

BÀI 7. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA CỦA SỐ THỰC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1 CĂN BẬC HAI

Tìm hiểu khái niệm căn bậc hai

Căn bậc hai của số thực không âm a là số thực x sao cho $x^2 = a$.

Nhận xét

- Số âm không có căn bậc hai;
- Số 0 có một căn bậc hai duy nhất là 0 ;
- Số dương a có đúng hai căn bậc hai đối nhau là \sqrt{a} (căn bậc hai số học của a) và $-\sqrt{a}$.

Ví dụ 1. Tìm căn bậc hai của 81.

Tính căn bậc hai của một số bằng máy tính cầm tay

Để tính các căn bậc hai của một số $a > 0$, chỉ cần tính \sqrt{a} . Có thể dễ dàng làm điều này bằng cách sử dụng MTCT.

Ví dụ 2. Sử dụng MTCT, tính căn bậc hai của 11,1 (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Tính chất của căn bậc hai

Tính chất: $\sqrt{a^2} = |a|$ với mọi số thực a .

Ví dụ 3. Không sử dụng MTCT, tính:

a) $1 - \sqrt{2} + \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2}$;

b) $\sqrt{(-3)^2} + 3$.

2. CĂN THỨC BẬC HAI

Căn thức bậc hai

Tổng quát, ta có định nghĩa:

- Căn thức bậc hai là biểu thức có dạng \sqrt{A} , trong đó A là một biểu thức đại số. A được gọi là biểu thức lấy căn hoặc biểu thức dưới dấu căn.
- \sqrt{A} xác định khi A lấy giá trị không âm và ta thường viết là $A \geq 0$. Ta nói $A \geq 0$ là điều kiện xác định (hay điều kiện có nghĩa) của \sqrt{A} .

Ví dụ 4. Xét căn thức $\sqrt{2x+1}$.

- Tìm điều kiện xác định của căn thức.
- Tính giá trị của căn thức đã cho tại $x = 0$ và $x = 4$.

Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Tương tự như căn bậc hai của một số thực không âm, với A là một biểu thức, ta cũng có:

- Với $A \geq 0$ ta có $\sqrt{A} \geq 0$; $(\sqrt{A})^2 = A$;

- $\sqrt{A^2} = |A|$.

Ví dụ 5. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(\sqrt{1-x})^2$ với $x < 0$;

b) $\sqrt{1-2x+x^2}$ với $x > 2$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

3.1. Tìm căn bậc hai của mỗi số sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai):

a) 24,5 ;

b) $\frac{9}{10}$.

3.2. Để chuẩn bị trồng cây trên vỉa hè, người ta để lại những ô đất hình tròn có diện tích khoảng 2m^2 . Em hãy ước lượng (với độ chính xác 0,005) đường kính của các ô đất đó khoảng bao nhiêu mét?

3.3. Tìm điều kiện xác định của $\sqrt{x+10}$ và tính giá trị của căn thức tại $x = -1$.

3.4. Tính: $\sqrt{5,1^2}$; $\sqrt{(-4,9)^2}$; $-\sqrt{(-0,001)^2}$.

3.5. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$;

b) $3\sqrt{x^2} - x + 1$ ($x < 0$);

c) $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ ($x < 2$).

3.6. Không dùng MTCT, chứng tỏ biểu thức A có giá trị là số nguyên:

$$A = \sqrt{(1+2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-2\sqrt{2})^2}.$$

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: So Sánh Hai Số

1. Phương pháp

Áp dụng: Với $a \geq 0, b \geq 0$ ta có: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

2. Ví dụ minh

Ví dụ 1: So sánh:

a) 3 và $\sqrt{5}$

b) 8 và $\sqrt{63}$

c) 9 và $\sqrt{79}$

Ví dụ 2: So sánh các số :

a. $2\sqrt{31}$ và 10

b. $2+\sqrt{3}$ và $3+\sqrt{2}$.

Ví dụ 3. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh 8 và $\sqrt{65}$.

Ví dụ 4. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh $\sqrt{15}-1$ và $\sqrt{10}$.

Ví dụ 5. Với $a < 0$ thì số nào lớn hơn trong hai số $\sqrt{-a}$ và $\sqrt{-2a}$?

Dạng 2. Tìm x thỏa điều kiện cho trước

1. Phương pháp giải

Với $a \geq 0$:

- $x^2 = a$ khi $x = \pm\sqrt{a}$.
- $\sqrt{x} = a$ khi $x = a^2$.
- $\sqrt{x} < a$ khi $0 \leq x < a^2$.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị gần đúng của nghiệm mỗi phương trình sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba):

a) $x^2 = 4,5$.

b) $x^2 = 5$.

c) $x^2 = 7,5$.

d) $x^2 = 9,12$.

Ví dụ 2: Tìm x sao cho :

a. $x^2 = 16$

b. $x^2 = \frac{9}{25}$

c. $x^2 = -4$

Ví dụ 3. số x không âm, biết:

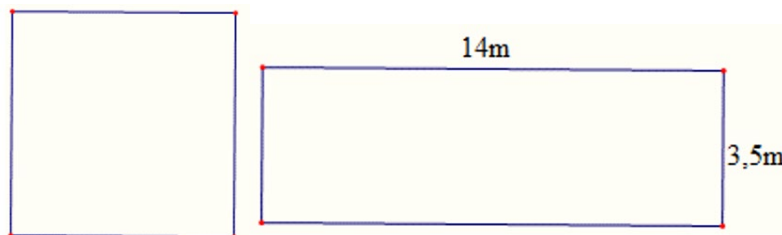
a) $\sqrt{x} = 15$;

b) $2\sqrt{x} = 14$;

c) $\sqrt{x} < \sqrt{2}$;

d) $\sqrt{2x} < 4$.

Ví dụ 4. Tính cạnh của một hình vuông, biết diện tích của nó bằng diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng 3,5 m và chiều dài 14m.



Dạng 3. Tìm điều kiện để \sqrt{A} có nghĩa

1. Phương pháp giải

① \sqrt{A} có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$.

② $\sqrt{\frac{1}{A}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A > 0$.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Với giá trị nào của a thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a). $\sqrt{\frac{a}{3}}$;

b). $\sqrt{4-a}$;

c). $\sqrt{-5a}$;

d). $\sqrt{3a+7}$.

Ví dụ 2: Tìm x , để mỗi căn thức sau có nghĩa:

a). $\sqrt{2x+7}$;

b) $\sqrt{-3x+4}$;

c) $\sqrt{\frac{1}{-1+x}}$;

d) $\sqrt{1+x^2}$.

Ví dụ 3: Với giá trị nào của a thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a). $\sqrt{\frac{1}{a^2}}$;

b) $\sqrt{\frac{a^2+1}{1-2a}}$;

c) $\sqrt{a^2-1}$;

d) $\sqrt{4-a^2}$.

Dạng 4. Tính giá trị biểu thức

1. Phương pháp giải

Áp dụng: $\sqrt{A^2} = \begin{cases} A & \text{neu } A \geq 0 \\ -A & \text{neu } A < 0. \end{cases}$

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tính:

a). $\sqrt{(0,1)^2}$;

b) $\sqrt{(-0,3)^2}$;

c). $-\sqrt{(-1,3)^2}$;

d) $-0,4\sqrt{(-0,4)^2}$.

Ví dụ 2: Tính:

a). $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$;

b). $36 : \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 18} - \sqrt{169}$;

c). $\sqrt{\sqrt{81}}$;

d). $\sqrt{3^2 + 4^2}$.

Dạng 5. Rút gọn biểu thức

1. Phương pháp giải:

① Áp dụng $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$

Xét các trường hợp $A \geq 0$, $A < 0$ để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

② \sqrt{A} xác định (có nghĩa) $\Leftrightarrow A \geq 0$.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a). $\sqrt{(4-\sqrt{15})^2} + \sqrt{15}$;

b). $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$;

c). $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

d). $\sqrt{49a^2}$, với $a < 0$.

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a). $\sqrt{25a^2} + 3a$, với $a < 0$;

b). $\sqrt{16a^4} + 6a^2$;

c). $3\sqrt{9a^6} - 6a^3$, với $a \leq 0$;

d). $\sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$, với $-3 \leq a \leq 3$.

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau:

a). $\frac{\sqrt{a}-2}{a-4}$, với $a \geq 0, a \neq 4$;

b). $\frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1}$, với $a \geq 0, a \neq 1$;

Dạng 6. Giải phương trình

1. Phương pháp giải

Áp dụng: $\sqrt{A^2} = |A|$; $A^2 = B^2 \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tìm x biết:

a). $\sqrt{x^2} = 5$;

b). $\sqrt{25x^2} = 10$;

b). $\sqrt{4x^2 - 28x + 49} = 7$;

c). $\sqrt{x - 10\sqrt{x} + 25} = 3$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a). $4x^2 - 64 = 0$;

b). $\sqrt{x^4} - 7 = 0$;

c). $\sqrt{9x^2} = 2x + 1$;

d). $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0$.

Ví dụ 3. Tính cạnh của hình vuông, biết diện tích hình vuông đó bằng diện tích tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 12,8 m và 40 m.

Dạng 7: Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử

1. Phương pháp giải:

Áp dụng các công thức:

✦ $A = (\sqrt{A})^2$ (với $A \geq 0$).

✦ $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Phân tích thành nhân tử:

a). $x^2 - 2$.

b). $x^2 - 7$.

c). $x^2 + 2\sqrt{15}x + 15$.

d). $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3$.

Dạng 8: Chứng minh đẳng thức

1. Phương pháp giải.

Áp dụng

✦ Các hằng đẳng thức đáng nhớ.

✦ và $A = (\sqrt{A})^2$ để biến đổi vế trái thành vế phải hoặc ngược lại.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Chứng minh:

a). $(\sqrt{5}-1)^2 = 6-2\sqrt{5}$.

b). $\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{5} = -1$.

D. LUYỆN TẬP

Bài 1. Dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị gần đúng của nghiệm mỗi phương trình sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba):

a) $x^2 = 5$; b) $x^2 = 2,5$; c) $x^2 = \sqrt{5}$.

Bài 2. So sánh

a) 2 và $1+\sqrt{2}$; b) 1 và $\sqrt{3}-1$; c) $3\sqrt{11}$ và 12; d) -10 và $-2\sqrt{31}$.

Bài 3. Tìm x không âm, biết

a) $\sqrt{x} = 5$; b) $\sqrt{x} = \sqrt{2}$; c) $\sqrt{x} = -2$.

Bài 4. Cho $a > 0$. Chứng minh:

a) Nếu $a > 1$ thì $a > \sqrt{a}$:

b) Nếu $a < 1$ thì $a < \sqrt{a}$.

Bài 5. Biểu thức sau xác định với giá trị nào của x ?

a). $\sqrt{-3x+2}$;

b). $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$;

c). $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$;

d). $\sqrt{x(x+2)}$

e). $\sqrt{9x^2-6x+1}$

f). $\sqrt{\frac{2x-1}{2-x}}$

g). $\sqrt{5x^2-3x-8}$

h). $\sqrt{5x^2+4x+7}$.

Bài 6. Tính:

a). $-0,8\sqrt{(-0,125)^2}$;

b). $\sqrt{(-2)^6}$;

c). $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$;

d). $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$;

e). $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$;

f). $\sqrt{(0,1-\sqrt{0,1})^2}$;

g). $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

h). $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$;

i). $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;

j). $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$.

Bài 7. Rút gọn biểu thức:

a). $2\sqrt{x^2}$, với $x < 0$;

b). $\frac{1}{2}\sqrt{x^{10}}$, với $x < 0$;

c). $\sqrt{(a-5)^2}$, với $a \leq 5$;

d). $\sqrt{(x-10)^{10}}$, với $x \leq 10$;

e). $x-4+\sqrt{x^2-8x+16}$, với $x < 4$;

f). $\sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$, với $0 \leq x \leq y$.

Bài 8. Rút gọn biểu thức:

a). $\frac{3-\sqrt{x}}{x-9}$, ($x \geq 0, x \neq 9$);

b). $\frac{x-5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3}$, ($x \geq 0, x \neq 9$);

c). $6-2x-\sqrt{9-6x+x^2}$, ($x < 3$).

Bài 9. Tìm x biết

a). $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x$;

b). $\sqrt{25-20x+4x^2} + 2x = 5$;

c). $\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}} = \frac{1}{4} - x$;

d). $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 1$;

e). $\sqrt{1-12x+36x^2} = 5$;

g). $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2$.

Bài 10. Phân tích đa thức thành nhân tử.

a). $x^2 - 11$;

b). $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$;

c). $x-5$ (với $x > 0$);

d). $5-7x^2$ (với $x > 0$).

e). $3+4x$ (với $x < 0$);

Bài 11. Chứng minh đẳng thức:

a). $9+4\sqrt{5} = (\sqrt{5}+2)^2$;

b). $\sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = 2$;

c). $\sqrt{23+8\sqrt{7}} - \sqrt{7} = 4$;

d). $\sqrt{a+4\sqrt{a-2}+2} + \sqrt{a-4\sqrt{a-2}+2} = 4$ (với $2 \leq a \leq 6$).

BÀI 8. KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1 KHAI CĂN BẬC HAI VÀ PHÉP NHÂN

Liên hệ giữa phép khai căn bậc hai và phép nhân

Với A, B là các biểu thức không âm, ta có $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}$.

Chú ý. Kết quả trên có thể mở rộng cho nhiều biểu thức không âm, chẳng hạn:

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \cdot \sqrt{C} = \sqrt{A \cdot B \cdot C}, \quad (A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0).$$

Ví dụ 1. Tính:

a) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$;

b) $\sqrt{5}(\sqrt{125} + \sqrt{5})$.

Ví dụ 2. Rút gọn $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{20x}$ với $x \geq 0$.

Ví dụ 3. Tính $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$.

Chú ý: Nếu $A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B^2 C^2} = ABC$.

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức $\sqrt{25a^2 b^2}$ (với $a \geq 0, b < 0$).

2. KHAI CĂN BẬC HAI VÀ PHÉP CHIA

Liên hệ giữa phép khai căn bậc hai và phép chia

Nếu A, B là các biểu thức với $A \geq 0, B > 0$ thì $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$.

Ví dụ 5

a) Tính $\sqrt{8} : \sqrt{2}$.

b) Rút gọn $\sqrt{52a^3} : \sqrt{13a}$ ($a > 0$).

Ví dụ 6

a) Viết số dưới dấu căn thành một phân số thập phân rồi tính $\sqrt{1,69}$.

b) Rút gọn $a \cdot \sqrt{\frac{2}{a^2}}$ ($a > 0$).

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

3.7. Tính:

a) $\sqrt{12} \cdot (\sqrt{12} + \sqrt{3})$;

b) $\sqrt{8} \cdot (\sqrt{50} - \sqrt{2})$;

c) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6}$.

3.8. Rút gọn biểu thức $\sqrt{2(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{\frac{3}{a+b}}$ (với $a \geq b > 0$).

3.9. Tính:

a) $\sqrt{99} : \sqrt{11}$;

b) $\sqrt{7,84}$;

c) $\sqrt{1815} : \sqrt{15}$.

3.10. Rút gọn $\frac{-3\sqrt{16a} + 5a\sqrt{16ab^2}}{2\sqrt{a}}$ (với $a > 0, b > 0$).

3.11. Kích thước màn hình ti vi hình chữ nhật được xác định bởi độ dài đường chéo. Một loại ti vi có tỉ lệ hai cạnh màn hình là 4: 3.

a) Gọi x (inch) là chiều rộng của màn hình ti vi. Viết công thức tính độ dài đường chéo d (inch) của màn hình ti vi theo x .

b) Tính chiều rộng và chiều dài (theo centimét) của màn hình ti vi loại 40 inch.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Thực hiện phép tính

1. Phương pháp giải

✦ Sử dụng các quy tắc khai phương một tích và quy tắc nhân các căn bậc hai

✦ Nếu $A \geq 0, B \geq 0$ thì $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$

✦ $A \geq 0, B > 0$ thì $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính:

a). $\sqrt{0,16.81}$; b). $\sqrt{3^4 \cdot (-5)^2}$; c). $\sqrt{16,9.250}$; d). $\sqrt{5^2 \cdot 4^4}$.

Ví dụ 2. Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai, hãy tính:

a). $\sqrt{5} \cdot \sqrt{80}$; b). $\sqrt{2,45} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{50}$;
 c). $\sqrt{0,6} \cdot \sqrt{5,4}$; d). $\sqrt{8,1} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{4,5}$.

Ví dụ 3. Khai phương tích 13.25.52 được:

a). 2600. b). 130. c). 13. d). 260.

Hãy chọn kết quả đúng.

Ví dụ 4. Biến đổi các biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi tính

a). $\sqrt{25^2 - 24^2}$; b). $\sqrt{26^2 - 10^2}$;
 c). $\sqrt{137^2 - 88^2}$; d). $\sqrt{481^2 - 480^2}$.

Ví dụ 5. Tính :

a). $\sqrt{\frac{289}{225}}$. b). $\sqrt{2\frac{14}{25}}$. c). $\sqrt{\frac{0,25}{9}}$. d). $\sqrt{\frac{8,1}{1,6}}$.

Ví dụ 6. Tính :

a). $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b). $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$.

$$c). \frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}.$$

$$d). \sqrt{\frac{6^5}{2^3 \cdot 3^5}}.$$

Ví dụ 7. Tính :

$$a). \sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{5} \cdot 0,01}.$$

$$b). \sqrt{1,44 \cdot 1,21 - 1,44 \cdot 0,4}.$$

$$c). \sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}.$$

$$d). \sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}.$$

Dạng 2. Rút gọn biểu thức và tính giá trị biểu thức

1. Phương pháp giải

- ◆ Áp dụng các quy tắc $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ ($A \geq 0, B \geq 0$)
- ◆ Thay giá trị của biến vào biểu thức đã rút gọn.
- ◆ Áp dụng phép khai phương một thương: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ ($A \geq 0, B > 0$)
- ◆ Áp dụng $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, & \text{khi } A \geq 0 \\ -A, & \text{khi } A < 0 \end{cases}$.
- ◆ Xét các trường hợp $A \geq 0, A < 0$ để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức sau:

$$a). \sqrt{0,49a^2} \text{ với } a \leq 0;$$

$$b). \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^4 (6-2a)^2} \text{ với } a > 3;$$

$$c). \sqrt{19,76(2-a)^2} \text{ với } a > 2;$$

$$d). \frac{1}{a-b} \cdot \sqrt{a^2(a^2-b^2)^2} \text{ với } a > b \geq 0.$$

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a). \sqrt{\frac{2a}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5a}{18}} \text{ với } a \geq 0;$$

$$b). \sqrt{11a} \cdot \sqrt{\frac{99}{a}} \text{ với } a > 0;$$

$$c). 21a - \sqrt{11a} \cdot \sqrt{44a} \text{ với } a \geq 0;$$

$$d). (4+a)^2 - \sqrt{0,4} \cdot \sqrt{160a^2}$$

Ví dụ 3. Rút gọn và tìm giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) của các căn thức sau:

$$a). \sqrt{9(4+20x+25x^2)^2} \text{ tại } x = -\sqrt{5};$$

$$b). \sqrt{2a^2(2b^2-12b+18)} \text{ tại } a = -3, b = \sqrt{3}.$$

Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a). \frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{y^4}} \text{ với } x > 0, y \neq 0.$$

$$b). 2y^2 \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}} \text{ với } y < 0.$$

c). $5xy\sqrt{\frac{25x^2}{y^6}}$ với $x < 0, y > 0$.

d) $0,2x^3y^3\sqrt{\frac{16}{x^4y^8}}$ với $x \neq 0, y \neq 0$.

Ví dụ 5. Rút gọn các biểu thức sau:

a). $ab^2\sqrt{\frac{3}{a^2b^4}}$ với $a < 0, b \neq 0$.

b). $\sqrt{\frac{27(a-3)^2}{48}}$ với $a > 3$.

c). $\sqrt{\frac{9+12a+4a^2}{b^2}}$ với $b < 0, a > -1,5$.

d). $(a-b)\sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}}$ với $a < b < 0$.

Dạng 3. Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức

1. Phương pháp giải

Áp dụng hằng đẳng thức

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) \text{ và } \sqrt{A^2} = A, (A \geq 0)$$

♦ Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương.

☞ Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức đúng.

☞ Bất đẳng thức đúng thường có dạng $A^2 \geq 0$.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh:

a) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$

b) $(\sqrt{2006} - \sqrt{2005})$ và $(\sqrt{2006} + \sqrt{2005})$ là hai số nghịch đảo

Ví dụ 2:

a). So sánh $\sqrt{25-16}$ và $\sqrt{25} - \sqrt{16}$;

b). Chứng minh rằng, với $a > b > 0$ thì $\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a-b}$.

Ví dụ 3: Mỗi khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a). $0,01 = \sqrt{0,0001}$;

b). $-0,5 = \sqrt{-0,25}$;

c). $\sqrt{39} < 7$ và $\sqrt{39} > 6$;

d). $(4 - \sqrt{13}).2x < \sqrt{3}.(4 - \sqrt{13}) \Leftrightarrow 2x < \sqrt{3}$.

Dạng 4. Tìm x thỏa mãn thức cho trước

1. Phương pháp giải

Đặt điều kiện để căn thức có nghĩa

\sqrt{A} có nghĩa khi và chỉ khi $A \geq 0$

Áp dụng tính chất $(\sqrt{A})^2 = A, (A \geq 0), \sqrt{A^2} = |A|$

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tìm x biết

a) $\sqrt{16x} = 8$

b) $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$

c) $\sqrt{9(x-1)} = 21$

d) $\sqrt{4(1-x)^2} - 6 = 0$

Ví dụ 2: Giải phương trình:

a). $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{50} = 0;$

c). $\sqrt{3} \cdot x^2 - \sqrt{12} = 0;$

b). $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{8} = 0;$

d). $\frac{x^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{20} = 0.$

Ví dụ 3: Tìm x , biết:

a). $\sqrt{(x-3)^2} = 9;$

b). $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 6.$

D. LUYỆN TẬP

Bài 1. Tính :

a) $\sqrt{1,2.270}; \sqrt{55.77.35}.$

b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2; (3\sqrt{2} - 1)(3\sqrt{2} + 1); (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

c) $\left(\sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{24} + \sqrt{\frac{50}{3}}\right) \cdot \sqrt{6}; \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$

Bài 2. Thực hiện phép tính

a) $\sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{125} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}; \sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1}.$

b) $\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2} \cdot \sqrt{11+6\sqrt{2}}; \sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3-\sqrt{3}}}.$

c) $-\frac{2}{3} \sqrt{\frac{(a-b)^2 b^5}{c}} \cdot \frac{9}{4} \sqrt{\frac{c^3}{2(a-b)}} \sqrt{98b}$

d) $\left(\sqrt{6} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1}\right) 2\sqrt{6}$

e) $\left(\sqrt{ab} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{1}{ab}}\right) \sqrt{ab}.$

$$g) \left(\frac{am}{b} \sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{ab}{n} \sqrt{mn} + \frac{a^2}{b^2} \sqrt{\frac{m}{n}} \right) a^2 b^2 \cdot \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Bài 3. Rút gọn rồi tính

$$a) \sqrt{21,8^2 - 18,2^2}; \quad b) \sqrt{6,8^2 - 3,2^2}; \quad c) \sqrt{146,5^2 - 109,5^2 + 27 \cdot 256}$$

Bài 4. Rút gọn biểu thức

$$a) \frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}};$$

$$b) \frac{\sqrt{10} + \sqrt{15}}{\sqrt{8} + \sqrt{12}}$$

$$c) \frac{x + \sqrt{xy}}{y + \sqrt{xy}}$$

$$d) \frac{\sqrt{a} + a\sqrt{b} - \sqrt{b} - b\sqrt{a}}{ab - 1}$$

$$e) \frac{2\sqrt{15} - 2\sqrt{10} + \sqrt{6} - 3}{2\sqrt{5} - 2\sqrt{10} - \sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

$$f) \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$$

Bài 5. Rút gọn biểu thức

$$a) \sqrt{9(3-a)^2} \text{ với } a > 3;$$

$$b) \sqrt{a^2(a-2)^2} \text{ với } a < 0.$$

Bài 6. Chứng minh đẳng thức

$$a) \sqrt{9 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt{9 + \sqrt{17}} = 8;$$

$$b) \left(\frac{1}{5 - 2\sqrt{6}} + \frac{2}{5 + 2\sqrt{6}} \right) (15 + 2\sqrt{6}) = 201$$

Bài 7. Tìm x biết

$$a) \sqrt{9x} = 15;$$

$$b) \sqrt{4x^2} = 8$$

$$c) \sqrt{4(x+1)} = \sqrt{8};$$

$$d) \sqrt{9(2-3x)^2} = 6;$$

$$e) \sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{x - 2} = 0.$$

Bài 8. Tìm $x - y$ biết :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 4 - \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

Bài 9. Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$. Chứng minh rằng :

$$a) \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ (bất đẳng thức Côsi);}$$

$$b) a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca};$$

$$c) a + b + \frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Bài 10. Tính

a). $\sqrt{2\frac{7}{81}}$; và $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}}$;

b). $(5\sqrt{7} + 7\sqrt{5}) : \sqrt{35}$;

c). $(2\sqrt{8} - 3\sqrt{3} + 1) : \sqrt{6}$.

Bài 11. Tính $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{4,5} + \frac{2}{5}\sqrt{50}\right) : \frac{4}{15}\sqrt{\frac{1}{8}}$

Bài 12. Rút gọn biểu thức

a). $\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$;

b). $\sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}}$, ($x \geq 0$)

c). $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}}$, ($x \neq 1, y \neq 1, y > 0$).

Bài 13. Rút gọn và tính:

a). $A = \frac{\sqrt{a - 2\sqrt{ab} + b}}{\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}}}$ (với $a > b > 0$) tại $a = 36; b = 25$.

b). $B = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{3}}} : \frac{\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{3}}}{\sqrt{x}}$ (với $x > 3$) tại $x = 81$.

c). $C = \sqrt{\frac{(x-5)^4}{(4-x)^2}} - \frac{x^2 - 25}{x-4}$ ($x < 4$), tại $x = 3$.

d). $M = 3x - \sqrt{27} + \frac{\sqrt{x^3 + 3x^2}}{\sqrt{x+3}}$ ($x \geq 0$), tại $x = \sqrt{3}$.

Bài 14. Giải phương trình

a). $\sqrt{\frac{4x-1}{x+1}} = 3$;

b). $\frac{\sqrt{4x-1}}{\sqrt{x+1}} = 3$;

c). $\sqrt{49x-98} - 14\sqrt{\frac{x-2}{49}} = 3\sqrt{x-2} + 8$;

d). $\sqrt{25x-25} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{x-1}{9}} = 6 + \sqrt{x-1}$.

Bài 15

a). Cho $a > 0$. Chứng minh $a + \frac{1}{a} \geq 2$;

b). Cho $a \geq 0, b \geq 0$. Chứng minh $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$;

c). Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}$;

d). Chứng minh $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$ với mọi x .

LUYỆN TẬP CHUNG SAU KHI HỌC BÀI 7&8

A. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Không dùng MTCT, tính giá trị của biểu thức: $A = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \sqrt{3}$

Ví dụ 2. Tính:

a) $(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$;

b) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$.

Ví dụ 3. Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}} - 1$ với $x \geq 0$.

a) Viết $x\sqrt{x+1}$ thành tổng hai lập phương rồi phân tích thành nhân tử để rút gọn biểu thức đã cho.

b) Tính giá trị của P tại $x = 100$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

3.12. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$;

b) $\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{7}+3)^2}$.

3.13. Thực hiện phép tính:

a) $\sqrt{3}(\sqrt{192} - \sqrt{75})$;

b) $\frac{-3\sqrt{18} + 5\sqrt{50} - \sqrt{128}}{7\sqrt{2}}$.

3.14. Chứng minh rằng:

a) $(1-\sqrt{2})^2 = 3-2\sqrt{2}$;

b) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$.

3.15. Cho căn thức $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

a) Hãy chứng tỏ rằng căn thức xác định với mọi giá trị của x .

b) Rút gọn căn thức đã cho với $x \geq 2$.

c) Chứng tỏ rằng với mọi $x \geq 2$, biểu thức $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ có giá trị không đổi.

3.16. Trong Vật lí, tốc độ (m/s) của một vật đang bay được cho bởi công thức $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$,

trong đó E là động năng của vật (tính bằng Joule, kí hiệu là J) và m (kg) là khối lượng của vật (Theo sách Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016). Tính tốc độ bay của một vật khi biết vật đó có khối lượng 2,5kg và động năng 281,25J.

C. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Rút gọn biểu thức:

$$1. A = 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 3\sqrt{48}.$$

$$3. C = 3\sqrt{2}(4 - \sqrt{2}) + 3(1 - 2\sqrt{2})^2.$$

$$2. B = \sqrt{147} + \sqrt{75} - 4\sqrt{27}.$$

$$4. D = 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}.$$

Bài 2. Tìm số thực x thỏa mãn:

$$1. \sqrt{-2x^2 - 9} = 2.$$

$$4. \sqrt{-3x + 4} = 12.$$

$$2. \sqrt{x^2 + 1} + 2 = 0.$$

$$5. \sqrt{(x-7)(x+7)} = 2.$$

$$3. \sqrt{3x-1} = 4.$$

$$6. \sqrt{9(x-1)} - 19 = 2.$$

Bài 3. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

$$1. \sqrt{-3x}.$$

$$2. \sqrt{2x-4}$$

$$3. \sqrt{7-6x}$$

$$4. \sqrt{-3x+2}$$

Bài 4. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

$$1. \frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}.$$

$$2. \frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}.$$

$$3. \sqrt{\frac{1}{3-2x}}$$

$$4. \sqrt{\frac{-2}{x+1}}.$$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau

$$1. \sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{11+6\sqrt{2}}.$$

$$2. \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$$

$$3. (2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}}$$

$$4. \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$$

$$5. \sqrt{9-3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$6. \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau

$$1. \sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} - \frac{1}{7}\sqrt{147};$$

$$4. \sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{11+6\sqrt{2}};$$

$$2. (\sqrt{44} + \sqrt{11})\sqrt{11};$$

$$5. \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}};$$

$$3. \sqrt{24} - 6\sqrt{\frac{1}{6}} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

$$6. (2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}};$$

$$7. \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}};$$

$$8. \sqrt{9-3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Bài 7. Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính:

$$1. \sqrt{\frac{121}{9}};$$

$$2. \sqrt{\frac{14}{169}};$$

$$3. \sqrt{3\frac{6}{25}};$$

$$4. \sqrt{4\frac{21}{25}}.$$

Bài 8. Áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai, hãy tính:

$$1. \frac{\sqrt{999}}{\sqrt{444}};$$

$$2. \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{0,4}};$$

$$3. \frac{\sqrt{9+6\sqrt{2}}}{\sqrt{3}};$$

$$4. \sqrt{2+\sqrt{3}} : \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Bài 9. Rút gọn các biểu thức sau:

$$1. \frac{\sqrt{96x^5}}{\sqrt{24x}} (x > 0);$$

$$2. \frac{\sqrt{18(x+1)^3}}{\sqrt{2x+\sqrt{2}}} (x > -1);$$

$$3. \frac{\sqrt{3x^4y^4}}{\sqrt{27x^2y^4}} (x < 0, y > 0).$$

Bài 10. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$1. \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}, \text{ với } a, b \geq 0;$$

$$2. \sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}} \geq 2, \text{ với } a > 0$$

BÀI 9. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI DẤU CĂN

Cách đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Nếu a là một số và b là một số không âm thì $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \sqrt{b}$.

Chú ý. Phép biến đổi trên gọi là phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

Ví dụ 1. Viết nhân tử số của biểu thức dưới dấu căn thành tích các lũy thừa rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{45}$;

b) $\sqrt{243a} (a \geq 0)$.

Chú ý. Khi tính toán với những căn thức bậc hai mà biểu thức dưới dấu căn có mẫu, ta thường khử mẫu của biểu thức lấy căn (tức là biến đổi căn thức bậc hai đó thành một biểu thức mà trong căn thức không còn mẫu) như trong ví dụ sau:

Ví dụ 2. Khử mẫu của biểu thức lấy căn $\sqrt{\frac{4}{7}}$.

2. ĐƯA THỪA SỐ VÀO TRONG DẤU CĂN

Cách đưa một thừa số vào trong dấu căn

- Nếu a và b là hai số không âm thì $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$.

- Nếu a là số âm và b là số không âm thì $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$.

Chú ý. Các phép biến đổi trên gọi là phép đưa thừa số vào trong dấu căn.

Ví dụ 3. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $5\sqrt{2}$;

b) $-2\sqrt{a} \quad (a \geq 0)$.

Ví dụ 4. Không sử dụng MTCT, có thể so sánh được hai số $a = 3\sqrt{2}$ và $b = 2\sqrt{3}$ hay không?

3. TRỰC CĂN THỨC Ở MẪU

Tính toán với các biểu thức có chứa căn ở mẫu thường phức tạp và ta thường tìm cách trục các căn thức ở mẫu (tức là biến đổi biểu thức thành một biểu thức mới không chứa căn ở mẫu).

Cách trục căn thức ở mẫu

✓ Với các biểu thức A, B và $B > 0$, ta có $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.

✓ Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, A \neq B^2$, ta có $\frac{C}{\sqrt{A+B}} = \frac{C(\sqrt{A}-B)}{A-B^2}$; $\frac{C}{\sqrt{A-B}} = \frac{C(\sqrt{A}+B)}{A-B^2}$.

✓ Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, B \geq 0, A \neq B$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B}; \quad \frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}.$$

Ví dụ 5. Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức:

a) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$;

b) $\frac{a}{3-2\sqrt{2}}$.

4. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

Khi rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần phối hợp các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia) và các phép biến đổi đã học (đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn; khử mẫu của biểu thức lấy căn; trục căn thức ở mẫu).

Ví dụ 6. Rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{3} - \sqrt{75} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$.

Ví dụ 7. a) Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức: $\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}$; $\frac{x^2-x}{\sqrt{x+1}}$ với $x > 1$.

b) Sử dụng kết quả câu a, rút gọn biểu thức $P = \frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} - \frac{x^2-x}{\sqrt{x+1}}$ với $x > 1$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

3.17. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{75}$; b) $\sqrt{27a}$ ($a \geq 0$);

c) $\sqrt{50\sqrt{2}+100}$; d) $\sqrt{9\sqrt{5}-18}$.

3.18. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $3\sqrt{2}$; b) $-2\sqrt{7}$;

c) $4\sqrt{\frac{15}{2}}$; d) $-5\sqrt{\frac{16}{5}}$.

3.19. Khử mẫu trong dấu căn:

a) $2a \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$; b) $-3x \cdot \sqrt{\frac{5}{x}}$ ($x > 0$); c) $-\sqrt{\frac{3a}{b}}$ ($a \geq 0, b > 0$).

3.20. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\frac{4+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$;

c) $\frac{3+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

3.21. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}}$; b) $\frac{5\sqrt{48} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$; c) $\frac{1}{3+2\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{2}-4}{2-\sqrt{2}}$.

3.22. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{3-\sqrt{x}} \right)$ ($x \geq 0, x \neq 9$).

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn và đưa thừa số vào trong dấu căn

1. Phương pháp giải

① Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

◆ Tìm cách đưa biểu thức trong căn về dạng tích A^2B .

◆ Thực hiện việc đưa thừa số ra ngoài dấu căn bằng cách áp dụng $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ (với $B \geq 0$).

② Đưa thừa số vào trong dấu căn:

◆ Chú ý đến dấu của thừa số trước dấu căn.

◆ Nếu $A \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$.

◆ Nếu $A < 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Viết các số hoặc biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích một cách thích hợp rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn :

a). $\sqrt{54}$. b). $\sqrt{108}$. c). $0,1\sqrt{2000}$.

d). $-0,05\sqrt{28800}$. e). $\sqrt{7.63.a^2}$

Ví dụ 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn (với $x > 0$ và $y \geq 0$):

a). $3\sqrt{5}$. b). $-5\sqrt{2}$. c). $-\frac{2}{3}\sqrt{xy}$. d). $x\sqrt{\frac{2}{x}}$.

Dạng 2. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

1. Phương pháp giải

◆ Bằng cách nhân tử và mẫu của biểu thức trong căn cho mẫu số rồi rút mẫu ra ngoài căn bằng

công thức: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{AB}{B^2}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$ (Với A, B mà $AB \geq 0$ và $B \neq 0$).

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a). $\sqrt{\frac{1}{600}}$; $\sqrt{\frac{11}{540}}$; $\sqrt{\frac{3}{50}}$; $\sqrt{\frac{5}{98}}$; $\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{27}}$.

b). $ab\sqrt{\frac{a}{b}}$; $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$; $\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}}$; $\sqrt{\frac{9a^3}{36b}}$; $3xy\sqrt{\frac{2}{xy}}$.

(Giả thiết các biểu thức có nghĩa).

Dạng 3. Trục căn ở mẫu

1. Phương pháp giải

Áp dụng

$$\textcircled{1}. \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}; \quad \textcircled{2}. \frac{A}{\sqrt{B \pm C}} = \frac{A(\sqrt{B \mp C})}{B - C^2}; \quad \textcircled{3}.$$

$$\frac{A}{\sqrt{B \pm \sqrt{C}}} = \frac{A(\sqrt{B \mp \sqrt{C}})}{B - C}.$$

Nhận xét. Ta gọi $\sqrt{B} + \sqrt{C}$ và $\sqrt{B} - \sqrt{C}$ là hai biểu thức liên hợp.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Trục căn ở mẫu với giả thiết các biểu thức chữ đều có nghĩa.

a). $\frac{5}{\sqrt{10}}; \frac{5}{2\sqrt{5}}; \frac{1}{3\sqrt{20}}; \frac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}}; \frac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}$ với $b \neq 0; y > 0$.

b). $\frac{3}{\sqrt{3}+1}; \frac{2}{\sqrt{3}-1}; \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}; \frac{b}{3+\sqrt{b}}$ với $b \geq 0; \frac{p}{2\sqrt{p}-1}$ với $p \geq 0, p \neq \frac{1}{4}$.

c). $\frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}; \frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}; \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ với $x > 0, y > 0, x \neq y; \frac{2ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$.

Dạng 4. Rút gọn biểu thức

1. Phương pháp Lời giải

✦ Đưa thừa số ra ngoài dấu căn rồi rút gọn các căn thức đồng dạng

$$p\sqrt{A} + q\sqrt{A} - r\sqrt{A} = (p + q - r)\sqrt{A}.$$

Thực hiện các phép biến đổi căn thức:

$$\textcircled{1}. \sqrt{A^2} = |A|.$$

$$\textcircled{2}. \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|} \quad (\text{với } A \geq 0, B > 0).$$

$$\textcircled{3}. \sqrt{A^2 B} = |A|\sqrt{B} \quad (\text{với } B \geq 0).$$

$$\textcircled{4}. \frac{A}{\sqrt{B \pm \sqrt{C}}} = \frac{A(\sqrt{B \mp \sqrt{C}})}{B - C} \quad (B \geq 0, C \geq 0, B \neq C).$$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau với $x \geq 0$:

a). $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 27 - 3\sqrt{3x}$

b). $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} + 28$.

Ví dụ 2. Rút gọn

a). $\frac{2}{x^2 - y^2} \sqrt{\frac{3(x+y)^2}{2}}$ với $x \geq 0, y \geq 0$ và $x \neq y$.

b). $\frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)}$ với $a > 0,5$.

Ví dụ 3: Rút gọn các biểu thức sau (giả sử các biểu thức chữ đều có nghĩa):

$$\text{a). } \sqrt{18(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2};$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{a}{b^3} + \frac{a}{b^4}};$$

$$\text{b). } ab\sqrt{1+\frac{1}{a^2b^2}};$$

$$\text{d) } \frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Ví dụ 4: Rút gọn các biểu thức sau (giả sử các biểu thức chữ đều có nghĩa):

$$\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}, \frac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}, \frac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2}.$$

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức sau (với $a > 0, b > 0$);

$$\text{a). } 5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5\sqrt{16ab^2} - 2\sqrt{9a}$$

$$\text{b). } 5a\sqrt{64ab^3} - \sqrt{3}\sqrt{12a^3b^3} + 2ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b}.$$

Ví dụ 6. Cho biểu thức:

$$B = \sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1} \text{ với } x \geq -1.$$

a). Rút gọn biểu thức B ;

b). Tìm x sao cho B có giá trị bằng 16.

Ví dụ 7. Rút gọn biểu thức

$$\text{a). } \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ với } a > 0 \text{ và } b > 0;$$

$$\text{b). } \sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}} \cdot \sqrt{\frac{4m-8mx+4mx^2}{81}} \text{ với } m > 0 \text{ và } x \neq 1.$$

Ví dụ 8. Rút gọn rồi so sánh giá trị của M với 1, biết:

$$M = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1} \text{ với } a > 0 \text{ và } a \neq 1.$$

Ví dụ 9. Cho $B = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

a). Xác định x để cho B có nghĩa;

b). Rút gọn B ;

c). Tìm x để $B > 1$;

d). Tìm x nguyên để B là số nguyên.

Dạng 5: Chứng Minh Đẳng Thức

1. Phương pháp giải:

- ✦ Thực hiện các phép biến đổi căn thức và các hằng đẳng thức đáng nhớ để biến đổi vế trái bằng vế phải hoặc vế phải bằng vế trái của đẳng thức.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau:

a). $\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

b). $\left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3}$ với $x > 0$.

Ví dụ 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

a). $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

b). $\frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|$ với $a+b > 0$ và $b \neq 0$.

Ví dụ 3: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào biến a :

$$\left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}} - \frac{a^2+1}{1-a^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a}\right) \quad \text{với } a > 0, a \neq 1.$$

Dạng 5. Phân tích thành nhân tử

1. Phương pháp giải

Áp dụng:

① $A = (\sqrt{A})^2$ (với $A \geq 0$).

② $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ (với $B \geq 0$).

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Phân tích thành nhân tử (với a, b, x, y là các số không âm).

a). $ab + b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1$;

b). $\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3} + \sqrt{x^2y} - \sqrt{xy^2}$.

Ví dụ 2: Phân tích thành nhân tử

a). $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$;

b). $\sqrt{6} + \sqrt{55} - \sqrt{10} - \sqrt{33}$.

Dạng 6. Giải phương trình

1. Phương pháp giải

① Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa: \sqrt{A} có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$.

② Đưa thừa số ra ngoài dấu căn: $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$.

③ Rút gọn các căn thức đồng dạng.

④ Biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2$

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Giải phương trình:

a). $\sqrt{18x+9} + \sqrt{x+3} - \frac{1}{2}\sqrt{4x+12} = 9$;

b). $\sqrt{25x-50} - \sqrt{16x-32} - \sqrt{9x-18} = 12 - 4\sqrt{x-2}$.

Ví dụ 2. Tìm x , biết:

a). $2\sqrt{9x-27} - \frac{1}{5}\sqrt{25x-75} - \frac{1}{7}\sqrt{49x-147} = 20;$

b). $\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} + 1 = \sqrt{x};$

c). $\sqrt{9x^2+45} - \frac{1}{12}\sqrt{16x^2+80} + 3\sqrt{\frac{x^2+5}{16}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{25x^2+125}{9}} = 9;$

d). $\sqrt{4,5x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{72x} - 5\sqrt{\frac{x}{2}} - 12 = 0.$

D. LUYỆN TẬP

Bài 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a). $\sqrt{96.125}.$

b). $\sqrt{a^4b^5}.$

c). $\sqrt{a^6b^{11}}.$

d). $\sqrt{a^3(1-a)^4} \ (a > 1).$

Bài 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a). $x\sqrt{13}$ với $x \geq 0.$

b). $x\sqrt{2}$ với $x < 0.$

c). $x\sqrt{-\frac{11}{x}}$ với $x < 0.$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức

a). $\sqrt{50} - \sqrt{32} + 3\sqrt{8};$

b). $\sqrt{25a} + 2\sqrt{160a} - 3\sqrt{10a}$ với $a \geq 0.$

c). $(2\sqrt{7} + \sqrt{3})\sqrt{7} - \sqrt{84}.$

d). $(\sqrt{63} - \sqrt{8} - \sqrt{7})\sqrt{7} + 2\sqrt{14}.$

Bài 4. Khai triển và rút gọn biểu thức (với $x \geq 0; y \geq 0$)

a). $(\sqrt{2x}-1)(2x+\sqrt{2x}+1).$

b). $(\sqrt{x}+2\sqrt{y})(x-2\sqrt{xy}+4y).$

c). $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(2\sqrt{x}-\sqrt{y})$

Bài 5. Chứng minh rằng:

a). $\frac{(x\sqrt{y} - y\sqrt{x})(2\sqrt{y} + 2\sqrt{x})}{2\sqrt{xy}} = x - y$ với $x > 0, y > 0$.

b). $x + 2\sqrt{5x - 25} = (\sqrt{5} + \sqrt{x - 5})^2$ với $x \geq 5$.

Bài 6. Khử mẫu các biểu thức dưới dấu căn rồi thực hiện phép tính: $2\sqrt{\frac{3}{20}} + \sqrt{\frac{1}{60}} - \sqrt{\frac{1}{15}}$.

Bài 7. Trục căn ở mẫu:

a). $\frac{9}{\sqrt{3}}$

b). $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$;

c). $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$;

d). $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

e). $\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}$;

f). $\frac{1}{\sqrt{18} + \sqrt{8} - 2\sqrt{2}}$.

g). $\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$;

h). $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$

Bài 8. Rút gọn biểu thức:

a). $A = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} + \frac{1}{7 - 4\sqrt{3}}$;

b). $B = \frac{15}{\sqrt{6} + 1} + \frac{4}{\sqrt{6} - 2} - \frac{12}{3 - \sqrt{6}} - \sqrt{6}$.

Bài 9. Chứng minh đẳng thức:

a). $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{2b}{a - b} = 1$ ($a \geq 0, b \geq 0, a \neq 0$);

b). $\frac{a\sqrt{b} + b}{a - b} \sqrt{\frac{ab + b^2 - 2\sqrt{ab^2}}{a(a + 2\sqrt{b}) + b}} (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = b$ ($a > b > 0$)

Bài 10. Giải phương trình:

a). $\frac{1}{2}\sqrt{x-1} - \frac{3}{2}\sqrt{9x-9} + 24\sqrt{\frac{x-1}{64}} = -17$;

b). $3x - 7\sqrt{x} + 4 = 0$;

c). $-5x + 7\sqrt{x} + 12 = 0$;

Bài 11. Xét biểu thức:

$$A = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$$

a). Rút gọn A ;

b). Biết $a \geq 1$, hãy so sánh A và $|A|$;

c). Tìm a để $A = 2$;

d). Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Bài 12. Xét biểu thức: $B = \left(\frac{3}{\sqrt{a+1}} + \sqrt{1-a} \right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1 \right)$

a). Rút gọn B ;

b). Tìm giá trị của B nếu $a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$;

c). Với giá trị nào của a thì $\sqrt{B} > B$.

Bài 13. Rút gọn biểu thức:

a). $3\sqrt{2a} - \sqrt{18a^3} + 4\sqrt{\frac{a}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{128a}$ (với $a \geq 0$)

b). $2y\sqrt{x-y} + x\sqrt{\frac{1}{x-y}} - x\sqrt{\frac{a}{ax-ay}} - \sqrt{x^3 - x^2y}$ (với $x > y > 0$)

c). $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ (với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$)

Bài 14. Rút gọn biểu thức:

a). $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+2} - \frac{2}{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$

b). $\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

Bài 15. Chứng minh đẳng thức :

a). $\frac{\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt{\frac{a^4}{x^4} - 1} = \frac{a^2}{x^2}$; với $|a| > |x|$

b). $\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \right)^2 = 4\sqrt{6}$

c). $\left(\frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy} \right) : (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = 1$ ($x > 0, y > 0, x \geq y$)

Bài 16. Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$

a). Rút gọn A nếu $x \geq 0$ và $x \neq 4$;

b). Tìm x để $A = 2$.

Bài 17. Cho biểu thức: $B = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} \right) : \frac{b}{a - \sqrt{a^2-b^2}}$ với $a > b > 0$.

a). Rút gọn B ;

b). Tính B nếu $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$;

c). Tìm điều kiện của a, b để $B < 1$

Bài 18. Cho biểu thức: $C = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2}$

a). Rút gọn C nếu $x \geq 0, x \neq 1$;

b). Tìm x để C dương;

c). Tìm giá trị lớn nhất của C .

Bài 19. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào biến:

$$\left(\frac{2\sqrt{xy}}{x-y} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} \text{ với } x > 0, y > 0, x \neq y.$$

BÀI 10. CĂN BẬC BA VÀ CĂN THỨC BẬC BA.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. CĂN BẬC BA

Căn bậc ba của một số thực

Tổng quát, ta định nghĩa:

Căn bậc ba của số thực a là số thực x thoả mãn $x^3 = a$.

Chú ý. Mỗi số a đều có duy nhất một căn bậc ba. Căn bậc ba của số a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$. Trong kí hiệu $\sqrt[3]{a}$, số 3 được gọi là chỉ số của căn. Phép tìm căn bậc ba của một số gọi là phép khai căn bậc ba.

Ví dụ 1

a) Chứng tỏ rằng $\sqrt[3]{64} = 4$.



b) Tính $\sqrt[3]{0}$ và $\sqrt[3]{-27}$.

Nhận xét. Từ định nghĩa căn bậc ba, ta có $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$ với mọi số thực a . Do đó có thể giải

Ví dụ 1 như sau: $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$.

Tính căn bậc ba của một số bằng máy tính cầm tay

Ta có thể sử dụng loại MTCT thích hợp để tính căn bậc ba của một số. Chẳng hạn, để tính $\sqrt[3]{12}$ và $\sqrt[3]{3375}$ ta làm như sau:

Phép tính	Bấm các phím	Kết quả
$\sqrt[3]{343}$		7
$\sqrt[3]{12}$		2,289428485

Chú ý. Màn hình MTCT chỉ hiển thị được một số hữu hạn chữ số nên các kết quả là số thập phân vô hạn (tuần hoàn hay không tuần hoàn) đều được làm tròn, chẳng hạn: $\sqrt[3]{12} \approx 2,289428485$.

Ví dụ 2. Sử dụng MTCT, tính $\sqrt[3]{3,25}$ rồi làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai.

2. CĂN THỨC BẬC BA

Nhận biết căn thức bậc ba

Tương tự như căn thức bậc hai, ta có định nghĩa sau:

Căn thức bậc ba là biểu thức có dạng $\sqrt[3]{A}$, trong đó A là một biểu thức đại số.

Chú ý

- Tương tự căn bậc ba của một số, ta cũng có $(\sqrt[3]{A})^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$ (A là một biểu thức).

- Để tính giá trị của $\sqrt[3]{A}$ tại những giá trị cho trước của biến, ta thay các giá trị cho trước của biến vào căn thức rồi tính giá trị của biểu thức số nhận được.

Ví dụ 3. Tính giá trị của căn thức $\sqrt[3]{2x+5}$ tại:

a) $x = 60$;

b) $x = -6,5$.

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức $-x + 5 + \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

3.23. Tính:

a) $\sqrt[3]{216}$;

b) $\sqrt[3]{-512}$;

c) $\sqrt[3]{-0,001}$;

d) $\sqrt[3]{1,331}$.

3.24. Sử dụng MTCT, tính các căn bậc ba sau đây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai):

a) $\sqrt[3]{2,1}$;

b) $\sqrt[3]{-18}$;

c) $\sqrt[3]{-28}$;

d) $\sqrt[3]{0,35}$.

3.25. Một người thợ muốn làm một thùng tôn hình lập phương có thể tích bằng 730dm^3 . Em hãy ước lượng chiều dài cạnh thùng khoảng bao nhiêu dm?

3.26. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}$

b) $\sqrt[3]{(2\sqrt{2}+1)^3}$;

c) $(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1})^3$.

3.27. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức $\sqrt[3]{27x^3 - 27x^2 + 9x - 1}$ tại $x = 7$.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Thực hiện phép tính và rút gọn biểu thức

1. Phương pháp giải

✦ Áp dụng $(\sqrt[3]{a})^3 = a$; $\sqrt[3]{a^3} = a$.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Hãy tìm $\sqrt[3]{512}$; $\sqrt[3]{-729}$; $\sqrt[3]{0,064}$; $\sqrt[3]{-0,216}$; $\sqrt[3]{-0,008}$.

Ví dụ 2: Tính:

a). $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125}$;

b). $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}$.

Ví dụ 3: Thực hiện phép tính

a). $A = (\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$

b). $B = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức

a) $\sqrt[3]{x^3 + 1 + 3x(x+1)}$;

b) $\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt[3]{x+1}}}$

Dạng 2. Giải phương trình

1. Phương pháp giải

Áp dụng: $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Giải các phương trình

a). $\sqrt[3]{2x+1} = 2.$

b). $\sqrt[3]{1-2x} = -2.$

c). $\sqrt[3]{x-2} + 2 = x.$

Ví dụ 2. Giải phương trình

a) $\sqrt[3]{x+7} - 3 = 1;$

b) $\sqrt[3]{1-x^2} + 2 = 0.$

Ví dụ 3. Giải phương trình

a) $\sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15;$

b) $\sqrt[3]{x-3} + 3 = x.$

D. LUYỆN TẬP

Bài 1. Tính các căn bậc ba sau

1. $\sqrt[3]{64}$

2. $\sqrt[3]{-512}.$

3. $\sqrt[3]{0,064}$

4. $\sqrt[3]{-0,216}$

5. $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$

6. $\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{576}} - \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}$

Bài 2. Thực hiện phép tính

a). $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{-18} \cdot \sqrt[3]{3}.$

b). $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}; \sqrt[3]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}.$

c). $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{16}\right) \cdot \sqrt[3]{4}.$

d). $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) : 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$

e). $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}).$

Bài 3. Thực hiện phép tính $\sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216}$

a). $(\sqrt[3]{4}+1)^3 - (\sqrt[3]{4}-1)^3$

b). $(12\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}) \left(5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right)$.

Bài 4. Cho $x = \frac{2}{2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}}$ và $y = \frac{6}{2\sqrt[3]{2} - 2 + \sqrt[3]{4}}$. Tính $xy^3 - x^3y$.

Bài 5. Trục căn ở mẫu số biểu diễn $\frac{1}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}}$

Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau:

1. $A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

2. $B = \sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}}$.

Bài 7. Rút gọn các biểu thức sau:

1. $A = \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a} + \sqrt[3]{a^2}} \right) + \left(\frac{a}{a^2} \sqrt[6]{a^5} - \frac{3}{a} \sqrt[3]{a^2} \right) \right] \cdot a\sqrt[3]{a}$

2. $B = \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2b^4}}$

Bài 8. Giải phương trình:

a). $\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} = x + 3$;

b). $\sqrt[3]{5+x} - x = 5$.

Bài 9. Giải các phương trình sau

1. $\sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15$

2. $\sqrt[3]{x-3} + 3 = x$

Bài 10. Giải các phương trình sau

1. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x-2}$.

2. $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$

LUYỆN TẬP CHUNG SAU KHI HỌC BÀI 9&10

A. CÁC VÍ DỤ

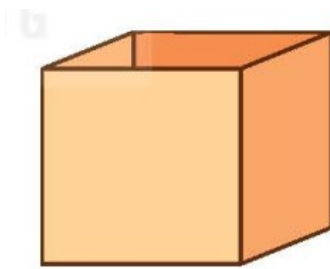
Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{3(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{4}$.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 1$.

a) Rút gọn P .

b) Sử dụng kết quả câu a, tính giá trị của P khi $x = 101$.

Ví dụ 3. Người ta cần làm một thùng hình lập phương bằng bìa cứng không có nắp trên và có thể tích 216dm^3 để đựng đồ. Tính diện tích bìa cứng cần dùng để làm thùng đựng đó (coi diện tích các mép nối là không đáng kể).



B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

3.28. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{5+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}-2}$;

b) $\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} - \sqrt{63} + \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{2}}$;

c) $\frac{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}}{2\sqrt{12}}$;

d) $\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} - 1}{\sqrt{50}}$.

3.29. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $3\sqrt{45} + \frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{245}$;

b) $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{21}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}+1} + \sqrt{7}$;

c) $\frac{3-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} + \sqrt{3}(2\sqrt{3}-1) + \sqrt{12}$;

d) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} - \frac{6}{\sqrt{6}}$.

3.30. Giả sử lực F của gió khi thổi theo phương vuông góc với bề mặt cánh buồm của một con thuyền tỉ lệ thuận với bình phương tốc độ của gió, hệ số tỉ lệ là 30. Trong đó, lực F được tính bằng N (Newton) và tốc độ được tính bằng m/s.

a) Khi tốc độ của gió là 10m/s thì lực F là bao nhiêu Newton?

b) Nếu cánh buồm chỉ có thể chịu được một áp lực tối đa là 12000 N thì con thuyền đó có thể đi được trong gió với tốc độ gió tối đa là bao nhiêu?

3.31. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{(-x-1)^3}$;

b) $\sqrt[3]{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}$.

C. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a). $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5}$;

b). $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5}$;

c). $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$;

d). $0,1\sqrt{200} + 2\sqrt{0,08} + 0,4\sqrt{50}$.

Bài 2. Rút gọn biểu thức sau:

a). $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$;

b). $\sqrt{150} + \sqrt{1,6}\sqrt{60} + 4,5\sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{6}$;

c). $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$;

d). $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$

Bài 3. Rút gọn biểu thức sau:

a). $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$;

b). $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{5}-3\sqrt{2}}}$;

c). $\frac{13\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24-4\sqrt{3}}$;

d). $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}}$;

e). $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}$ (với $x \geq 0$) .

g). $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$;

f). $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$;

h). $\frac{\sqrt{8-\sqrt{15}}}{\sqrt{30-\sqrt{2}}}$.

Bài 4. Tính

a) $\sqrt[3]{162} \cdot \sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$;

b) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{22\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{53\frac{1}{3}}$

Bài 5. Tính

a) $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})^3$;

b) $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9})$.

Bài 6. Rút gọn biểu thức

a) $\sqrt[3]{3} \cdot (5\sqrt[3]{18} - 3\sqrt[3]{144}) + \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{50}$;

b) $(12\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}) \left(5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right)$

Bài 7. Tìm x , biết :

a) $2\sqrt[3]{27x} + \frac{1}{7}\sqrt[3]{-343x} + \sqrt[3]{-729x} = 2$;

b) $\sqrt[3]{x^3 - 9x^2} = x - 3$.

Bài 8. Tính $M = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$.

Bài 9. Cho biểu thức $V = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$

1. Rút gọn biểu thức V

2. Tìm giá trị của x để $V = \frac{1}{3}$

Bài 10. Cho $A = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3\sqrt{x} + 5}{x\sqrt{x} - x - \sqrt{x} + 1} \right) \left(\frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{4\sqrt{x}} - 1 \right)$

1. Rút gọn biểu thức A

2. Đặt $B = (x - \sqrt{x} + 1)A$. Chứng minh $B > 1$ với $x > 0, x \neq 1$

Bài 11. Cho biểu thức $P = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 3}{3 + \sqrt{x}}$

1. Rút gọn biểu thức P .

2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P là một số nguyên.

Bài 12. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}} + \frac{2-x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{3}}{x+2 - \sqrt{3x+6}} \right)$

1. Tìm điều kiện của x để biểu thức P xác định.

2. Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P .

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A. TRẮC NGHIỆM

3.32. Căn bậc hai của 4 là

- A. 2. B. -2. C. 2 và -2. D. $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$.

3.33. Căn bậc hai số học của 49 là

- A. 7. B. -7. C. 7 và -7. D. $\sqrt{7}$ và $-\sqrt{7}$.

3.34. Rút gọn biểu thức $\sqrt[3]{(4-\sqrt{17})^3}$ ta được

- A. $4+\sqrt{17}$. B. $4-\sqrt{17}$. C. $\sqrt{17}-4$. D. $-4-\sqrt{17}$.

3.35. Độ dài đường kính (mét) của hình tròn có diện tích 4m^2 sau khi làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai bằng

- A. 2,26. B. 2,50. C. 1,13. D. 1,12.

3.36. Một vật rơi tự do từ độ cao 396,9m. Biết quãng đường chuyển động S (mét) của vật phụ thuộc vào thời gian t (giây) bởi công thức $S = 4,9t^2$. Vật chạm đất sau

- A. 8 giây. B. 5 giây. C. 11 giây. D. 9 giây.

B. TỰ LUẬN

3.37. Không sử dụng MTCT, tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{4(2+\sqrt{3})^2} - \frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

3.38. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{4}{\sqrt{x}+2}$ ($x > 0, x \neq 4$).

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của A tại $x = 14$.

3.39. Biết rằng nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn được tính bởi công thức $Q = I^2 R t$, trong đó Q là nhiệt lượng tính bằng đơn vị Joule (J); R là điện trở tính bằng đơn vị Ohm (Ω), I là cường độ dòng điện tính bằng đơn vị Ampe (A), t là thời gian tính bằng giây (s). Dòng điện chạy qua một dây dẫn có $R = 10\Omega$ trong thời gian 5 giây.

a) Thay dấu "?" trong bảng sau bằng các giá trị thích hợp.

I (A)	1	1,5	2
Q (J)	?	?	?

b) Cường độ dòng điện là bao nhiêu Ampe để nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn đạt 800J ?

C. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{\frac{9}{16}} : \frac{25}{36} - \sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}}$; b) $\sqrt{45,8^2 - 44,2^2} - \sqrt{6[(\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2]}$.

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\frac{1}{34}\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}} + 4\sqrt{\frac{32}{176^2 - 112^2}}$; b) $\frac{5(\sqrt{6}-1)}{\sqrt{6}+1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Bài 3. Rút gọn các biểu thức :

a) $\frac{3+3\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{6+2\sqrt{5}}$; b) $\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}-y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}$.

Bài 4. Rút gọn biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$.

Bài 5. Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x}$.

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P với $x = \frac{7+4\sqrt{3}}{4}$.

Bài 6. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{5}{\sqrt{x}-3} - \frac{6}{9-x} \right) : \frac{6}{\sqrt{x}+2}$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Bài 7. Cho biểu thức $P = \frac{2}{\sqrt{xy}} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 - \frac{x+y}{x-2\sqrt{xy}+y}$.

Chứng minh rằng với mọi giá trị của x và y làm cho biểu thức P có nghĩa thì giá trị của P không phụ thuộc vào x và y .

Bài 8. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+3}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn P .

b) Chứng minh rằng $P > \frac{1}{3}$.

Bài 9. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2}{\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn P .

b) Chứng minh rằng biểu thức P luôn luôn âm với mọi giá trị của x làm P xác định.

Bài 10. Cho biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 1}$.

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh rằng biểu thức P luôn luôn không âm với mọi giá trị của x làm P xác định.

Bài 11. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right)$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị lớn nhất của P.

Bài 12. Giải phương trình

a) $\sqrt{25(3x-1)^2} = 10$; b) $\frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3} = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 2}$.

Bài 13. Giải phương trình

a) $5x - \sqrt{(2x-1)^2} = 2$; b) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = x$.

BÀI 7. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA CỦA SỐ THỰC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM 1 CĂN BẬC HAI

Tìm hiểu khái niệm căn bậc hai

Căn bậc hai của số thực không âm a là số thực x sao cho $x^2 = a$.

Nhận xét

- Số âm không có căn bậc hai;
- Số 0 có một căn bậc hai duy nhất là 0 ;
- Số dương a có đúng hai căn bậc hai đối nhau là \sqrt{a} (căn bậc hai số học của a) và $-\sqrt{a}$.

Ví dụ 1. Tìm căn bậc hai của 81.

Lời giải


Ta có $\sqrt{81} = 9$ nên 81 có hai căn bậc hai là 9 và -9 .

Tính căn bậc hai của một số bằng máy tính cầm tay

Để tính các căn bậc hai của một số $a > 0$, chỉ cần tính \sqrt{a} . Có thể dễ dàng làm điều này bằng cách sử dụng MTCT.

Ví dụ 2. Sử dụng MTCT, tính căn bậc hai của 11,1 (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Bấm các phím  màn hình hiện kết quả là 3,33166625. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai ta được $\sqrt{11,1} \approx 3,33$.

Vậy căn bậc hai của 11,1 (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) là 3,33 và $-3,33$.

Tính chất của căn bậc hai

Tính chất: $\sqrt{a^2} = |a|$ với mọi số thực a .

Ví dụ 3. Không sử dụng MTCT, tính:

a) $1 - \sqrt{2} + \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2}$;

b) $\sqrt{(-3)^2} + 3$.

Lời giải

a) Ta có $\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = |1 + \sqrt{2}| = 1 + \sqrt{2}$ nên $1 - \sqrt{2} + \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = 1 - \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2}) = 2$.

b) Ta có $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ nên $\sqrt{(-3)^2} + 3 = 3 + 3 = 6$.

2. CĂN THỨC BẬC HAI

Căn thức bậc hai

Tổng quát, ta có định nghĩa:

- Căn thức bậc hai là biểu thức có dạng \sqrt{A} , trong đó A là một biểu thức đại số. A được gọi là biểu thức lấy căn hoặc biểu thức dưới dấu căn.
- \sqrt{A} xác định khi A lấy giá trị không âm và ta thường viết là $A \geq 0$. Ta nói $A \geq 0$ là điều kiện xác định (hay điều kiện có nghĩa) của \sqrt{A} .

Ví dụ 4. Xét căn thức $\sqrt{2x+1}$.

- a) Tìm điều kiện xác định của căn thức.
- b) Tính giá trị của căn thức đã cho tại $x = 0$ và $x = 4$.

Lời giải

- a) Điều kiện xác định của căn thức là $2x+1 \geq 0$ hay $x \geq -\frac{1}{2}$.
- b) Tại $x = 0$ (thoả mãn điều kiện xác định) căn thức có giá trị là $\sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 1$.
Tại $x = 4$ (thoả mãn điều kiện xác định) căn thức có giá trị là $\sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 3$.

Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Tương tự như căn bậc hai của một số thực không âm, với A là một biểu thức, ta cũng có:

- Với $A \geq 0$ ta có $\sqrt{A} \geq 0; (\sqrt{A})^2 = A$;
- $\sqrt{A^2} = |A|$.

Ví dụ 5. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $(\sqrt{1-x})^2$ với $x < 0$;
- b) $\sqrt{1-2x+x^2}$ với $x > 2$.

Lời giải

a) Từ giả thiết $x < 0$ suy ra $1-x > 0$. Do đó $(\sqrt{1-x})^2 = 1-x$. ← hằng đẳng thức $(\sqrt{A})^2 = A$ với mọi $A \geq 0$

b) Áp dụng hằng đẳng thức bình phương của một hiệu và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$, ta có $\sqrt{1-2x+x^2} = \sqrt{(1-x)^2} = |1-x|$.

Do giả thiết $x > 2$ suy ra $1-x < 0$ nên $|1-x| = -(1-x) = x-1$. Vì vậy

$$\sqrt{1-2x+x^2} = \sqrt{(1-x)^2} = x-1, \text{ với } x > 2$$

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

3.1. Tìm căn bậc hai của mỗi số sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai):

- a) 24,5 ;
- b) $\frac{9}{10}$.

Lời giải

Sử dụng MTCT:

a) Bấm các phím $\sqrt{\quad}$ 2 4 $,$ 5 \equiv $S \leftrightarrow D$ màn hình hiện kết quả là 4,949747468 .

Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai ta được $\sqrt{24,5} \approx 4,95$.

Vậy số 24,5 có hai căn bậc hai là 4,95 và $-4,95$.

b) Bấm các phím $\sqrt{\quad}$ $\frac{\square}{\square}$ 9 ∇ 1 0 \equiv $S \leftrightarrow D$ màn hình hiện kết quả là 0,9486832981 .

Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai ta được $\sqrt{\frac{9}{10}} \approx 0,95$.

Vậy số $\frac{9}{10}$ có hai căn bậc hai là 0,95 và $-0,95$.

3.2. Để chuẩn bị trồng cây trên vỉa hè, người ta để lại những ô đất hình tròn có diện tích khoảng 2 m^2 . Em hãy ước lượng (với độ chính xác 0,005) đường kính của các ô đất đó khoảng bao nhiêu mét?

Lời giải

Công thức tính diện tích hình tròn bán kính R là $S = \pi R^2$.

Theo bài, ta có: $\pi R^2 = 2$, suy ra $R^2 = \frac{2}{\pi}$, do đó $R = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ (do $R > 0$) .

Khi đó, đường kính của các ô đất đó là: $d = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Sử dụng MTCT, Màn hình hiện kết quả là 1,595769122.

Làm tròn kết quả với độ chính xác 0,005 (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai) ta được

$$d = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 1,60 .$$

Vậy ta ước lượng được đường kính của các ô đất đó khoảng 1,60 m.

3.3. Tìm điều kiện xác định của $\sqrt{x+10}$ và tính giá trị của căn thức tại $x = -1$.

Lời giải

Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{x+10}$ là $x+10 \geq 0$ hay $x \geq -10$.

Thay $x = -1$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức $\sqrt{x+10}$ ta được: $\sqrt{-1+10} = \sqrt{9} = 3$

Vậy giá trị của căn thức $\sqrt{x+10}$ là 3 khi $x = -1$.

3.4. Tính: $\sqrt{5,1^2}$; $\sqrt{(-4,9)^2}$; $-\sqrt{(-0,001)^2}$.

Lời giải

Ta có:

$$\sqrt{5,1^2} = |5,1| = 5,1$$

$$\sqrt{(-4,9)^2} = |-4,9| = 4,9$$

$$-\sqrt{(-0,001)^2} = -|-0,001| = -0,001$$

3.5. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$;

b) $3\sqrt{x^2} - x + 1$ ($x < 0$);

c) $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ ($x < 2$).

Lời giải

a) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$ (vì $2-\sqrt{5} < 0$).

b) $3\sqrt{x^2} - x + 1 = 3|x| - x + 1$. Vì $x < 0$ nên $|x| = -x$.

Vậy $3\sqrt{x^2} - x + 1 = 3|x| - x + 1 = -3x - x + 1 = -4x + 1$.

c) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$. Vì $x < 2$ nên $x-2 < 0$, do đó $|x-2| = 2-x$.

Vậy $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = 2-x$.

3.6. Không dùng MTCT, chứng tỏ biểu thức A có giá trị là số nguyên:

$$A = \sqrt{(1+2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-2\sqrt{2})^2}$$

Lời giải

Ta có:

$$A = \sqrt{(1+2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-2\sqrt{2})^2} = |1+2\sqrt{2}| - |1-2\sqrt{2}| = 1+2\sqrt{2} - (2\sqrt{2}-1) = 1+2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 1 = 2$$

Vậy giá trị của biểu thức A là số nguyên.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: So Sánh Hai Số

1. Phương pháp

Áp dụng: Với $a \geq 0, b \geq 0$ ta có: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

2. Ví dụ minh

Ví dụ 1: So sánh:

a) 3 và $\sqrt{5}$

b) 8 và $\sqrt{63}$

c) 9 và $\sqrt{79}$

Lời giải

a) Ta có $3 = \sqrt{9}$ và $9 > 5 \Rightarrow \sqrt{9} > \sqrt{5}$. Vậy $3 > \sqrt{5}$.

b) Ta có $8 = \sqrt{64}$ và $64 > 63 \Rightarrow \sqrt{64} > \sqrt{63}$. Vậy $8 > \sqrt{63}$.

c) Ta có $9 = \sqrt{81}$ và $81 > 79 \Rightarrow \sqrt{81} > \sqrt{79}$. Vậy $9 > \sqrt{79}$.

Ví dụ 2: So sánh các số :

a. $2\sqrt{31}$ và 10

b. $2 + \sqrt{3}$ và $3 + \sqrt{2}$.

Lời giải

a. Áp dụng định lí $a > b \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Ta có $31 > 25$ nên $\sqrt{31} > 5$ hay $2\sqrt{31} > 10$

b. Áp dụng định lí $a > b \geq 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2$. Ta có: $(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$

$$(3 + \sqrt{2})^2 = 11 + 6\sqrt{2}$$

Nhưng $4\sqrt{3} < 6\sqrt{2}$ (vì $(4\sqrt{3})^2 = 48; (6\sqrt{2})^2 = 72$)

nên $7 + 4\sqrt{3} < 11 + 6\sqrt{2}$. Vậy $2 + \sqrt{3} < 3 + \sqrt{2}$.

Ví dụ 3. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh 8 và $\sqrt{65}$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $8 = \sqrt{64}$. Vì $\sqrt{64} < \sqrt{65}$ nên $8 < \sqrt{65}$.

Cách 2: Vì $8^2 = 64; (\sqrt{65})^2 = 65$ nên $8^2 < (\sqrt{65})^2$, suy ra $8 < \sqrt{65}$.

Cách giải này dựa vào tính chất: Nếu $a, b > 0$ và $a^2 < b^2$ thì $a < b$.

Như vậy, để so sánh hai số dương ta có thể so sánh các bình phương của chúng.

Ví dụ 4. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh $\sqrt{15} - 1$ và $\sqrt{10}$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{15} - 1 < \sqrt{16} - 1 = 4 - 1 = 3; \sqrt{10} > \sqrt{9} = 2$. Vậy $\sqrt{15} - 1 < \sqrt{10}$.

Ví dụ 5. Với $a < 0$ thì số nào lớn hơn trong hai số $\sqrt{-a}$ và $\sqrt{-2a}$?

Lời giải

Ta có $-1 > -2$ nên $-a < -2a$ (vì $a < 0$). Do đó $\sqrt{-a} < \sqrt{-2a}$.

Dạng 2. Tìm x thỏa điều kiện cho trước

1. Phương pháp giải

Với $a \geq 0$:

- $x^2 = a$ khi $x = \pm\sqrt{a}$.

- $\sqrt{x} = a$ khi $x = a^2$.
- $\sqrt{x} < a$ khi $0 \leq x < a^2$.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị gần đúng của nghiệm mỗi phương trình sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba):

a) $x^2 = 4,5$.

b) $x^2 = 5$.

c) $x^2 = 7,5$.

d) $x^2 = 9,12$.

Lời giải

a) Nghiệm của phương trình $x^2 = a$ (với $a \geq 0$) là các căn bậc hai của a .

Phương trình $x^2 = 4,5$ có hai nghiệm là $x_1 = \sqrt{4,5}$ và $x_2 = -\sqrt{4,5}$.

Dùng máy tính ta tìm được $x_1 \approx 2,121$ và $x_2 \approx -2,121$.

b) $x^2 = 5$ có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{5} \approx \pm 2,236$.

c) $x^2 = 7,5$ có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{7,5} \approx \pm 2,739$.

d) $x^2 = 9,12$ có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{9,12} \approx \pm 3,020$.

Ví dụ 2: Tìm x sao cho :

a. $x^2 = 16$

b. $x^2 = \frac{9}{25}$

c. $x^2 = -4$

Lời giải

a. $x^2 = 16$ thì $x = 4$ hay $x = -4$

b. $x^2 = \frac{9}{25}$ thì $x = \frac{3}{5}$ hay $x = -\frac{3}{5}$

c. $x^2 = -4$ thì không tồn tại số thực x .

Ví dụ 3. số x không âm, biết:

a) $\sqrt{x} = 15$;

b) $2\sqrt{x} = 14$;

c) $\sqrt{x} < \sqrt{2}$;

d) $\sqrt{2x} < 4$.

Lời giải

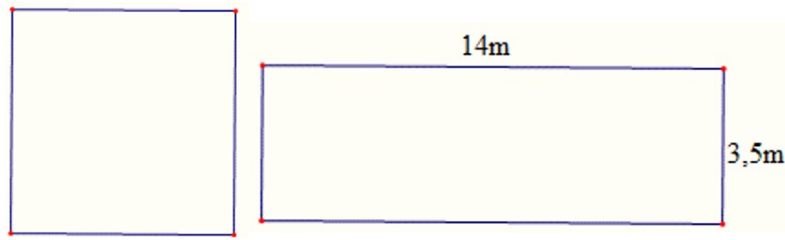
a) Ta có $\sqrt{x} = 15 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{15^2} \Leftrightarrow x = 225$. Vậy $x = 225$.

b) $2\sqrt{x} = 14 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{49} \Leftrightarrow x = 49$. Vậy $x = 49$.

c) $\sqrt{x} < \sqrt{2} \Leftrightarrow x < 2$. Kết hợp điều kiện $0 \leq x < 2$.

d) $\sqrt{2x} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x} < \sqrt{16} \Leftrightarrow 0 \leq 2x < 16 \Leftrightarrow 0 \leq x < 8$. Vậy $0 \leq x < 8$.

Ví dụ 4. Tính cạnh của một hình vuông, biết diện tích của nó bằng diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng 3,5 m và chiều dài 14 m.



Lời giải

Diện tích hình chữ nhật là $3,5 \cdot 14 = 49(\text{m}^2)$.

Gọi cạnh của hình vuông là $x(x > 0)$.

Ta có: $x^2 = 49 \Leftrightarrow x = 7$.

Vậy cạnh của hình vuông là 7m.

Dạng 3. Tìm điều kiện để \sqrt{A} có nghĩa

1. Phương pháp giải

① \sqrt{A} có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$.

② $\sqrt{\frac{1}{A}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A > 0$.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Với giá trị nào của a thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a). $\sqrt{\frac{a}{3}}$;

b). $\sqrt{4-a}$;

c). $\sqrt{-5a}$;

d). $\sqrt{3a+7}$.

Lời giải

a) $\sqrt{\frac{a}{3}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{a}{3} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$.

b) $\sqrt{-5a}$ có nghĩa $\Leftrightarrow -5a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$.

c) $\sqrt{4-a}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 4-a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 4$.

d) $\sqrt{3a+7}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 3a+7 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\frac{7}{3}$.

Ví dụ 2: Tìm x , để mỗi căn thức sau có nghĩa:

a). $\sqrt{2x+7}$;

b). $\sqrt{-3x+4}$;

c). $\sqrt{\frac{1}{-1+x}}$;

d). $\sqrt{1+x^2}$.

Lời giải

a) $\sqrt{2x+7}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 2x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}$.

b) $\sqrt{-3x+4}$ có nghĩa $\Leftrightarrow -3x+4 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$.

c) $\sqrt{\frac{1}{-1+x}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow -1+x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

d) Vì $1+x^2 > 0$ với mọi x nên $\sqrt{1+x^2}$ có nghĩa với mọi x

Ví dụ 3: Với giá trị nào của a thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a). $\sqrt{\frac{1}{a^2}}$;

b) $\sqrt{\frac{a^2+1}{1-2a}}$;

c) $\sqrt{a^2-1}$;

d) $\sqrt{4-a^2}$.

Lời giải

a) $\sqrt{\frac{1}{a^2}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} \geq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$.

b) $\sqrt{\frac{a^2+1}{1-2a}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 1-2a > 0$ (vì $a^2+1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$). $\Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$.

c) $\sqrt{a^2-1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow a^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq 1 \Leftrightarrow |a| \geq 1 \Leftrightarrow a \leq -1$ hoặc $a \geq 1$.

d) $\sqrt{4-a^2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 4-a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq 4 \Leftrightarrow |a| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2$.

Dạng 4. Tính giá trị biểu thức

1. Phương pháp giải

Áp dụng: $\sqrt{A^2} = \begin{cases} A & \text{neu } A \geq 0 \\ -A & \text{neu } A < 0. \end{cases}$

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tính:

a). $\sqrt{(0,1)^2}$;

b) $\sqrt{(-0,3)^2}$;

c). $-\sqrt{(-1,3)^2}$;

d) $-0,4\sqrt{(-0,4)^2}$.

Lời giải

a) $\sqrt{(0,1)^2} = |0,1| = 0,1$.

b) $\sqrt{(-0,3)^2} = |-0,3| = 0,3$.

c) $-\sqrt{(-1,3)^2} = -|-1,3| = -1,3$.

d) $-0,4\sqrt{(-0,4)^2} = -0,4 \cdot |-0,4| = -0,16$.

Ví dụ 2: Tính:

a). $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$;

b). $36 : \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 18} - \sqrt{169}$;

c). $\sqrt{\sqrt{81}}$;

d). $\sqrt{3^2 + 4^2}$.

Giải:

- a) Ta có $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49} = 4 \cdot 5 + 14 : 7 = 20 + 2 = 22$.
- b) $36 : \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 18} - \sqrt{169} = 36 : \sqrt{18^2} - 13 = 36 : 18 - 13 = 2 - 13 = -11$.
- c) $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$.
- d) $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Dạng 5. Rút gọn biểu thức

1. Phương pháp giải:

① Áp dụng $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{ khi } A \geq 0 \\ -A & \text{ khi } A < 0 \end{cases}$

Xét các trường hợp $A \geq 0$, $A < 0$ để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

② \sqrt{A} xác định (có nghĩa) $\Leftrightarrow A \geq 0$.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a). $\sqrt{(4 - \sqrt{15})^2} + \sqrt{15}$;

b). $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$;

c). $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$;

d). $\sqrt{49a^2}$, với $a < 0$.

Lời giải

a) Ta có $\sqrt{(4 - \sqrt{15})^2} + \sqrt{15} = |4 - \sqrt{15}| + \sqrt{15} = 4 - \sqrt{15} + \sqrt{15} = 4$.

(Vì $4 - \sqrt{15} > 0$ nên $|4 - \sqrt{15}| = 4 - \sqrt{15}$)

b) Ta có

$$\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| + |1 - \sqrt{3}| = (2 - \sqrt{3}) + [-(1 - \sqrt{3})] = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 1$$

(Vì $2 - \sqrt{3} > 0$ nên $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$ và $1 - \sqrt{3} < 0$ nên $|1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$)

c) Ta có $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 + 2^2} + \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 + 2^2}$

$$= \sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = |\sqrt{3} + 2| + |\sqrt{3} - 2| = (\sqrt{3} + 2) + (2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} + 2 + 2 - \sqrt{3} = 4.$$

d) Ta có $\sqrt{49a^2} = \sqrt{(7a)^2} = |7a| = -7a$. (Vì $a < 0$ nên $7a < 0$, suy ra $|7a| = -7a$)

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a). $\sqrt{25a^2} + 3a$, với $a < 0$;

b). $\sqrt{16a^4} + 6a^2$;

c). $3\sqrt{9a^6} - 6a^3$, với $a \leq 0$;

d). $\sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$, với $-3 \leq a \leq 3$.

Lời giải

a). Ta có $\sqrt{25a^2} + 3a = \sqrt{(5a)^2} + 3a = |5a| + 3a = -5a + 3a = -2a$.

(Vì $a < 0$ nên $5a < 0$, suy ra $|5a| = -5a$)

b). Ta có $\sqrt{16a^4} + 6a^2 = \sqrt{(4a^2)^2} + 6a^2 = |4a^2| + 6a^2 = 4a^2 + 6a^2 = 10a^2$.

(Vì $a^2 \geq 0$, với mọi a nên $4a^2 \geq 0$, với mọi a , suy ra $|4a^2| = 4a^2$)

c). Ta có $3\sqrt{9a^6} - 6a^3 = 3\sqrt{(3a^3)^2} - 6a^3 = 3|3a^3| - 6a^3 = 3 \cdot (-3a^3) - 6a^3 = -15a^3$.

(Vì $a \leq 0$ nên $3a^3 \leq 0$, suy ra $|3a^3| = -3a^3$)

d). Ta có $\sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9} = \sqrt{(a+3)^2} + \sqrt{(a-3)^2} = |a+3| + |a-3| = (a+3) + (3-a)$
 $= a + 3 + 3 - a = 6$.

(Vì $-3 \leq a \leq 3$ nên $a+3 \geq 0$ và $a-3 \leq 0$, do đó $|a+3| = a+3$ và $|a-3| = 3-a$)

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau:

a). $\frac{\sqrt{a}-2}{a-4}$, với $a \geq 0, a \neq 4$;

b). $\frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1}$, với $a \geq 0, a \neq 1$;

Lời giải

a). Với $a \geq 0, a \neq 4$ ta có $a-4 = (\sqrt{a})^2 - 2^2 = (\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)$ nên:

$$\frac{\sqrt{a}-2}{a-4} = \frac{\sqrt{a}-2}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)} = \frac{1}{\sqrt{a}+2}.$$

b). Với $a \geq 0, a \neq 1$ ta có $\frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1} = \frac{(\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a} + 1}{(\sqrt{a})^2 - 1} = \frac{(\sqrt{a}+1)^2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$.

Dạng 6. Giải phương trình

1. Phương pháp giải

Áp dụng: $\sqrt{A^2} = |A|$; $A^2 = B^2 \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tìm x biết:

a). $\sqrt{x^2} = 5$;

b). $\sqrt{25x^2} = 10$;

b). $\sqrt{4x^2 - 28x + 49} = 7$;

c). $\sqrt{x - 10\sqrt{x} + 25} = 3$.

Lời giải

a). Ta có $\sqrt{x^2} = 5 \Leftrightarrow |x| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$. Vậy $x \in \{-5; 5\}$.

b). Ta có $\sqrt{25x^2} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(5x)^2} = 10 \Leftrightarrow |5x| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ 5x = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$. Vậy $x \in \{-2; 2\}$.

c). Ta có $\sqrt{4x^2 - 28x + 49} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{(2x-7)^2} = 7 \Leftrightarrow |2x-7| = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7 = 7 \\ 2x-7 = -7 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 14 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 0 \end{cases}$.

Vậy $x \in \{0; 7\}$.

d). Ta có $\sqrt{x-10\sqrt{x}+25} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x}-5)^2} = 3 \Leftrightarrow |\sqrt{x}-5| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-5 = 3 \\ \sqrt{x}-5 = -3 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 8 \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 64 \\ x = 4 \end{cases}$.

Vậy $x \in \{4; 64\}$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a). $4x^2 - 64 = 0$;

b). $\sqrt{x^4} - 7 = 0$;

c). $\sqrt{9x^2} = 2x+1$;

d). $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0$.

Giải:

a). Ta có $4x^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 64 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$. Vậy $S = \{-4; 4\}$.

b). Ta có $\sqrt{x^4} - 7 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x^2)^2} = 7 \Leftrightarrow |x^2| = 7 \Leftrightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{7} \\ x = -\sqrt{7} \end{cases}$. Vậy $S = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$.

c). Ta có $\sqrt{9x^2} = 2x+1 \Leftrightarrow \sqrt{(3x)^2} = 2x+1 \Leftrightarrow |3x| = 2x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3x \geq 0 \\ 3x = 2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x < 0 \\ -3x = 2x+1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x = -\frac{1}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{5} \end{cases} \text{ . Vậy } S = \left\{ -\frac{1}{5}; 1 \right\}.$$

d). Ta có $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{(x+2)^2}$

$$\Leftrightarrow |x-2|=|x+2| \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=x+2 \\ x-2=-(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x=-4 \\ 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0. \text{ Vậy } S=\{0\}.$$

Ví dụ 3. Tính cạnh của hình vuông, biết diện tích hình vuông đó bằng diện tích tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 12,8 m và 40 m.

Lời giải

Gọi x ($x > 0$, m) là cạnh hình vuông, khi đó diện tích hình vuông bằng: $S_{hv} = x^2$ (m²).

Diện tích tam giác vuông là: $S_{tgv} = \frac{1}{2} \cdot 12,8 \cdot 40 = 256$ (m²).

Theo giả thiết ta có: $S_{hv} = S_{tgv} \Leftrightarrow x^2 = 256 \Leftrightarrow x = \sqrt{256} = 16$ (m).

Vậy cạnh của hình vuông là 16 m.

Dạng 7: Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử

1. Phương pháp giải:

Áp dụng các công thức:

$$\blacklozenge A = (\sqrt{A})^2 \text{ (với } A \geq 0 \text{)}.$$

$$\blacklozenge A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Phân tích thành nhân tử:

a). $x^2 - 2$.

b). $x^2 - 7$.

c). $x^2 + 2\sqrt{15}x + 15$.

d). $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3$.

Giải:

a). Ta có $x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

b). Ta có $x^2 - 7 = x^2 - (\sqrt{7})^2 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$.

c). Ta có $x^2 + 2\sqrt{15}x + 15 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \sqrt{15} + (\sqrt{15})^2 = (x + \sqrt{15})^2$.

d). Ta có $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = (2x - \sqrt{3})^2$.

Dạng 8: Chứng minh đẳng thức

1. Phương pháp giải.

Áp dụng

◆ Các hằng đẳng thức đáng nhớ.

◆ và $A = (\sqrt{A})^2$ để biến đổi vế trái thành vế phải hoặc ngược lại.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Chứng minh:

a). $(\sqrt{5}-1)^2 = 6-2\sqrt{5}$.

b). $\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{5}=-1$.

Giải:

a). Ta có $(\sqrt{5}-1)^2 = (\sqrt{5})^2 - 2\cdot\sqrt{5}\cdot 1 + 1^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = 6 - 2\sqrt{5}$.

b). Áp dụng câu a, ta có:

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}-\sqrt{5} = |\sqrt{5}-1|-\sqrt{5} = \sqrt{5}-1-\sqrt{5} = -1.$$

D. LUYỆN TẬP

Bài 1. Dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị gần đúng của nghiệm mỗi phương trình sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba):

a) $x^2 = 5$; b) $x^2 = 2,5$; c) $x^2 = \sqrt{5}$.

Lời giải

a) $x_1 = \sqrt{5} \approx 2,236$; $x_2 = -\sqrt{5} \approx -2,236$

b) $x_1 = \sqrt{2,5} \approx 1,581$; $x_2 = -\sqrt{2,5} \approx -1,581$

c) $x_1 = \sqrt{\sqrt{5}} \approx 1,495$; $x_2 = -\sqrt{\sqrt{5}} \approx -1,495$

Bài 2. So sánh

a) 2 và $1+\sqrt{2}$; b) 1 và $\sqrt{3}-1$; c) $3\sqrt{11}$ và 12; d) -10 và $-2\sqrt{31}$.

Lời giải

a) $2 < 1+\sqrt{2}$; b) $1 > \sqrt{3}-1$ c) $3\sqrt{11} < 12$; d) $-10 > -2\sqrt{31}$

Bài 3. Tìm x không âm, biết

a) $\sqrt{x} = 5$; b) $\sqrt{x} = \sqrt{2}$; c) $\sqrt{x} = -2$.

Lời giải

a) $x = 25$ b) $x = 2$; c) Không có x.

Bài 4. Cho $a > 0$. Chứng minh:

a) Nếu $a > 1$ thì $a > \sqrt{a}$:

b) Nếu $a < 1$ thì $a < \sqrt{a}$.

Lời giải

a) $a - \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a}-1) > 0$ nếu $a > 1$.

b) $a - \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a}-1) < 0$ nếu $0 < a < 1$.

Bài 5. Biểu thức sau xác định với giá trị nào của x ?

a). $\sqrt{-3x+2}$;

b). $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$;

c). $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$;

d). $\sqrt{x(x+2)}$

e). $\sqrt{9x^2 - 6x + 1}$

f). $\sqrt{\frac{2x-1}{2-x}}$

g). $\sqrt{5x^2 - 3x - 8}$

h). $\sqrt{5x^2 + 4x + 7}$.

Giải:

a) Đk: $-3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$.

b) Đk: $\begin{cases} \frac{4}{2x+3} \geq 0 \\ 2x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x+3 > 0 \Leftrightarrow 2x > -3 \Leftrightarrow x > \frac{-3}{2}$.

c) Đk: $\begin{cases} \frac{2}{x^2} \geq 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

d) Đk: $x(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -2 \end{cases}$

e) Đk: $9x^2 - 6x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (3x-1)^2 \geq 0, \forall x$.

f) Đk: $\frac{2x-1}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \leq 0 \\ 2-x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x < 2 \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 2$.

g) Đk: $5x^2 - 3x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow 5x^2 - (8-5)x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow (5x^2 - 8x) + (5x - 8) \geq 0 \Leftrightarrow (5x-8)(x+1) \geq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-8 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{8}{5} \\ x \leq -1 \end{cases}$

h) Đk: $5x^2 + 4x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow 25x^2 + 20x + 35 \geq 0$

$\Leftrightarrow (25x^2 + 2 \cdot 5x \cdot 2 + 4) + 31 \geq 0 \Leftrightarrow (5x+2)^2 + 31 \geq 0, \forall x$.

Bài 6. Tính:

a). $-0,8\sqrt{(-0,125)^2}$; b). $\sqrt{(-2)^6}$;

c). $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$;

d). $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$; e). $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$;

f). $\sqrt{(0,1-\sqrt{0,1})^2}$;

g). $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; h). $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; i). $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;
 j). $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$.

Giải:

a) $-0,8\sqrt{(-0,125)^2} = -0,8|-0,125| = -0,8 \cdot 0,125 = -0,1$.
 b) $\sqrt{(-2)^6} = \sqrt{(-2)^{3 \cdot 2}} = \sqrt{[(-2)^3]^2} = |(-2)^3| = 2^3 = 8$.
 c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$.
 d) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} = |2\sqrt{2}-3| = 3-2\sqrt{2}$.
 e) $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}$.
 f) $\sqrt{(0,1-\sqrt{0,1})^2} = |0,1-\sqrt{0,1}| = |\sqrt{0,1}(\sqrt{0,1}-1)| = \sqrt{0,1}(1-\sqrt{0,1}) = \sqrt{0,1}-1$.
 g) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3-2\sqrt{3} \cdot 1+1} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$.
 h) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2+2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1+1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = |\sqrt{2}+1| = \sqrt{2}+1$.
 i) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5-2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2+4} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = |\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2$.
 j) $\sqrt{16-6\sqrt{7}} = \sqrt{(7-2 \cdot \sqrt{7} \cdot 3+9)} = \sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} = |\sqrt{7}-3| = 3-\sqrt{7}$.

Bài 7. Rút gọn biểu thức:

a). $2\sqrt{x^2}$, với $x < 0$; b). $\frac{1}{2}\sqrt{x^{10}}$, với $x < 0$;
 c). $\sqrt{(a-5)^2}$, với $a \leq 5$; d). $\sqrt{(x-10)^{10}}$, với $x \leq 10$;
 e). $x-4+\sqrt{x^2-8x+16}$, với $x < 4$;
 f). $\sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$, với $0 \leq x \leq y$.

Giải:

a) $2\sqrt{x^2} = 2|x| = -2x$.
 b) $\frac{1}{2}\sqrt{x^{10}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^{5 \cdot 2}} = \frac{1}{2}\sqrt{(x^5)^2} = \frac{1}{2}|x^5| = -\frac{1}{2}x^5$.
 c) Ta có:
 • $a \leq 5 \Rightarrow a-5 \leq 0$
 • $\sqrt{(a-5)^2} = |a-5| = 5-a$
 d) Ta có:

- $x \leq 10 \Rightarrow x - 10 \leq 0 \Rightarrow (x - 10)^5 \leq 0 \Rightarrow (10 - x)^5 \geq 0.$

- $\sqrt{(x-10)^{10}} = \sqrt{\left[(x-10)^5 \right]^2} = \left| (x-10)^5 \right| = \left| (10-x)^5 \right| = (10-x)^5.$

e) Ta có:

- $x < 4 \Rightarrow x - 4 < 0$

- $x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 16} = x - 4 + \sqrt{(x-4)^2} = x - 4 + |x-4| = x - 4 - (x-4) = 0$

f) Ta có:

- $0 \leq x \leq y \Rightarrow x - y \leq 0 \Leftrightarrow y - x \geq 0$

- $\sqrt{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = \sqrt{\left[(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \right]^2} = \sqrt{\left[\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} \right]^2}$
 $= \sqrt{(x - y)^2} = |x - y| = -(x - y) = y - x.$

Tài liệu phát hành và bảo hành nội dung trên website Tailieuchuan.vn

Bài 8. Rút gọn biểu thức:

a). $\frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9}, (x \geq 0, x \neq 9);$

b). $\frac{x - 5\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} - 3}, (x \geq 0, x \neq 9);$

c). $6 - 2x - \sqrt{9 - 6x + x^2}, (x < 3).$

Giải:

a). $\frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9} = \frac{3 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = -\frac{1}{\sqrt{x} + 3}.$

b). $\frac{x - 5\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} - 3} = \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x} - 3} = \sqrt{x} - 2.$

c). $6 - 2x - \sqrt{9 - 6x + x^2} = 6 - 2x - \sqrt{(3 - x)^2} = 6 - 2x - |3 - x| = 6 - 2x - 3 + x = 3 - x.$

Bài 9. Tìm x biết

a). $\sqrt{(x-3)^2} = 3 - x ;$

b). $\sqrt{25 - 20x + 4x^2} + 2x = 5 ;$

c). $\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}} = \frac{1}{4} - x ;$

d). $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 1 ;$

e). $\sqrt{1 - 12x + 36x^2} = 5 ;$

g). $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 2.$

Giải:

a). $\sqrt{(x-3)^2} = 3 - x$

Ta có biến đổi: $|x-3|=3-x$

Ta có hai trường hợp:

TH 1: Nếu $x \geq 3$ thì $x-3=3-x \Leftrightarrow x=3(TM)$

TH 2: Nếu $x < 3$ thì $3-x=3-x \Leftrightarrow 0=0(TM)$

Vậy tất cả $x \leq 3$ đều thỏa mãn.

b). $\sqrt{25-20x+4x^2}+2x=5$

Ta có biến đổi: $\sqrt{(5-2x)^2}=5-2x$

$$\Leftrightarrow |5-2x|=5-2x$$

Ta có hai trường hợp:

TH 1: Nếu $x \leq \frac{5}{2}$ thì $5-2x=5-2x \Leftrightarrow 0=0(TM)$

TH 2: Nếu $x > \frac{5}{2}$ thì $2x-5=5-2x \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}(L)$

Vậy tất cả $x \leq \frac{5}{2}$ đều thỏa mãn.

c). $\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}-x$

Ta có biến đổi: $\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}-x \Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}-x$

Tương tự ta có: tất cả $x \leq \frac{1}{4}$ đều thỏa mãn.

d). $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-1.$

Điều kiện: $x \geq 1$

Ta có biến đổi: $\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=\sqrt{x-1}-1 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-1|=\sqrt{x-1}-1$

Ta có hai trường hợp:

Nếu: $\sqrt{x-1} \geq 1 \Rightarrow x \geq 2: \sqrt{x-1}-1=\sqrt{x-1}-1(TM)$

Nếu: $\sqrt{x-1} < 1 \Rightarrow x < 2: 1-\sqrt{x-1}=\sqrt{x-1}-1 \Leftrightarrow x=2(l)(TM)$

Vậy: $x \geq 2$ đều thỏa mãn.

e). $\sqrt{1-12x+36x^2}=5.$

Ta có biến đổi: $\sqrt{(1-6x)^2}=5 \Leftrightarrow |1-6x|=5$

Ta có hai trường hợp:

$$\text{Nếu: } x \leq \frac{1}{6} \text{ thì } 1 - 6x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ (TM)}$$

$$\text{Nếu: } x > \frac{1}{6} \text{ thì } 6x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (TM)}$$

Vậy: $x = -\frac{2}{3}$ và $x = 1$ là giá trị cần tìm.

g). $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2.$

Điều kiện: $x \geq 1$

$$\text{Ta có biến đổi: } \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1| = 2$$

Ta có hai trường hợp:

TH1: $\sqrt{x-1}+1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

TH2: $\sqrt{x-1}+1 = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = -3$ (VL).

Vậy: $x = 2$ là giá trị cần tìm.

Bài 10. Phân tích đa thức thành nhân tử.

a). $x^2 - 11$;

b). $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$;

c). $x - 5$ (với $x > 0$) ;

d). $5 - 7x^2$ (với $x > 0$) .

e). $3 + 4x$ (với $x < 0$) ;

Giải:

a). $x^2 - 11 = (x - \sqrt{11})(x + \sqrt{11}).$

b). $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = (x - \sqrt{2})^2.$

c). $x - 5 = (\sqrt{x} + \sqrt{5})(\sqrt{x} - \sqrt{5})$ (với $x > 0$)

d). $5 - 7x^2 = (\sqrt{5} - \sqrt{7x})(\sqrt{5} + \sqrt{7x})$ (với $x > 0$)

e). $3 + 4x = \sqrt{3}^2 - \sqrt{4x}^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{4x})(\sqrt{3} + \sqrt{4x})$ (với $x < 0$)

Bài 11. Chứng minh đẳng thức:

a). $9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^2$;

b). $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = 2$;

c). $\sqrt{23+8\sqrt{7}} - \sqrt{7} = 4$;

d). $\sqrt{a+4\sqrt{a-2}+2} + \sqrt{a-4\sqrt{a-2}+2} = 4$ (với $2 \leq a \leq 6$).

Lời giải

a). $9+4\sqrt{5} = (\sqrt{5}+2)^2$

$$VT = 5+2.\sqrt{5}.2+4 = \sqrt{5}^2 + 2.\sqrt{5}.2+2^2 = (\sqrt{5}+2)^2 = VT$$

b). Ta có biến đổi:

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{5+2.\sqrt{5}.2+4} - \sqrt{5} = \sqrt{\sqrt{5}^2 + 2.\sqrt{5}.2+2^2} - \sqrt{5} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5}+2)^2} - \sqrt{5} = |\sqrt{5}+2| - \sqrt{5} = \sqrt{5}+2 - \sqrt{5} = 2 = VP \end{aligned}$$

c). $VT = \sqrt{16+2.4.\sqrt{7}+7} - \sqrt{7} = \sqrt{4^2 + 2.4.\sqrt{7} + \sqrt{7}^2} - \sqrt{7}$
 $= \sqrt{(4+\sqrt{7})^2} - \sqrt{7} = |4+\sqrt{7}| - \sqrt{7} = 4+\sqrt{7} - \sqrt{7} = 4 = VP$

d). $VT = \sqrt{a-2+2.\sqrt{a-2}+4} + \sqrt{a-2-2.\sqrt{a-2}+4}$
 $= |\sqrt{a-2}+2| + |\sqrt{a-2}-2| = \sqrt{a-2}+2+2-\sqrt{a-2} = 4 = VP$ (Với $2 \leq a \leq 6$)

Lời giải

a) $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{8:2} = \sqrt{4} = 2.$

b) $\sqrt{52a^3} : \sqrt{13a} = \sqrt{52a^3 : (13a)} = \sqrt{4a^2} = \sqrt{(2a)^2} = 2a$ (do $a > 0$).

Ví dụ 6

a) Viết số dưới dấu căn thành một phân số thập phân rồi tính $\sqrt{1,69}$.

b) Rút gọn $a \cdot \sqrt{\frac{2}{a^2}}$ ($a > 0$).

Lời giải

a) Ta có $1,69 = \frac{169}{100} = \frac{13^2}{10^2}$ nên $\sqrt{1,69} = \sqrt{\frac{13^2}{10^2}} = \frac{\sqrt{13^2}}{\sqrt{10^2}} = \frac{13}{10} = 1,3.$

b) Do $a > 0$ nên $a \cdot \sqrt{\frac{2}{a^2}} = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2}} = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}.$

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

3.7. Tính:

a) $\sqrt{12} \cdot (\sqrt{12} + \sqrt{3});$

b) $\sqrt{8} \cdot (\sqrt{50} - \sqrt{2});$

c) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6}.$

Lời giải

a) $\sqrt{12} \cdot (\sqrt{12} + \sqrt{3}) = \sqrt{12} \cdot \sqrt{12} + \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 12} + \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{12^2} + \sqrt{36}$
 $= 12 + \sqrt{6^2} = 12 + 6 = 18.$

b) $\sqrt{8} \cdot (\sqrt{50} - \sqrt{2}) = \sqrt{8} \cdot \sqrt{50} - \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{400} - \sqrt{16} = \sqrt{20^2} - \sqrt{4^2} = 20 - 4 = 16.$

c) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 3 + 2\sqrt{3 \cdot 2} + 2 - 2\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 5$

3.8. Rút gọn biểu thức $\sqrt{2(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{\frac{3}{a+b}}$ (với $a \geq b > 0$).

Lời giải

Với $a \geq b > 0$, ta có: $\sqrt{2(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{\frac{3}{a+b}} = \sqrt{2(a-b)(a+b)} \cdot \sqrt{\frac{3}{a+b}} = \sqrt{6(a-b)}.$

3.9. Tính:

a) $\sqrt{99} : \sqrt{11};$

b) $\sqrt{7,84};$

c) $\sqrt{1815} : \sqrt{15}.$

Lời giải

a) $\sqrt{99} : \sqrt{11} = \frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{99}{11}} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3.$

$$b) \sqrt{7,84} = \sqrt{\frac{784}{100}} = \frac{\sqrt{784}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{28^2}}{\sqrt{10^2}} = \frac{28}{10} = 2,8.$$

$$c) \sqrt{1815} : \sqrt{15} = \frac{\sqrt{1815}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{1815}{15}} = \sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11.$$

3.10. Rút gọn $\frac{-3\sqrt{16a} + 5a\sqrt{16ab^2}}{2\sqrt{a}}$ (với $a > 0, b > 0$).

Lời giải

Với $a > 0, b > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{-3\sqrt{16a} + 5a\sqrt{16ab^2}}{2\sqrt{a}} &= \frac{-3 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{a} + 5a \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^2}}{2\sqrt{a}} \\ &= \frac{-3 \cdot 4 \cdot \sqrt{a} + 5a \cdot 4 \cdot \sqrt{a} \cdot |b|}{2\sqrt{a}} = \frac{-12\sqrt{a} + 20a\sqrt{a} \cdot b}{2\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}(-6 + 10ab)}{2\sqrt{a}} = -6 + 10ab. \end{aligned}$$

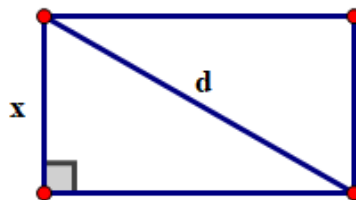
3.11. Kích thước màn hình tivi hình chữ nhật được xác định bởi độ dài đường chéo. Một loại tivi có tỉ lệ hai cạnh màn hình là 4: 3.

a) Gọi x (inch) là chiều rộng của màn hình tivi. Viết công thức tính độ dài đường chéo d (inch) của màn hình tivi theo x .

b) Tính chiều rộng và chiều dài (theo centimét) của màn hình tivi loại 40 inch.

Lời giải

a) Hình vẽ dưới đây mô tả màn hình tivi hình chữ nhật có chiều rộng là x (inch)



Vì tivi có tỉ lệ hai cạnh màn hình là 4: 3 nên chiều dài của tivi là: $\frac{4}{3}x$ (inch).

Theo định lí Pythagore, ta có: $d^2 = \left(\frac{4}{3}x\right)^2 + x^2 = \frac{16}{9}x^2 + x^2 = \frac{25}{9}x^2$.

Suy ra $d = \sqrt{\frac{25}{9}x^2} = \sqrt{\frac{25}{9}} \cdot \sqrt{x^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2} \cdot |x| = \frac{5}{3}x$ (inch) (do $d > 0$ và $x > 0$).

Vậy công thức tính độ dài đường chéo d của màn hình tivi là $d = \frac{5}{3}x$ (inch).

b) Màn hình tivi loại 40 inch tức là $d = 40$.

Do đó $\frac{5}{3}x = 40$, suy ra $x = 40 : \frac{5}{3} = 24$.

Vì vậy, chiều rộng của màn hình ti vi đó là 24 inch $\approx 24.2,54 \text{ cm} = 60,96 \text{ cm}$; chiều dài của màn hình ti vi đó là $\frac{4}{3} \cdot 24 = 32 \text{ inch} \approx 32.2,54 \text{ cm} = 81,28 \text{ cm}$.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Thực hiện phép tính

1. Phương pháp giải

- ✦ Sử dụng các quy tắc khai phương một tích và quy tắc nhân các căn bậc hai
- ✦ Nếu $A \geq 0, B \geq 0$ thì $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$
- ✦ $A \geq 0, B > 0$ thì $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính:

a). $\sqrt{0,16.81}$; b). $\sqrt{3^4 \cdot (-5)^2}$; c). $\sqrt{16,9.250}$; d). $\sqrt{5^2 \cdot 4^4}$.

Lời giải

- a) Ta có: $\sqrt{0,16.81} = \sqrt{0,16} \cdot \sqrt{81} = 0,4 \cdot 9 = 3,6$.
- b) Ta có: $\sqrt{3^4 \cdot (-5)^2} = \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{(-5)^2} = 3^2 \cdot |-5| = 9 \cdot 5 = 45$.
- c) Ta có: $\sqrt{16,9.250} = \sqrt{169.25} = \sqrt{169} \cdot \sqrt{25} = 13 \cdot 5 = 65$.
- d) Ta có: $\sqrt{5^2 \cdot 4^4} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{4^4} = 5 \cdot 4^2 = 80$.

Ví dụ 2. Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai, hãy tính:

a). $\sqrt{5} \cdot \sqrt{80}$; b). $\sqrt{2,45} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{50}$;
c). $\sqrt{0,6} \cdot \sqrt{5,4}$; d). $\sqrt{8,1} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{4,5}$.

Giải

- a) Ta có: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{80} = \sqrt{5.80} = \sqrt{400} = 20$.
- b) Ta có: $\sqrt{2,45} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{2,45.40.50} = \sqrt{4900} = 70$.
- c) Ta có: $\sqrt{0,6} \cdot \sqrt{5,4} = \sqrt{0,6.5,4} = \sqrt{3,24} = 1,8$.
- d) Ta có: $\sqrt{8,1} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{4,5} = \sqrt{8,1.5.4,5} = \sqrt{182,25} = 13,5$.

Ví dụ 3. Khai phương tích 13.25.52 được:

a). 2600. b). 130. c). 13. d). 260.

Hãy chọn kết quả đúng.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{13.25.52} = \sqrt{16900} = 130$ (chọn B).

Ví dụ 4. Biến đổi các biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi tính

a). $\sqrt{25^2 - 24^2}$; b). $\sqrt{26^2 - 10^2}$;
c). $\sqrt{137^2 - 88^2}$; d). $\sqrt{481^2 - 480^2}$.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{(25 - 24)(25 + 24)} = \sqrt{49} = 7$.

b) Ta có: $\sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{(26 - 10)(26 + 10)} = \sqrt{16 \cdot 36} = 4 \cdot 6 = 24$.

c) Ta có: $\sqrt{137^2 - 88^2} = \sqrt{(137 - 88)(137 + 88)} = \sqrt{49 \cdot 225} = 7 \cdot 15 = 105$.

d) Ta có: $\sqrt{481^2 - 480^2} = \sqrt{(481 - 480)(481 + 480)} = \sqrt{961} = 31$.

Ví dụ 5. Tính :

a). $\sqrt{\frac{289}{225}}$. b). $\sqrt{2\frac{14}{25}}$. c). $\sqrt{\frac{0,25}{9}}$. d). $\sqrt{\frac{8,1}{1,6}}$.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{\frac{289}{225}} = \frac{\sqrt{289}}{\sqrt{225}} = \frac{17}{15}$.

b) Ta có $\sqrt{2\frac{14}{25}} = \sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{25}} = \frac{8}{5}$.

c) Ta có: $\sqrt{\frac{0,25}{9}} = \frac{\sqrt{0,25}}{\sqrt{9}} = \frac{0,5}{9}$.

d) $\sqrt{\frac{8,1}{1,6}} = \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}} = \frac{9}{4}$.

Ví dụ 6. Tính :

a). $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b). $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$.
c). $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$. d). $\sqrt{\frac{6^5}{2^3 \cdot 3^5}}$.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{2}{18}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$.

b) Ta có $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}} = \sqrt{\frac{15}{735}} = \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}$.

c) Ta có: $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}} = \sqrt{\frac{12500}{500}} = \sqrt{25} = 5$.

$$d) \sqrt{\frac{6^5}{2^3 \cdot 3^5}} = \sqrt{\frac{2^5 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^5}} = \sqrt{4} = 2.$$

Ví dụ 7. Tính :

$$a). \sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{5} \cdot 0,01}.$$

$$b) \sqrt{1,44 \cdot 1,21 - 1,44 \cdot 0,4}.$$

$$c). \sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}.$$

$$d) \sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}.$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } \sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{5} \cdot 0,01} = \sqrt{\frac{25}{16} \cdot \frac{49}{9} \cdot 0,01} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{3} \cdot 0,1 = \frac{7}{24}.$$

$$b) \text{ Ta có } \sqrt{1,44 \cdot 1,21 - 1,44 \cdot 0,4} = \sqrt{1,44 \cdot (1,21 - 0,4)} = \sqrt{1,44 \cdot 0,81} = \sqrt{1,44} \cdot \sqrt{0,81} = 1,2 \cdot 0,9 = 1,08.$$

$$c) \text{ Ta có: } \sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}} = \sqrt{\frac{(165 - 124)(165 + 124)}{164}} = \sqrt{\frac{41 \cdot 289}{164}} = \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{17}{2}.$$

$$d) \sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}} = \sqrt{\frac{73 \cdot 225}{73 \cdot 841}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{841}} = \frac{15}{29}.$$

Dạng 2. Rút gọn biểu thức và tính giá trị biểu thức

1. Phương pháp giải

- ◆ Áp dụng các quy tắc $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ ($A \geq 0, B \geq 0$)
- ◆ Thay giá trị của biến vào biểu thức đã rút gọn.
- ◆ Áp dụng phép khai phương một thương: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ ($A \geq 0, B > 0$)
- ◆ Áp dụng $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, & \text{khi } A \geq 0 \\ -A, & \text{khi } A < 0 \end{cases}$.
- ◆ Xét các trường hợp $A \geq 0, A < 0$ để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức sau:

$$a). \sqrt{0,49a^2} \text{ với } a \leq 0;$$

$$b). \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^4 (6-2a)^2} \text{ với } a > 3;$$

$$c). \sqrt{19,76(2-a)^2} \text{ với } a > 2;$$

$$d). \frac{1}{a-b} \sqrt{a^2(a^2-b^2)^2} \text{ với } a > b \geq 0.$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } \sqrt{0,49a^2} = 0,7|a| = -0,7a \text{ (do } a \leq 0).$$

b) Ta có: $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^4 (6-2a)^2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 |6-2a| = \frac{a^2 \cdot 2|3-a|}{4} = \frac{a^2(a-3)}{2}$ (do $a > 3$).

c) Ta có: $\sqrt{19.76(2-a)^2} = \sqrt{1444(2-a)^2} = 38|2-a| = 38(a-2)$ (do $a > 2$).

d) Ta có: $\frac{1}{a-b} \sqrt{a^2(a^2-b^2)^2} = \frac{1}{a-b} \cdot |a| \cdot |a^2-b^2| = \frac{1}{a-b} \cdot a \cdot (a-b)(a+b) = a(a+b)$

(do $a > b \geq 0$).

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a). $\sqrt{\frac{2a}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5a}{18}}$ với $a \geq 0$;

b). $\sqrt{11a} \cdot \sqrt{\frac{99}{a}}$ với $a > 0$;

c). $21a - \sqrt{11a} \cdot \sqrt{44a}$ với $a \geq 0$;

d). $(4+a)^2 - \sqrt{0,4} \cdot \sqrt{160a^2}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{\frac{2a}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5a}{18}} = \sqrt{\frac{10a^2}{90}} = \sqrt{\frac{a^2}{9}} = \frac{a}{3}$ (do $a \geq 0$).

b) Ta có: $\sqrt{11a} \cdot \sqrt{\frac{99}{a}} = \sqrt{11a \cdot \frac{99}{a}} = \sqrt{1089} = 33$.

c) Ta có: $21a - \sqrt{11a} \cdot \sqrt{44a} = 21a - \sqrt{484a^2} = 21a - 22a = -a$ (do $a \geq 0$)

d) Ta có: $(4+a)^2 - \sqrt{0,4} \cdot \sqrt{160a^2} = (4+a)^2 - \sqrt{64a^2} = (4+a)^2 - 8|a| = 16 + a^2 + 8a - 8|a|$

✦ Nếu $a \geq 0$ thì $(4+a)^2 - \sqrt{0,4} \cdot \sqrt{160a^2} = 16 + a^2$.

✦ Nếu $a < 0$ thì $(4+a)^2 - \sqrt{0,4} \cdot \sqrt{160a^2} = 16 + a^2 + 16a$.

Ví dụ 3. Rút gọn và tìm giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) của các căn thức sau:

a). $\sqrt{9(4+20x+25x^2)^2}$ tại $x = -\sqrt{5}$;

b). $\sqrt{2a^2(2b^2-12b+18)}$ tại $a = -3, b = \sqrt{3}$.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{9(4+20x+25x^2)^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{(2+5x)^4} = 3(2+5x)^2$.

Thay $x = -\sqrt{5}$ vào biểu thức đã rút gọn, ta được:

$$3(2+5x)^2 = 3(2-5\sqrt{5})^2 = 3(129-20\sqrt{5}) \approx 252,836.$$

b) Ta có: $\sqrt{2a^2(2b^2-12b+18)} = \sqrt{4a^2(b^2-6b+9)} = \sqrt{4a^2} \cdot \sqrt{(b-3)^2} = 2|a| \cdot |b-3|$

Thay $a = -3, b = \sqrt{3}$ vào biểu thức đã rút gọn, ta được:

$$2|a| \cdot |b-3| = 2|-3| \cdot |\sqrt{3}-3| = 6(3-\sqrt{3}) \approx 7,608.$$

Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a). $\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0, y \neq 0$.

b). $2y^2 \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}}$ với $y < 0$.

c). $5xy \sqrt{\frac{25x^2}{y^6}}$ với $x < 0, y > 0$.

d). $0,2x^3y^3 \sqrt{\frac{16}{x^4y^8}}$ với $x \neq 0, y \neq 0$.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{y^4}} = \frac{y}{x} \cdot \frac{|x|}{y^2} = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y^2} = \frac{1}{y}$ (do $x > 0, y \neq 0$).

b) Ta có $2y^2 \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}} = 2y^2 \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}} = 2y^2 \cdot \frac{x^2}{2|y|} = 2y^2 \cdot \frac{x^2}{-2y} = -x^2y$.

c) Ta có: $5xy \sqrt{\frac{25x^2}{y^6}} = 5xy \cdot \frac{\sqrt{25x^2}}{\sqrt{y^6}} = 5xy \cdot \frac{5|x|}{|y^3|} = 5xy \cdot \frac{-5x}{y^3} = -\frac{25x^2}{y^2}$ (do $x < 0, y > 0$).

d) $0,2x^3y^3 \sqrt{\frac{16}{x^4y^8}} = 0,2x^3y^3 \cdot \frac{4}{x^2y^4} = \frac{0,8x}{y}$.

Ví dụ 5. Rút gọn các biểu thức sau:

a). $ab^2 \sqrt{\frac{3}{a^2b^4}}$ với $a < 0, b \neq 0$.

b). $\sqrt{\frac{27(a-3)^2}{48}}$ với $a > 3$.

c). $\sqrt{\frac{9+12a+4a^2}{b^2}}$ với $b < 0, a > -1,5$.

d). $(a-b) \sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}}$ với $a < b < 0$.

Lời giải

a) Ta có: $ab^2 \sqrt{\frac{3}{a^2b^4}} = ab^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{|ab^2|} = ab^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{-ab^2} = -\sqrt{3}$ (do $a < 0, b \neq 0$).

b) Ta có $\sqrt{\frac{27(a-3)^2}{48}} = \sqrt{\frac{9(a-3)^2}{16}} = \frac{3|a-3|}{4} = \frac{3(a-3)}{4}$ (do $a > 3$).

c) Ta có: $\sqrt{\frac{9+12a+4a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{(3+2a)^2}{b^2}} = \frac{|3+2a|}{|b|} = \frac{3+2a}{-b}$. (do $b < 0, a > -1,5$).

d) $(a-b) \sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}} = (a-b) \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{(a-b)^2}} = (a-b) \frac{\sqrt{ab}}{|a-b|} = (a-b) \frac{\sqrt{ab}}{b-a} = -\sqrt{ab}$ (do $a < b < 0$)

Dạng 3. Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức

1. Phương pháp giải

Áp dụng hằng đẳng thức

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) \text{ và } \sqrt{A^2} = A, (A \geq 0)$$

✦ Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương.

☞ Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức đúng.

☞ Bất đẳng thức đúng thường có dạng $A^2 \geq 0$.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh:

a) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$

b) $(\sqrt{2006} - \sqrt{2005})$ và $(\sqrt{2006} + \sqrt{2005})$ là hai số nghịch đảo

Ví dụ 2:

a). So sánh $\sqrt{25-16}$ và $\sqrt{25}-\sqrt{16}$;

b). Chứng minh rằng, với $a > b > 0$ thì $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b}$.

Lời giải

a) Ta có $\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$; $\sqrt{25}-\sqrt{16} = 5-4 = 1$

Mà $1 < 3$ do đó $\sqrt{25}-\sqrt{16} < \sqrt{25-16}$.

b) Với $a > b > 0$ thì $a-b > 0$.

Ta có: $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b} \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{a-b} + \sqrt{b} \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 < (\sqrt{a-b} + \sqrt{b})^2$

$\Leftrightarrow a < a-b+2\sqrt{b(a-b)}+b \Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{b(a-b)}$ (luôn đúng).

Vậy $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b}$.

Ví dụ 3: Mỗi khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a). $0,01 = \sqrt{0,0001}$;

b). $-0,5 = \sqrt{-0,25}$;

c). $\sqrt{39} < 7$ và $\sqrt{39} > 6$;

d). $(4-\sqrt{13}).2x < \sqrt{3}.(4-\sqrt{13}) \Leftrightarrow 2x < \sqrt{3}$.

Lời giải

a) Đúng, vì $0,01^2 = 0,0001$.

b) Sai, vì $\sqrt{-0,25}$ không có nghĩa.

c) Đúng, vì $(\sqrt{39})^2 < 7^2$ và $(\sqrt{39})^2 > 6^2$.

d) Đúng, vì nhân hai vế của bất phương trình với cùng một số dương $\frac{1}{4-\sqrt{13}}$ thì không đổi chiều bất đẳng thức.

Dạng 4. Tìm x thỏa mãn thức cho trước

1. Phương pháp giải

Đặt điều kiện để căn thức có nghĩa

\sqrt{A} có nghĩa khi và chỉ khi $A \geq 0$

Áp dụng tính chất $(\sqrt{A})^2 = A, (A \geq 0), \sqrt{A^2} = |A|$

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tìm x biết

a) $\sqrt{16x} = 8$

b) $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$

c) $\sqrt{9(x-1)} = 21$

d) $\sqrt{4(1-x)^2} - 6 = 0$

Lời giải

a) Điều kiện $x \geq 0$

$$\sqrt{16x} = 8 \Leftrightarrow 16x = 8^2 \Leftrightarrow 16x = 64 \Leftrightarrow x = 64 : 16 \Leftrightarrow x = 4(tm)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 4$.

b) Điều kiện: $x \geq 0$

$$\sqrt{4x} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 4x = 5 \Leftrightarrow x = 5 : 4 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}(tm)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{5}{4}$.

c) Điều kiện:

$$9(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Ta có:

$$\sqrt{9(x-1)} = 21 \Leftrightarrow 9(x-1) = 21^2 \Leftrightarrow 9(x-1) = 441$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 441 : 9 \Leftrightarrow x-1 = 49 \Leftrightarrow x = 49 + 1 \Leftrightarrow x = 50(tm)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 50$.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

a). $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{50} = 0;$

c). $\sqrt{3} \cdot x^2 - \sqrt{12} = 0;$

b). $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{8} = 0;$

d). $\frac{x^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{20} = 0.$

Lời giải

a) Ta có $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{50} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot x = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 5$. Vậy $x = 5$.

b) $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{8} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$. Vậy $x = 2$.

$$\text{c) } \sqrt{3} \cdot x^2 - \sqrt{12} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 = \sqrt{12} \Leftrightarrow x^2 = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}. \text{ Vậy } x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}.$$

$$\text{d) } \frac{x^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{20} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{5}} = \sqrt{20} \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = 10.$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{10}. \text{ Vậy } x_1 = -\sqrt{10}, x_2 = \sqrt{10}.$$

Ví dụ 3: Tìm x , biết:

$$\text{a). } \sqrt{(x-3)^2} = 9;$$

$$\text{b). } \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 6.$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \sqrt{(x-3)^2} = 9 \Leftrightarrow |x-3| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=9 \\ x-3=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ x=-6 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } x_1 = 12, x_2 = -6.$$

$$\text{b) } \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)^2} = 6 \Leftrightarrow |2x+1| = 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=6 \\ 2x+1=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ x=-\frac{7}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -\frac{7}{2}.$$

D. LUYỆN TẬP

Bài 1. Tính :

$$\text{a) } \sqrt{1.2.270}; \quad \sqrt{55.77.35}.$$

$$\text{b) } (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2; \quad (3\sqrt{2} - 1)(3\sqrt{2} + 1); \quad (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$\text{c) } \left(\sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{24} + \sqrt{\frac{50}{3}} \right) \cdot \sqrt{6}; \quad \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2$$

Lời giải

$$\text{a) } 18; \quad 385$$

$$\text{b) } 5 - 2\sqrt{6}; \quad 17; \quad \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$\text{c) } 2; \quad \frac{1}{6}$$

Bài 2. Thực hiện phép tính

$$\text{a) } \sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{125} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}; \quad \sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1}.$$

$$b) \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2} \cdot \sqrt{11+6\sqrt{2}}; \quad \sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3-\sqrt{3}}}$$

$$c) -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{(a-b)^2 b^5}{c}} \cdot \frac{9}{4} \sqrt{\frac{c^3}{2(a-b)}} \sqrt{98b}$$

$$d) \left(\sqrt{6} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1} \right) 2\sqrt{6}$$

$$e) \left(\sqrt{ab} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{1}{ab}} \right) \sqrt{ab}$$

$$g) \left(\frac{am}{b} \sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{ab}{n} \sqrt{mn} + \frac{a^2}{b^2} \sqrt{\frac{m}{n}} \right) a^2 b^2 \cdot \sqrt{\frac{n}{m}}$$

Lời giải

$$a) \frac{5}{2}; \quad b) 11+6\sqrt{2} = (\sqrt{2}+3)^2, \text{ ket qua } 7; \quad \sqrt{3-\sqrt{3}}$$

$$c) -\frac{21}{2}c(a-b)b^3.$$

$$d) 12-18\sqrt{2}+16\sqrt{3}$$

$$e) ab+2b-a+1;$$

$$g) a^3bn - a^3b^3 + a^4$$

Bài 3. Rút gọn rồi tính

$$a) \sqrt{21,8^2 - 18,2^2}; \quad b) \sqrt{6,8^2 - 3,2^2}; \quad c) \sqrt{146,5^2 - 109,5^2 + 27 \cdot 256}$$

Lời giải

$$a) 12. \quad b) 6 \quad c) 128$$

Bài 4. Rút gọn biểu thức

$$a) \frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}};$$

$$b) \frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}$$

$$c) \frac{x+\sqrt{xy}}{y+\sqrt{xy}}$$

$$d) \frac{\sqrt{a}+a\sqrt{b}-\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{ab-1}$$

$$e) \frac{2\sqrt{15}-2\sqrt{10}+\sqrt{6}-3}{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$$

$$f) \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$$

Lời giải

$$a) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}; \quad b) \frac{\sqrt{5}}{2}; \quad c) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}; \quad d) \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-1}; \quad e) \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

$$f) \text{Tách } \sqrt{16} = 4 = \sqrt{4} + \sqrt{4}$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) + (\sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{8}) = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})(1 + \sqrt{2})$$

Kết quả : $1 + \sqrt{2}$.

Bài 5. Rút gọn biểu thức

$$a) \sqrt{9(3-a)^2} \text{ với } a > 3 :$$

$$b) \sqrt{a^2(a-2)^2} \text{ với } a < 0.$$

Lời giải

$$a) 3(a-3)$$

$$b) -a(2-a)$$

Bài 6. Chứng minh đẳng thức

$$a) \sqrt{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9+\sqrt{17}} = 8;$$

$$b) \left(\frac{1}{5-2\sqrt{6}} + \frac{2}{5+2\sqrt{6}} \right) (15+2\sqrt{6}) = 201$$

Lời giải

$$a) VT = \sqrt{81-17} - \sqrt{64} = 8$$

$$b) VT = (15-2\sqrt{6})(15+2\sqrt{6}) = 201$$

Bài 7. Tìm x biết

$$a) \sqrt{9x} = 15;$$

$$b) \sqrt{4x^2} = 8$$

$$c) \sqrt{4(x+1)} = \sqrt{8};$$

$$d) \sqrt{9(2-3x)^2} = 6;$$

$$e) \sqrt{x^2-4} - \sqrt{x-2} = 0.$$

Lời giải

$$a) x = 25; \quad b) x = \pm 4; \quad c) x = 1; \quad d) x = 0, x = \frac{4}{3}; \quad e) x = 2$$

Bài 8. Tìm $x-y$ biết :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 4 - \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

Lời giải

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 4 - \sqrt{x} - \sqrt{y} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 \right) + \left(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}} - 2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{\sqrt{y}} = 0 \Leftrightarrow x-y=1$$

Bài 9. Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$. Chứng minh rằng :

a) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (bất đẳng thức Côsi);

b) $a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$;

c) $a+b+\frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Lời giải

a) $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$

b) $a+b+c - \sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{ca} = \frac{1}{2}[(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2] \geq 0$;

c) $a+b+\frac{1}{2} - \sqrt{a} - \sqrt{b} = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$.

Tài liệu phát hành và bảo hành nội dung trên website Tailieuchuan.vn

Bài 10. Tính

a). $\sqrt{2\frac{7}{81}}$; và $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}}$;

b). $(5\sqrt{7} + 7\sqrt{5}) : \sqrt{35}$;

c). $(2\sqrt{8} - 3\sqrt{3} + 1) : \sqrt{6}$.

Lời giải

a) Ta có $\sqrt{2\frac{7}{81}} = \sqrt{\frac{169}{81}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{81}} = \frac{13}{9}$. và $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{6}{150}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$.

b) Ta có $(5\sqrt{7} + 7\sqrt{5}) : \sqrt{35} = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{35}} + \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{35}} = \frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{5} + \sqrt{7}$.

c) Ta có $(2\sqrt{8} - 3\sqrt{3} + 1) : \sqrt{6} = \frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{6}} - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Bài 11. Tính $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{4,5} + \frac{2}{5}\sqrt{50}\right) : \frac{4}{15}\sqrt{\frac{1}{8}}$

Lời giải

Tính $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{4,5} + \frac{2}{5}\sqrt{50}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{9}{2}} + \frac{2}{5}\sqrt{25 \cdot 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{9}{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \frac{1-9+(2\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} = 0$$

Vậy $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{4,5} + \frac{2}{5}\sqrt{50}\right) : \frac{4}{15}\sqrt{\frac{1}{8}} = 0$

Bài 12. Rút gọn biểu thức

a). $\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$;

b). $\sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}}, (x \geq 0)$

c). $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}}, (x \neq 1, y \neq 1, y > 0)$.

Lời giải

a). $\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$;

Ta có
$$\begin{aligned} \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &= \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{(x - 2\sqrt{xy} + y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{x} - x\sqrt{y} + 2\sqrt{x^2y} + 2\sqrt{xy^2} - y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{-x\sqrt{y} + 2x\sqrt{y} + 2y\sqrt{x} - y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt{xy}. \end{aligned}$$

b). $\sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} + 1)^2}} = \frac{|\sqrt{x} - 1|}{\sqrt{x} + 1}$.

c). $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}} = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \sqrt{\frac{(\sqrt{y}-1)^4}{(x-1)^4}} = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{\sqrt{y}-1}{x-1}$.

Bài 13. Rút gọn và tính:

a). $A = \frac{\sqrt{a-2\sqrt{ab}+b}}{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}$ (với $a > b > 0$) tại $a = 36; b = 25$.

b). $B = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{3}}} : \frac{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{3}}}{\sqrt{x}}$ (với $x > 3$) tại $x = 81$.

c). $C = \sqrt{\frac{(x-5)^4}{(4-x)^2}} - \frac{x^2-25}{x-4}$ ($x < 4$), tại $x = 3$.

d). $M = 3x - \sqrt{27} + \frac{\sqrt{x^3+3x^2}}{\sqrt{x+3}}$ ($x \geq 0$), tại $x = \sqrt{3}$.

Lời giải

a) Với $a > b > 0$ ta có

$$A = \frac{\sqrt{a-2\sqrt{ab}+b}}{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}} = \frac{\sqrt{a-2ab+b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \quad (1)$$

Ta thấy $a = 36; b = 25$ thỏa mãn điều kiện.

Thay $a = 36; b = 25$ vào (1) ta có $A = \sqrt{\sqrt{36}-\sqrt{25}} = \sqrt{1} = 1$.

b) Với $x > 3$ ta có;

$$B = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{3}}} : \frac{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{3}}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{3}}} : \sqrt{\frac{x-3}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \sqrt{x} \quad (1)$$

Ta thấy $x = 81$ thỏa mãn điều kiện.

Thay $x = 81$ vào (1) ta có $B = \sqrt{81} = 9$.

c) Với $x < 4$ ta có

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{\frac{(x-5)^4}{(4-x)^2}} - \frac{x^2-25}{x-4} = \frac{\sqrt{(x-5)^4}}{\sqrt{(4-x)^2}} - \frac{x^2-25}{x-4} = \frac{|(x-5)^2|}{|4-x|} - \frac{x^2-25}{x-4} \\ &= \frac{(x-5)^2}{4-x} + \frac{x^2-25}{4-x} = \frac{(x-5)^2+x^2-25}{4-x} = \frac{2x^2-10x}{4-x} \quad (1) \end{aligned}$$

Ta thấy $x = 3$ thỏa mãn điều kiện.

Thay $x = 3$ vào (1) ta có $C = \frac{2 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3}{4 - 3} = -12$.

d) Với $x \geq 0$ ta có

$$\begin{aligned}
 M &= 3x - \sqrt{27} + \frac{\sqrt{x^3 + 3x^2}}{\sqrt{x+3}} = 3x - \sqrt{27} + \sqrt{\frac{x^2(x+3)}{x+3}} = 3x - \sqrt{27} + \sqrt{x^2} \\
 &= 3x - \sqrt{27} + |x| = 3x - \sqrt{27} + x = 4x - \sqrt{27} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Ta thấy $x = \sqrt{3}$ thỏa mãn điều kiện.

Thay $x = \sqrt{3}$ vào (1) ta có $M = 4\sqrt{3} - \sqrt{27} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Bài 14. Giải phương trình

a). $\sqrt{\frac{4x-1}{x+1}} = 3$;

b). $\frac{\sqrt{4x-1}}{\sqrt{x+1}} = 3$;

c). $\sqrt{49x-98} - 14\sqrt{\frac{x-2}{49}} = 3\sqrt{x-2} + 8$;

d). $\sqrt{25x-25} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{x-1}{9}} = 6 + \sqrt{x-1}$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x < -1$ hoặc $x \geq \frac{1}{4}$.

Ta có $\sqrt{\frac{4x-1}{x+1}} = 3 \Leftrightarrow \frac{4x-1}{x+1} = 9 \Leftrightarrow 4x-1 = 9x+9 \Leftrightarrow x = -2$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -2$.

b) ĐKXĐ: $x \geq \frac{1}{4}$.

Ta có $\frac{\sqrt{4x-1}}{\sqrt{x+1}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4x-1}{x+1}} = 3 \Leftrightarrow \frac{4x-1}{x+1} = 9 \Leftrightarrow x = -2$ (không thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình vô nghiệm.

c) ĐKXĐ: $x \geq 2$.

Ta có $\sqrt{49x-98} - 14\sqrt{\frac{x-2}{49}} = 3\sqrt{x-2} + 8$

$$\Leftrightarrow \sqrt{49(x-2)} - \frac{14\sqrt{x-2}}{\sqrt{49}} = 3\sqrt{x-2} + 8$$

$$\Leftrightarrow 7\sqrt{x-2} - 2\sqrt{x-2} = 3\sqrt{x-2} + 8$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} = 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 4$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x = 18$$

Ta thấy $x = 18$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình có nghiệm $x = 18$.

d) ĐKXĐ: $x \geq 1$.

Ta có $\sqrt{25x-25} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{x-1}{9}} = 6 + \sqrt{x-1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{25(x-1)} - \frac{15}{2} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{9}} = 6 + \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x-1} - \frac{5\sqrt{x-1}}{2} = 6 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 5\sqrt{x-1} = 12 + 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} = 12$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 4 \Leftrightarrow x-1 = 16 \Leftrightarrow x = 17.$$

Ta thấy $x = 17$ thỏa mãn ĐKXD.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 17$.

Bài 15

a). Cho $a > 0$. Chứng minh $a + \frac{1}{a} \geq 2$;

b). Cho $a \geq 0, b \geq 0$. Chứng minh $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$;

c). Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}$;

d). Chứng minh $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$ với mọi x .

Giải

a). Ta có $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2+1-2a}{a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0$ (đúng với mọi $a > 0$).

b). Với $a \geq 0, b \geq 0$ ta có

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2 \geq \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b) \geq a+b+2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ (đúng)}.$$

c). Với $a > 0, b > 0$ ta có

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow a\sqrt{b} + b\sqrt{a} \leq a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \Leftrightarrow a(\sqrt{b}-\sqrt{a}) - b(\sqrt{b}-\sqrt{a}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{b}-\sqrt{a})(a-b) \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \leq 0 \text{ (đúng)}.$$

d). Ta có $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2 \Leftrightarrow x^2+2 \geq 2\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow (x^2+1) - 2\sqrt{x^2+1} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}-1)^2 \geq 0$

LUYỆN TẬP CHUNG SAU KHI HỌC BÀI 7&8

A. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Không dùng MTCT, tính giá trị của biểu thức: $A = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \sqrt{3}$

Lời giải

Ta có $A = |1-\sqrt{3}| - \sqrt{3} = (\sqrt{3}-1) - \sqrt{3} = -1$. ← hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$.

Ví dụ 2. Tính:

a) $(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$;

b) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$.

Lời giải

Sử dụng hằng đẳng thức hiệu của hai bình phương, ta được:

a) $(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 2^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1$.

b) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$.

Chú ý. Tổng quát, ta có

$$(A + \sqrt{B})(A - \sqrt{B}) = A^2 - B \text{ với } A, B \text{ là hai biểu thức, } B \geq 0.$$

$$(\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B}) = A - B \text{ với } A, B \text{ là hai biểu thức không âm.}$$

Ta nói $A + \sqrt{B}$ và $A - \sqrt{B}$; $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ và $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ là những cặp biểu thức liên hợp.

Ví dụ 3. Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x} + 1}{x - \sqrt{x} + 1} - 1$ với $x \geq 0$.

a) Viết $x\sqrt{x} + 1$ thành tổng hai lập phương rồi phân tích thành nhân tử để rút gọn biểu thức đã cho.

b) Tính giá trị của P tại $x = 100$.

Lời giải

a) Ta có $x\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^3 + 1^3 = (\sqrt{x} + 1) \left[(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} \cdot 1 + 1^2 \right] = (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)$.

Từ đó $P = (\sqrt{x} + 1) - 1 = \sqrt{x}$.

b) Tại $x = 100$ (thỏa mãn điều kiện) thì $P = \sqrt{100} = 10$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

3.12. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2};$$

$$b) \sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{7}+3)^2}.$$

Lời giải

$$a) \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |\sqrt{3}-\sqrt{2}| + |1-\sqrt{2}| = \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{2}-1 = \sqrt{3}-1.$$

$$b) \sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{7}+3)^2} = |\sqrt{7}-3| + |\sqrt{7}+3| = 3-\sqrt{7} + \sqrt{7}+3 = 6.$$

3.13. Thực hiện phép tính:

$$a) \sqrt{3}(\sqrt{192}-\sqrt{75});$$

$$b) \frac{-3\sqrt{18}+5\sqrt{50}-\sqrt{128}}{7\sqrt{2}}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \sqrt{3}(\sqrt{192}-\sqrt{75}) &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{192} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{75} \\ &= \sqrt{3 \cdot 192} - \sqrt{3 \cdot 75} = \sqrt{576} - \sqrt{225} = \sqrt{24^2} - \sqrt{15^2} = 24 - 15 = 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \frac{-3\sqrt{18}+5\sqrt{50}-\sqrt{128}}{7\sqrt{2}} &= \frac{-3\sqrt{9 \cdot 2}+5\sqrt{25 \cdot 2}-\sqrt{64 \cdot 2}}{7\sqrt{2}} = \frac{-3 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}+5 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}-8 \cdot \sqrt{2}}{7\sqrt{2}} \\ &= \frac{-3 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2}+5 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{2}-\sqrt{64} \cdot \sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{-9\sqrt{2}+25\sqrt{2}-8\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(-9+25-8)}{7\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 8}{7\sqrt{2}} = \frac{8}{7}. \end{aligned}$$

3.14. Chứng minh rằng:

$$a) (1-\sqrt{2})^2 = 3-2\sqrt{2};$$

$$b) (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 5+2\sqrt{6}.$$

Lời giải

$$a) (1-\sqrt{2})^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Vậy $(1-\sqrt{2})^2 = 3-2\sqrt{2}.$

$$b) (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{3 \cdot 2} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

Vậy $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 5+2\sqrt{6}.$

3.15. Cho căn thức $\sqrt{x^2-4x+4}.$

a) Hãy chứng tỏ rằng căn thức xác định với mọi giá trị của $x.$

b) Rút gọn căn thức đã cho với $x \geq 2.$

c) Chứng tỏ rằng với mọi $x \geq 2,$ biểu thức $\sqrt{x-\sqrt{x^2-4x+4}}$ có giá trị không đổi.

Lời giải

a) Điều kiện xác định của căn thức $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ là $x^2 - 4x + 4 \geq 0$, hay $(x - 2)^2 \geq 0$, điều này đúng với mọi x .

Vậy căn thức $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ xác định với mọi giá trị của x .

b) Với $x \geq 2$ ta có: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2| = x - 2$ (vì $x \geq 2$ nên $x - 2 \geq 0$).

Vậy $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x - 2$ với $x \geq 2$.

c) Theo câu b, với $x \geq 2$ ta có: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x - 2$.

Khi đó: $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \sqrt{x - (x - 2)} = \sqrt{x - x + 2} = \sqrt{2}$.

Vậy với mọi $x \geq 2$, biểu thức $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ có giá trị không đổi.

3.16. Trong Vật lí, tốc độ (m/s) của một vật đang bay được cho bởi công thức $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$,

trong đó E là động năng của vật (tính bằng Joule, kí hiệu là J) và m (kg) là khối lượng của vật (Theo sách Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016). Tính tốc độ bay của một vật khi biết vật đó có khối lượng 2,5 kg và động năng 281,25 J.

Lời giải

Vận tốc bay của một vật có khối lượng 2,5 kg và động năng 281,25 J là:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 281,25}{2,5}} = \sqrt{\frac{562,5}{2,5}} = \sqrt{\frac{5625}{25}} = \frac{\sqrt{5625}}{\sqrt{25}} = \frac{75}{5} = 15.$$

Vậy vận tốc bay của vật đó là 15 m/s.

C. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Rút gọn biểu thức:

- $A = 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 3\sqrt{48}$.
- $B = \sqrt{147} + \sqrt{75} - 4\sqrt{27}$.
- $C = 3\sqrt{2}(4 - \sqrt{2}) + 3(1 - 2\sqrt{2})^2$.
- $D = 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}$.

Lời giải

- $A = 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 3\sqrt{48} = 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
- $B = \sqrt{147} + \sqrt{75} - 4\sqrt{27} = 7\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 0$.

$$3. C = 3\sqrt{2}(4 - \sqrt{2}) + 3(1 - 2\sqrt{2})^2$$

$$= 12\sqrt{2} - 6 + 3(1 - 4\sqrt{2} + 8) = 12\sqrt{2} - 6 + 27 - 12\sqrt{2} = 21.$$

$$4. D = 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605} = 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 11\sqrt{5} = 4\sqrt{5}.$$

Bài 2. Tìm số thực x thỏa mãn:

$$1. \sqrt{-2x^2 - 9} = 2.$$

$$4. \sqrt{-3x + 4} = 12.$$

$$2. \sqrt{x^2 + 1} + 2 = 0.$$

$$5. \sqrt{(x-7)(x+7)} = 2.$$

$$3. \sqrt{3x-1} = 4.$$

$$6. \sqrt{9(x-1)} - 19 = 2.$$

Lời giải

1. Điều kiện xác định $-2x^2 - 9 \geq 0$ (vô lí).

Vậy không tồn tại x thỏa mãn đề bài.

2. Điều kiện xác định $x^2 + 1 \geq 0$ (luôn đúng).

Ta có

$$\sqrt{x^2 + 1} + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = -2 \text{ (vô lí vì } \sqrt{x^2 + 1} > 0 \text{ với mọi } x).$$

Vậy không tồn tại x thỏa mãn đề bài.

3. Điều kiện xác định $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$.

$$\text{Ta có } \sqrt{3x-1} = 4 \Leftrightarrow 3x-1 = 16 \Leftrightarrow x = \frac{17}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{17}{3}.$$

4. Điều kiện xác định $-3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$.

$$\text{Ta có } \sqrt{-3x+4} = 12 \Leftrightarrow -3x+4 = 144 \Leftrightarrow x = -\frac{140}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

$$\text{Vậy } x = -\frac{140}{3}.$$

$$5. \text{ Điều kiện xác định } \begin{cases} x \geq 0 \\ (\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+7) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-49 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 49$$

$$\text{Ta có } \sqrt{(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+7)} = 2 \Leftrightarrow x-49 = 4 \Leftrightarrow x = 53 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy $x = 53$.

$$6. \text{ Điều kiện xác định } 9(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$\text{Ta có } \sqrt{9(x-1)} - 19 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{9(x-1)} = 21 \Leftrightarrow 9(x-1) = 441 \Leftrightarrow x-1 = 49 \Leftrightarrow x = 50$$

(thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x = 50$.

Bài 3. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

$$1. \sqrt{-3x} \quad 2. \sqrt{2x-4} \quad 3. \sqrt{7-6x} \quad 4. \sqrt{-3x+2}$$

Lời giải

$$1. \sqrt{-3x} \text{ có nghĩa } \Leftrightarrow -3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0.$$

$$2. \sqrt{2x-4} \text{ có nghĩa } \Leftrightarrow 2x-4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

$$3. \sqrt{7-6x} \text{ có nghĩa } \Leftrightarrow 7-6x \geq 0 \Leftrightarrow 6x \leq 7 \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{6}.$$

$$4. \sqrt{-3x+2} \text{ có nghĩa } \Leftrightarrow -3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}.$$

Bài 4. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

$$1. \frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2} \quad 2. \frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$$

$$3. \sqrt{\frac{1}{3-2x}} \quad 4. \sqrt{\frac{-2}{x+1}}$$

Lời giải

$$1. \frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2} \text{ có nghĩa } \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

$$2. \frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2} \text{ có nghĩa } \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

$$3. \sqrt{\frac{1}{3-2x}} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3-2x} \geq 0 \\ 3-2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$$

$$4. \sqrt{\frac{-2}{x+1}} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2}{x+1} \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau

$$1. \sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{11+6\sqrt{2}}.$$

$$2. \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$$

$$3. (2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}}$$

$$4. \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$$

$$5. \sqrt{9-3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$6. \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Lời giải

$$1. \sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} = 3-\sqrt{2} - 3-\sqrt{2} = -2\sqrt{2}.$$

$$2. \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2 + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-2+3-\sqrt{5} = 1.$$

$$3. (2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}} = (2+\sqrt{7})\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} = (\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2) = 7-4 = 3.$$

$$4. \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} = 3+\sqrt{2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = 3+\sqrt{2} + 2-\sqrt{2} = 5.$$

$$5. \sqrt{9-3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{6+3-2\sqrt{6}\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3+2-2\sqrt{3}\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}}{2}$$

$$= \sqrt{6}-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

$$= 0.$$

$$6. \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{6})(3-\sqrt{3})+(2\sqrt{2}+\sqrt{6})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = 3\sqrt{2}.$$

Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau

$$1. \sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} - \frac{1}{7}\sqrt{147};$$

$$4. \sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{11+6\sqrt{2}};$$

$$2. (\sqrt{44} + \sqrt{11})\sqrt{11};$$

$$5. \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}};$$

$$3. \sqrt{24} - 6\sqrt{\frac{1}{6}} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

$$6. (2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}};$$

$$7. \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}};$$

$$8. \sqrt{9-3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Lời giải

$$1. \sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} - \frac{1}{7}\sqrt{147} = 4\sqrt{3} - 2 \cdot 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - \frac{1}{7} \cdot 7\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} \left(4 - 2 \cdot 5 + 6 - \frac{1}{7} \cdot 7 \right) = -\sqrt{3}$$

$$2. (\sqrt{44} + \sqrt{11})\sqrt{11} = (2\sqrt{11} + \sqrt{11})\sqrt{11} = 3\sqrt{11} \cdot \sqrt{11} = 3 \cdot 11 = 33.$$

$$3. \sqrt{24} - 6\sqrt{\frac{1}{6}} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{6} = 0.$$

4.

$$\begin{aligned}\sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{11+6\sqrt{2}} &= \sqrt{9+2-2\cdot 3\cdot\sqrt{2}} - \sqrt{9+2+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} \\ &= 3-\sqrt{2} - (3+\sqrt{2}) \\ &= -2\sqrt{2}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}} &= \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{9+5-2\cdot 3\cdot\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{5}-2 + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{5}-2 + 3-\sqrt{5} \\ &= 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6. (2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}} &= (2+\sqrt{7})\sqrt{7+4-2\cdot 2\sqrt{7}} \\ &= (2+\sqrt{7})\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} \\ &= (2+\sqrt{7})(\sqrt{7}-2) = 7-4 = 3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7. \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} &= 3+\sqrt{2} + \sqrt{4+2-2\cdot 2\sqrt{2}} \\ &= 3+\sqrt{2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} \\ &= 3+\sqrt{2} + 2-\sqrt{2} = 5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8. \sqrt{9-3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{6+3-2\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3+2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}}{2} \\ &= \sqrt{6}-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = 0.\end{aligned}$$

Bài 7. Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính:

$$1. \sqrt{\frac{121}{9}}; \quad 2. \sqrt{\frac{14}{169}}; \quad 3. \sqrt{3\frac{6}{25}}; \quad 4. \sqrt{4\frac{21}{25}}.$$

Lời giải

$$1. \sqrt{\frac{121}{9}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{9}} = \frac{11}{3}. \quad 3. \sqrt{3\frac{6}{25}} = \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5}.$$

$$2. \sqrt{\frac{144}{109}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}} = \frac{12}{13}. \quad 4. \sqrt{4\frac{21}{25}} = \sqrt{\frac{121}{25}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}.$$

Bài 8. Áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai, hãy tính:

$$1. \frac{\sqrt{999}}{\sqrt{444}}; \quad 2. \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{0,4}}; \quad 3. \frac{\sqrt{9+6\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}; \quad 4. \sqrt{2+\sqrt{3}} : \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Lời giải

$$1. \frac{\sqrt{999}}{\sqrt{444}} = \sqrt{\frac{999}{444}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}.$$

$$2. \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{0,4}} = \sqrt{\frac{160}{0,4}} = \sqrt{\frac{1600}{4}} = \frac{\sqrt{1600}}{\sqrt{4}} = \frac{40}{2} = 20.$$

$$3. \frac{\sqrt{9+6\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{9+6\sqrt{2}}{3}} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1.$$

$$4. \sqrt{2+\sqrt{3}} : \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{(2+\sqrt{3}) : \frac{1}{2}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1.$$

Bài 9. Rút gọn các biểu thức sau:

$$1. \frac{\sqrt{96x^5}}{\sqrt{24x}} (x > 0); \quad 2. \frac{\sqrt{18(x+1)^3}}{\sqrt{2x+\sqrt{2}}} (x > -1); \quad 3. \frac{\sqrt{3x^4y^4}}{\sqrt{27x^2y^4}} (x < 0, y > 0).$$

Lời giải

$$1. \frac{\sqrt{96x^5}}{\sqrt{24x}} = \sqrt{\frac{96x^5}{24x}} = \sqrt{4x^4} = 2x^2.$$

$$2. \frac{\sqrt{18(x+1)^3}}{\sqrt{2x+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{18(x+1)^3}}{\sqrt{2(x+1)^2}} = \sqrt{\frac{18(x+1)^3}{2(x+1)^2}} = \sqrt{9(x+1)} = 3\sqrt{x+1} \text{ (với } x > -1).$$

$$3. \frac{\sqrt{3x^4y^4}}{\sqrt{27x^2y^4}} = \sqrt{\frac{3x^4y^4}{27x^2y^4}} = \sqrt{\frac{x^2}{9}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{9}} = \frac{-x}{3} \text{ (với } x < 0, y > 0 \text{)}.$$

Bài 10. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$1. \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}, \text{ với } a, b \geq 0;$$

$$2. \sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}} \geq 2, \text{ với } a > 0$$

Lời giải

1. Ta có

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 2(a + b) \geq a + b + 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 2(a + b) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{4} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \sqrt{\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{4}}$$

Mà:

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{4}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}, \text{ với } a, b \geq 0$$

2. Ta có

$$\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a})^2 + 1}{\sqrt{a}} = \frac{a+1}{\sqrt{a}}.$$

Mà:

$$(\sqrt{a} - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a + 1 \geq 2\sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}} \geq \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 2.$$

BÀI 9. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI DẤU CĂN

Cách đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Nếu a là một số và b là một số không âm thì $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \sqrt{b}$.

Chú ý. Phép biến đổi trên gọi là phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

Ví dụ 1. Viết nhân tử số của biểu thức dưới dấu căn thành tích các lũy thừa rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{45}$;

b) $\sqrt{243a} (a \geq 0)$.

Lời giải

a) Ta có $45 = 3^2 \cdot 5$ nên $\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$;

b) Ta có $243 = 3 \cdot 9^2$ nên $\sqrt{243a} = \sqrt{9^2 \cdot 3a} = 9\sqrt{3a}$.

Chú ý. Khi tính toán với những căn thức bậc hai mà biểu thức dưới dấu căn có mẫu, ta thường khử mẫu của biểu thức lấy căn (tức là biến đổi căn thức bậc hai đó thành một biểu thức mà trong căn thức không còn mẫu) như trong ví dụ sau:

Ví dụ 2. Khử mẫu của biểu thức lấy căn $\sqrt{\frac{4}{7}}$.

Lời giải

Nhân cả tử và mẫu của biểu thức lấy căn với 7 và đưa thừa số ra ngoài dấu căn, ta được

$$\sqrt{\frac{4}{7}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 7}{7^2}} = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot 7} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

2. ĐƯA THỪA SỐ VÀO TRONG DẤU CĂN

Cách đưa một thừa số vào trong dấu căn

- Nếu a và b là hai số không âm thì $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$.

- Nếu a là số âm và b là số không âm thì $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$.

Chú ý. Các phép biến đổi trên gọi là phép đưa thừa số vào trong dấu căn.

Ví dụ 3. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $5\sqrt{2}$;

b) $-2\sqrt{a} \quad (a \geq 0)$.

Lời giải

a) $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$;

b) $-2\sqrt{a} = -\sqrt{2^2 \cdot a} = -\sqrt{4a}$.

Ví dụ 4. Không sử dụng MTCT, có thể so sánh được hai số $a = 3\sqrt{2}$ và $b = 2\sqrt{3}$ hay không?

Lời giải

Ta có $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$; $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$. Vì $\sqrt{12} < \sqrt{18}$ nên $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

3. TRỰC CĂN THỨC Ở MẪU

Tính toán với các biểu thức có chứa căn ở mẫu thường phức tạp và ta thường tìm cách trực các căn thức ở mẫu (tức là biến đổi biểu thức thành một biểu thức mới không chứa căn ở mẫu).

Cách trực căn thức ở mẫu

- ✓ Với các biểu thức A, B và $B > 0$, ta có $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.
- ✓ Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, A \neq B^2$, ta có $\frac{C}{\sqrt{A+B}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B^2}$; $\frac{C}{\sqrt{A-B}} = \frac{C(\sqrt{A}+B)}{A-B^2}$.
- ✓ Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, B \geq 0, A \neq B$, ta có:
$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B}; \quad \frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}.$$

Ví dụ 5. Trực căn thức ở mẫu của các biểu thức:

a) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$;

b) $\frac{a}{3-2\sqrt{2}}$.

Lời giải

a) Nhân cả tử và mẫu của biểu thức đã cho với $\sqrt{5}$, ta được: $\frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3(\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$.

b) Biểu thức liên hợp của mẫu là $3+2\sqrt{2}$. Nhân cả tử và mẫu của biểu thức đã cho với $3+2\sqrt{2}$, ta được:

$$\frac{a}{3-2\sqrt{2}} = \frac{a(3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = \frac{a(3+2\sqrt{2})}{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{a(3+2\sqrt{2})}{9-8} = (3+2\sqrt{2})a.$$

4. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

Khi rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần phối hợp các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia) và các phép biến đổi đã học (đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn; khử mẫu của biểu thức lấy căn; trực căn thức ở mẫu).

Ví dụ 6. Rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{3} - \sqrt{75} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$.

Lời giải

Đưa thừa số ra ngoài dấu căn, ta có: $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = 5\sqrt{3}$; $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$.

Do đó $A = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = -1 - 2\sqrt{3}$.

Ví dụ 7. a) Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức: $\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}; \frac{x^2-x}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 1$.

b) Sử dụng kết quả câu a, rút gọn biểu thức $P = \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x^2-x}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 1$.

Lời giải

a) Ta có

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = (x+1)(\sqrt{x}+1) = x\sqrt{x} + \sqrt{x} + x + 1;$$

$$\frac{x^2-x}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x^2-x)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{x(x-1)(\sqrt{x}-1)}{x-1} = x(\sqrt{x}-1) = x\sqrt{x} - x.$$

b) Sử dụng kết quả câu a ta có $P = (x\sqrt{x} + \sqrt{x} + x + 1) - (x\sqrt{x} - x) = 2x + \sqrt{x} + 1$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

3.17. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{75}$; b) $\sqrt{27a} (a \geq 0)$;

c) $\sqrt{50\sqrt{2}+100}$; d) $\sqrt{9\sqrt{5}-18}$.

Lời giải

a) Ta có $\sqrt{52} = \sqrt{2^2 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$.

b) Với $a \geq 0$ ta có: $\sqrt{27a} = \sqrt{3^2 \cdot 3a} = 3\sqrt{3a}$.

c) Ta có $\sqrt{50\sqrt{2}+100} = \sqrt{25(2\sqrt{2}+4)} = \sqrt{5^2 \cdot (2\sqrt{2}+4)} = 5\sqrt{2\sqrt{2}+4}$

d) Ta có $\sqrt{9\sqrt{5}-18} = \sqrt{9(\sqrt{5}-2)} = \sqrt{3^2 \cdot (\sqrt{5}-2)} = 3\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

3.18. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $3\sqrt{2}$; b) $-2\sqrt{7}$;

c) $4\sqrt{\frac{15}{2}}$; d) $-5\sqrt{\frac{16}{5}}$.

Lời giải

a) $4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48}$.

b) $-2\sqrt{7} = -\sqrt{2^2 \cdot 7} = -\sqrt{28}$.

c) $4\sqrt{\frac{15}{2}} = \sqrt{4^2 \cdot \frac{15}{2}} = \sqrt{120}$.

$$d) -5\sqrt{\frac{16}{5}} = -\sqrt{5^2 \cdot \frac{16}{5}} = -\sqrt{80}.$$

3.19. Khử mẫu trong dấu căn:

$$a) 2a \cdot \sqrt{\frac{3}{5}};$$

$$b) -3x \cdot \sqrt{\frac{5}{x}} (x > 0);$$

$$c) -\sqrt{\frac{3a}{b}} (a \geq 0, b > 0).$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } 2a \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} = 2a \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{5^2}} = 2a \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot 15} = 2a \cdot \frac{1}{5} \sqrt{15} = \frac{2a\sqrt{15}}{5}.$$

$$b) \text{ Với } x > 0, \text{ ta có: } -3x \cdot \sqrt{\frac{5}{x}} = -3x \cdot \sqrt{\frac{5x}{x^2}} = -3x \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot 5x}$$

$$= -3x \cdot \left|\frac{1}{x}\right| \cdot \sqrt{5x} = -3x \cdot \frac{1}{x} \cdot \sqrt{5x} = -3\sqrt{5x}$$

$$c) \text{ Với } a \geq 0, b > 0, \text{ ta có: } -\sqrt{\frac{3a}{b}} = -\sqrt{\frac{3ab}{b^2}} = -\sqrt{\frac{1}{b^2} \cdot 3ab} = -\sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2 \cdot 3ab}$$

$$= -\left|\frac{1}{b}\right| \cdot \sqrt{3ab} = -\frac{1}{b} \cdot \sqrt{3ab} = -\frac{\sqrt{3ab}}{b}$$

3.20. Trục căn thức ở mẫu:

$$a) \frac{4+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}};$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{5}-2};$$

$$c) \frac{3+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}};$$

$$d) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

Lời giải

$$a) \frac{4+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{(4+3\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{4\sqrt{5}+3 \cdot (\sqrt{5})^2}{5} = \frac{4\sqrt{5}+3 \cdot 5}{5} = \frac{4\sqrt{5}+15}{5}$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2-2^2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \frac{\sqrt{5}+2}{1} = \sqrt{5}+2$$

$$c) \frac{3+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(3+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{3+3\sqrt{3}+\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{1^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{3+3\sqrt{3}+\sqrt{3}+3}{1-3} = \frac{6+4\sqrt{3}}{-2}$$

$$= \frac{-2(-3-2\sqrt{3})}{-2} = -3-2\sqrt{3}$$

$$d) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3} - 2}{3-2} = \frac{\sqrt{6}-2}{1} = \sqrt{6}-2$$

3.21. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}}$;

b) $\frac{5\sqrt{48} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$;

c) $\frac{1}{3+2\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{2}-4}{2-\sqrt{2}}$.

Lời giải

a) $2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3^2}} - 4\sqrt{\frac{3 \cdot 2}{2^2}} = 2\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot 6 - 4\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot 6 = 2 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{6} - 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{6}$
 $= \frac{2}{3}\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = \sqrt{6} \cdot \left(\frac{2}{3} - 2\right) = -\frac{4}{3}\sqrt{6}$

b) $\frac{5\sqrt{48} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{4^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3^2 \cdot 3} + 2\sqrt{2^2 \cdot 3}}{\sqrt{3}}$
 $= \frac{5 \cdot 4\sqrt{3} - 3 \cdot 3\sqrt{3} + 2 \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(20 - 9 + 4)}{\sqrt{3}} = 15$

c) $\frac{1}{3+2\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{2}-4}{2-\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} + \frac{4(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}}$
 $= \frac{3-2\sqrt{2}}{3^2 - (2\sqrt{2})^2} + \frac{4(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{3-2\sqrt{2}}{9-8} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{1} + \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = 3 - 2\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2}$
 $= 3 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3$

3.22. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{3-\sqrt{x}} \right)$ ($x \geq 0, x \neq 9$).

Lời giải

Với $x \geq 0$ và $x \neq 9$, ta có:

$$A = \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{3-\sqrt{x}} \right) = \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{\sqrt{x}-3} \right)$$

$$= \sqrt{x} \left[\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \right] = \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x}-3+\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \sqrt{x} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{2 \cdot (\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{2x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

Vậy với $x \geq 0$ và $x \neq 9$ thì $A = \frac{2x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn và đưa thừa số vào trong dấu căn

1. Phương pháp giải

① Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

- ◆ Tìm cách đưa biểu thức trong căn về dạng tích A^2B .
- ◆ Thực hiện việc đưa thừa số ra ngoài dấu căn bằng cách áp dụng $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ (với $B \geq 0$).

② Đưa thừa số vào trong dấu căn:

- ◆ Chú ý đến dấu của thừa số trước dấu căn.
- ◆ Nếu $A \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$.
- ◆ Nếu $A < 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Viết các số hoặc biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích một cách thích hợp rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn :

- a). $\sqrt{54}$. b). $\sqrt{108}$. c). $0,1\sqrt{2000}$.
 d). $-0,05\sqrt{28800}$. e). $\sqrt{7.63.a^2}$

Lời giải

- a) Ta có $\sqrt{54} = \sqrt{9.6} = 3\sqrt{6}$.
 b) Ta có $\sqrt{108} = \sqrt{36.3} = 6\sqrt{3}$.
 c) Ta có $0,1\sqrt{20000} = 0,1\sqrt{10000.2} = 0,1.100\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.
 d) Ta có $-0,05\sqrt{28800} = -0,05\sqrt{10^2.144.2} = -0,05.10.12\sqrt{2} = -6\sqrt{2}$.
 e) Ta có $\sqrt{7.63.a^2} = \sqrt{7^2.9.a^2} = 7.3|a| = 21|a|$.

Ví dụ 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn (với $x > 0$ và $y \geq 0$):

- a). $3\sqrt{5}$. b). $-5\sqrt{2}$. c). $-\frac{2}{3}\sqrt{xy}$. d). $x\sqrt{\frac{2}{x}}$.

Lời giải

- a) Ta có $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2.5} = \sqrt{45}$.
 b) Ta có $-5\sqrt{2} = -\sqrt{5^2.2} = -\sqrt{50}$.
 c) Ta có: Với $x > 0$ và $y \geq 0$: $-\frac{2}{3}\sqrt{xy} = -\sqrt{\frac{4xy}{9}}$
 d) Ta có: Với $x > 0$ $x\sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{\frac{2x^2}{x}} = \sqrt{2x}$.

Dạng 2. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

1. Phương pháp giải

- ◆ Bằng cách nhân tử và mẫu của biểu thức trong căn cho mẫu số rồi rút mẫu ra ngoài căn bằng công thức: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{AB}{B^2}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$ (Với A, B mà $AB \geq 0$ và $B \neq 0$).

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

$$\text{a). } \sqrt{\frac{1}{600}}; \sqrt{\frac{11}{540}}; \sqrt{\frac{3}{50}}; \sqrt{\frac{5}{98}}; \sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{27}}.$$

$$\text{b). } ab\sqrt{\frac{a}{b}}; \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}; \sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}}; \sqrt{\frac{9a^3}{36b}}; 3xy\sqrt{\frac{2}{xy}}.$$

(Giả thiết các biểu thức có nghĩa).

Lời giải

$$\text{a). } \sqrt{\frac{1}{600}} = \sqrt{\frac{600}{600^2}} = \frac{\sqrt{6 \cdot 100}}{600} = \frac{10\sqrt{6}}{600} = \frac{\sqrt{6}}{60};$$

$$\sqrt{\frac{11}{540}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{9 \cdot 4 \cdot 15}} = \frac{\sqrt{11}}{6\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{11} \cdot \sqrt{15}}{6 \cdot 15} = \frac{\sqrt{165}}{90};$$

$$\sqrt{\frac{3}{50}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 50}{50^2}} = \frac{\sqrt{6 \cdot 25}}{50} = \frac{5\sqrt{6}}{50} = \frac{\sqrt{6}}{10};$$

$$\sqrt{\frac{5}{98}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{49 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{5}}{7\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{14};$$

$$\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{27}} = \frac{\sqrt{3}-1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{9}$$

$$\text{b). } ab\sqrt{\frac{a}{b}} = ab\sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{ab}{|b|}\sqrt{ab} = \begin{cases} a\sqrt{ab} & \text{neu } b > 0 \\ -a\sqrt{ab} & \text{neu } b < 0 \end{cases};$$

$$\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{ab}{a^2}} = \frac{a}{b|a|}\sqrt{ab} = \begin{cases} \frac{\sqrt{ab}}{b} & \text{neu } a > 0 \\ -\frac{\sqrt{ab}}{b} & \text{neu } a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}} = \sqrt{\frac{1+b}{b^2}} = \frac{\sqrt{1+b}}{|b|};$$

$$\sqrt{\frac{9a^3}{36b}} = \frac{\sqrt{a^3b}}{2|b|} = \frac{|a|\sqrt{ab}}{2|b|} = \frac{a\sqrt{ab}}{2b} \quad (ab \geq 0; b \neq 0).$$

$$3xy\sqrt{\frac{2}{xy}} = 3xy \cdot \frac{\sqrt{2xy}}{xy} = 3\sqrt{2xy} \quad (\text{vì } xy \geq 0).$$

Dạng 3. Trục căn ở mẫu

1. Phương pháp giải

Áp dụng

$$\textcircled{1}. \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}; \quad \textcircled{2}. \frac{A}{\sqrt{B} \pm C} = \frac{A(\sqrt{B} \mp C)}{B - C^2}; \quad \textcircled{3}.$$

$$\frac{A}{\sqrt{B} \pm \sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B} \mp \sqrt{C})}{B - C}.$$

Nhận xét. Ta gọi $\sqrt{B} + \sqrt{C}$ và $\sqrt{B} - \sqrt{C}$ là hai biểu thức liên hợp.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Trục căn ở mẫu với giả thiết các biểu thức chữ đều có nghĩa.

a). $\frac{5}{\sqrt{10}}; \frac{5}{2\sqrt{5}}; \frac{1}{3\sqrt{20}}; \frac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}}; \frac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}$ với $b \neq 0; y > 0$.

b). $\frac{3}{\sqrt{3}+1}; \frac{2}{\sqrt{3}-1}; \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}; \frac{b}{3+\sqrt{b}}$ với $b \geq 0; \frac{p}{2\sqrt{p}-1}$ với $p \geq 0, p \neq \frac{1}{4}$.

c). $\frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}; \frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}; \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ với $x > 0, y > 0, x \neq y; \frac{2ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$.

Lời giải

a). $\frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}; \quad \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5})^2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$

$$\frac{1}{3\sqrt{20}} = \frac{1}{3\sqrt{4 \cdot 5}} = \frac{1}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{30};$$

$$\frac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{5\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{5};$$

$$\frac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}(\sqrt{y}+b)}{b\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}+b}{b}.$$

b). $\frac{3}{\sqrt{3}+1} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2};$

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1;$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{7+4\sqrt{3}}{4-3} = 7+4\sqrt{3};$$

$$\frac{b}{3+\sqrt{b}} = \frac{b(3-\sqrt{b})}{9-b}; \quad \frac{p}{2\sqrt{p}-1} = \frac{p(2\sqrt{p}+1)}{4p-1} = \frac{2p\sqrt{p}+p}{4p-1};$$

$$c). \frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = 2(\sqrt{6}+\sqrt{5});$$

$$\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}} = \frac{3(\sqrt{10}-\sqrt{7})}{10-7} = \sqrt{10}-\sqrt{7};$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y};$$

$$\frac{2ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{2ab(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.$$

Dạng 4. Rút gọn biểu thức

1. Phương pháp Lờ giải

◆ Đưa thừa số ra ngoài dấu căn rồi rút gọn các căn thức đồng dạng

$$p\sqrt{A}+q\sqrt{A}-r\sqrt{A}=(p+q-r)\sqrt{A}.$$

Thực hiện các phép biến đổi căn thức:

$$\textcircled{1}. \sqrt{A^2} = |A|.$$

$$\textcircled{2}. \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|} \quad (\text{với } A \geq 0, B > 0).$$

$$\textcircled{3}. \sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} \quad (\text{với } B \geq 0).$$

$$\textcircled{4}. \frac{A}{\sqrt{B} \pm \sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B} \mp \sqrt{C})}{B-C} \quad (B \geq 0, C \geq 0, B \neq C).$$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau với $x \geq 0$:

a). $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 27 - 3\sqrt{3x}$

b). $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} + 28.$

Lời giải

a) Ta có $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 27 - 3\sqrt{3x} = (2 - 4 - 3)\sqrt{3x} + 27 = -5\sqrt{3x} + 27.$

b) Ta có $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} + 28 = 3\sqrt{2x} - 10\sqrt{2x} + 21\sqrt{2x} + 28$
 $= (3 - 10 + 21)\sqrt{2x} + 28 = 14\sqrt{2x} + 28.$

Ví dụ 2. Rút gọn

a). $\frac{2}{x^2 - y^2} \sqrt{\frac{3(x+y)^2}{2}}$ với $x \geq 0, y \geq 0$ và $x \neq y.$

b). $\frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)}$ với $a > 0,5.$

Lời giải

a) Ta có $\frac{2}{x^2-y^2} \sqrt{\frac{3(x+y)^2}{2}} = \frac{|x+y|}{x^2-y^2} \sqrt{\frac{4.3}{2}} = \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{x-y}$ (vì $x+y > 0$).

b) $\frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)} = \frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1-2a)^2}$
 $= \frac{2}{2a-1} |a| \cdot |1-2a| \sqrt{5} = \frac{2\sqrt{5}}{2a-1} \cdot a \cdot (2a-1) \quad \left(\text{do } a > \frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{5}a.$

Ví dụ 3: Rút gọn các biểu thức sau (giả sử các biểu thức chữ đều có nghĩa):

a). $\sqrt{18(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2};$

c) $\sqrt{\frac{a}{b^3} + \frac{a}{b^4}};$

b). $ab\sqrt{1+\frac{1}{a^2b^2}};$

d) $\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$

Lời giải

a). $\sqrt{18(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{2.9(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = 3|\sqrt{2}-\sqrt{3}|\sqrt{2} = 3(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2} = 3\sqrt{6}-6.$

b). $ab\sqrt{1+\frac{1}{a^2b^2}} = ab\sqrt{\frac{a^2b^2+1}{a^2b^2}} = \frac{ab}{|ab|} \sqrt{a^2b^2+1} = \begin{cases} \sqrt{a^2b^2+1} & \text{neu } ab > 0 \\ -\sqrt{a^2b^2+1} & \text{neu } ab < 0. \end{cases}$

c). $\sqrt{\frac{a}{b^3} + \frac{a}{b^4}} = \sqrt{\frac{ab+a}{b^4}} = \frac{\sqrt{ab+a}}{b^2}.$

d). $\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a}.$

Cách khác: $\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(a+\sqrt{ab})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} = \frac{\sqrt{a}(a-b)}{a-b} = \sqrt{a}.$

Ví dụ 4: Rút gọn các biểu thức sau (giả sử các biểu thức chữ đều có nghĩa):

$\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}; \frac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}; \frac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2}.$

Lời giải

Ta có: $\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2};$

$\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{1-\sqrt{3}} = -\sqrt{5};$

$\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{6}}{2};$

$\frac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{1-\sqrt{a}} = -\sqrt{a};$

$\frac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2} = \frac{\sqrt{p}(\sqrt{p}-2)}{\sqrt{p}-2} = \sqrt{p}.$

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức sau (với $a > 0, b > 0$);

a). $5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5\sqrt{16ab^2} - 2\sqrt{9a}$

b). $5a\sqrt{64ab^3} - \sqrt{3}\sqrt{12a^3b^3} + 2ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b}$.

Lời giải

a) $5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5\sqrt{16ab^2} - 2\sqrt{9a} = 5\sqrt{a} - 20ab\sqrt{a} + 20ab\sqrt{a} - 6\sqrt{a} = -\sqrt{a}$.

b) $5a\sqrt{64ab^3} - \sqrt{3}\sqrt{12a^3b^3} + 2ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b}$
 $= 40ab\sqrt{ab} - 6ab\sqrt{ab} + 6ab\sqrt{ab} - 45ab\sqrt{ab} = -5ab\sqrt{ab}$.

Ví dụ 6. Cho biểu thức:

$$B = \sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1} \text{ với } x \geq -1.$$

a). Rút gọn biểu thức B ;

b). Tìm x sao cho B có giá trị bằng 16.

Lời giải

a) $B = 4\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} = 4\sqrt{x+1}$.

b) $B = 16 \Leftrightarrow 4\sqrt{x+1} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 4 \Leftrightarrow x+1 = 16 \Leftrightarrow x = 15$.

Ví dụ 7. Rút gọn biểu thức

a). $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$ với $a > 0$ và $b > 0$;

b). $\sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}} \cdot \sqrt{\frac{4m-8mx+4mx^2}{81}}$ với $m > 0$ và $x \neq 1$.

Lời giải

a) $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{ab}{a^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab} + \sqrt{ab} + \frac{1}{b}\sqrt{ab} = \left(\frac{2}{b} + 1\right)\sqrt{ab}$.

b) $\sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}} \cdot \sqrt{\frac{4m-8mx+4mx^2}{81}} = \sqrt{\frac{m}{(1-x)^2} \cdot \frac{4m(1-x)^2}{81}} = \sqrt{\frac{4m^2}{81}} = \frac{\sqrt{4m^2}}{\sqrt{81}} = \frac{2m}{9}$. (với $m > 0$ và $x \neq 1$)

Ví dụ 8. Rút gọn rồi so sánh giá trị của M với 1, biết:

$$M = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1} \text{ với } a > 0 \text{ và } a \neq 1.$$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} = \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} = \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}$

$$\text{Do đó: } M = \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1} = \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Vì $\sqrt{a} > 0$ nên $1 - \frac{1}{\sqrt{a}} < 1$ suy ra $M < 1$.

Ví dụ 9. Cho $B = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

- Xác định x để cho B có nghĩa;
- Rút gọn B ;
- Tìm x để $B > 1$;
- Tìm x nguyên để B là số nguyên.

Lời giải

a) Ta có $x - 5\sqrt{x} + 6 = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2)$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 3 \\ \sqrt{x} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

b)
$$B = \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}-9 - (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}.$$

c) Ta có $B = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$

$$B > 1 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-3} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$$

Vậy với $x > 9$ thì $B > 1$.

d) Vì $B = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$ nên $B \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}-3$ là ước của 4. Do đó $\sqrt{x}-3$ nhận các giá trị $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Suy các giá trị thích hợp của x là 1, 4, 16, 25, 49.

Dạng 5: Chứng Minh Đẳng Thức

1. Phương pháp giải:

- Thực hiện các phép biến đổi căn thức và các hằng đẳng thức đáng nhớ để biến đổi về trái bằng về phải hoặc về phải bằng về trái của đẳng thức.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\text{a). } \frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{b). } \left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x} \right) : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3} \quad \text{với } x > 0.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: VT} &= \frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{6}{9}} - 4\sqrt{\frac{6}{4}} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{6} + \frac{2}{3}\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3} - 2 \right) \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{6} = \text{VP (đpcm)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có VT} &= \left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x} \right) : \sqrt{6x} = \left(\sqrt{6x} + \frac{\sqrt{6x}}{3} + \sqrt{6x} \right) : \sqrt{6x} \\ &= \frac{7}{3}\sqrt{6x} : \sqrt{6x} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} = \text{VP (đpcm)}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\text{a). } \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a} \right)^2 = 1 \quad \text{với } a > 0 \text{ và } a \neq 1.$$

$$\text{b). } \frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a| \quad \text{với } a+b > 0 \text{ và } b \neq 0.$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{1-(\sqrt{a})^3}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} = 1 + \sqrt{a} + a + \sqrt{a} = 1 + 2\sqrt{a} + a = (1 + \sqrt{a})^2$$

$$\text{và } \frac{1-\sqrt{a}}{1-a} = \frac{1-\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} = \frac{1}{1+\sqrt{a}}$$

$$\text{Do đó: VT} = \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a} \right)^2 = (1 + \sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{a})^2} = 1 = \text{VP (đpcm)}.$$

b) Ta có: $VT = \frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2 b^4}{a^2 + 2ab + b^2}} = \frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2 b^4}{(a+b)^2}} = \frac{a+b}{b^2} \cdot \frac{|a| \cdot b^2}{a+b} = |a| = VP$ (đpcm).

(do $a+b > 0$ và $b \neq 0$).

Ví dụ 3: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào biến a :

$$\left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}} - \frac{a^2+1}{1-a^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a} \right) \quad \text{với } a > 0, a \neq 1.$$

Lời giải

Ta có:
$$\frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}} = \frac{1}{2(1+\sqrt{a})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{a})}$$

$$= \frac{1-\sqrt{a}+1+\sqrt{a}}{2(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})} = \frac{2}{2(1-a)} = \frac{1}{1-a}$$

Do đó biểu thức đã cho bằng:
$$\left(\frac{1}{1-a} - \frac{a^2+1}{(1-a)(1+a)} \right) \cdot \frac{a+1}{a} = \frac{1+a-a^2-1}{1-a^2} \cdot \frac{a+1}{a}$$

$$= \frac{a(1-a)}{1-a^2} \cdot \frac{a+1}{a} = 1.$$

Vậy biểu thức đã cho không phụ thuộc vào biến a .

Dạng 5. Phân tích thành nhân tử

1. Phương pháp giải

Áp dụng:

① $A = (\sqrt{A})^2$ (với $A \geq 0$).

② $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$ (với $B \geq 0$).

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Phân tích thành nhân tử (với a, b, x, y là các số không âm).

a). $ab + b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1$;

b). $\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3} + \sqrt{x^2 y} - \sqrt{xy^2}$.

Lời giải

a) $ab + b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1 = b(\sqrt{a})^2 + b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1 = b\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1) + (\sqrt{a} + 1) = (\sqrt{a} + 1)(b\sqrt{a} + 1)$.

b) $\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3} + \sqrt{x^2 y} - \sqrt{xy^2} = x\sqrt{x} - y\sqrt{y} + x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = (x\sqrt{x} + x\sqrt{y}) - (y\sqrt{y} + y\sqrt{x})$
 $= x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - y(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - y)$.

Ví dụ 2: Phân tích thành nhân tử

a). $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$;

b). $\sqrt{6} + \sqrt{55} - \sqrt{10} - \sqrt{33}$.

Lời giải

a) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}(1 + \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{3})$.

$$b) \sqrt{6} + \sqrt{55} - \sqrt{10} - \sqrt{33} = (\sqrt{6} - \sqrt{10}) - (\sqrt{33} - \sqrt{55}) = \sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5}) - \sqrt{11}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$$

Dạng 6. Giải phương trình

1. Phương pháp giải

- ① Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa: \sqrt{A} có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$.
- ② Đưa thừa số ra ngoài dấu căn: $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$.
- ③ Rút gọn các căn thức đồng dạng.
- ④ Biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2$

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Giải phương trình:

$$a). \sqrt{18x+9} + \sqrt{x+3} - \frac{1}{2}\sqrt{4x+12} = 9;$$

$$b). \sqrt{25x-50} - \sqrt{16x-32} - \sqrt{9x-18} = 12 - 4\sqrt{x-2}.$$

Lời giải

a). Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$

$$\sqrt{18x+9} + \sqrt{x+3} - \frac{1}{2}\sqrt{4x+12} = 9$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3} - \sqrt{x+3} = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 2x+1 = 9 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 4$

b). Điều kiện: $x \geq 2$

$$\sqrt{25x-50} - \sqrt{16x-32} - \sqrt{9x-18} = 12 - 4\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x-2} - 4\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x-2} = 12 - 4\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 6 \Leftrightarrow x-2 = 36 \Leftrightarrow x = 38 \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 38$

Ví dụ 2. Tìm x , biết:

$$a). 2\sqrt{9x-27} - \frac{1}{5}\sqrt{25x-75} - \frac{1}{7}\sqrt{49x-147} = 20;$$

$$b). \frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} + 1 = \sqrt{x};$$

$$c). \sqrt{9x^2+45} - \frac{1}{12}\sqrt{16x^2+80} + 3\sqrt{\frac{x^2+5}{16}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{25x^2+125}{9}} = 9;$$

$$d). \sqrt{4,5x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{72x} - 5\sqrt{\frac{x}{2}} - 12 = 0.$$

Lời giải

a). $2\sqrt{9x-27} - \frac{1}{5}\sqrt{25x-75} - \frac{1}{7}\sqrt{49x-147} = 20$

ĐKXĐ: $x \geq 3$

$$2\sqrt{9x-27} - \frac{1}{5}\sqrt{25x-75} - \frac{1}{7}\sqrt{49x-147} = 20$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{9(x-3)} - \frac{1}{5}\sqrt{25(x-3)} - \frac{1}{7}\sqrt{49(x-3)} = 20$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x-3} - \sqrt{x-3} - \sqrt{x-3} = 20 \Leftrightarrow 4\sqrt{x-3} = 20$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 5 \Leftrightarrow x-3 = 25$$

$$\Leftrightarrow x = 28 \text{ (Thỏa ĐK)}$$

Vậy $x = 28$.

b). $\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} + 1 = \sqrt{x}$

ĐKXĐ: $x \geq 0$

$$\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} + 1 = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3\sqrt{x}-5) \cdot 3}{6} - \frac{(2\sqrt{x}-7) \cdot 2}{6} + \frac{6}{6} = \frac{6}{6}\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{x} - 15 - 4\sqrt{x} + 14 + 6 = 6\sqrt{x} \Leftrightarrow 9\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 6\sqrt{x} = 15 - 14 - 6$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x} = -5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 5$$

$$\Leftrightarrow x = 25 \text{ (Thỏa ĐK)}$$

Vậy $x = 25$.

c). $\sqrt{9x^2+45} - \frac{1}{12}\sqrt{16x^2+80} + 3\sqrt{\frac{x^2+5}{16}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{25x^2+125}{9}} = 9;$

$$\sqrt{9x^2+45} - \frac{1}{12}\sqrt{16x^2+80} + 3\sqrt{\frac{x^2+5}{16}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{25x^2+125}{9}} = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9(x^2+5)} - \frac{1}{12}\sqrt{16(x^2+5)} + 3\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{16}} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{25(x^2+5)}}{\sqrt{9}} = 9$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+5} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2+5} + \frac{3}{4}\sqrt{x^2+5} - \frac{5}{12}\sqrt{x^2+5} = 9 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+5} = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5} = 3 \Leftrightarrow x^2+5 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = 2.$$

Vậy $x = -2$ hoặc $x = 2$.

d). $\sqrt{4,5x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{72x} - 5\sqrt{\frac{x}{2}} - 12 = 0.$

ĐKXĐ: $x \geq 0$

$$\sqrt{4,5x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{72x} - 5\sqrt{\frac{x}{2}} - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{9x}{2}} + \sqrt{5^2 \cdot 2x} - \sqrt{4^2 \cdot 2x} + \sqrt{6^2 \cdot 2x} - 5\sqrt{\frac{x}{2}} - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\sqrt{2x} + 5\sqrt{2x} - 4\sqrt{2x} + 6\sqrt{2x} - \frac{5}{2}\sqrt{2x} = 12 \Leftrightarrow 6\sqrt{2x} = 12$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (Thỏa ĐK)}$$

Vậy $x = 2$.

D. LUYỆN TẬP

Bài 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a). $\sqrt{96.125}$.

b). $\sqrt{a^4b^5}$.

c). $\sqrt{a^6b^{11}}$.

d). $\sqrt{a^3(1-a)^4}$ ($a > 1$).

Lời giải

a) $\sqrt{96.125} = \sqrt{2^5 \cdot 3 \cdot 5^3} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2 \cdot 30} = 20\sqrt{30}$.

b) $\sqrt{a^4b^5} = a^2b^2\sqrt{b}$.

c) $\sqrt{a^6b^{11}} = |a^3b^5|\sqrt{b}$.

d) Với $a > 1$: $\sqrt{a^3(1-a)^4} = \sqrt{a^2 \cdot a \cdot [(1-a)^2]^2} = a(1-a)^2\sqrt{a}$.

Bài 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a). $x\sqrt{13}$ với $x \geq 0$.

b). $x\sqrt{2}$ với $x < 0$.

c). $x\sqrt{-\frac{11}{x}}$ với $x < 0$.

Lời giải

a) Với $x \geq 0$: $x\sqrt{13} = \sqrt{13x^2}$.

b) Với $x < 0$: $x\sqrt{2} = -\sqrt{2x^2}$.

c) Với $x < 0$: $x\sqrt{-\frac{11}{x}} = -\sqrt{-\frac{11}{x}x^2} = -\sqrt{-11x}$.

Bài 3. Rút gọn các biểu thức

a). $\sqrt{50} - \sqrt{32} + 3\sqrt{8}$;

b). $\sqrt{25a} + 2\sqrt{160a} - 3\sqrt{10a}$ với $a \geq 0$.

c). $(2\sqrt{7} + \sqrt{3})\sqrt{7} - \sqrt{84}$.

d). $(\sqrt{63} - \sqrt{8} - \sqrt{7})\sqrt{7} + 2\sqrt{14}$.

Lời giải

a) Ta có $\sqrt{50} - \sqrt{32} + 3\sqrt{8} = \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2} + 3\sqrt{4 \cdot 2} = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{25a} + 2\sqrt{160a} - 3\sqrt{10a} = \sqrt{25 \cdot 10a} + 2 \cdot \sqrt{16 \cdot 10a} - 3\sqrt{10a}$
 $= 5\sqrt{10a} + 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{10a} - 3\sqrt{10a} = 10\sqrt{10a}$.

c) $(2\sqrt{7} + \sqrt{3})\sqrt{7} - \sqrt{84} = 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{4 \cdot 21} = 2 \cdot 7 + \sqrt{21} - 2\sqrt{21} = 14 - \sqrt{21}$.

d) $(\sqrt{63} - \sqrt{8} - \sqrt{7})\sqrt{7} + 2\sqrt{14} = \sqrt{63} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{8} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} + 2\sqrt{14}$
 $= \sqrt{9 \cdot 7 \cdot 7} - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} - 7 + 2\sqrt{14} = 3 \cdot 7 - 2\sqrt{14} - 7 + 2\sqrt{14} = 14$.

Bài 4. Khai triển và rút gọn biểu thức (với $x \geq 0; y \geq 0$)

a). $(\sqrt{2x} - 1)(2x + \sqrt{2x} + 1)$.

b). $(\sqrt{x} + 2\sqrt{y})(x - 2\sqrt{xy} + 4y)$.

c). $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(2\sqrt{x} - \sqrt{y})$

Lời giải

a) $(\sqrt{2x} - 1)(2x + \sqrt{2x} + 1) = (\sqrt{2x} - 1)((\sqrt{2x})^2 + \sqrt{2x} \cdot 1 + 1^2) = (\sqrt{2x})^3 - 1 = 2x\sqrt{2x} - 1$.

b) $(\sqrt{x} + 2\sqrt{y})(x - 2\sqrt{xy} + 4y) = (\sqrt{x} + 2\sqrt{y})[(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{y} + (2\sqrt{y})^2]$
 $= (\sqrt{x})^3 + (2\sqrt{y})^3 = x\sqrt{x} + 8y\sqrt{y}$.

c) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(2\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} - \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{y} \cdot 2\sqrt{x} - \sqrt{y} \cdot \sqrt{y}$
 $= 2x - \sqrt{xy} + 2\sqrt{xy} - y = 2x + \sqrt{xy} - y$.

Bài 5. Chứng minh rằng:

a). $\frac{(x\sqrt{y} - y\sqrt{x})(2\sqrt{y} + 2\sqrt{x})}{2\sqrt{xy}} = x - y$ với $x > 0, y > 0$.

b). $x + 2\sqrt{5x - 25} = (\sqrt{5} + \sqrt{x - 5})^2$ với $x \geq 5$.

Giải

a) Với $x > 0, y > 0$:

$$\frac{(x\sqrt{y} - y\sqrt{x})(2\sqrt{y} + 2\sqrt{x})}{2\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})2(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{2\sqrt{xy}} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y.$$

Vậy $\frac{(x\sqrt{y} - y\sqrt{x})(2\sqrt{y} + 2\sqrt{x})}{2\sqrt{xy}} = x - y$ với $x > 0, y > 0$.

b) Với $x \geq 5$:

$$(\sqrt{5} + \sqrt{x-5})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{x-5} + (\sqrt{x-5})^2 = 5 + 2\sqrt{5x-25} + x - 5 = x + 2\sqrt{5x-25}.$$

Vậy $x + 2\sqrt{5x-25} = (\sqrt{5} + \sqrt{x-5})^2$ với $x \geq 5$.

Bài 6. Khử mẫu các biểu thức dưới dấu căn rồi thực hiện phép tính: $2\sqrt{\frac{3}{20}} + \sqrt{\frac{1}{60}} - \sqrt{\frac{1}{15}}$.

Giải

Ta có: $2\sqrt{\frac{3}{20}} = 2\frac{\sqrt{60}}{20} = 2\frac{2\sqrt{15}}{20} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

$$\sqrt{\frac{1}{60}} = \frac{\sqrt{60}}{60} = \frac{2\sqrt{15}}{60} = \frac{\sqrt{15}}{30}$$

$$\sqrt{\frac{1}{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Vậy $2\sqrt{\frac{3}{20}} + \sqrt{\frac{1}{60}} - \sqrt{\frac{1}{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5} + \frac{\sqrt{15}}{30} - \frac{\sqrt{15}}{15} = \sqrt{15}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{30} - \frac{1}{15}\right) = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

Bài 7. Trục căn ở mẫu:

a). $\frac{9}{\sqrt{3}}$

b). $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$;

c). $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$;

d). $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

e). $\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}$;

f). $\frac{1}{\sqrt{18} + \sqrt{8} - 2\sqrt{2}}$.

g). $\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$;

h). $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$

Lời giải

a). Ta có $\frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$

b). $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$

$$c). \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = 3+2\sqrt{2}$$

$$d). \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{5-3} = \frac{8-2\sqrt{15}}{2} = 4-\sqrt{15}$$

$$e). \frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} = \frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+a)}{1-\sqrt{a}} = 1+\sqrt{a}+a$$

$$f). \frac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{8}-2\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$g). \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{3+2\sqrt{2}-3} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$$

$$h). \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{30}}{12}$$

Bài 8. Rút gọn biểu thức:

$$a). A = \frac{1}{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{7-4\sqrt{3}};$$

$$b). B = \frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} - \sqrt{6}.$$

Lời giải

$$a). A = \frac{1}{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{7-4\sqrt{3}} = \frac{7-4\sqrt{3}+7+4\sqrt{3}}{49-48} = 14$$

$$b). B = \frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} - \sqrt{6} = \frac{15(\sqrt{6}-1)}{6-1} + \frac{4(\sqrt{6}+2)}{6-4} - \frac{12(3+\sqrt{6})}{9-6} - \sqrt{6} \\ = 3(\sqrt{6}-1) + 2(\sqrt{6}+2) - 4(3+\sqrt{6}) - \sqrt{6} = -11$$

Bài 9. Chứng minh đẳng thức:

$$a). \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{2b}{a-b} = 1 \quad (a \geq 0, b \geq 0, a \neq 0);$$

$$b). \frac{a\sqrt{b}+b}{a-b} \sqrt{\frac{ab+b^2-2\sqrt{ab^2}}{a(a+2\sqrt{b})+b}} (\sqrt{a}+\sqrt{b}) = b \quad (a > b > 0)$$

Lời giải

$$a). \text{Ta có } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{2b}{a-b} \quad (a \geq 0, b \geq 0, a \neq 0);$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} - \frac{2b}{a-b} \\
&= \frac{a + \sqrt{ab} - \sqrt{ab} + b}{a-b} - \frac{2b}{a-b} \\
&= \frac{a-b}{a-b} = 1
\end{aligned}$$

b). Ta có $\frac{a\sqrt{b}+b}{a-b} \sqrt{\frac{ab+b^2-2\sqrt{ab}^3}{a(a+2\sqrt{b})+b}} (\sqrt{a}+\sqrt{b}) \quad (a > b > 0)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{b}(a+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \sqrt{\frac{b(a+b-2\sqrt{ab})}{a^2+2a\sqrt{b}+b}} (\sqrt{a}+\sqrt{b}) \\
&= \frac{\sqrt{b}(a+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \sqrt{\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(a+\sqrt{b})^2}} \\
&= \frac{\sqrt{b}(a+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \frac{\sqrt{b}(a+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = b
\end{aligned}$$

Bài 10. Giải phương trình:

a). $\frac{1}{2}\sqrt{x-1} - \frac{3}{2}\sqrt{9x-9} + 24\sqrt{\frac{x-1}{64}} = -17;$

b). $3x - 7\sqrt{x} + 4 = 0;$

c). $-5x + 7\sqrt{x} + 12 = 0;$

Lời giải

a). Điều kiện: $x \geq 1$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x-1} - \frac{3}{2}\sqrt{9x-9} + 24\sqrt{\frac{x-1}{64}} = -17 \Leftrightarrow x = 290.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{x-1} - \frac{3}{2}\sqrt{9(x-1)} + 24\sqrt{\frac{x-1}{8^2}} = -17$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{x-1} - \frac{9}{2}\sqrt{x-1} + \frac{24}{8}\sqrt{x-1} = -17 \Leftrightarrow -\sqrt{x-1} = -17 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 17$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 289 \Leftrightarrow x = 290.$$

Đổi chiếu với điều kiện ta được: $x = 290$.

b). (Điều kiện $x \geq 0$)

$$3x - 7\sqrt{x} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - 4(\sqrt{x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x} - 4 = 0 \\ \sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{4}{3} \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{9} \\ x = 1 \end{cases}$$

Đổi chiếu với điều kiện ta được: $x = \frac{16}{9}; x = 1$.

c). Điều kiện $x \geq 0$

$$-5x + 7\sqrt{x} + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -5x - 5\sqrt{x} + 12\sqrt{x} + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -5\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) + 12(\sqrt{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(-5\sqrt{x} + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 1 = 0 \\ -5\sqrt{x} + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -1 \text{ (vn)} \\ \sqrt{x} = \frac{12}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{144}{25}.$$

Đổi chiếu điều kiện ta được: $x = \frac{144}{25}$.

Bài 11. Xét biểu thức:

$$A = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$$

a). Rút gọn A ;

b). Biết $a \geq 1$, hãy so sánh A và $|A|$;

c). Tìm a để $A = 2$;

d). Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Lời giải

a). (ĐK $a \geq 0$)

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1 \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}^3 + 1)}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a}(2\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a}} + 1 = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)(a - \sqrt{a} + 1)}{a - \sqrt{a} + 1} - (2\sqrt{a} + 1) + 1 \\ &= a + \sqrt{a} - 2\sqrt{a} - 1 + 1 = a - \sqrt{a} \end{aligned}$$

Với $a \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{a} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{a} - 1 \geq 0$. và $a \geq 1 \Rightarrow a \geq 0$

Suy ra $A = a - \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) \geq 0$

Khi đó $A \geq 0 \Rightarrow |A| = A$

Vậy $|A| = A$.

c). Tìm a để $A = 2$

$$a - \sqrt{a} = 2 \Leftrightarrow a - \sqrt{a} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a + \sqrt{a} - 2\sqrt{a} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}(\sqrt{a} + 1) - 2(\sqrt{a} + 1) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} + 1 = 0 \\ \sqrt{a} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = -1(VN) \\ \sqrt{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 4$$

Đổi chiếu điều kiện ta được $a = 4$ thì $A = 2$.

Tài liệu phát hành và bảo hành nội dung trên website Tailieuchuan.vn

d). $A = a - \sqrt{a} = a - 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

$$\forall \left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } a.$$

$$\text{Nên } \left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \text{ với mọi } a.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $-\frac{1}{4}$ khi và chỉ khi $\sqrt{a} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

Bài 12. Xét biểu thức: $B = \left(\frac{3}{\sqrt{a+1}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right)$

a). Rút gọn B ;

b). Tìm giá trị của B nếu $a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$;

c). Với giá trị nào của a thì $\sqrt{B} > B$.

Lời giải

a). Điều kiện $-1 < a < 1$

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{3}{\sqrt{a+1}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right) \\ &= \left(\frac{3 + \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}}\right) : \left(\frac{3 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}}\right) = \frac{3 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{a+1}} \cdot \frac{\sqrt{a+1} \cdot \sqrt{1-a}}{3 + \sqrt{1-a^2}} = \sqrt{1-a} \end{aligned}$$

b). Với $a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$; Khi đó:

$$B = \sqrt{1-a} = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4-3}} = \sqrt{3} + 1$$

c). Với $-1 < a < 1$, ta có: $\sqrt{B} > B \Leftrightarrow \sqrt{B}(1 - \sqrt{B}) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{B} > 0 \\ 1 - \sqrt{B} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ \sqrt{B} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < B < 1$$

(VN)

Khi đó $0 < \sqrt{1-a} < 1 \Leftrightarrow 0 < 1-a < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 1$.

Kết hợp với điều kiện $-1 < a < 1$ ta được $0 < a < 1$

Vậy $0 < a < 1$ thì $\sqrt{B} > B$.

Bài 13. Rút gọn biểu thức:

a). $3\sqrt{2a} - \sqrt{18a^3} + 4\sqrt{\frac{a}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{128a}$ (với $a \geq 0$)

b). $2y\sqrt{x-y} + x\sqrt{\frac{1}{x-y}} - x\sqrt{\frac{a}{ax-ay}} - \sqrt{x^3-x^2y}$ (với $x > y > 0$)

c). $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ (với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$)

Lời giải

a). Với $a \geq 0$, ta có: $3\sqrt{2a} - \sqrt{18a^3} + 4\sqrt{\frac{a}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{128a} = 3\sqrt{2a} - 3a\sqrt{2a} + 2\sqrt{2a} - 2\sqrt{2a}$
 $= 3\sqrt{2a} - 3a\sqrt{2a} = 3(1-a)\sqrt{2a}$.

b). Với $x > y > 0$, ta có: $2y\sqrt{x-y} + x\sqrt{\frac{1}{x-y}} - x\sqrt{\frac{a}{ax-ay}} - \sqrt{x^3-x^2y}$
 $= 2y\sqrt{x-y} + x\sqrt{\frac{1}{x-y}} - x\sqrt{\frac{a}{a(x-y)}} - \sqrt{x^2(x-y)}$
 $= 2y\sqrt{x-y} - |x|\sqrt{x-y} + x\sqrt{\frac{1}{x-y}} - x\sqrt{\frac{1}{x-y}}$
 $= \sqrt{x-y}(2y-x)$ (do $x > 0$).

c). Với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$, ta có: $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$

$$= \frac{a+2\sqrt{ab}+b+a-2\sqrt{ab}+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{2a+2b}{a-b}.$$

Bài 14. Rút gọn biểu thức:

a). $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+2} - \frac{2}{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$

b). $\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

Lời giải

a). Ta có:
$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+2} - \frac{2}{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} - \frac{2}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} + \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1-2+2+2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{3}{\sqrt{2}+1} = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{2-1} = 3(\sqrt{2}-1)$$

b). Ta có:
$$\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2+\sqrt{6}+2\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{6}-2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}+1} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{5}+1} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{3+\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{10}}{3-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{10})(3-\sqrt{5})+(2\sqrt{2}-\sqrt{10})(3+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{10}+3\sqrt{10}-\sqrt{50}+6\sqrt{2}+2\sqrt{10}-3\sqrt{10}-\sqrt{50}}{9-5}$$

$$= \frac{12\sqrt{2}-2\sqrt{50}}{4} = \frac{12\sqrt{2}-10\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bài 15. Chứng minh đẳng thức :

a) $\frac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt{\frac{a^4}{x^4}-1} = \frac{a^2}{x^2}$; với $|a| > |x|$

b) $\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2 = 4\sqrt{6}$

c) $\left(\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \sqrt{xy}\right) : (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = 1 \quad (x > 0, y > 0, x \geq y)$

Lời giải

$$\text{a) VT} = \frac{(\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2-x^2})^2}{a^2+x^2 - (a^2-x^2)} - \sqrt{\frac{a^4-x^4}{x^4}} = \frac{2a^2 + 2\sqrt{a^4-x^4}}{2x^2} - \frac{\sqrt{a^4-x^4}}{x^2} = \frac{a^2}{x^2}$$

$$\text{b) Chú ý: } 5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2.$$

$$\text{c) } x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = (\sqrt{x})^3 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y).$$

Bài 16. Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$

a). Rút gọn A nếu $x \geq 0$ và $x \neq 4$;

b). Tìm x để $A = 2$.

Lời giải

a). Với $x \geq 0$ và $x \neq 4$, ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

b). Khi $A = 2$ ta được $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 2(\sqrt{x}+2) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$ (tm $x \geq 0, x \neq 4$)

Vậy $x = 16$.

Bài 17. Cho biểu thức: $B = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) : \frac{b}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$ với $a > b > 0$.

a). Rút gọn B;

b). Tính B nếu $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$;

c). Tìm điều kiện của a, b để $B < 1$

Lời giải

a) Với điều kiện: $a > b > 0$, ta có: $B = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) : \frac{b}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - \frac{(\sqrt{a^2-b^2} + a)(a - \sqrt{a^2-b^2})}{\sqrt{a^2-b^2} \cdot b}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

b) Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}b$ thay vào ta được $B = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}b - b}{\frac{3}{2}b + b}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}b}{\frac{5}{2}b}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

c) Khi $B < 1$ ta có: $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{a-b} < \sqrt{a+b}$
 $\Leftrightarrow a-b < a+b \Leftrightarrow -b < b \Leftrightarrow 2b > 0 \Leftrightarrow b > 0$.

Vậy với $a > b > 0$ thì $B < 1$.

Bài 18. Cho biểu thức: $C = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2}$

a). Rút gọn C nếu $x \geq 0, x \neq 1$;

b). Tìm x để C dương;

c). Tìm giá trị lớn nhất của C .

Lời giải

a) ĐK: $x \geq 0, x \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} C &= \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2} = \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2} \\ &= \frac{x - \sqrt{x} - 2 - x - \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \frac{(1-x)^2}{2} \\ &= \frac{-\sqrt{x}(1-x)^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(1-x)}{(\sqrt{x}+1)} = \sqrt{x}(1-\sqrt{x}) \end{aligned}$$

b) Ta có: $C > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(1-\sqrt{x}) > 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow 1 > \sqrt{x} \Rightarrow 0 \leq x < 1$.

c) Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có

$$C = \sqrt{x}(1-\sqrt{x}) = \sqrt{x} - x = -(x - \sqrt{x}) = -\left(x - 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

Vì $-\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$ với mọi $x \geq 0$ nên $-\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$ với mọi $x \geq 0$.

Do đó: $C \leq \frac{1}{4}$ với mọi $x \geq 0$

GTLN của $C = \frac{1}{4}$ khi $\sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

Vậy GTLN của $C = \frac{1}{4}$ khi $x = \frac{1}{4}$.

Bài 19. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào biến:

$$\left(\frac{2\sqrt{xy}}{x-y} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} \text{ với } x > 0, y > 0, x \neq y.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \left(\frac{2\sqrt{xy}}{x-y} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} \\ &= \frac{4\sqrt{xy} + (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 1 \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Vậy biểu thức đã cho không phụ thuộc vào biến.

BÀI 10. CĂN BẬC BA VÀ CĂN THỨC BẬC BA.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. CĂN BẬC BA

Căn bậc ba của một số thực

Tổng quát, ta định nghĩa:

Căn bậc ba của số thực a là số thực x thoả mãn $x^3 = a$.

Chú ý. Mỗi số a đều có duy nhất một căn bậc ba. Căn bậc ba của số a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$. Trong kí hiệu $\sqrt[3]{a}$, số 3 được gọi là chỉ số của căn. Phép tìm căn bậc ba của một số gọi là phép khai căn bậc ba.

Ví dụ 1

a) Chứng tỏ rằng $\sqrt[3]{64} = 4$.

b) Tính $\sqrt[3]{0}$ và $\sqrt[3]{-27}$.

Lời giải

a) Vì $4^3 = 64$ nên $\sqrt[3]{64} = 4$.

b) Vì $0^3 = 0$ nên $\sqrt[3]{0} = 0$. Vì $(-3)^3 = -27$ nên $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Nhận xét. Từ định nghĩa căn bậc ba, ta có $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$ với mọi số thực a . Do đó có thể giải

Ví dụ 1 như sau: $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$.

Tính căn bậc ba của một số bằng máy tính cầm tay

Ta có thể sử dụng loại MTCT thích hợp để tính căn bậc ba của một số. Chẳng hạn, để tính $\sqrt[3]{12}$ và $\sqrt[3]{3375}$ ta làm như sau:

Phép tính	Bấm các phím	Kết quả
$\sqrt[3]{343}$		7
$\sqrt[3]{12}$		2,289428485

Chú ý. Màn hình MTCT chỉ hiển thị được một số hữu hạn chữ số nên các kết quả là số thập phân vô hạn (tuần hoàn hay không tuần hoàn) đều được làm tròn, chẳng hạn: $\sqrt[3]{12} \approx 2,289428485$.

Ví dụ 2. Sử dụng MTCT, tính $\sqrt[3]{3,25}$ rồi làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai.

Lời giải

Bấm các phím , màn hình hiện kết quả 1,481248034. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai ta được $\sqrt[3]{3,25} \approx 1,48$.

2. CĂN THỨC BẬC BA

Nhận biết căn thức bậc ba

Tương tự như căn thức bậc hai, ta có định nghĩa sau:

Căn thức bậc ba là biểu thức có dạng $\sqrt[3]{A}$, trong đó A là một biểu thức đại số.

Chú ý

- Tương tự căn bậc ba của một số, ta cũng có $(\sqrt[3]{A})^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$ (A là một biểu thức).

- Để tính giá trị của $\sqrt[3]{A}$ tại những giá trị cho trước của biến, ta thay các giá trị cho trước của biến vào căn thức rồi tính giá trị của biểu thức số nhận được.

Ví dụ 3. Tính giá trị của căn thức $\sqrt[3]{2x+5}$ tại:

a) $x = 60$;

b) $x = -6,5$.

Lời giải

a) Với $x = 60$ ta có $\sqrt[3]{2 \cdot 60 + 5} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$.

b) Với $x = -6,5$ ta có $\sqrt[3]{2 \cdot (-6,5) + 5} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$.

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức $-x + 5 + \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$.

Lời giải

Ta có $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3 \leftarrow$ hằng đẳng thức lập phương của một tổng

Do đó $-x + 5 + \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = -x + 5 + \sqrt[3]{(x+1)^3} = -x + 5 + (x+1) = 6$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

3.23. Tính:

a) $\sqrt[3]{216}$;

b) $\sqrt[3]{-512}$;

c) $\sqrt[3]{-0,001}$;

d) $\sqrt[3]{1,331}$.

Lời giải

a) $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$.

b) $\sqrt[3]{-512} = \sqrt[3]{(-8)^3} = -8$.

c) $\sqrt[3]{-0,001} = \sqrt[3]{(-0,1)^3} = -0,1$.

d) $\sqrt[3]{1,331} = \sqrt[3]{(1,1)^3} = 1,1$.

3.24. Sử dụng MTCT, tính các căn bậc ba sau đây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai):

a) $\sqrt[3]{2,1}$;

b) $\sqrt[3]{-18}$;

c) $\sqrt[3]{-28}$;

d) $\sqrt[3]{0,35}$.

Lời giải

a) Bấm các phím $\boxed{SHIFT} \boxed{\sqrt{}} \boxed{2} \boxed{,} \boxed{1} \boxed{=}$ màn hình hiện kết quả



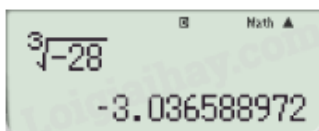
Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai, ta được $\sqrt[3]{2,1} \approx 1,28$.

b) Bấm các phím $\boxed{SHIFT} \boxed{\sqrt{}} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{8} \boxed{=}$, màn hình hiện kết quả



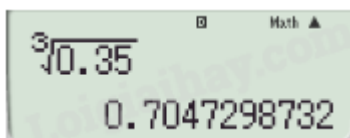
Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai, ta được $\sqrt[3]{-18} \approx -2,62$.

c) Bấm các phím $\boxed{SHIFT} \boxed{\sqrt{}} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{8} \boxed{=}$, màn hình hiện kết quả



Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai, ta được $\sqrt[3]{-28} \approx -3,04$.

d) Bấm các phím $\boxed{SHIFT} \boxed{\sqrt{}} \boxed{0} \boxed{,} \boxed{3} \boxed{5} \boxed{=}$, màn hình hiện kết quả



Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai, ta được $\sqrt[3]{0,35} \approx 0,70$.

3.25. Một người thợ muốn làm một thùng tôn hình lập phương có thể tích bằng 730dm^3 . Em hãy ước lượng chiều dài cạnh thùng khoảng bao nhiêu dm?

Lời giải

Gọi chiều dài cạnh thùng tôn hình lập phương là x (dm).

Thể tích của thùng tôn hình lập phương đó là x^3 (dm^3).

Khi đó, ta có: $x^3 = 730$, suy ra $x = \sqrt[3]{730}$.

Sử dụng MTCT, bấm các phím $\boxed{SHIFT} \boxed{\sqrt{}} \boxed{7} \boxed{3} \boxed{0} \boxed{=}$, màn hình hiện kết quả $9,004113346$.

Do đó $x = \sqrt[3]{730} \approx 9(\text{dm})$.

Vậy ước lượng chiều dài cạnh thùng khoảng 9dm.

3.26. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}$

b) $\sqrt[3]{(2\sqrt{2}+1)^3}$;

c) $(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1})^3$.

Lời giải

a) $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3} = 1-\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{(2\sqrt{2}+1)^3} = 2\sqrt{2}+1$.

c) $(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1})^3 = \sqrt{2}+1$.

3.27. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức $\sqrt[3]{27x^3 - 27x^2 + 9x - 1}$ tại $x = 7$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt[3]{27x^3 - 27x^2 + 9x - 1} = \sqrt[3]{(3x-1)^3} = 3x-1$.

Thay $x = 7$ vào biểu thức đã thu gọn ở trên, ta được: $3 \cdot 7 - 1 = 20$.

Vậy $\sqrt[3]{27x^3 - 27x^2 + 9x - 1} = 3x - 1$ và có giá trị bằng 20 tại $x = 7$.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Thực hiện phép tính và rút gọn biểu thức

1. Phương pháp giải

♦ Áp dụng $(\sqrt[3]{a})^3 = a$; $\sqrt[3]{a^3} = a$.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Hãy tìm $\sqrt[3]{512}$; $\sqrt[3]{-729}$; $\sqrt[3]{0,064}$; $\sqrt[3]{-0,216}$; $\sqrt[3]{-0,008}$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{8^3} = 8$.

$$\sqrt[3]{-729} = \sqrt[3]{-9^3} = -9.$$

$$\sqrt[3]{0,064} = \sqrt[3]{(0,4)^3} = 0,4.$$

$$\sqrt[3]{-0,216} = \sqrt[3]{(-0,6)^3} = -0,6.$$

$$\sqrt[3]{-0,008} = \sqrt[3]{(-0,2)^3} = -0,2.$$

Ví dụ 2: Tính:

a). $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125}$;

b). $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}$.

Lời giải

a). $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{3^3} - \sqrt[3]{2^3} - \sqrt[3]{5^3} = 3 + 2 - 5 = 0$

b). $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\frac{135}{5}} - \sqrt[3]{54 \cdot 4} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{216} = 3 - 6 = -3$

Ví dụ 3: Thực hiện phép tính

a). $A = (\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$

b). $B = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$.

Lời giải

a). Ta có: $A = (\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) = \left((\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2 \right) (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$

$$= (\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = 3 - 2 = 1$$

b). Áp dụng hằng đẳng thức $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } B^3 &= \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \right)^3 = 2+\sqrt{5} + 2-\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \right) \\ &= 4 + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}B = 4 + 3\sqrt[3]{4-5}B = 4 - 3B \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow B^3 + 3B - 4 = 0 \Leftrightarrow B^3 - 1 + 3B - 3 = 0 \Leftrightarrow (B-1)(B^2 + B + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow B = 1 \left(B^2 + B + 4 = B^2 + 2\frac{1}{2}B + \frac{1}{4} + \frac{15}{4} = \left(B + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \right)$$

$$\text{Vậy } B = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1.$$

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức

a) $\sqrt[3]{x^3 + 1 + 3x(x+1)}$;

b) $\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt[3]{x+1}}}$

Lời giải

a) Ta có $\sqrt[3]{x^3 + 1 + 3x(x+1)} = \sqrt[3]{(x+1)^3} = x+1.$

b) $\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt[3]{x+1}}} = \frac{(\sqrt[3]{x+1})(\sqrt[3]{x^2 - \sqrt[3]{x+1}})}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt[3]{x+1}}} = \sqrt[3]{x+1}.$

Dạng 2. Giải phương trình

1. Phương pháp giải

Áp dụng: $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3.$

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Giải các phương trình

a). $\sqrt[3]{2x+1} = 2.$

b). $\sqrt[3]{1-2x} = -2.$

c). $\sqrt[3]{x-2} + 2 = x.$

Lời giải

a). $\sqrt[3]{2x+1} = 2 \Leftrightarrow 2x+1 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}.$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{7}{2}.$

$$\text{b). } \sqrt[3]{1-2x} = -2 \Leftrightarrow 1-2x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{9}{2}$.

$$\text{c). } \sqrt[3]{x-2} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-2} = x-2 \Leftrightarrow x-2 = (x-2)^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ (x-2)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \\ x=1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $x = 1; x = 2; x = 3$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\text{a) } \sqrt[3]{x+7} - 3 = 1;$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{1-x^2} + 2 = 0.$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \sqrt[3]{x+7} - 3 = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+7} = 4 \Leftrightarrow x+7 = 64 \Leftrightarrow x = 57.$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{1-x^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x^2} = -2 \Leftrightarrow 1-x^2 = -8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\text{a) } \sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15;$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{x-3} + 3 = x.$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x} = 15 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x} = 15 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 5 \Leftrightarrow x = 125.$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{x-3} + 3 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-3} = x-3 \Leftrightarrow x-3 = (x-3)^3 \Leftrightarrow (x-3)^3 - (x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)[(x-3)^2 - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-4)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2; 3; 4\}.$$

D. LUYỆN TẬP

Bài 1. Tính các căn bậc ba sau

$$1. \sqrt[3]{64}$$

$$5. \frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$$

$$2. \sqrt[3]{-512}.$$

$$3. \sqrt[3]{0,064}$$

$$6. \frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{576}} - \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}$$

4. $\sqrt[3]{-0,216}$

Lời giải

1. $\sqrt[3]{64} = 4.$

2. $\sqrt[3]{-512} = -8$

3. $\sqrt[3]{0,064} = \sqrt[3]{\frac{64}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{4}{10}.$

4. $\sqrt[3]{-0,216} = \sqrt[3]{(-6)^3} = -6.$

5. $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{\frac{500}{4}} + \sqrt[3]{12 \cdot 18} = \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216} = 5 + 6 = 11$

6. $\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{576}} - \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 6}{576}} - \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} - \sqrt[3]{8} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}.$

Bài 2. Thực hiện phép tính

a). $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{-18} \cdot \sqrt[3]{3}.$

b). $\sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)(3 + 2\sqrt{2})}; \sqrt[3]{(4 - 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}.$

c). $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{16}\right) \cdot \sqrt[3]{4}.$

d). $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) : 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$

e). $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}).$

Lời giải

a). $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{-18} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot (-18) \cdot 3} = \sqrt[3]{-27} = -3.$

b). $\sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)(3 + 2\sqrt{2})} = \sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)^3} = \sqrt{2} + 1.$

$\sqrt[3]{(4 - 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)} = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 1)^2 (\sqrt{3} - 1)} = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 1)^3} = \sqrt{3} - 1.$

c). $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{16}\right) \cdot \sqrt[3]{4} = \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\right) \cdot \sqrt[3]{4} = 0.$

d). $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) : 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) : \frac{2}{3}\sqrt[3]{9} = \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3}\right) : \frac{2}{3}\sqrt[3]{9} = \frac{9}{4} - \sqrt[3]{9}.$

$$e). (\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}) = (\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}) = (\sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt[3]{2})^3 = 3 + 2 = 5.$$

Bài 3. Thực hiện phép tính $\sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216}$

$$a). (\sqrt[3]{4} + 1)^3 - (\sqrt[3]{4} - 1)^3$$

$$b). (12\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}) \left(5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right).$$

Lời giải

$$a) \sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216} = -4 - 5 + 6 = -3$$

$$\begin{aligned} b) \text{ Ta có } & (\sqrt[3]{4} + 1)^3 - (\sqrt[3]{4} - 1)^3 \\ &= (\sqrt[3]{4} + 1 - \sqrt[3]{4} + 1) \left[(\sqrt[3]{4} + 1)^2 + (\sqrt[3]{4} + 1)(\sqrt[3]{4} - 1) + (\sqrt[3]{4} - 1)^2 \right] \\ &= 2 \cdot (\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{4} + 1 + \sqrt[3]{16} - 1 + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{4} + 1) = 2(3\sqrt[3]{16} + 1) = 2(6\sqrt[3]{2} + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \text{ Ta có } & (12\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}) \left(5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right) \\ &= (12\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2}) \left(5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right) = 12\sqrt[3]{2} \left(5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right) = 120 - 36 = 84 \end{aligned}$$

Bài 4. Cho $x = \frac{2}{2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}}$ và $y = \frac{6}{2\sqrt[3]{2} - 2 + \sqrt[3]{4}}$. Tính $xy^3 - x^3y$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x &= \frac{2}{2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{16} + 2 + \sqrt[3]{4}} = \frac{2}{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{2})^2} \\ &= \frac{2(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})}{4 - 2} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự } y = \frac{6}{2\sqrt[3]{2} - 2 + \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$$

$$\text{Do đó: } xy^3 - x^3y = xy(y^2 - x^2) = xy(y - x)(y + x) = 8(2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})$$

Bài 5. Trục căn ở mẫu số biểu diễn $\frac{1}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{3})^2} = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}}{4 - 3} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}.$$

Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau:

$$1. A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} .$$

$$2. B = \sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} 1. A &= \sqrt[3]{2^3 + 3 \cdot 2^2 (\sqrt{2}) + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{2^3 - 3 \cdot 2^2 (\sqrt{2}) + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3} \\ &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4 \end{aligned}$$

$$2. B^3 = 182 + \sqrt{33125} + 182 - \sqrt{33125} + 3\sqrt[3]{182^2 - 33125}B = 364 - 3B.$$

$$\text{Nên } B^3 + 3B - 364 = 0 \Leftrightarrow (B - 7)(B^2 + 7B + 52) = 0 \Leftrightarrow B = 7$$

$$\text{(do } B^2 + 7B + 52 = \left(B + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{159}{4} > 0)$$

Tài liệu phát hành và bảo hành nội dung trên website Tailieuchuan.vn

Bài 7. Rút gọn các biểu thức sau:

$$1. A = \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2} \right) + \left(\frac{a}{a^2} \sqrt[6]{a^5} - \frac{3}{a} \sqrt[3]{a^2} \right) \right] \cdot a \sqrt[3]{a}$$

$$2. B = \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4 b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4}}$$

Lời giải

$$1. \text{ Ta có } A = \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2} \right) + \left(\frac{a}{a^2} \sqrt[6]{a^5} - \frac{3}{a} \sqrt[3]{a^2} \right) \right] a \sqrt[3]{a}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2} \right) + \left(\sqrt[6]{\frac{1}{a}} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}} \right) \right] a \sqrt[3]{a}$$

$$= \left(\frac{1}{a} + \sqrt[3]{a^2} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}} \right) a \sqrt[3]{a}$$

$$= a^2 - 3a + \sqrt[3]{a}$$

$$2. \text{ Ta có } B = \sqrt[3]{a^2} \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}} + \sqrt[3]{b^2} \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$$

$$= \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \right) \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \right)^3} .$$

Bài 8. Giải phương trình:

a). $\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} = x + 3$;

b). $\sqrt[3]{5+x} - x = 5$.

Lời giải

a) $\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} = x + 3$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + 9x^2} = \sqrt[3]{(x+3)^3}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 9x^2 = (x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

$$\Leftrightarrow 27x + 27 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

b) $\sqrt[3]{5+x} - x = 5$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{5+x} = x+5 \Leftrightarrow x+5 = (x+5)^3$$

$$\Leftrightarrow (x+5)\left[(x+5)^2 - 1\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=0 \\ (x+5)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=0 \\ x+5=1 \\ x+5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ x=-4 \\ x=-6 \end{cases}.$$

Bài 9. Giải các phương trình sau

1. $\sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15$

2. $\sqrt[3]{x-3} + 3 = x$

Lời giải

1. $\sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15 \Leftrightarrow 10\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x} = 15 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 5 \Leftrightarrow x = 125$.

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 125$.

2. Ta có $\sqrt[3]{x-3} + 3 = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-3} = x-3 \Leftrightarrow x-3 = (x-3)^3$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[(x-3)^2 - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-2)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \\ x=4 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2; 3; 4\}$.

Bài 10. Giải các phương trình sau

1. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x-2}$.

2. $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$

Lời giải

1. Ta có $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x-2}$

$$\Leftrightarrow 2x-1+x-1+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}\right) = 3x-2$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)(3x-2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Thử lại ta thấy các nghiệm đều thỏa mãn phương trình.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{2}{3} \right\}$.

2. Ta có $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$

$$\Leftrightarrow x+5+x+6+3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)}\left(\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6}\right) = 2x+11$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)(2x+11)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -6 \\ x = -\frac{11}{2} \end{cases}$$

Thử lại ta thấy các nghiệm đều thỏa mãn phương trình.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -5; -\frac{11}{2}; -6 \right\}$.

LUYỆN TẬP CHUNG SAU KHI HỌC BÀI 9&10

A. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{3(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{4}$.

Lời giải

Ta có $A = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{2^2} = (\sqrt{3}+1) - \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) + 2 = 0$.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 1$.

a) Rút gọn P .

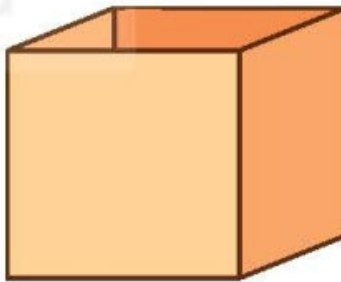
b) Sử dụng kết quả câu a, tính giá trị của P khi $x = 101$.

Lời giải

$$\text{a) } P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{x - \sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{x-1} = \frac{2x}{x-1}.$$

$$\text{b) Khi } x = 101 \text{ thì } P = \frac{2 \cdot 101}{101-1} = \frac{202}{100} = 2,02.$$

Ví dụ 3. Người ta cần làm một thùng hình lập phương bằng bìa cứng không có nắp trên và có thể tích 216dm^3 để đựng đồ. Tính diện tích bìa cứng cần dùng để làm thùng đựng đó (coi diện tích các mép nối là không đáng kể).



Lời giải

Gọi $x(\text{dm}, x > 0)$ là độ dài cạnh của thùng hình lập phương cần làm.

Ta có: $x^3 = 216$, suy ra $x = \sqrt[3]{216} = 6(\text{dm})$.

Vì thùng đựng không có nắp nên thùng gồm 4 mặt bên và 1 mặt đáy, mỗi mặt là một hình vuông cạnh 6dm . Do đó diện tích bìa cứng cần dùng là $S = 5 \cdot 6^2 = 180(\text{dm}^2)$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

3.28. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \frac{5+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}-2};$$

$$b) \sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} - \sqrt{63} + \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{2}};$$

$$c) \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}}{2\sqrt{12}};$$

$$d) \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} - 1}{\sqrt{50}}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \frac{5+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}-2} &= \frac{(\sqrt{5})^2 + 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} \\ &= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = \sqrt{5}+3 - \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+3 - \frac{\sqrt{5}+2}{1} = \sqrt{5}+3 - \sqrt{5} - 2 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} - \sqrt{63} + \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{2}} &= |\sqrt{7}-2| - \sqrt{3^2 \cdot 7} + \frac{\sqrt{2 \cdot 28}}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{7}-2 - 3\sqrt{7} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{28}}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{7}-2 + \sqrt{28} = -2\sqrt{7}-2 + \sqrt{2^2 \cdot 7} = -2\sqrt{7}-2 + 2\sqrt{7} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}}{2\sqrt{12}} &= \frac{|\sqrt{3}+\sqrt{2}| + |\sqrt{3}-\sqrt{2}|}{2\sqrt{2^2 \cdot 3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2} + \sqrt{3}-\sqrt{2}}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$d) \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} - 1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}+1-1}{\sqrt{5^2 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{5}.$$

3.29. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) 3\sqrt{45} + \frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{245};$$

$$b) \frac{\sqrt{12}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{21}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}+1} + \sqrt{7};$$

$$c) \frac{3-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} + \sqrt{3}(2\sqrt{3}-1) + \sqrt{12};$$

$$d) \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} - \frac{6}{\sqrt{6}}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } 3\sqrt{45} + \frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{245} &= 3\sqrt{3^2 \cdot 5} + \frac{5\sqrt{3 \cdot 5}}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{7^2 \cdot 5} = 3 \cdot 3\sqrt{5} + \frac{5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{3}} - 2 \cdot 7\sqrt{5} \\ &= 9\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 14\sqrt{5} = \sqrt{5}(9 + 5 - 14) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\sqrt{12} - \sqrt{4}}{\sqrt{3} - 1} - \frac{\sqrt{21} + \sqrt{7}}{\sqrt{3} + 1} + \sqrt{7} &= \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3} - 2}{\sqrt{3} - 1} - \frac{\sqrt{3 \cdot 7} + \sqrt{7}}{\sqrt{3} + 1} + \sqrt{7} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} - 1} - \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{7}}{\sqrt{3} + 1} + \sqrt{7} \\ &= \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} - \frac{\sqrt{7}(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} + 1} + \sqrt{7} = 2 - \sqrt{7} + \sqrt{7} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{3 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} + \sqrt{3}(2\sqrt{3} - 1) + \sqrt{12} &= \frac{(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}}{-(\sqrt{3} - 1)} + \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{2^2 \cdot 3} = \\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{-(\sqrt{3} - 1)} + 2 \cdot 3 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ &= -\sqrt{3} + 6 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} - \frac{6}{\sqrt{6}} &= \frac{(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} - \frac{(\sqrt{6})^2}{\sqrt{6}} = \\ &= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} - \sqrt{6} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{3 - 1} - \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{2} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

3.30. Giả sử lực F của gió khi thổi theo phương vuông góc với bề mặt cánh buồm của một con thuyền tỉ lệ thuận với bình phương tốc độ của gió, hệ số tỉ lệ là 30. Trong đó, lực F được tính bằng N (Newton) và tốc độ được tính bằng m/s.

a) Khi tốc độ của gió là 10 m/s thì lực F là bao nhiêu Newton?

b) Nếu cánh buồm chỉ có thể chịu được một áp lực tối đa là 12000 N thì con thuyền đó có thể đi được trong gió với tốc độ gió tối đa là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi tốc độ của gió và v (m/s).

Do F của gió khi thổi theo phương vuông góc với bề mặt cánh buồm của một con thuyền tỉ lệ thuận với bình phương tốc độ của gió, hệ số tỉ lệ là 30 nên ta có $F = 30v^2$ (N).

a) Khi $v = 10$ m/s thì ta có: $F = 30 \cdot 10^2 = 3000$ (N).

b) Nếu $F \leq 12000$ N thì $30v^2 \leq 12000$. Suy ra $v^2 \leq 400$, do đó $0 < v \leq \sqrt{400} = 20$ (m/s).

3.31. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{(-x-1)^3}$;

b) $\sqrt[3]{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}$.

Lời giải

a) $\sqrt[3]{(-x-1)^3} = -x-1$.

b) $\sqrt[3]{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1} = \sqrt[3]{(2x-1)^3} = 2x-1$

C. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a). $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5}$;

b). $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5}$;

c). $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$;

d). $0,1\sqrt{200} + 2\sqrt{0,08} + 0,4\sqrt{50}$.

Giải:

a) $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5} = \sqrt{\frac{25}{5}} + \sqrt{\frac{20}{4}} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$;

b) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5} = \sqrt{\frac{2}{4}} + \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

c) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72} = \sqrt{4.5} - \sqrt{9.5} + 3\sqrt{9.2} + \sqrt{36.2}$
 $= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 15\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

d) $0,1\sqrt{200} + 2\sqrt{0,08} + 0,4\sqrt{50} = 0,1\sqrt{100.2} + 2\sqrt{0,04.2} + 0,4\sqrt{25.2}$
 $= \sqrt{2} + 0,4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3,4\sqrt{2}$.

Bài 2. Rút gọn biểu thức sau:

a). $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$;

b). $\sqrt{150} + \sqrt{1,6}\sqrt{60} + 4,5\sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{6}$;

c). $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$;

d). $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$

Giải:

a) $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{16.3} - 2\sqrt{25.3} - \frac{\sqrt{11}\sqrt{3}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{\frac{4}{3}}$
 $= 2\sqrt{3} - 10\sqrt{3} - \sqrt{3} + 10\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{17}{3}\sqrt{3}$.

$$\text{b) } \sqrt{150} + \sqrt{1,6}\sqrt{60} + 4,5\sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{6} = \sqrt{25 \cdot 6} + \sqrt{16 \cdot 6} + 4,5\sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{6}$$

$$= 5\sqrt{6} + 4\sqrt{6} + 4,5\sqrt{\frac{24}{9}} - \sqrt{6} = 8\sqrt{6} + 1,5 \cdot 2\sqrt{6} = 8\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 11\sqrt{6}.$$

$$\text{c) } (\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84} = \sqrt{4 \cdot 7}\sqrt{7} - 2\sqrt{21} + 7 + \sqrt{4 \cdot 21} = 14 - 2\sqrt{21} + 7 + 2\sqrt{21} = 21.$$

$$\text{d) } (\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120} = 6 + 2\sqrt{30} + 5 - \sqrt{4 \cdot 30} = 6 + 2\sqrt{30} + 5 - 2\sqrt{30} = 11.$$

Bài 3. Rút gọn biểu thức sau:

$$\text{a) } \sqrt{11+6\sqrt{2}};$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{5}-3\sqrt{2}}};$$

$$\text{c) } \frac{13\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24-4\sqrt{3}};$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}};$$

$$\text{e) } \sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}} \text{ (với } x \geq 0 \text{)}.$$

$$\text{g) } \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}};$$

$$\text{f) } \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}};$$

$$\text{h) } \frac{\sqrt{8-\sqrt{15}}}{\sqrt{30}-\sqrt{2}}.$$

Giải:

$$\text{a) } \sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{9+2 \cdot 3\sqrt{2}+2} = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} = 3+\sqrt{2}.$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{5}-3\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}{3^2}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{c) } \frac{13\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24-4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(13-4\sqrt{3})}{4\sqrt{3}(2\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{2}(12-2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1+1)}{4\sqrt{3}(2\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{3}-1)^2}{4\sqrt{3}(2\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{6}}.$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7})}{2\sqrt{3}+2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7})}{2(\sqrt{3}+\sqrt{7})} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$e) \sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)^2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{x}+1)^2}} = \frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Với } 0 \leq x < 1 \text{ thì } \frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$$

$$\text{Với } x = 1 \text{ thì } \frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1} = \frac{0}{\sqrt{x}+1} = 0.$$

$$\text{Với } x > 1 \text{ thì } \frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}.$$

$$f) \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)+(2\sqrt{2}+\sqrt{6}+2)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)+\sqrt{2}(2+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2} = 1+\sqrt{2}.$$

$$g) \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

$$h) \frac{\sqrt{8-\sqrt{15}}}{\sqrt{30}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(16-2\sqrt{15})}}{\sqrt{2}(\sqrt{15}-1)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(15-2\sqrt{15}+1)}}{\sqrt{2}(\sqrt{15}-1)} = \frac{\sqrt{(\sqrt{15}-1)^2}}{2(\sqrt{15}-1)} = \frac{\sqrt{15}-1}{2(\sqrt{15}-1)} = \frac{1}{2}.$$

Bài 4. Tính

$$a) \sqrt[3]{162} \cdot \sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}};$$

$$b) \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{22\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{53\frac{1}{3}}$$

Lời giải

$$a) -6;$$

$$b) -\frac{1}{4}.$$

Bài 5. Tính

$$a) (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})^3;$$

$$b) (\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}).$$

Lời giải

a) $5 + 3\sqrt[3]{18} + 3\sqrt[3]{12}$;

b) 2 .

Bài 6. Rút gọn biểu thức

a) $\sqrt[3]{3} \cdot (5\sqrt[3]{18} - 3\sqrt[3]{144}) + \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{50}$;

b) $(12\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}) \left(5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right)$

Lời giải

a) $2\sqrt[3]{2}$;

b) 84

Bài 7. Tìm x , biết :

a) $2\sqrt[3]{27x} + \frac{1}{7}\sqrt[3]{-343x} + \sqrt[3]{-729x} = 2$; b) $\sqrt[3]{x^3 - 9x^2} = x - 3$.

Lời giải

a) $-\frac{1}{8}$;

b) 1 .

Bài 8. Tính $M = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$.

Lời giải

$$M^3 = (5\sqrt{2} + 7) - (5\sqrt{2} - 7) - 3\sqrt[3]{(5\sqrt{2} + 7)(5\sqrt{2} - 7)} \cdot M$$

$$\Leftrightarrow M^3 = 14 - 3M \Leftrightarrow M^3 + 3M - 14 = 0 \Leftrightarrow (M - 2)(M^2 + 2M + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow M - 2 = 0 \quad (\text{vì } M^2 + 2M + 7 = (M + 1)^2 + 6 > 0) \Leftrightarrow M = 2.$$

Bài 9. Cho biểu thức $V = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$

1. Rút gọn biểu thức V

2. Tìm giá trị của x để $V = \frac{1}{3}$

Lời giải

1. Rút gọn biểu thức V

$$\begin{aligned} V &= \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} + \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \right) \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x-2}} \end{aligned}$$

2. Tìm giá trị của x để $V = \frac{1}{3}$

$$V = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow x = 64$$

Bài 10. Cho $A = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3\sqrt{x}+5}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{4\sqrt{x}} - 1 \right)$

1. Rút gọn biểu thức A

2. Đặt $B = (x - \sqrt{x} + 1)A$. Chứng minh $B > 1$ với $x > 0, x \neq 1$

Lời giải

1. Rút gọn biểu thức A

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3\sqrt{x}+5}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{4\sqrt{x}} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{3\sqrt{x}+5}{(x-1)(\sqrt{x}-1)} \right) \left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2 - 4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} \right) \\ &= \left(\frac{4\sqrt{x}+4}{(x-1)(\sqrt{x}-1)} \right) \left(\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{4\sqrt{x}} \right) \\ &= \left(\frac{4(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right) \left(\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{4\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2. Đặt $B = (x - \sqrt{x} + 1)A$. Chứng minh $B > 1$ với $x > 0, x \neq 1$

$$B = (x - \sqrt{x} + 1)A = (x - \sqrt{x} + 1) \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Vì } x \neq 1 \text{ nên } (\sqrt{x} - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x + 1 > 2\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2 \text{ (do } x > 0)$$

$$\text{Suy ra } B = \sqrt{x} - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1 \text{ với } x > 0, x \neq 1$$

Bài 11. Cho biểu thức $P = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 3}{3 + \sqrt{x}}$

1. Rút gọn biểu thức P .

2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P là một số nguyên.

Lời giải

1. Rút gọn biểu thức P .

$$\begin{aligned} P &= \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 3}{3 + \sqrt{x}} \\ &= \frac{15\sqrt{x} - 11}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{(3\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} + \frac{(2\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{15\sqrt{x} - 11}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{3x + 7\sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} + \frac{2x + \sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{-x + 9\sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= -\frac{(\sqrt{x} - 8)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{8 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} \end{aligned}$$

2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P là một số nguyên.

Ta có: $P = \frac{8-\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} = \frac{11}{\sqrt{x+3}} - 1$

Để $P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{11}{\sqrt{x+3}} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 11 : (\sqrt{x+3}) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 1 \\ \sqrt{x+3} = -1 \\ \sqrt{x+3} = 11 \\ \sqrt{x+3} = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 11 \Leftrightarrow x = 64$

Bài 12. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} + \frac{2-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{x+2-\sqrt{3x+6}} \right)$

1. Tìm điều kiện của x để biểu thức P xác định.
2. Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P .

Lời giải

1. Tìm điều kiện của x để biểu thức P xác định.

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+2} \neq \sqrt{x+1} \\ \sqrt{x+1} \neq \sqrt{3} \\ \sqrt{x+2} \neq \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

2. Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P .

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} + \frac{2-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{x+2-\sqrt{3x+6}} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x+1})^2} + \frac{(2-x)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{3})^2} \right) \left(\frac{-2\sqrt{x+2}+\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}-\sqrt{3})} \right) \\ &= \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1} - (\sqrt{x+1}+\sqrt{3}) \right) \left(\frac{-\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}-\sqrt{3})} \right) \\ &= (\sqrt{x+2}-\sqrt{3}) \left(\frac{-\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}-\sqrt{3})} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}} - 1$$

Mặt khác ta có: $x \geq -1 \Rightarrow \sqrt{x+2} \geq 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}} \leq \sqrt{3} \Rightarrow P \leq \sqrt{3} - 1$

Do đó $\max P = \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow x = -1$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A. TRẮC NGHIỆM

3.32. Căn bậc hai của 4 là

- A. 2. B. -2. C. 2 và -2. D. $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có căn bậc hai của 4 là 2 và -2.

3.33. Căn bậc hai số học của 49 là

- A. 7. B. -7. C. 7 và -7. D. $\sqrt{7}$ và $-\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn A

Căn bậc hai số học của 49 là 7.

3.34. Rút gọn biểu thức $\sqrt[3]{(4-\sqrt{17})^3}$ ta được

- A. $4+\sqrt{17}$. B. $4-\sqrt{17}$. C. $\sqrt{17}-4$. D. $-4-\sqrt{17}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sqrt[3]{(4-\sqrt{17})^3} = 4-\sqrt{17}$

3.35. Độ dài đường kính (mét) của hình tròn có diện tích 4m^2 sau khi làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai bằng

- A. 2,26. B. 2,50. C. 1,13. D. 1,12.

Lời giải

Chọn C

3.36. Một vật rơi tự do từ độ cao 396,9m. Biết quãng đường chuyển động S (mét) của vật phụ thuộc vào thời gian t (giây) bởi công thức $S = 4,9t^2$. Vật chạm đất sau

- A. 8 giây. B. 5 giây. C. 11 giây. D. 9 giây.

Lời giải

Chọn D

Quãng đường chuyển động chính là độ cao 396,9m nên ta có $396,9 = 4,9 \cdot t^2$ suy ra

$$t = \sqrt{396,9 : 4,9} = 9(s)$$

B. TỰ LUẬN

3.37. Không sử dụng MTCT, tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{4(2+\sqrt{3})^2} - \frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{4(2+\sqrt{3})^2} - \frac{1}{2-\sqrt{3}} = |\sqrt{3}-2| + 2|2+\sqrt{3}| - \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \\ &= 2-\sqrt{3}+4+2\sqrt{3} - \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 6+\sqrt{3}-2-\sqrt{3} = 4 \end{aligned}$$

3.38. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{4}{\sqrt{x}+2}$ ($x > 0, x \neq 4$).

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của A tại $x=14$.

Lời giải

$$\text{a) } A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{4}{\sqrt{x}+2} \quad (x > 0, x \neq 4)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{4(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x+2\sqrt{x}+4-4\sqrt{x}+8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x-2\sqrt{x}+12}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \end{aligned}$$

$$\text{b) Với } x=14(t/m) \text{ ta có } A = \frac{14-2\sqrt{14}+12}{(\sqrt{14}-2)(\sqrt{14}+2)} = \frac{26-2\sqrt{14}}{14-4} = \frac{13-\sqrt{14}}{5}.$$

$$\text{Vậy } x=14 \text{ thì } A = \frac{13-\sqrt{14}}{5}.$$

3.39. Biết rằng nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn được tính bởi công thức $Q = I^2 R t$, trong đó Q là nhiệt lượng tính bằng đơn vị Joule (J); R là điện trở tính bằng đơn vị Ohm (Ω), I là cường độ dòng điện tính bằng đơn vị Ampe (A), t là thời gian tính bằng giây (s). Dòng điện chạy qua một dây dẫn có $R = 10\Omega$ trong thời gian 5 giây.

a) Thay dấu "?" trong bảng sau bằng các giá trị thích hợp.

I (A)	1	1,5	2
Q (J)	?	?	?

b) Cường độ dòng điện là bao nhiêu Ampe để nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn đạt 800J ?

Lời giải

a)

I(A)	1	1,5	2
Q(J)	50	112,5	200

b) Ta có $I = \sqrt{Q:Rt}$ nên $I = \sqrt{800:(10.5)} = 4$ (Ampe)

Vậy cường độ dòng điện là 4 Ampe thì nhiệt lượng tỏa ra trên dây dẫn đạt 800Q.

C. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau :

$$a) \sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}}; \quad b) \sqrt{45,8^2 - 44,2^2} - \sqrt{6[(\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2]}.$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{49}{8} : \frac{25}{8}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} - \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{9}{10} - \frac{7}{5} = -\frac{1}{2}.$$

$$b) \sqrt{45,8^2 - 44,2^2} - \sqrt{6[(\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2]} = \sqrt{1,6.90} - \sqrt{6.6} = 4.3 - 6 = 6.$$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau :

$$a) \frac{1}{34} \sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}} + 4 \sqrt{\frac{32}{176^2 - 112^2}}; \quad b) \frac{5(\sqrt{6}-1)}{\sqrt{6}+1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Lời giải

$$a) \frac{1}{34} \sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}} + 4 \sqrt{\frac{32}{176^2 - 112^2}} = \frac{1}{34} \sqrt{\frac{41.289}{164}} + 4 \sqrt{\frac{32}{64.288}} = \frac{1}{34} \sqrt{\frac{289}{4}} + 4 \sqrt{\frac{1}{576}} \\ = \frac{1}{34} \cdot \frac{17}{2} + 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$b) \frac{5(\sqrt{6}-1)}{\sqrt{6}+1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt{6}-1)^2}{6-1} + \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{2-3} = 7 - 2\sqrt{6} - 5 + 2\sqrt{6} = 2.$$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức :

$$a) \frac{3+3\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{6+2\sqrt{5}}; \quad b) \frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}-y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}.$$

Lời giải

a) Ta có $\frac{3+3\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{6+2\sqrt{5}} = \frac{3(1+\sqrt{5})-\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})^2} = \frac{(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{5})^2} = \frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}$.

b) $\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}-y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}} = \frac{x(\sqrt{x}+\sqrt{y})-y(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})+y(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-y)}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}+y)}$

$$= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}+y)} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+y}. \text{ Điều kiện } x \geq 0; y \geq 0; x \neq y.$$

Bài 4. Rút gọn biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$.

Lời giải

Điều kiện : $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$. Khi đó ta có

$$P = \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-9-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

Bài 5. Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x}$.

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P với $x = \frac{7+4\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

a) Điều kiện : $x \geq 0; x \neq 9$. Khi đó ta có

$$P = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)-3+11\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{2x-6\sqrt{x}+x+4\sqrt{x}+3-3+11\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{3x+9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$$

b) Ta có $x = \frac{7+4\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $P = \frac{3 \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2} - 3} = \frac{6+3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}-4}$
 $= \frac{6+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-4} = \frac{(6+3\sqrt{3})(\sqrt{3}+4)}{(\sqrt{3}-4)(\sqrt{3}+4)} = \frac{6\sqrt{3}+24+9+12\sqrt{3}}{3-16} = \frac{-(33+18\sqrt{3})}{13}$.

Bài 6. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{5}{\sqrt{x}-3} - \frac{6}{9-x}\right) : \frac{6}{\sqrt{x}+2}$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Điều kiện : $x \geq 0; x \neq 9$. Khi đó ta có

$$P = \frac{(\sqrt{x}-3)+5(\sqrt{x}+3)+6}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{6} = \frac{\sqrt{x}-3+5\sqrt{x}+15+6}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{6} = \frac{6\sqrt{x}+18}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{6}$$

$$= \frac{6(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{6} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$$

Ta có $P = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+5}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-3}$.

P có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}-3}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \in U(5) \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \in \{\pm 1; \pm 5\}$

Ta có bảng sau :

$\sqrt{x}-3$	1	-1	5	-5
\sqrt{x}	4	2	8	-2
x	16	4	64	

Vậy khi $x \in \{4, 16, 64\}$ thì P có giá trị nguyên.

Bài 7. Cho biểu thức $P = \frac{2}{\sqrt{xy}} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 - \frac{x+y}{x-2\sqrt{xy}+y}$.

Chứng minh rằng với mọi giá trị của x và y làm cho biểu thức P có nghĩa thì giá trị của P không phụ thuộc vào x và y .

Lời giải

Điều kiện : $x, y > 0; x \neq y$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{\sqrt{xy}} : \left(\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} \right)^2 - \frac{x+y}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} = \frac{2}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{(\sqrt{xy})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} - \frac{x+y}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} \\ &= \frac{2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} - \frac{x+y}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} = \frac{-(x-2\sqrt{xy}+y)}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} = -1 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của của P không phụ thuộc vào x và y .

Bài 8. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+3}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$.

a) Rút gọn P .

b) Chứng minh rằng $P > \frac{1}{3}$.

Lời giải

a) Điều kiện : $x > 0; x \neq 9$. Khi đó ta có

$$P = \frac{x+3+\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x+3})} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x+3})} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+3}}$$

b) Xét hiệu $P - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{x}+3-\sqrt{x}-3}{3(\sqrt{x+3})} = \frac{2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x+3})} > 0$ (vì $x > 0$).

Do đó $P > \frac{1}{3}$.

Bài 9. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{x+2}{x\sqrt{x+1}} \right) : \frac{2}{\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn P .

b) Chứng minh rằng biểu thức P luôn luôn âm với mọi giá trị của x làm P xác định.

Lời giải

a) Điều kiện : $x > 0$. Khi đó ta có

$$P = \frac{(x - \sqrt{x} + 1) - (x + 2)}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} : \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{-(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{-\sqrt{x}}{2(x - \sqrt{x} + 1)}$$

Ta có $x > 0$ nên $-\sqrt{x} < 0$, $x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$. Do đó $P < 0$ với mọi $x > 0$.

Bài 10. Cho biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 1}$.

a) Rút gọn P .

b) Chứng minh rằng biểu thức P luôn luôn không âm với mọi giá trị của x làm P xác định.

Lời giải

a) Điều kiện : $x \geq 1$. Khi đó ta có

$$P = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x}}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} - \sqrt{x})} + \frac{x(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} = \frac{2\sqrt{x-1}}{-1} + x = x - 2\sqrt{x-1}$$

Ta có $P = x - 2\sqrt{x-1} = (x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} - 1)^2 \geq 0$

Vậy P luôn luôn không âm với mọi $x \geq 1$.

Bài 11. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right)$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm giá trị lớn nhất của P .

Lời giải

a) Điều kiện : $x > 0$. Khi đó ta có

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} : \frac{\sqrt{x} + 1 + x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$$

Ta có : $P = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}$.

Xét biểu thức ở mẫu $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 = 3$.

Ta có $P = \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1} \leq \frac{1}{3}$.

Do đó $\max P = \frac{1}{3}$, đạt được khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$.

Bài 12. Giải phương trình

a) $\sqrt{25(3x-1)^2} = 10$; b) $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-2}}$.

Lời giải

a) Ta có $\sqrt{25(3x-1)^2} = 10 \Leftrightarrow 5|3x-1| = 10 \Leftrightarrow |3x-1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=2 \\ 3x-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$

b) $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-2}} (*)$

Điều kiện : $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$. Khi đó ta có

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3})(\sqrt{x-2}) = (\sqrt{x+5})(\sqrt{x-3}) (*) \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 6 = x + 2\sqrt{x} - 15$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x} = -9 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 9 \Leftrightarrow x = 81 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Bài 13. Giải phương trình

a) $5x - \sqrt{(2x-1)^2} = 2$; b) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = x$.

Lời giải

a) $5x - \sqrt{(2x-1)^2} = 2 \Leftrightarrow 5x - |2x-1| = 2$

Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow 5x - (2x-1) = 2 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (loại).

Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow 5x + (2x-1) = 2 \Leftrightarrow 7x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}$ (thỏa mãn)

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = x$. ĐK: $x \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} = x \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = x$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1| = x \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1-x=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}(1-\sqrt{x-1})=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=0 \\ \sqrt{x-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$