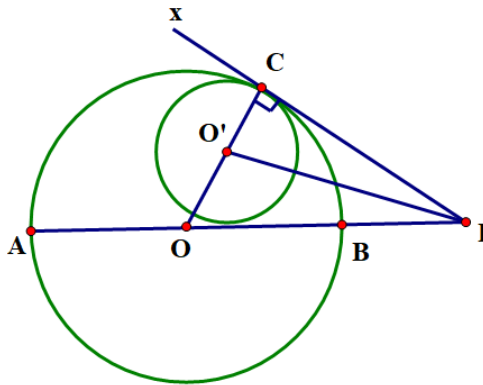
Ta có $OI = OB - IB (d = R - R_1)$. Chứng tỏ (I) và (O) tiếp xúc trong. Tương tự ta chứng minh được (K) và (O) tiếp xúc trong với nhau. Lại có $IK = IH + HK (d = R_1 + R_2)$. Chứng tỏ (I) và (K) tiếp xúc ngoài với nhau.

Ví dụ 12. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Một điểm C (khác A, B) nằm trên đường tròn. Tiếp tuyến Cx của đường tròn cắt tia AB tại I , phân giác của góc CIA cắt OC tại O' .

- Xác định vị trí tương đối của đường tròn (O) và đường tròn $(O'; O'C)$.
- Chứng minh rằng đường tròn $(O'; O'C)$ tiếp xúc với AB .

Lời giải

- Hai đường tròn (O) và (O') có điểm chung C . Cx là tiếp tuyến của đường tròn (O) $(gt) \Rightarrow OC \perp Cx$ mà $O' \in OC \Rightarrow O'C \perp Cx$. Vậy Cx là tiếp tuyến chung hay đường tròn (O) và đường tròn $(O'; O'C)$ tiếp xúc với nhau tại C .



- O' nằm trên phân giác của góc CIA nên O' cách IA một khoảng bằng $O'C$ nên đường tròn $(O'; O'C)$ tiếp xúc với AB .

Ví dụ 13. Cho đường thẳng $OO' = 13cm$. Vẽ đường tròn $(O; 12cm)$ và $(O'; 5cm)$.

- Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (O') .
- Vẽ đường kính AC của (O) và AD của (O') . Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng.

Lời giải

- Ta có $OO' < R + R' (13 < 12 + 5)$ nên hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B

b) Ta có $\widehat{ABC} = 90^\circ$ (AC là đường kính). Tương tự $\widehat{ABD} = 90^\circ$, do đó $\widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 180^\circ$ nên ba điểm C, B, D thẳng hàng.

Dạng 2. Tính toán

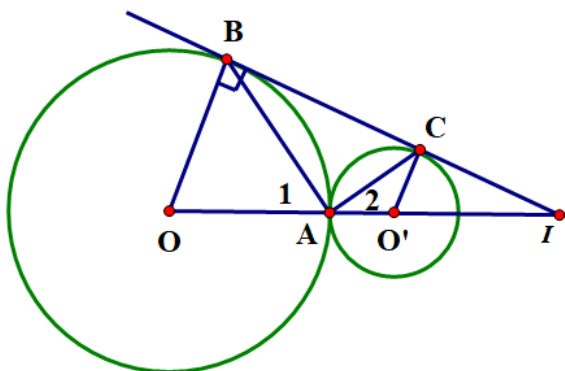
Áp dụng tính chất của hai đường tròn tiếp xúc

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O; 3\text{cm})$ và đường tròn $(O'; 1\text{cm})$ tiếp xúc ngoài nhau tại A , vẽ hai bán kính OB và $O'C$ song song với nhau và cùng thuộc mặt phẳng có bờ là OO' .

a) Tính \widehat{BAC} ;

b) Gọi I là giao điểm của BC và OO' . Tính OI .

Lời giải



a) Ta có $OB \parallel O'C$ (gt) $\Rightarrow \widehat{BOA} + \widehat{CO'A} = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía). Lại có các tam giác AOB và $AO'C$ cân tại O và O' nên

$$\widehat{A}_1 = \frac{180^\circ - \widehat{BOA}}{2}; \widehat{A}_2 = \frac{180^\circ - \widehat{CO'A}}{2} \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \frac{360^\circ - (\widehat{BOA} + \widehat{CO'A})}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 180^\circ - (\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2) = 90^\circ$$

b) $\triangle IBO$ có $OB \parallel O'C$ theo hệ quả định lý Thales

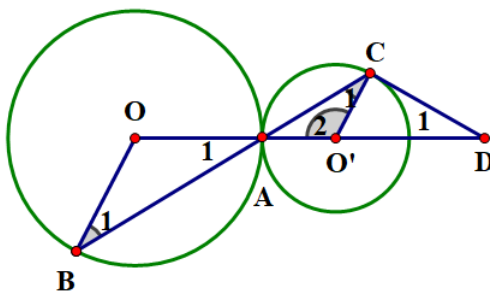
$$\frac{IO}{IO'} = \frac{OB}{O'C} \Rightarrow \frac{IO - IO'}{IO} = \frac{OB - O'C}{OB} \Leftrightarrow \frac{OO'}{IO} = \frac{OB - O'C}{OB} \Rightarrow \frac{4}{IO} = \frac{3-1}{3} \Rightarrow IO = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6(\text{cm})$$

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O; 5\text{cm})$ và đường tròn $(O'; 3\text{cm})$ tiếp xúc ngoài nhau tại A . Một đường thẳng qua A hợp với OO' một góc 30° cắt (O) tại B và (O') tại C .

a) Chứng minh $\widehat{AOB} = \widehat{AO'C}$ và $OB \parallel O'C$.

b) Tiếp tuyến tại C của (O') cắt OO' tại D . Tính $CD, O'D$.

Lời giải



a) $\triangle AOB$ cân tại O có $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$, tương tự với $\triangle AO'C$ có $\widehat{A}_2 = \widehat{C}_1$ mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (đối đỉnh)
 $\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{AO'C}$ (hai tam giác cân có các góc đáy bằng nhau) và
 $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow OB // O'C$ (cặp góc so le trong)

b) Có $\widehat{A}_2 = 30^\circ \Rightarrow \widehat{C}_1 = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AO'C} = 180^\circ - (\widehat{A}_2 + \widehat{C}_1) = 120^\circ \Rightarrow \widehat{CO'D} = 60^\circ$.

Xét tam giác vuông $CO'D$ có $\tan \widehat{CO'D} = \frac{CD}{O'C} \Rightarrow CD = O'C \cdot \tan \widehat{CO'D} = R \cdot \tan 60^\circ = R\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$

$$\frac{O'C}{O'D} = \cos \widehat{CO'D} \Rightarrow O'D = \frac{O'C}{\cos \widehat{CO'D}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6 \text{ (cm)}$$

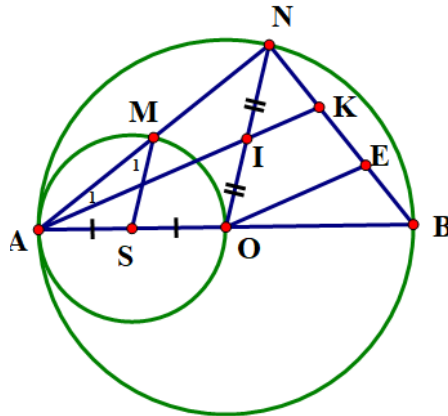
Ví dụ 3. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi S là trung điểm của OA vẽ đường tròn tâm S đi qua A .

a) Chứng minh đường tròn (O) và đường tròn (S) tiếp xúc nhau tại A .

b) Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (S) tại M và cắt (O) tại N (M, N khác A) chứng minh $SM // ON$.

c) Gọi I là trung điểm của ON , đường thẳng AI cắt NB tại K . Chứng minh rằng $BK = 2KN$.

Lời giải



a) Ta có $SO = OA - SA$ ($d = R - R'$). Vậy đường tròn (O) và đường tròn (S) tiếp xúc trong tại A .

b) $\triangle ASM$ cân tại $S \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{M}_1$; $\triangle AON$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{N}_1 \Leftrightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{N}_1 \Rightarrow SM // ON$ (cặp góc đồng vị bằng nhau)

c) Kẻ $OE // IK$ có I là trung điểm của ON (gt) $\Rightarrow IK$ là đường trung bình của $\triangle NOE \Rightarrow KN = KE$.

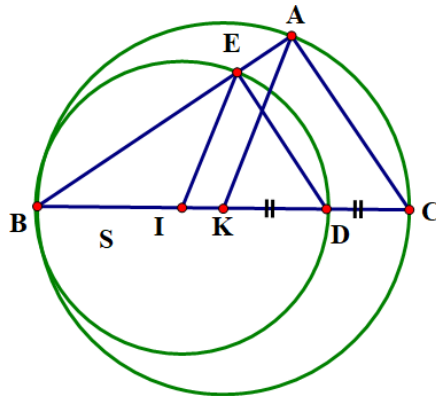
Mặt khác $\triangle AKB$ có O là trung điểm của AB , $OE // AK$ (gt) $\Rightarrow E$ là trung điểm của BK . Do đó $BK = 2KN$.

Ví dụ 4. Cho đường tròn (K) có đường kính BC . Gọi D là trung điểm của KC và I là tâm đường tròn có đường kính BD .

a) Chứng tỏ đường tròn (K) và (I) tiếp xúc nhau.

b) Qua B vẽ đường thẳng (không trùng với BC) cắt (K) tại A và cắt (I) tại E . Chứng tỏ rằng $KA // IE$ và tỉ số $\frac{CA}{DE}$ không đổi.

Lời giải



a) Ta có $KI = KB - IB$ ($d = R - R'$). Vậy đường tròn (K) và (I) tiếp xúc nhau tại B .

b) Chứng minh tương tự câu b Ví dụ 12 ta có $KA // IE$. Ta có $DE \perp BE$ (BD là đường kính). Tương tự ta có $CA \perp BA \Rightarrow DE // AC$.

Áp dụng tính chất hai đường tròn cắt nhau

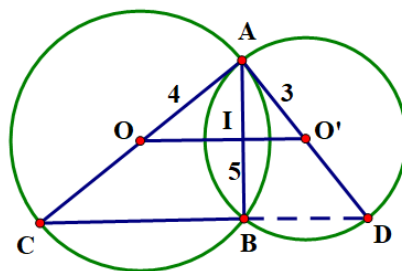
Ví dụ 5. Cho đường tròn $(O; 4cm)$ và $(O'; 3cm)$ và đoạn nối tâm $OO' = 5cm$.

a) Chứng tỏ đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B .

b) Tính độ dài AB .

c) Gọi AC, AD lần lượt là đường kính của đường tròn (O) và (O') . Chứng minh rằng C, B, D thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có $OA - O'A < OA + O'A$ ($4 - 3 < 4 + 3$). Chứng tỏ đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B .

b) Xét tam giác AOO' có $AO = 4cm; AO' = 3cm; OO' = 5cm$. Ta có $5^2 = 4^2 + 3^2$ hay $OO'^2 = AO^2 + AO'^2$. Theo định lý Pythagore đảo ta có tam giác AOO' vuông tại A . Ta có $OA = OB = 4cm; O'A = O'B = 3cm$ nên OO' là đường trung trực của đoạn $AB \Rightarrow OO' \perp AB$. Gọi I là giao điểm của OO' và AB , ta có AI là đường cao của tam giác vuông AOO' . Gọi $S_{AOO'}$ là diện tích của tam giác vuông AOO' .

$$\text{Ta có } S_{AOO'} = \frac{1}{2} AI \cdot OO' = AO \cdot AO' \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow AI = \frac{OA \cdot O'A}{OO'} = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2,4 (cm) \Rightarrow AB = 4,8 cm$$

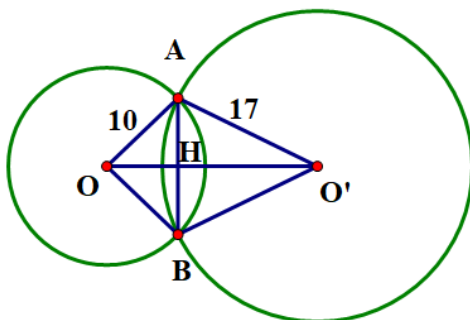
c) Ta có $OA = OB = OC = 4\text{cm} \Rightarrow OB = \frac{1}{2}AC$ nên tam giác ABC vuông tại B hay $BC \perp AB$.

Chứng minh tương tự ta có $BD \perp AB$. Do đó ba điểm C, B, D thẳng hàng.

Ví dụ 6. Cho hai đường tròn $(O; 10\text{cm})$ và $(O'; 17\text{cm})$ cắt nhau tại hai điểm A và B , biết $AB = 16\text{cm}$. Tính độ dài đoạn OO' .

Lời giải

Trường hợp 1:



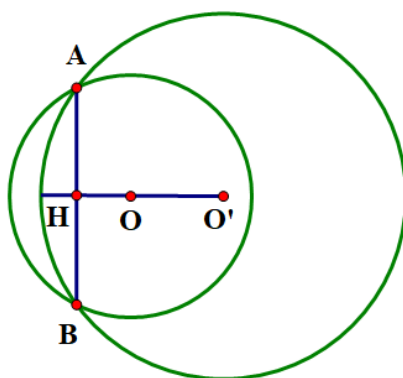
O, O' nằm về hai phía đối với AB . Ta có $OA = OB = 10\text{cm}; O'A = O'B = 17\text{cm}$. Nên OO' là đường trung trực của đoạn AB nên $OO' \perp AB$ tại H và $HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{16}{2} = 8(\text{cm})$. Xét tam giác AHO vuông tại H .

Theo định lý Pythagore, ta có

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow OH^2 = OA^2 - AH^2 = 10^2 - 8^2 \Rightarrow OH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6(\text{cm})$$

Tương tự với tam giác vuông AHO' ta có $HO' = 15\text{cm}$. Vậy $OO' = OH + HO' = 6 + 15 = 21(\text{cm})$.

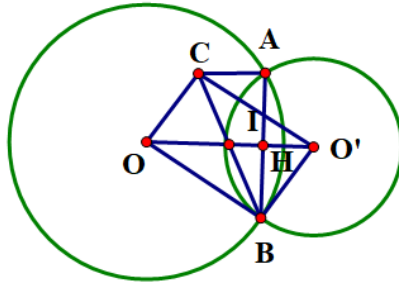
Trường hợp 2: O, O' nằm về cùng một phía với AB .



$$\text{Ta có } OO' = O'H - OH = 15 - 6 = 9(\text{cm})$$

Ví dụ 7. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Vẽ hình bình hành $OBO'C$. Chứng minh rằng $AC // OO'$.

Lời giải



Gọi H là giao điểm của AB và OO' . H là trung điểm AB . Gọi I là giao điểm của BC và OO' . Vì $OBO'C$ là hình bình hành nên I là trung điểm của BC . Do đó IH là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow IH \parallel AC$ hay $OO' \parallel AC$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC , $B \in (O), C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC tại I .

- Chứng minh $\widehat{BAC} = 90^\circ$.
- Tính số đo $\widehat{OIO'}$
- Tính độ dài BC , biết $OA = 9\text{cm}$, $O'A = 4\text{cm}$.

Hướng dẫn (h.93)

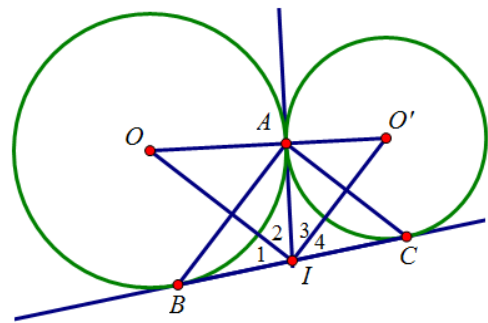
a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:
 $IB = IA = IC$ và $\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2; \widehat{I}_3 = \widehat{I}_4$.

Vậy $\triangle BAC$ vuông tại $A \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$.

b) Theo tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù ta được $\widehat{OIO'} = 90^\circ$.

c) Áp dụng hệ thức $h^2 = b'c'$ vào tam giác vuông OIO' , ta được: $IA^2 = OA \cdot O'A = 9 \cdot 4 = 36 \Rightarrow IA = 6\text{cm}$.

Do đó, $BC = 12\text{cm}$



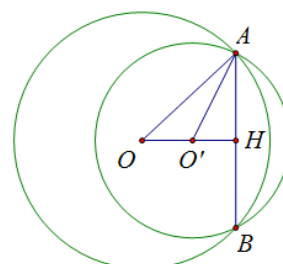
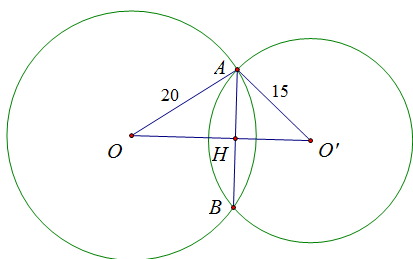
Hình 93

Bài 2. Cho hai đường tròn $(O; 20\text{cm})$ và $(O'; 15\text{cm})$ cắt nhau tại A và B . Tính đoạn nối tâm OO' biết rằng $AB = 24\text{cm}$.

(Xét hai trường hợp: O và O' nằm khác phía đối với AB ; O và O' nằm cùng phía đối với AB ;))

Hướng dẫn (h.94)

Gọi H là giao điểm của OO' và AB . Tính được $AH = 12\text{cm}$. Áp dụng định lý Pythagore tính được: $OH = 16\text{cm}$; $O'H = 9\text{cm}$.



a)

b)

Hình 94

Nếu O và O' nằm khác phía đối với AB (hình 94a) thì: $OO' = 16 + 9 = 25\text{cm}$

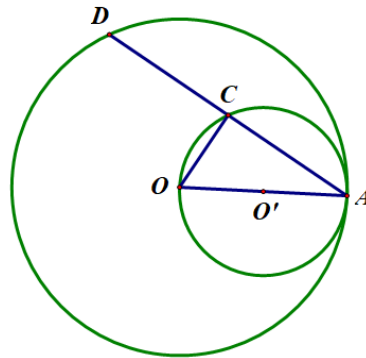
Nếu O và O' nằm cùng phía đối với AB (hình 94b) thì: $OO' = 16 - 9 = 7\text{cm}$.

Bài 3. Cho đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn (O') đường kính OA .

a) Hãy xác định vị trí của hai đường tròn (O) và (O') .

b) Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở C . Chứng minh rằng: $AC = CD$.

Hướng dẫn (h 95)



Hình 95

a) Ta có: $OO' = OA - O'A$ hay $d = R - r$

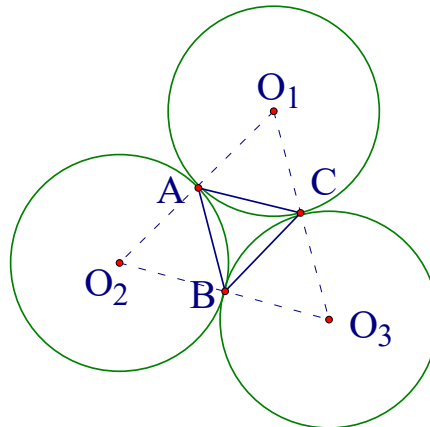
Suy ra đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc trong.

b) Ta có: $CO' = O'A = O'O \Rightarrow \Delta COA$ vuông tại C .

$\Rightarrow OC \perp AD \Rightarrow CA = CD$ (đường kính vuông góc với một dây).

Bài 4. Cho ba đường tròn tâm O_1, O_2, O_3 cùng có bán kính R và tiếp xúc ngoài với nhau đôi một. Tính diện tích tam giác có ba đỉnh là ba tiếp điểm.

Hướng dẫn giải

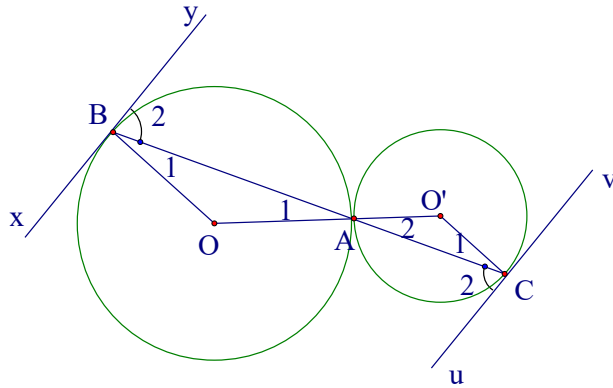


Chứng minh $\Delta O_1O_2O_3$ đều, suy ra ΔABC đều cạnh R .

Đáp số: $S = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc với nhau tại A. Qua A vẽ một cát tuyến cắt đường tròn (O) tại B và cắt đường tròn (O') tại C. Từ B vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn (O). Từ C vẽ đường thẳng $uv \parallel xy$. Chứng minh rằng uv là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Hướng dẫn giải



Nối OO' thì OO' đi qua A.

Bạn hãy chứng minh $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$, suy ra $OB \parallel O'C$.

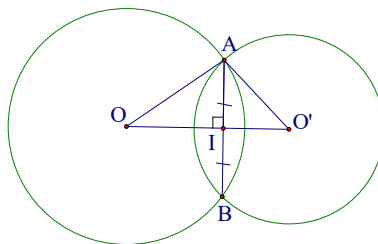
Vì $OB \perp xy$ nên $O'C \perp uv \Rightarrow uv$ là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Bạn cũng có thể chứng minh bằng cách khác: Qua A vẽ một tiếp tuyến chung.

Trường hợp hai đường tròn tiếp xúc trong: cũng chứng minh tương tự.

Bài 6. Cho hai đường tròn (O; 17) và (O'; 10) cắt nhau tại A và B. Biết $OO' = 21$, tính AB.

Hướng dẫn giải



Gọi I là giao điểm của OO' với AB ta được $OO' \perp AB$ và $IA = IB$.

Ta đặt $OI = x$ thì $O'I = 21 - x$

Ta có:

$$OA^2 - OI^2 = O'A^2 - O'I^2 = (AI^2)$$

$$17^2 - x^2 = 10^2 - (21 - x)^2.$$

iải ra ta được $x = 15$.

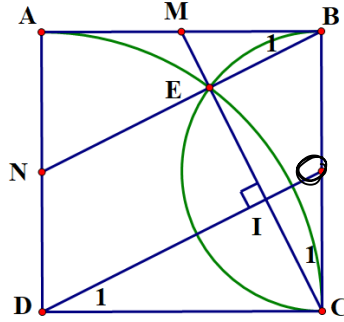
$$AI^2 = 17^2 - 15^2 = 64 \Rightarrow AI = 8.$$

Vậy $AB = 16 \text{ cm}$.

Bài 7. Cho hình vuông ABCD. Vẽ đường tròn (D; DC) và đường tròn đường kính BC. Chúng cắt nhau tại một điểm thứ hai là E. Tia CE cắt AB tại M, tia BE cắt AD tại N. Chứng minh rằng:

- a) N là trung điểm của AD.
- b) M là trung điểm của AB.

Hướng dẫn giải



a) Gọi I là giao điểm của OD với CE
 Ta có : $DE=DC$ nên D nằm trên đường trung trực của EM
 $OE=OC$ nên O nằm trên đường trung trực của EC
 Do đó, OD là đường trung trực của EC . Suy ra $OD \perp CE$ và $IC = IE$
 Ta có: $OI // BE$ (Tính chất đường trung bình của tam giác)
 Suy ra: $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ (hai góc có cạnh tương ứng song song)

$$\Delta ABN = \Delta CDO(\text{g.c.g})$$

$$\Rightarrow AN = CO = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2}$$

Vậy N là trung điểm của AD.

b) $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$$\Delta BCM = \Delta CDO(\text{g.c.g})$$

$$\Rightarrow BM = CO = \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2}$$

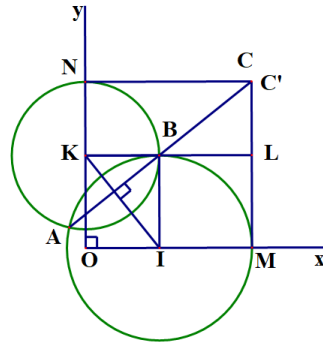
Vậy M là trung điểm của AB

Bài 8. Cho góc vuông xOy. Lấy các điểm I và K thứ tự trên các tia Ox và Oy. Vẽ đường tròn (I; OK) cắt tia Ox tại M (I nằm giữa O và M). Vẽ đường tròn (K; OI) cắt tia Oy tại N (K nằm giữa O và N)

- a) Chứng minh hai đường tròn (I) và (K) luôn cắt nhau
- b) Tiếp tuyến tại M của đường tròn (I), tiếp tuyến tại N của đường tròn (K) cắt nhau tại C. Chứng minh tứ giác OMCN là hình vuông

- c) Gọi A, B là các giao điểm của (I) và (K) trong đó B ở miền trong góc xOy. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng
- d) Giả sử I và K thứ tự di động trên các tia Ox và Oy sao cho $OI + OK = a$ không đổi. Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định

Hướng dẫn giải



- a) Xét ΔOIK có:

$$|OK - OI| < IK < OK + OI$$

tức là $R - r < d < R + r$

Suy ra hai đường tròn (O) và (O') luôn cắt nhau.

- b) Tứ giác OMCN có $\widehat{O} = \widehat{M} = \widehat{N} = 90^\circ$ và $OM = ON$ nên là hình vuông.

- c) Kéo dài KB cắt MC tại L. Gọi giao điểm của đường thẳng AB với tia MC là C.

Để thấy tứ giác OKBI là hình chữ nhật, tứ giác BLMI là hình vuông.

$$\Delta BLC' = \Delta KOI \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow LC' = OI \Rightarrow MC = OM = MC$$

$$\Rightarrow C' \equiv C$$

Do đó ba điểm A, B, C thẳng hàng.

- d) Ta có: $OI + OK = a \Rightarrow OM = a$.

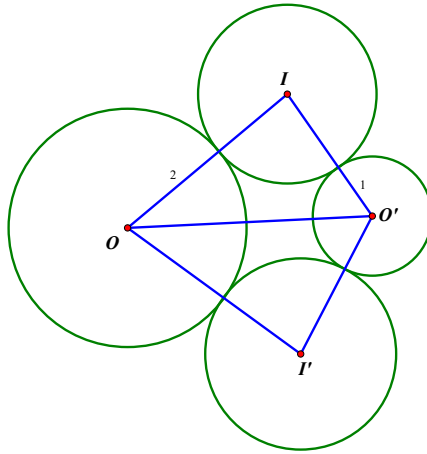
Hình vuông OMCN cạnh a , cố định, đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định là điểm C.

Bài 9. Cho đoạn thẳng $OO' = 4\text{cm}$. Vẽ các đường tròn (O; 2cm) và (O'; 1cm)

- a) Hãy xác định vị trí tương đối giữa hai đường tròn đó.

- b) Dựng đường tròn (I; 1,5cm) tiếp xúc ngoài với hai đường tròn (O) và (O')

Hướng dẫn giải



Hình 160

a) Dùng dấu hiệu $d > R + r$ thì hai đường tròn ở ngoài nhau.

b) Phân tích:

$$OI = 2 + 1,5 = 3,5 (cm).$$

$$O'I = 1 + 1,5 = 2,5 (cm).$$

Điểm I là giao của hai đường tròn $(O; 3,5cm)$ và $(O'; 2,5cm)$. Bạn đọc làm tiếp các bước còn lại.

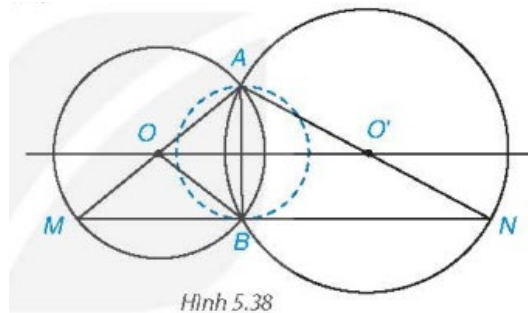
LUYỆN TẬP CHUNG

A. VÍ DỤ SÁCH GIÁO KHOA

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') cắt nhau tại A và B . Gọi M là điểm đối xứng với A qua O , N là điểm đối xứng với A qua O' .

- a) Chứng minh rằng $M \in (O), N \in (O')$ và ba điểm M, B, N thẳng hàng.
 b) Chứng minh rằng đường thẳng MN tiếp xúc với đường tròn đường kính AB .

Lời giải



Hình 5.38

a) Do tính đối xứng của (O) nên từ $A \in (O)$ suy ra $M \in (O)$ (vì M đối xứng với A qua O). Tam giác ABM có BO là đường trung tuyến và $BO = \frac{1}{2}AM$ (bán kính bằng nửa đường kính) nên là tam giác vuông tại B . Vậy $\widehat{ABM} = 90^\circ$.

Tương tự, ta cũng có $N \in (O')$ và $\widehat{ABN} = 90^\circ$. Từ hai kết quả trên suy ra

$$\widehat{MBN} = \widehat{ABM} + \widehat{ABN} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Điều đó chứng tỏ ba điểm M, B, N thẳng hàng.

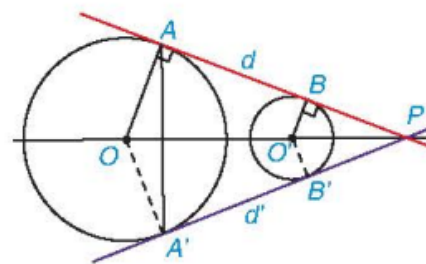
b) Kết quả câu a còn cho thấy $MN \perp AB$, tức là MN vuông góc với bán kính của đường tròn đường kính AB tại B . Do đó, MN là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB .

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn ngoài nhau $(O; R)$ và $(O'; R')$ với giả thiết $R > R'$. Một đường thẳng d tiếp xúc với $(O; R)$ tại A và tiếp xúc với $(O'; R')$ tại B sao cho O và O' nằm cùng phía đối với d . Giả sử d cắt đường thẳng OO' tại điểm P (Hình 5.39).

a) Chứng minh rằng $\frac{PO}{PO'} = \frac{R}{R'}$;

b) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua OO' . Chứng minh rằng đường thẳng PA' tiếp xúc với (O) và với (O') .

Lời giải



Hình 5.39

a) Do d tiếp xúc với (O) tại A , tiếp xúc với (O') tại B nên $OA \perp d$ và $O'B \perp d$. Do đó, trong tam

giác POA ta có $O'B \parallel OA$, suy ra $\triangle POA \sim \triangle PO'B$. Từ đó, ta có $\frac{PO}{PO'} = \frac{OA}{O'B} = \frac{R}{R'}$

b) Do A' đối xứng với A qua OO' và $A \in (O)$ nên $A' \in (O)$ và $OO' \perp AA'$, tức là $OP \perp AA'$.

Tam giác OAA' là tam giác cân (do $OA = OA'$) có $OP \perp AA'$ nên OP là tia phân giác của góc AOA' , suy ra $\widehat{AOP} = \widehat{A'OP}$.

Hai tam giác AOP và $A'OP$ có: $OA = OA'$ (bán kính đường tròn (O)); OP chung và $\widehat{AOP} = \widehat{A'OP}$. Vậy

$\triangle AOP = \triangle A'OP$ (c.g.c), suy ra $\widehat{PA'O} = \widehat{PAO}$ mà $\widehat{PAO} = 90^\circ$ (do PA tiếp xúc với (O)) nên $\widehat{PA'O} = 90^\circ$.

Vậy PA' vuông góc với bán kính OA' của (O) tại A' . Điều đó chứng tỏ PA' tiếp xúc với (O) tại A' .

Đối với đường tròn (O') , gọi B' là chân đường vuông góc hạ từ O' xuống PA' . Để khẳng định rằng PA'

cũng tiếp xúc với (O') tại B' , ta chỉ cần chứng minh $B' \in (O')$. Do đó $\frac{OA'}{O'B'} = \frac{PO}{PO'}$.

Mà theo câu a ta có $\frac{PO}{PO'} = \frac{R}{R'}$ nên $\frac{OA'}{O'B'} = \frac{R}{R'}$, hay $\frac{R}{O'B'} = \frac{R}{R'}$.

Điều này chứng tỏ $O'B' = R'$, nghĩa là $B' \in (O')$.

Vậy PA' tiếp xúc với (O) tại A' và tiếp xúc với (O') tại B' .

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

5.28. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau, điểm O nằm trong phần mặt phẳng ở giữa hai đường thẳng đó. Biết rằng khoảng cách từ O đến a và b lần lượt bằng 2 cm và 3 cm

a) Hỏi bán kính R của đường tròn (O, R) phải thỏa mãn điều kiện gì để (O, R) cắt cả hai đường thẳng a và b ?

b) Biết rằng đường tròn (O, R) tiếp xúc với đường thẳng a . Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn (O, R) và đường thẳng b .

Lời giải

a) Đường tròn (O, R) cắt cả hai đường thẳng a và b khi và chỉ khi $R > 3$ cm.

b) Đường tròn (O, R) tiếp xúc với đường thẳng a nên $R = 2$ cm < 3 cm. Do đó (O, R) cắt đường thẳng b .

5.29. Khi chuyển động, giả sử đầu mũi kim dài của một chiếc đồng hồ vạch nên một đường tròn, kí hiệu là (T_1) , trong khi đầu mũi kim ngắn vạch nên một đường tròn khác, kí hiệu là (T_2) .

a) Hai đường tròn (T_1) và (T_2) có vị trí tương đối như thế nào?

b) Giả sử bán kính của (T_1) và (T_2) lần lượt là R_1 và R_2 . Người ta vẽ trên mặt đồng hồ một họa tiết hình tròn có tâm nằm cách điểm trục kim đồng hồ một khoảng bằng $\frac{1}{2}R_1$ và có bán kính bằng $\frac{1}{2}R_2$. Hãy cho

biết vị trí tương đối của đường tròn (T_3) đối với mỗi đường tròn (T_1) và (T_2) . Vẽ ba đường tròn đó nếu $R_1 = 3$ cm và $R_2 = 2$ cm.



Lời giải

a) Hai đường tròn (T1) và (T2) là hai đường tròn đồng tâm, (T1) chứa (T2).

b) Gọi tâm của (T1) là O , tâm của (T3) là O' :

$$\text{Ta có: } R_3 = \frac{1}{2}R_1; \frac{1}{2}R_1 < R_1 < R_1 + R_3.$$

$$\text{Suy ra: } R_1 = \frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{2}R_1 > \frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{2}R_2 \text{ nên } R_1 > OO' + R_3 \text{ hay } OO' < R_1 - R_3.$$

Do đó (T1) đựng (T3).

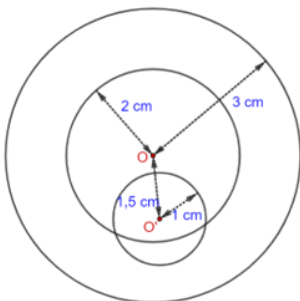
$$\text{Ta có: } R_3 = \frac{1}{2}R_2; \frac{1}{2}R_1 < R_1 < R_1 + R_3.$$

$$\text{Suy ra: } R_2 = \frac{1}{2}R_2 + \frac{1}{2}R_2 < \frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{2}R_2 \text{ nên } R_2 < OO' + R_3 \text{ hay } OO' > R_2 - R_3$$

Khi đó $R_2 - R_3 < OO' < R_2 + R_3$. Do đó (T2) và (T3) cắt nhau.

Vậy (T1) đựng (T3); (T2) và (T3) cắt nhau.

- Với $R_1 = 3\text{ cm}$, $R_2 = 2\text{ cm}$, ta có hình vẽ sau:



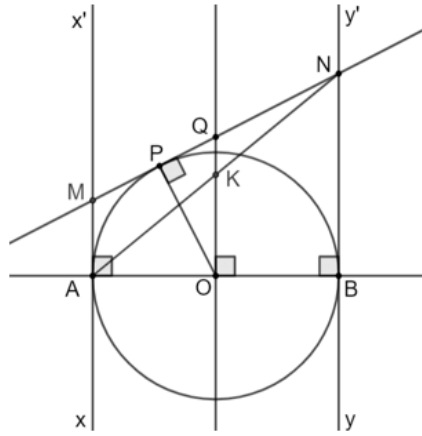
5.30. Cho đường tròn (O) đường kính AB , tiếp tuyến xx' tại A và tiếp tuyến yy' tại B của (O) . Một tiếp tuyến thứ ba của (O) tại điểm P (P khác A và B) cắt xx' tại M và cắt yy' tại N .

a) Chứng minh rằng $MN = MA + NB$.

b) Đường thẳng đi qua O và vuông góc với AB cắt MN tại Q . Chứng minh rằng Q là trung điểm của đoạn MN .

c) Chứng minh rằng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính MN .

Lời giải



a) MA và MC là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O) nên $MA = MC$.

NB và NC là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O) nên $NA = NC$. Ta có: $MN = MC + NC = MA + NB$

b) Gọi K là giao điểm của AN và OQ.

Ta có: $BN \parallel OK$ (vì cùng vuông góc với AB) và O là trung điểm của AB.

Suy ra OK là đường trung bình của tam giác ABN. Do đó K là trung điểm của AN.

Lại có: $AM \parallel QK$ (vì cùng vuông góc với AB) và K là trung điểm của AN.

Suy ra QK là đường trung bình của tam giác AMN. Do đó Q là trung điểm của MN.

c) OK là đường trung bình của tam giác ABN nên $OK = \frac{1}{2}NB$.

QK là đường trung bình của tam giác AMN nên $QK = \frac{1}{2}MA$.

Suy ra: $OQ = OK + QK = \frac{1}{2}NB + \frac{1}{2}MA = \frac{1}{2}MN$ hay $OQ = AQ = BQ$.

Do đó O thuộc đường tròn đường kính MN.

Mà OQ vuông góc với AB tại O nên AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính MN.

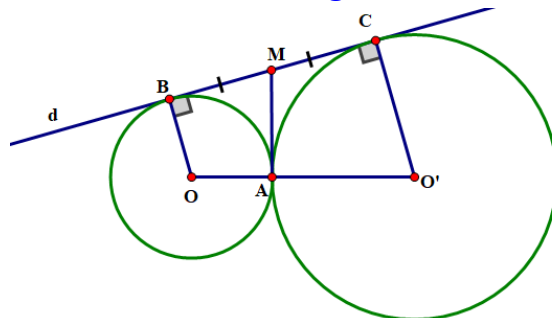
5.31. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A và cùng tiếp xúc với đường thẳng d tại B và C (khác A), trong đó $B \in (O)$ và $C \in (O')$. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC tại M.

Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng MA tiếp xúc với (O');

b) Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng BC từ đó suy ra ABC là tam giác vuông.

Lời giải



a) A thuộc (O') và O'A vuông góc với MA nên MA là tiếp tuyến tại A của (O').

b) MA và MB là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O) nên $MA = MB$.

MA và MC là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O) nên $MA = MC$.

Suy ra $MB = MC = MA$ hay M là trung điểm của BC . Do đó tam giác ABC vuông tại A .

C. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$), $AB = 4\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$ và $CD = 9\text{cm}$. Tính AD và chứng minh rằng đường thẳng AD tiếp xúc với đường tròn có đường kính là BC .

Lời giải

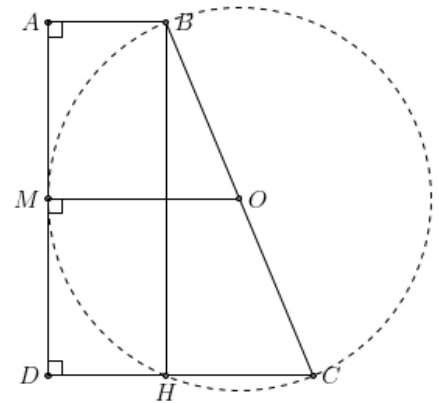
Dựng $BH \perp CD \Rightarrow ABHD$ là hình chữ nhật. Suy ra

$$AD^2 = BH^2 = BC^2 - CH^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow AD = 12$$

Gọi O và M lần lượt là trung điểm BC và AD .

Ta được $MO \perp AD$ và $MO = \frac{AB + CD}{2} = \frac{13}{2} = \frac{BC}{2}$.

Do đó, AD là đường thẳng vuông góc với bán kính của đường tròn (O) tại tiếp điểm M . Nên AD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC .



Bài 2. Cho điểm O cách đường thẳng a là 6cm . Vẽ đường tròn $(O, 10\text{cm})$.

1. Chứng minh rằng (O) có hai giao điểm với đường thẳng a .
2. Gọi hai giao điểm nói trên là B và C . Tính diện tích tam giác OBC .

Lời giải

1. Vì $\begin{cases} R = 10 \\ d = 6 \end{cases}$, nên $R > d$, do đó a cắt (O) tại hai điểm

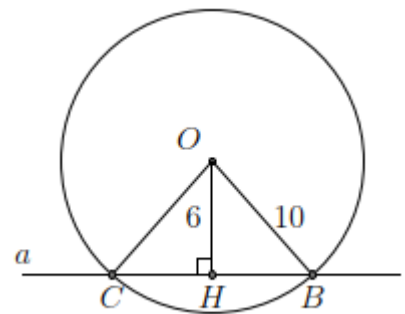
phân biệt B và C .

2. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O xuống a .

Suy ra $OH = 6\text{cm}$ và H là trung điểm BC .

$$\text{Do đó: } BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \Rightarrow AC = 16$$

$$\text{Suy ra diện tích tam giác } OBC : S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 16 = 48\text{cm}^2$$



Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm E trên cạnh BC và điểm F trên cạnh CD sao cho $AB = 3BE = 2DF$. Chứng minh EF tiếp xúc với cung tròn tâm A , bán kính AB .

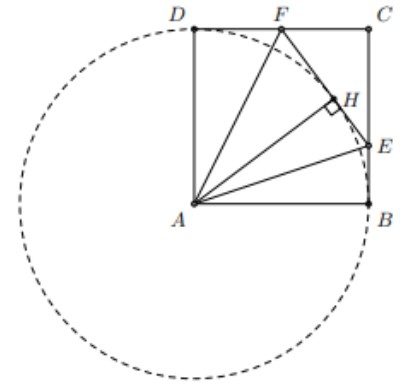
Lời giải

Dựng $AH \perp EF$ tại H . Gọi độ dài cạnh hình vuông bằng a . Ta có:

$$EF^2 = FC^2 + CE^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} = \frac{25a^2}{36} \Rightarrow EF = \frac{5a}{6}$$

Mặt khác

$$S_{\triangle AEF} = S_{ABCD} - S_{\triangle ADF} - S_{\triangle CEF} - S_{\triangle AEB} = a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{6} = \frac{5a^2}{12}.$$



Từ đó suy ra

$$AH = \frac{2S_{\triangle AEF}}{EF} = \frac{2 \cdot \frac{5a^2}{12}}{\frac{5a}{6}} = a.$$

Suy ra EF vuông góc bán kính đường tròn (A, AB) tại tiếp điểm H hay EF tiếp xúc (A, AB) tại H .

Bài 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = \frac{8R}{5}$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB , cắt các tia OA, OB theo thứ tự tại M và N . Tính diện tích tam giác OMN .

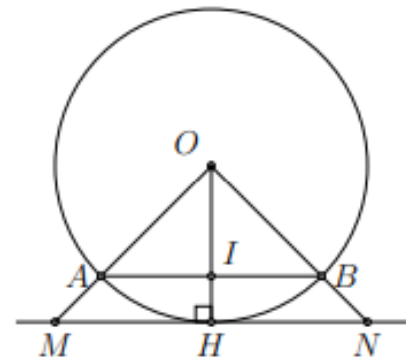
Lời giải

Gọi I là trung điểm AB , ta có $AI = \frac{4R}{5}$. Suy ra

$$OM^2 = OA^2 - AI^2 = R^2 - \frac{16R^2}{25} = \frac{9R^2}{25}$$

$$\Rightarrow OM = \frac{3R}{5}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot OI \cdot AB = \frac{12R^2}{25}$$



Gọi H là tiếp điểm của tiếp tuyến MN . Do $MN \parallel AB$ nên ta có:

$$\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OMN}} = \frac{OI^2}{OH^2} = \frac{9}{25}$$

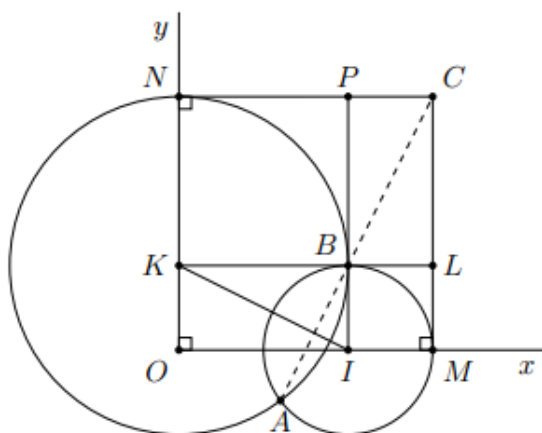
$$\Rightarrow S_{\triangle OMN} = \frac{25}{9} S_{\triangle OAB} = \frac{4R^2}{3}.$$

Vậy diện tích tam giác OMN bằng $\frac{4R^2}{3}$.

Bài 5. Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$. Lấy các điểm I, K theo thứ tự trên các tia Ox, Oy . Vẽ đường tròn $(I; OK)$ cắt tia Ox tại M (I nằm giữa O và M). Vẽ đường tròn $(K; OI)$ cắt tia Oy tại N (K nằm giữa O và N).

1. Chứng minh hai đường tròn (I) và (K) luôn cắt nhau.
2. Tiếp tuyến tại M của đường tròn (I) và tiếp tuyến tại N của đường tròn (K) cắt nhau tại C . Chứng minh tứ giác $OMCN$ là hình vuông.
3. Gọi giao điểm của hai đường tròn (I) và (K) là A và B . Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.
4. Giả sử I và K theo thứ tự di động trên Ox và Oy sao cho $OI + OK = a$ không đổi. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



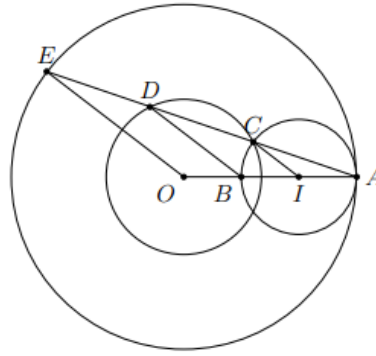
1. Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác ta có $|OK - OI| < IK < OK + OI$. Do đó hai đường tròn (I) và (K) luôn cắt nhau.
2. Ta có $\widehat{CMO} = \widehat{MON} = \widehat{NOC} = 90^\circ$ nên tứ giác $OMCN$ là hình chữ nhật.
Mặt khác, $OI = OK, OK = IM$, suy ra $OM = ON$, do đó tứ giác $OMCN$ là hình vuông.
3. Gọi L là giao điểm của KB và MC , K là giao điểm của IB và NC . Khi đó tứ giác $OKBI$ là hình chữ nhật và tứ giác $BLMI$ là hình vuông.
4. Vì $OI + OK = a$ không đổi nên $OM = OI + IM = OI + OK = a$ không đổi.
Mặt khác do tứ giác $OMCN$ là hình vuông nên $OC = \sqrt{2}OM = a\sqrt{2}$ không đổi. Vậy C là điểm cố định và AB luôn đi qua C .

Bài 6. Cho đường tròn (O) và một điểm A trên đường tròn đó. Trên đoạn OA lấy điểm B sao cho $OB = \frac{1}{3}OA$. Vẽ đường tròn đường kính AB .

1. Chứng minh đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường tròn (O) .
2. Vẽ đường tròn đồng tâm O với đường tròn (O) cho trước, cắt đường tròn đường kính AB tại C . Tia AC cắt hai đường tròn đồng tâm tại D, E (D nằm giữa C và E). Chứng minh $AC = CD = DE$.

Lời giải

1. Gọi I là trung điểm của AB . Ta có $OI = OA - IA$ nên đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường tròn (O)



2. Ta có $IC = IA$ nên tam giác CIA cân tại A . Do đó

$$\widehat{CIA} = 180^\circ - (\widehat{ICA} + \widehat{IAC}) = 180^\circ - 2\widehat{IAC}$$

Tương tự $\widehat{DBA} = 180^\circ - 2\widehat{BAD}$ và $\widehat{EOA} = 180^\circ - 2\widehat{OAE}$. Từ đó suy ra $IC \parallel BD \parallel OE$.

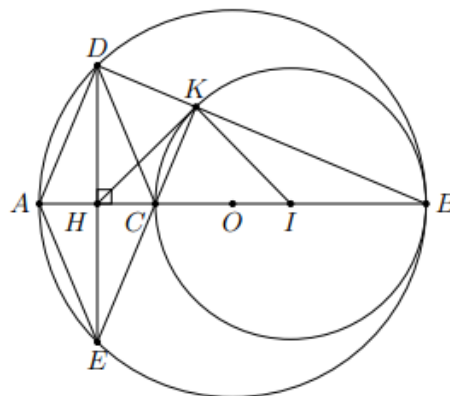
Mặt khác, $IA = IO = \frac{1}{3}AB$ (do $OB = \frac{1}{3}OA$). Do đó $OB = BI = IA$. Suy ra $AC = CD = DE$.

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB , điểm C nằm giữa A và O . Vẽ đường tròn (I) có đường kính CB .

1. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (I) .
2. Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC . Tứ giác $ADCE$ là hình gì? Vì sao?
3. Gọi K giao điểm của DB và đường tròn (I) . Chứng minh ba điểm E, C, K thẳng hàng.
4. Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (I) .

Lời giải

1. Vì điểm C nằm giữa A và O , I là trung điểm của BC nên I nằm giữa B và O , do đó $IO = OB - IB$. Vậy hai đường tròn (O) và (I) tiếp xúc trong với nhau tại I .



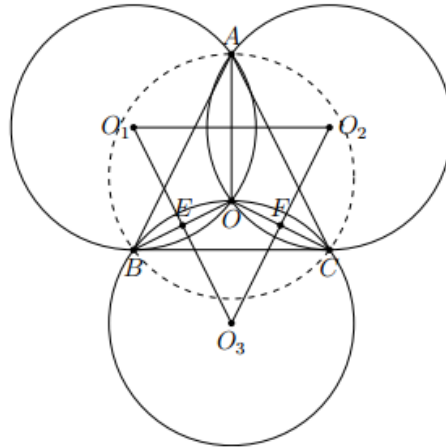
2. Vì H là trung điểm của AC và DE , $DE \perp AC$ tại H nên tứ giác $ADCE$ là hình thoi.
3. Ta có $CK \perp AB$, $AD \perp DB$ nên $CK \parallel AD$ mà $CE \parallel AD$ do đó ba điểm E, C, K thẳng hàng.
4. Ta có $\widehat{HKD} = \widehat{HDK}$, $\widehat{IKB} = \widehat{IBK}$ nên $\widehat{HKD} + \widehat{IKB} = \widehat{HDK} + \widehat{IBK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IKH} = 90^\circ$

Vậy HK là tiếp tuyến của đường tròn (I) .

Bài 8. Cho ba đường tròn (O_1) , (O_2) , (O_3) có cùng bán kính R và cùng đi qua điểm O . Gọi giao điểm thứ hai của từng cặp trong ba đường tròn là A , B , C . Chứng minh

- Đường tròn đi qua ba điểm A , B , C có bán kính bằng R .
- Ba đường thẳng xác định bởi tâm của một đường tròn và giao điểm của hai đường tròn còn lại cắt nhau tại một điểm.

Lời giải



1. Gọi E giao điểm của O_1O_3 và OB , F giao điểm của O_2O_3 và OC . Vì EF là đường trung bình của hai tam giác $O_1O_2O_3$ và OBC nên $BC \parallel O_1O_2$ và $BC = O_1O_2$. Tương tự $AB = O_2O_3$ và $AC = O_1O_3$. Do đó $\triangle ABC = \triangle O_1O_2O_3$ (c.c.c).

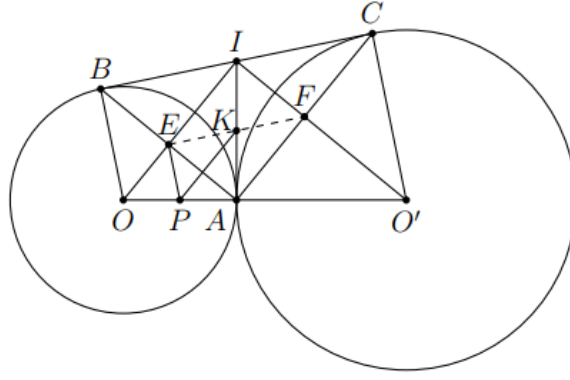
Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính bằng R (vì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $O_1O_2O_3$ bằng R).

2. Ba đường thẳng AO_3 , BO_2 , CO_1 cắt nhau tại một điểm vì đó là các đường thẳng chứa các đường chéo của hai hình bình hành có chung một đường chéo.

Bài 9. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc với (O) và (O') lần lượt ở B và C . Tiếp tuyến chung trong cắt BC ở I . Gọi E và F theo thứ tự là giao điểm của IO và AB và của IO' và AC .

- Chứng minh A , E , I , F cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm K của đường tròn đó.
- Chứng minh $IE \cdot IO + IF \cdot IO' = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2)$.
- Gọi P là trung điểm của OA . Chứng minh PE tiếp xúc với (K) .
- Cho OO' cố định và có độ dài là $2a$. Tìm điều kiện của R và R' để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải



1. Vì IB và IA là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $IO \perp AB$ tại E . (1)

Vì IC và IA là tiếp tuyến của đường tròn (O') nên $IO' \perp AC$ tại F . (2)

Mặt khác

$$\widehat{EIF} = \widehat{EIA} + \widehat{FIA} = \frac{1}{2}\widehat{BIA} + \frac{1}{2}\widehat{CIA} = \frac{1}{2}(\widehat{BIA} + \widehat{CIA}) = \frac{1}{2}\widehat{BIC} = \frac{1}{2}.180^\circ = 90^\circ \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có $\widehat{AEI} = \widehat{AFI} = \widehat{EIF} = 90^\circ$, do đó tứ giác $AEIF$ là hình chữ nhật.

Vì vậy A, E, I, F cùng thuộc một đường tròn có tâm K là trung điểm của AI VÀ EF .

2. Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông OAI ($\widehat{IAO} = 90^\circ$), $AE \perp OI$ ta có:

$$IE.IO = IA^2 = IB^2 = \frac{BC^2}{4} \quad (4)$$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông $O'AI$ ($\widehat{IAO'} = 90^\circ$), $AE \perp O'I$ ta có:

$$IF.IO' = IA^2 = IC^2 = \frac{BC^2}{4} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta có:

$$IE.IO + IF.IO' = \frac{BC^2}{4} + \frac{BC^2}{4} = \frac{BC^2}{2} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2).$$

3. Vì P là trung điểm của OA nên PK là đường trung bình của tam giác OAI và PK là đường trung trực của EA . Do đó $\widehat{PEK} = \widehat{PAK} = 90^\circ$. Vậy PE tiếp xúc với (K) .

4. Ta có $\triangle ABC \sim \triangle IOO'$ (g - g) nên $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle IOO'}} = \left(\frac{BC}{OO'}\right)^2 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle IOO'} \cdot BC^2}{OO'^2} \quad (6)$

Mà $BC = 2IA$; $OO' = 2a$; $S_{\triangle IOO'} = \frac{1}{2}OO'.IA = \frac{1}{2}.2a.IA$ nên thay vào (6) ta được:

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle IOO'} \cdot BC^2}{OO'^2} = \frac{a.IA.(2IA)^2}{(2a)^2} = \frac{IA^3}{a}.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OIO' ($\widehat{OIO'} = 90^\circ, IA \perp OO'$) ta có:

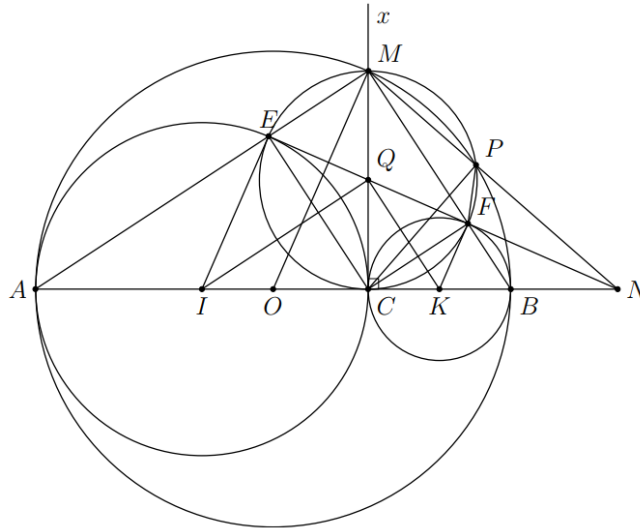
$$IA^2 = AO.AO' = R.R' \leq \left(\frac{R+R'}{2}\right)^2 = a^2.$$

Suy ra IA lớn nhất bằng a khi $R = R'$. Vậy S_{ABC} lớn nhất bằng a^2 khi $R = R'$.

Bài 10. Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm C di động trên đoạn AB . Vẽ các đường tròn tâm I đường kính AC và đường tròn tâm K đường kính BC . Tia Cx vuông góc với AB tại C , cắt (O) tại M . Đoạn thẳng MA cắt đường tròn (I) tại E và đoạn thẳng MB cắt đường tròn tâm (K) tại F .

1. Chứng minh tứ giác $MECF$ là hình chữ nhật và EF là tiếp tuyến chung của (I) và (K) .
2. Cho $AB = 4cm$, xác định vị trí điểm C trên AB để diện tích tứ giác $IEFK$ lớn nhất.
3. Khi C khác O , đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $MECF$ cắt đường tròn (O) tại P (khác M), đường thẳng PM cắt đường thẳng AB tại N . Chứng minh tam giác MPF đồng dạng với tam giác MBN .
4. Chứng minh ba điểm N, E, F thẳng hàng.

Lời giải



1. Xét $\triangle AMB$ có $MO = OA = OB$ nên $\triangle AMB$ vuông tại M . Từ đó suy ra:

$$\widehat{EMF} = \widehat{AMB} = 90^\circ. \quad (1)$$

Tương tự ta có: $\widehat{AEC} = 90^\circ$ và $\widehat{CFB} = 90^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{CEM} = \widehat{EMF} = \widehat{MFC} = 90^\circ$. Do đó tứ giác $EMFC$ là hình chữ nhật.

Gọi Q là giao điểm của MC và EF . Do tứ giác $EMFC$ là hình chữ nhật nên $QE = QC$.

Mặt khác $IE = IC$ nên IQ là đường trung trực của CE . Suy ra $\widehat{IEQ} = \widehat{ICQ} = 90^\circ$. Do đó EF là tiếp tuyến của đường tròn (I) . (3)

Tương tự: $\widehat{KFQ} = \widehat{KCQ} = 90^\circ$, suy ra EF là tiếp tuyến của đường tròn (K) . (4)

Từ (3) và (4) suy ra EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K) .

2. Do $\widehat{IEF} = \widehat{KFE} = 90^\circ$ nên tứ giác $IEFK$ là hình thang vuông tại E và F . Do đó

$$S_{IEFK} = \frac{1}{2}(IE + FK).EF = \frac{1}{2}\left(\frac{AC}{2} + \frac{BC}{2}\right).EF = \frac{1}{4}AB.EF.$$

Mà tứ giác $EMFC$ là hình chữ nhật nên $EF = CM$. Khi C di động trên đoạn AB và $Cx \perp AB$ thì $CM \leq \frac{AB}{2}$. Do đó:

$$S_{IEFK} = \frac{1}{4} AB \cdot EF = \frac{1}{4} AB \cdot CM \leq \frac{1}{4} AB \cdot \frac{AB}{2} = \frac{1}{8} AB^2 = \frac{1}{8} \cdot 4^2 = 2 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Do đó giá trị lớn nhất của S_{IEFK} bằng $2 \text{ (cm}^2\text{)}$, đạt được khi và chỉ khi C trùng với O .

3. Vì P thuộc đường tròn đường kính CM nên tam giác MCP vuông tại P . Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông NCM , $CP \perp MN$, ta có:

$$MC^2 = MP \cdot MN \quad (5)$$

Tương tự, Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông MCB , đường cao CF , ta có:

$$MC^2 = MF \cdot MB \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra: $MP \cdot MN = MF \cdot MB \Rightarrow \frac{MP}{MB} = \frac{MF}{MN}$.

Xét hai tam giác MPF và MBN có \widehat{PMF} chung, $\frac{MP}{MB} = \frac{MF}{MN}$ (chứng minh trên), do đó

$$\Delta MPF \sim \Delta MBN \text{ (c - g - c)}$$

4. Ta có $\widehat{OMA} = \widehat{OAM} = \widehat{CMB} = \widehat{CEF}$, do đó $OM \perp EF$. (7)

Vì $QP = QM$, $OP = OM$ nên QO là đường trung trực của đoạn thẳng MP , suy ra $OQ \perp MN$. Mặt khác $MQ \perp ON$ nên Q là trực tâm của ΔOMN , do đó $NQ \perp OM$ (8)

Từ (7) và (8) ta có bốn điểm N, E, F, Q thẳng hàng. Vậy ba điểm N, E, F thẳng hàng.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

A. TRẮC NGHIỆM SÁCH GIÁO KHOA

5.32. Cho đường tròn $(O; 4 \text{ cm})$ và hai điểm A, B . Biết rằng $OA = \sqrt{15} \text{ cm}$ và $OB = 4 \text{ cm}$. Khi đó:

- A. Điểm A nằm trong (O) , điểm B nằm ngoài (O) .
- B. Điểm A nằm ngoài (O) , điểm B nằm trên (O) .
- C. Điểm A nằm trên (O) , điểm B nằm trong (O) .
- D. Điểm A nằm trong (O) , điểm B nằm trên (O) .

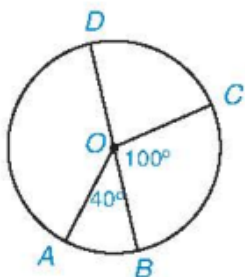
Lời giải

Chọn D

Vì $OA = \sqrt{15} \text{ cm} < 4 \text{ cm}$ nên điểm A nằm trong $(O; 4 \text{ cm})$. Vì $OB = 4 \text{ cm}$ nên điểm B nằm trên $(O; 4 \text{ cm})$.

Vậy điểm A nằm trong (O) , điểm B nằm trên (O) .

5.33. Cho Hình 5.43, trong đó BD là đường kính, $\widehat{AOB} = 40^\circ$; $\widehat{BOC} = 100^\circ$. Khi đó:



Hình 5.43

- A. số đo $\widehat{DC} = 80^\circ$ và số đo $\widehat{AD} = 220^\circ$.
- B. số đo $\widehat{DC} = 280^\circ$ và số đo $\widehat{AD} = 220^\circ$.
- C. số đo $\widehat{DC} = 280^\circ$ và số đo $\widehat{AD} = 140^\circ$.
- D. số đo $\widehat{DC} = 80^\circ$ và số đo $\widehat{AD} = 140^\circ$.

Lời giải

Chọn D

- vì \widehat{DOC} và \widehat{BOC} là hai góc kề bù nên $\widehat{DOC} + \widehat{BOC} = 180^\circ$.

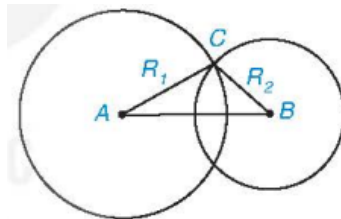
Suy ra $\widehat{DOC} = 180^\circ - \widehat{BOC} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

- vì \widehat{AOD} và \widehat{AOB} là hai góc kề bù nên $\widehat{AOD} + \widehat{AOB} = 180^\circ$.

Suy ra $\widehat{AOD} = 180^\circ - \widehat{AOB} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Do đó số đo $\widehat{AD} = 140^\circ$.

Vậy số đo $\widehat{DC} = 80^\circ$ và số đo $\widehat{AD} = 140^\circ$.

5.34. Cho hai đường tròn $(A; R_1), (B; R_2)$, trong đó $R_2 < R_1$. Biết rằng hai đường tròn (A) và (B) cắt nhau (H.5.44). Khi đó:



Hình 5.44

- A. $AB < R_1 - R_2$.
- B. $R_1 - R_2 < AB < R_1 + R_2$.
- C. $AB > R_1 + R_2$.
- D. $AB = R_1 + R_2$.

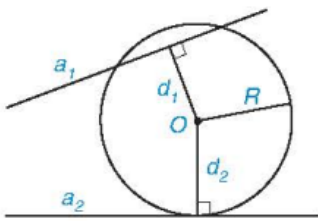
Lời giải

Chọn B

Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác ABC, ta có: $AC - BC < AB < AC + BC$.

Do đó $R_1 - R_2 < AB < R_1 + R_2$.

5.35. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai đường thẳng a_1 và a_2 . Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ điểm O đến a_1 và a_2 . Biết rằng (O) cắt a_1 và tiếp xúc với a_2 (H.5.45). Khi đó:



Hình 5.45

- A. $d_1 < R$ và $d_2 = R$.
- B. $d_1 = R$ và $d_2 < R$.
- C. $d_1 > R$ và $d_2 = R$.
- D. $d_1 < R$ và $d_2 < R$.

Lời giải

Chọn A

- Vì (O) cắt a_1 nên $d_1 < R$.

- Vì (O) tiếp xúc với a_2 nên $d_2 = R$.

Vậy $d_1 < R, d_2 = R$.

B. TỰ LUẬN SÁCH GIÁO KHOA

5.36. Cho đường tròn (O) đường kính BC và điểm A (khác B và C).

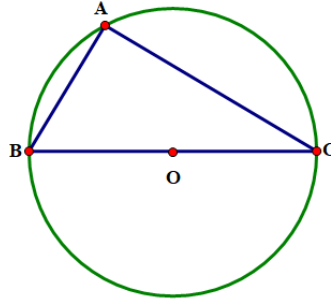
a) Chứng minh rằng nếu A nằm trên (O) thì ABC là một tam giác vuông; ngược lại, nếu ABC là tam giác vuông tại A thì A nằm trên (O) .

b) Giả sử A là một trong hai giao điểm của đường tròn $(B; BO)$ với đường tròn (O) . Tính các góc của tam giác ABC.

c) Với cùng giả thiết câu b, tính độ dài cung AC và diện tích hình quạt nằm trong (O) giới hạn bởi các bán kính OA và OC, biết rằng $BC = 6$ cm.

Lời giải

a)



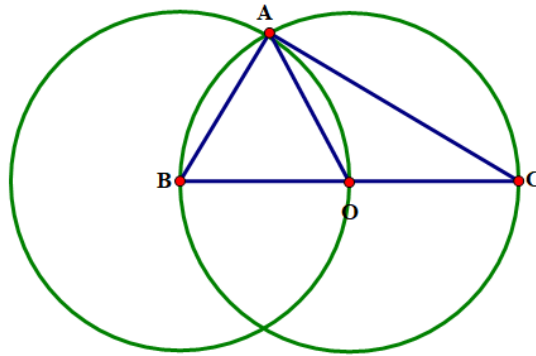
Vì điểm A nằm trên đường tròn tâm O nên $AO = BO = CO$.

Tam giác ABC có AO là đường trung tuyến ứng với cạnh BC và $AO = \frac{1}{2}BC$ nên tam giác ABC vuông tại A.

Chiều ngược lại: Nếu tam giác ABC vuông tại A, gọi O là trung điểm của cạnh huyền BC thì ta có $AO = BO = CO$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông).

Từ đó ta có A, B, C thuộc đường tròn tâm O.

b)



Vì điểm A là giao điểm của hai đường tròn (O) và (B) nên A thuộc (O) đường kính BC nên tam giác BAC vuông tại A.

Tam giác ABO có $AB = BO = AO$ nên tam giác ABO đều suy ra $\widehat{ABO} = \widehat{AOB} = \widehat{BAO} = 60^\circ$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

c) Ta có: $\widehat{AOB} + \widehat{AOC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù).

Suy ra $\widehat{AOC} = 180^\circ - \widehat{AOB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Đường kính BC = 6 cm nên bán kính đường tròn (O) là: $6 : 2 = 3(\text{cm})$.

Độ dài cung AC là: $\frac{2\pi \cdot 3 \cdot 120}{360} = 2\pi(\text{cm})$.

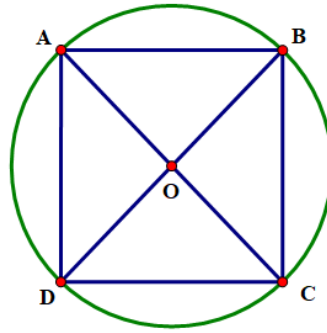
Diện tích phần quạt chứa OA, OC là: $\frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} = \frac{3^2 \pi \cdot 120}{360} = 3\pi(\text{cm}^2)$.

5.37. Cho AB là một dây bất kì (không phải là đường kính) của đường tròn (O; 4 cm). Gọi C và D lần lượt là các điểm đối xứng với A và B qua tâm O.

a) Hai điểm C và D có nằm trên đường tròn (O) không? Vì sao?

b) Biết rằng ABCD là một hình vuông. Tính độ dài cung lớn AB và diện tích hình quạt tròn tạo bởi hai bán kính OA và OB.

Lời giải



a) Vì A thuộc (O), C là điểm đối xứng của A qua O nên C thuộc (O);
 Vì B thuộc (O), D là điểm đối xứng của B qua O nên D thuộc (O).

b) ABCD là hình vuông nên AC và BD vuông góc

Do đó: $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Suy ra $sđ\widehat{AB} = 90^\circ$. Khi đó, số đo cung lớn AB là: $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

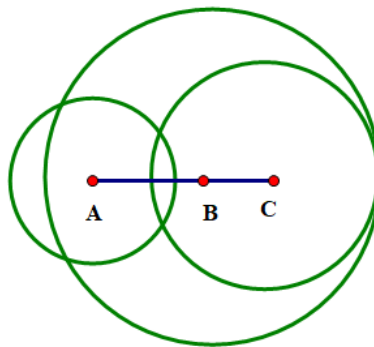
Độ dài cung lớn AB là: $\frac{n}{180} \cdot \pi R = \frac{270}{180} \cdot 4\pi = 6\pi(\text{cm})$.

Diện tích hình quạt tròn tạo bởi hai bán kính OA và OB là: $\frac{n}{360} \cdot \pi R^2 = \frac{90}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = 4\pi(\text{cm}^2)$. Vậy độ dài cung lớn AB là $6\pi(\text{cm})$; diện tích hình quạt tròn tạo bởi hai bán kính OA và OB là $4\pi(\text{cm}^2)$.

5.38. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C, sao cho $AB = 2 \text{ cm}$ và $BC = 1 \text{ cm}$. Vẽ các đường tròn $(A; 1,5 \text{ cm})$, $(B; 3 \text{ cm})$ và $(C; 2 \text{ cm})$. Hãy xác định các cặp đường tròn:

- Cắt nhau;
- Không giao nhau;
- Tiếp xúc với nhau.

Lời giải

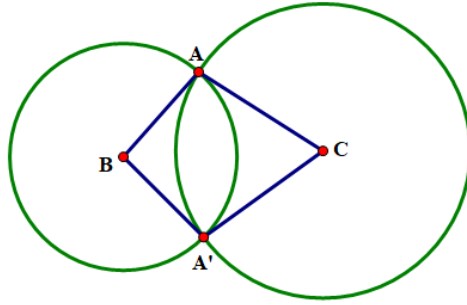


- Cặp đường thẳng cắt nhau: (A) và (B); (A) và (C).
- Không có cặp đường tròn nào không giao nhau.
- Tiếp xúc với nhau: (B) và (C).

5.39. Cho tam giác vuông ABC (\hat{A} vuông). Vẽ hai đường tròn $(B; BA)$ và $(C; CA)$ cắt nhau tại A và A'. Chứng minh rằng:

- BA và BA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(C; CA)$.
- CA và CA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(B; BA)$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle A'BC$ có: $BA = BA'$; BC chung; $CA = CA'$

Do đó $\triangle ABC = \triangle A'BC$ (c.c.c). Suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C} = 90^\circ$ (hai góc tương ứng)

Khi đó $CA' \perp BA'$ tại A' nên BA' là tiếp tuyến của $(C; CA)$

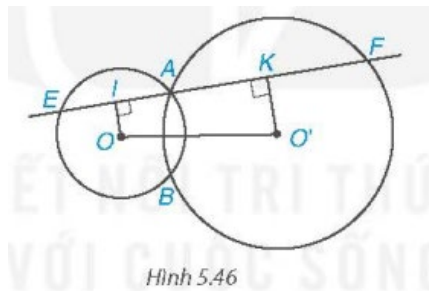
Lại có: $CA \perp BA$ tại A nên BA là tiếp tuyến của $(C; CA)$

Vậy CA và CA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của $(C; CA)$.

b) $CA' \perp BA'$ tại A' nên CA' là tiếp tuyến của $(B; BA)$. $CA \perp BA$ tại A nên CA là tiếp tuyến của $(B; BA)$.

Vậy BA và BA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của $(B; BA)$.

5.40. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Một đường thẳng d đi qua A cắt (O) tại E và cắt (O') tại F (E và F khác A). Biết điểm A nằm trong đoạn EF . Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AE và AF (H.5.46).



Hình 5.46

a) Chứng minh rằng tứ giác $OO'KI$ là một hình thang vuông.

b) Chứng minh rằng $K = \frac{1}{2}EF$.

c) Khi d ở vị trí nào (d vẫn qua A) thì $OO'KI$ là một hình chữ nhật?

Lời giải

a) Tam giác OAE cân tại O có OI là trung tuyến nên OI cũng là đường cao.

Tam giác $O'AF$ cân tại O' có $O'K$ là trung tuyến nên $O'K$ cũng là đường cao.

Suy ra $OI \parallel O'K$ (vì cùng vuông góc với d).

Do đó $OO'KI$ là hình thang.

Hình thang $OO'KI$ có $\widehat{OIA} = 90^\circ$ nên $OO'KI$ là một hình thang vuông (đpcm).

b) Vì I là trung điểm của AE nên $IA = \frac{1}{2}AE$.

Vì K là trung điểm của AF nên $AK = \frac{1}{2}AF$.

$$\text{Suy ra } IK = IA + AK = \frac{1}{2}AE + \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}EF.$$

$$\text{Vậy } IK = \frac{1}{2}EF.$$

c) Hình thang $OO'KI$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi $\widehat{OIO'} = 90^\circ$ hay $OI \perp OO'$. Mà $d \perp OI$ nên $d // OO'$. Vậy d vẫn qua A và $d // OO'$ thì $OO'KI$ là một hình chữ nhật.

C. BÀI TẬP THÊM

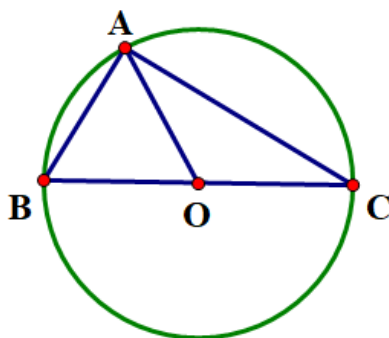
Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính BC và điểm A (khác B và C).

a) Chứng minh rằng nếu A nằm trên (O) thì ABC là một tam giác vuông; ngược lại, nếu ABC là một tam giác vuông tại A thì A nằm trên (O) .

b) Giả sử A là một trong hai giao điểm của đường tròn $(B; BO)$ với đường tròn (O) . Tính các góc của tam giác ABC .

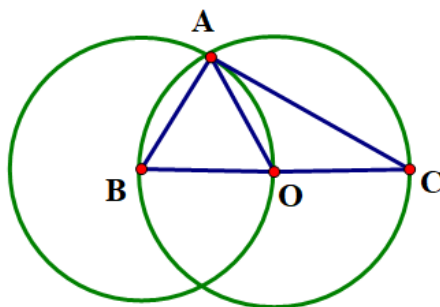
c) Với cùng giả thiết câu b, tính độ dài cung AC và diện tích hình quạt nằm trong (O) giới hạn bởi các bán kính OA và OC biết rằng $BC = 6 \text{ cm}$.

Lời giải



a) A nằm trên $(O) \Rightarrow OA = OB = OC$. Tam giác ABC có O là trung điểm đoạn BC nên AO là trung tuyến mà $AO = \frac{1}{2}BC$. Do đó $\triangle ABC$ vuông tại A . Ngược lại tam giác ABC vuông tại A có AO là đường trung tuyến $\Rightarrow OA = OB = OC$. Chứng tỏ A thuộc đường tròn (O) .

b)



Khi A là giao điểm của đường tròn $(B; BO)$ với đường tròn (O) . Ta có $OA = OB = AB$ nên $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 180^\circ - \widehat{AOB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Xét tam giác AOC cân tại O có

$\widehat{AOC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{OAC} = 30^\circ$. Xét tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 90^\circ$. Các góc của tam giác ABC là $\widehat{BAC} = 90^\circ; \widehat{B} = 60^\circ; \widehat{C} = 30^\circ$.

c) Khi $BC = 6\text{cm}$ ta có bán kính đường tròn (O) là 3 cm . Gọi l_{AC} là độ dài cung AC có

$l_{AC} = \frac{120}{180} \cdot 3 \cdot \pi \approx 6,3(\text{cm})$. Gọi S là diện tích hình quạt nằm trong (O) giới hạn bởi các bán kính OA và

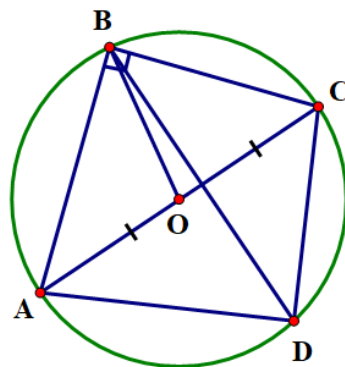
OC ta có $S = \frac{120}{360} \cdot \pi \cdot 3^2 \approx 9,4(\text{cm}^2)$

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) So sánh độ dài của AC và BD .

Lời giải



a) Nối A với C . Gọi O là trung điểm đoạn AC . Xét tam giác ABC vuông tại B , OB là đường trung tuyến $\Rightarrow OB = \frac{1}{2} AC$ hay $OA = OB = OC$. Do đó bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn

$\left(O; \frac{AC}{2}\right)$. Chứng minh tương tự D nằm trên đường tròn $\left(O; \frac{AC}{2}\right)$

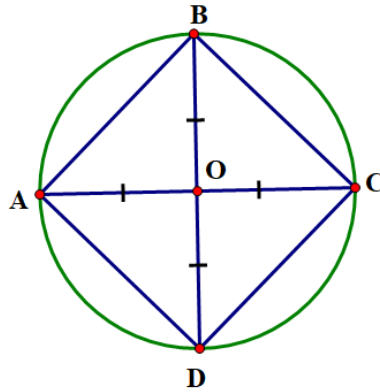
b) $AC > BD$ (AC là đường kính).

Bài 3. Cho AB là dây bất kì (không phải là đường kính) của đường tròn $(O; 4\text{cm})$. Gọi C và D lần lượt là các điểm đối xứng với A và B qua tâm O .

a) Hai điểm C và D có nằm trên đường tròn (O) không? Vì sao?

b) Biết rằng $ABCD$ là một hình vuông. Tính độ dài cung lớn AB và diện tích hình quạt tròn tạo bởi hai bán kính OA và OB .

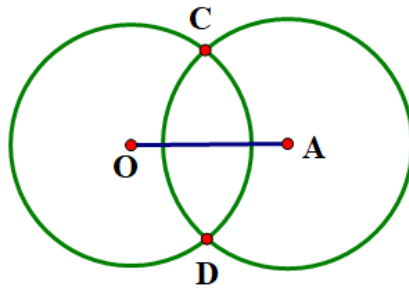
Lời giải



a) Vì C đối xứng với A qua tâm $O \Rightarrow OC = OA$. Chứng minh tương tự $OD = OB$ mà $OA = OB = 4\text{cm} \Rightarrow OA = OB = OC = OD = 4\text{cm}$ hay hai điểm C và D có nằm trên đường tròn (O) .

b) $ABCD$ là một hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$ tại O hay số đo cung nhỏ AB bằng 90° . \Rightarrow Số đo cung lớn AB là $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$. Ta có độ dài cung lớn AB là $l = \frac{90}{180} \cdot \pi \cdot 4 = 6,28(\text{cm})$. Gọi S là diện tích hình quạt tròn tạo bởi hai bán kính OA và OB . Ta có $S = \frac{90}{180} \cdot \pi \cdot 4^2 = 12,56(\text{cm}^2)$

Bài 4. Cho hai đường tròn $(O; 2\text{cm})$ và $(A; 2\text{cm})$ cắt nhau tại C, D , điểm A nằm trên đường tròn tâm O .



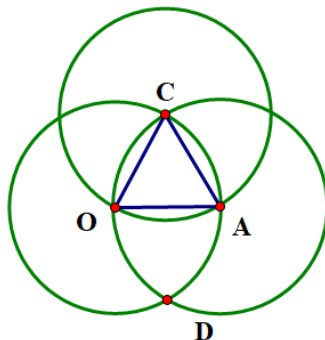
a) Vẽ đường tròn $(C; 2\text{cm})$.

b) Đường tròn $(C; 2\text{cm})$ có đi qua hai điểm O và A không? Vì sao?

Lời giải

a) Xem hình vẽ.

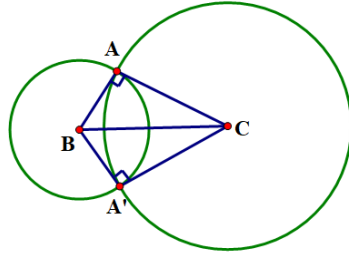
b) Vì $C \in (O; 2\text{cm}) \Rightarrow CO = 2\text{cm}$. Tương tự $C \in (A; 2\text{cm}) \Rightarrow CA = 2\text{cm}$. Ta có $CO = CA = 2\text{cm}$ nên $(C; 2\text{cm})$ đi qua hai điểm O và A .



Bài 5. Cho tam giác vuông ABC (\hat{A} vuông). Vẽ hai đường tròn $(B; BA)$ và $(C; CA)$ cắt nhau tại A và A' . Chứng minh rằng:

- a) BA và BA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(C; CA)$.
- b) CA và CA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(B; BA)$.

Lời giải

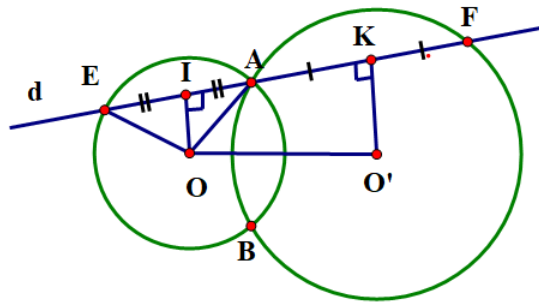


a) Xét $\triangle BA'C$ và $\triangle BAC$ có BC là cạnh chung; $BA = BA', CA = CA'$. Do đó $\triangle BA'C = \triangle BAC$ (c.c.c)
 $\Rightarrow \widehat{BA'C} = \widehat{BAC} = 90^\circ$ hay $BA' \perp CA'$. Chứng tỏ BA' là tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(C; CA)$.

Lại có $BA \perp CA$ nên BA là tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(C; CA)$. Do đó BA và BA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(C; CA)$.

b) Chứng minh tương tự CA và CA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(B; BA)$.

Bài 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Một đường thẳng d đi qua A cắt (O) tại E và cắt (O') tại F (E và F khác A). Biết điểm A nằm trong đoạn EF . Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AE và AF .



- a) Chứng minh rằng tứ giác $OO'KI$ là một hình thang vuông.
- b) Chứng minh rằng $IK = \frac{1}{2}EF$.
- c) Khi d ở vị trí nào (d vẫn qua A) thì $OO'KI$ là một hình chữ nhật?

Lời giải

a) Ta có $OE = OA$ nên tam giác AOE cân tại O và I là trung điểm của AE nên OI là đường trung tuyến mà $\triangle AOE$ cân tại O . $\Rightarrow OI$ đồng thời là đường cao hay $OI \perp AE$. Chứng minh tương tự, ta có $O'K \perp AF$ mà $E, A, F \in d$ nên $OI, O'K$ cùng vuông góc với $d \Rightarrow OI \parallel O'K$. Do đó tứ giác $OO'KI$ là một hình thang vuông.

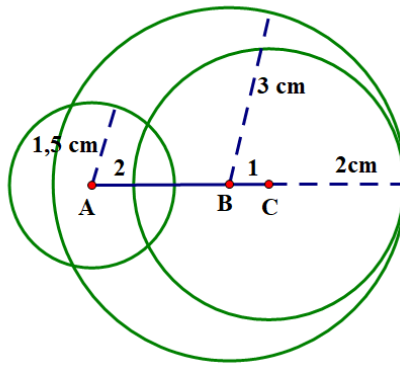
b) Ta có $IK = IA + AK$ mà $IA = \frac{1}{2}EA; AK = \frac{1}{2}AF \Rightarrow IK = \frac{1}{2}(EA + AF) = \frac{1}{2}EF$

c) d đi qua A và $d // OO'$ thì $OO'KI$ là một hình chữ nhật.

Bài 7. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C , sao cho $AB = 2\text{cm}$ và $BC = 1\text{cm}$. Vẽ các đường tròn $(A; 1,5\text{cm}), (B; 3\text{cm}), (C; 2\text{cm})$. Hãy xác định các cặp đường tròn:

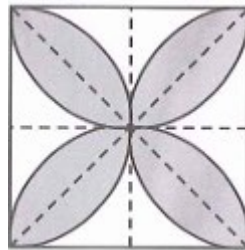
- a) Cắt nhau;
- b) Không giao nhau;
- c) Tiếp xúc nhau.

Lời giải



- a) Đường tròn $(A; 1,5\text{cm}), (B; 3\text{cm})$ cắt nhau. Đường tròn $(A; 1,5\text{cm}), (C; 2\text{cm})$ cắt nhau.
- b) Không có.
- c) Đường tròn $(B; 3\text{cm}), (C; 2\text{cm})$ tiếp xúc trong.

Bài 8. Trong hình vẽ, độ dài cạnh của các hình vuông lớn là 10 cm . Tính diện tích và chu vi của phần được tô màu.



Lời giải

Diện tích của phần được tô màu trên hình vẽ là diện tích của 8 hình viên phân tạo bởi cung AB và dây AB

Gọi S là diện tích hình viên phân, ta có $S = S_q - S_{AIB}$ (S_q là diện tích hình quạt chắn cung AB , S_{AIB} là diện tích tam giác vuông cân cạnh 5 cm).

Ta có $S_q = \frac{90}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{25}{4} \pi (\text{cm}^2)$; $S_{AIO} = \frac{1}{2} AI \cdot BI = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2} (\text{cm}^2)$. Do đó diện tích 1 hình viên phân

là $S_{AIO} = \frac{25}{2} \pi - \frac{25}{2} \approx 7,13 (\text{cm}^2)$. Vậy diện tích phần được tô màu là $8 \cdot 7,13 \approx 57 (\text{cm}^2)$. Chu vi phần

được tô màu là 8 cung AB . Gọi l là độ dài cung AB , ta có $l = \frac{90}{180} \cdot \pi \cdot 5 = \frac{5}{2} \pi$. Vậy chu vi phần được tô

màu là $8 \cdot \frac{5}{2} \pi = 62,8 (\text{cm})$

