

CHƯƠNG VI. HÀM SỐ - PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

BÀI 18. HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$.

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ xác định với mọi giá trị của x thuộc R .

2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

- Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$.

- Lập bảng ghi một số cặp giá trị tương ứng của x và y .

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn các cặp $(x; y)$ trong bảng giá trị trên và nối chúng lại để được một đường cong là đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$.

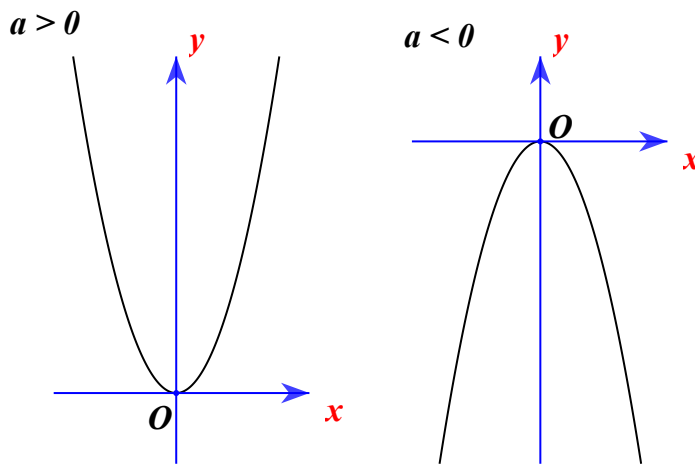
- Nhận biết tính đối xứng của đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$.

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ là một đường cong, gọi là đường parabol, có các tính chất sau:

- Có đỉnh là gốc tọa độ.

- Có trục đối xứng là Oy .

- Nằm phía bên trên trục hoành nếu $a > 0$ và nằm phía dưới trục hoành nếu $a < 0$



Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

Bài 1. Hàm số nào sau đây có dạng $ax^2 (a \neq 0)$? Đối với những hàm số đó, xác định hệ số a của ax^2 .

- a) $y = x^2$. b) $y = -3x^2$. c) $y = \frac{4x^2}{9}$. d) $y = \frac{2}{x^2}$

Lời giải

Các hàm số có dạng $ax^2 (a \neq 0)$ là:

a) $y = x^2$. có $a = 1$

b) $y = -3x^2$. có $a = -3$

c) $y = \frac{4x^2}{9}$, có $a = \frac{4}{9}$

Bài toán tương tự.

Hàm số nào sau đây có dạng ax^2 ($a \neq 0$) ? Đối với những hàm số đó, xác định hệ số a của ax^2 .

a) $y = -x^2$.

b) $y = \frac{x^2}{2}$.

c) $y = \frac{1}{4x^2}$.

Bài 2. Cho hàm số $y = 4x^2$. Tính giá trị của y khi :

a) $x = 0$

b) $x = 2$

c) $x = -2$.

Lời giải

a) Với $x = 0$ thì $y = 4.0^2 = 0$.

b) Với $x = 2$ thì $y = 4.2^2 = 16$.

c) Với $x = -2$ thì $y = 4.(-2)^2 = 16$.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$). Xác định a , biết rằng $f(-2) = 4$.

Lời giải

Thay $x = -2; y = 4$ vào phương trình $y = ax^2$, ta được

$$4 = a.(-2)^2$$

$$4a = 4$$

$$a = 1$$

Vậy hàm số có dạng $y = x^2$.

Bài toán tương tự. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$.

a) Tìm a biết $f(-3) = -9$

b) Với a vừa tìm được ở câu trên. Tính $f(0); f(3)$.

c) Với a vừa tìm được ở câu a). Tìm x_0 biết $f(x_0) = -27$.

Lời giải

a) Thay $x = -3; y = -9$ vào phương trình $y = ax^2$, ta được

$$-9 = a.(-3)^2$$

$$9a = -9$$

$$a = -1$$

Vậy hàm số có dạng $y = -x^2$.

b) $f(x) = -x^2 \Rightarrow f(0) = 0; f(3) = -(3)^2 = -9$

c) Ta có $y = f(x) = -x^2$ nên $f(x_0) = -x_0^2$

Mà $f(x_0) = -27$, nên $-x_0^2 = -27$

$$x_0^2 = 27$$

$$x_0 = \pm 3\sqrt{3}$$

Nhận xét : Bạn thường quên giá trị $x_0 = -3\sqrt{3}$.

Vì $x_0^2 = 27$ nên $\sqrt{x_0^2} = \sqrt{27}$

$$|x_0| = 3\sqrt{3}$$

$$x_0 = \pm 3\sqrt{3}.$$

Bài 4. Lập bảng giá trị của hàm số $y = x^2$ và $y = -x^2$, với các giá trị của x lần lượt bằng $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$.

Lời giải

Bảng giá trị của hàm số $y = x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Bảng giá trị của hàm số $y = -x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

Bài 5. Lực $F(N)$ của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỷ lệ thuận với bình phương tốc độ $v(m/s)$ của gió theo công thức : $F = av^2$, ở đó a là một hằng số. Biết rằng, khi tốc độ gió là $2m/s$ thì lực tác động lên cánh buồm của con thuyền bằng $120N$.

a) Tính hằng số a .

b) Khi tốc độ của gió là $v = 10m/s$ thì lực F của gió tác động lên cánh buồm là bao nhiêu?

c) Cánh buồm của thuyền chỉ chịu được lực tác động tối đa là $12000N$. Hỏi con thuyền có thể ra khơi khi tốc độ của gió là $90km/h$ hay không? Vì sao?

Lời giải

a) Thay $v = 2, F = 120$ vào công thức $F = av^2$, ta được $120 = a.2^2$

$$4a = 120$$

$$a = 30$$

b) Vì $a = 30$ nên $F = 30.v^2$

Với $v = 10$ ta có $F = 30.10^2 = 3000(N)$

c) Đổi $90km/h = 25m/s$

Với $v = 25$, ta có $F = 30.25^2 = 18750(N)$

Ta thấy $18750 > 12000$ nên con thuyền có thể ra khơi với tốc độ gió là $90km/h$.

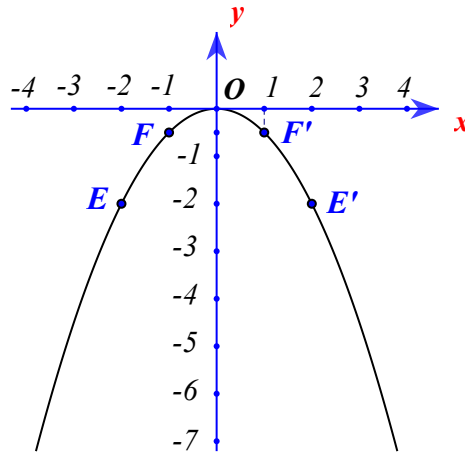
II. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

Bài 6. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$

Lời giải

Bảng giá trị của hàm số:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2



Trên mặt phẳng tọa độ Oxy các điểm $E(-2; -2); F\left(-1; -\frac{1}{2}\right); O(0; 0); F'\left(1; -\frac{1}{2}\right); E'(2; -2)$

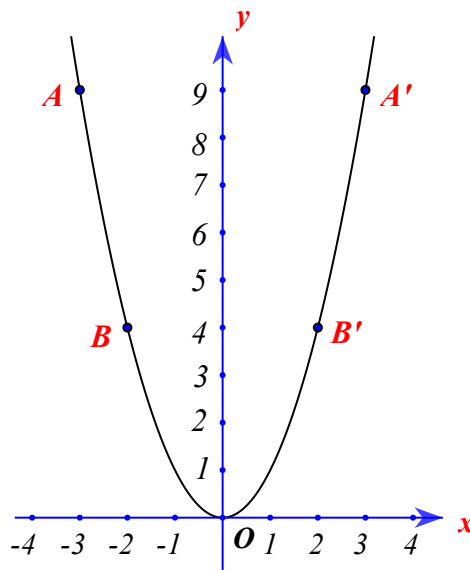
Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ là một parabol đỉnh O , đi qua các điểm trên và có dạng như hình vẽ trên.

Bài toán tương tự. Vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2$.

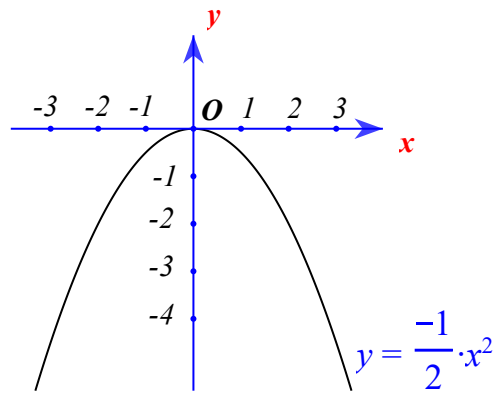
Lời giải

Bảng giá trị của hàm số $y = x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9



Bài 7. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là parabol như hình vẽ bên.



- a) Các điểm $M(-2;-2); N(2;-2)$ có thuộc parabol đó hay không ?
 b) Nêu nhận xét về vị trí cặp điểm M và N đối với trục Ox

Lời giải

a) Do $-2 = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^2$ và $-2 = -\frac{1}{2} \cdot 2^2$ nên các điểm $M(-2;-2); N(2;-2)$ thuộc parabol đó.

b) Ta thấy điểm M và N đối xứng nhau qua trục Ox .

Bài 8.

Cho hai hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$ và $y = -x^2$

- a) Vẽ đồ thị của hai hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
 b) Tìm điểm A thuộc đồ thị $y = \frac{3}{2}x^2$, điểm B thuộc đồ thị $y = -x^2$. Biết rằng A và B đều có hoành độ $x = -\frac{3}{2}$

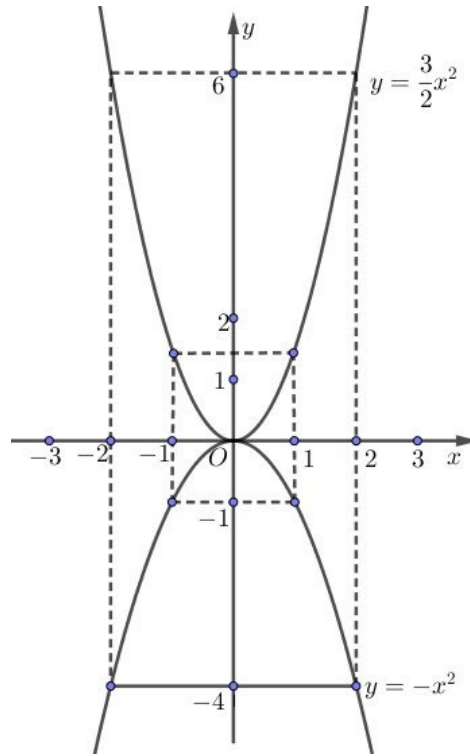
Lời giải

a) Lập bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{3}{2}x^2$	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị của hai hàm số như hình vẽ.



b) Với $x = -\frac{3}{2}$, thay vào công thức $y = \frac{3}{2}x^2$, ta có : $y = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{27}{8}$. Vậy $A\left(\frac{-3}{2}; \frac{27}{8}\right)$.

Với $x = -\frac{3}{2}$, thay vào công thức $y = -x^2$, ta có : $y = -\left(\frac{-3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}$. Vậy $B\left(\frac{-3}{2}; -\frac{9}{4}\right)$.

Bài 9. Một cổng chào được thiết kế theo hình parabol là một phần của đồ thị hàm số $y = -\frac{x^2}{2}$.

Khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB = 8\text{ m}$.

a) Tính hoành độ của hai điểm A, B

b) Tính chiều cao của cổng.

Lời giải

a) Ta có $\frac{AB}{2} = 4$. Vậy hoành độ của A và B thứ tự là -4 và 4

b) Thay $x = 4$ vào công thức $y = -\frac{x^2}{2}$, ta có : $y = -\frac{4^2}{2} \Rightarrow y = -8$

Vậy chiều cao của cổng là $|-8| = 8(\text{m})$.

Bài 10. a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x$ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Hướng dẫn giải

a) Vẽ parabol $y = x^2$ bằng các lập bảng giá trị (ta phải tìm ít nhất 5 giá trị).

b) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) .

Lời giải

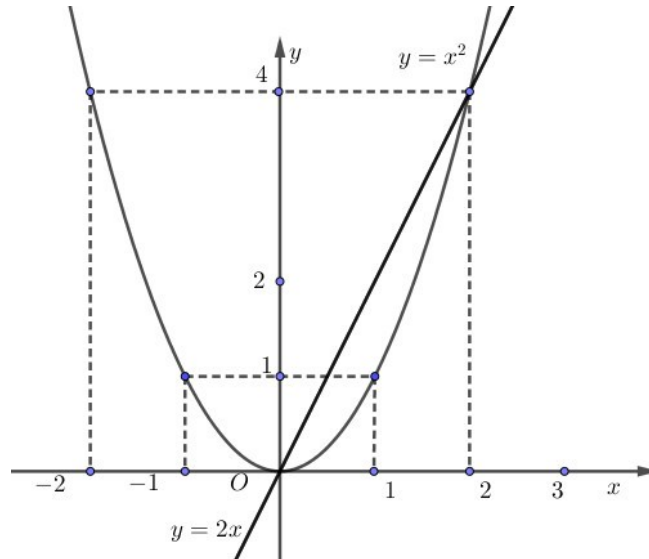
a) Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$ là một parabol có đỉnh O và nhận trục tung làm trục đối xứng.

x	0	1
$y = 2x$	0	2

Đồ thị (d) của hàm số $y = 2x$ là một đường thẳng qua hai điểm $(0;0)$; $(1;2)$ (xem hình vẽ).



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d), ta có:

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 0$. Vậy O là một giao điểm của (P) và (d).

Với $x = 2 \Rightarrow y = 4$. Vậy $A(2;4)$ là giao điểm thứ hai của (P) và (d).

Bài 11. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d): $y = \frac{1}{2}x + 2$.

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

c) Tìm phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng 2.

Hướng dẫn giải

a) Lập bảng giá trị.

b) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

c) (d') // (d) nên phương trình (d') có dạng: $y = \frac{1}{2}x + b$ ($b \neq 2$)

Lời giải

a) Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
-----	----	----	---	---	---

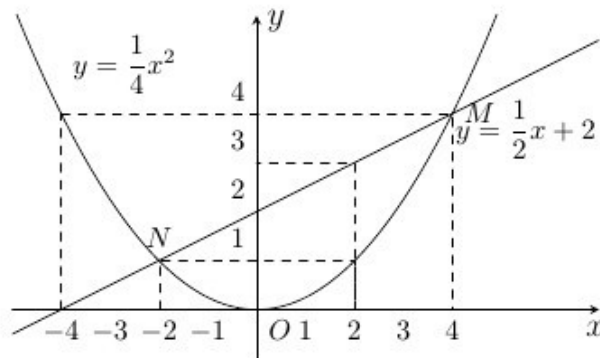
$y = \frac{1}{4}x^2$	4	1	0	1	4
----------------------	---	---	---	---	---

Đồ thị (P) là một parabol qua O và nhận trục tung làm trục đối xứng.

Bảng giá trị:

x	0	2
$y = \frac{1}{2}x + 2$	2	3

Đường thẳng (d) qua hai điểm (0;2) và (2;3) (xem hình vẽ).



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d), ta có:

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow x^2 = 2x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) - 9 = 0$$

$$(x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{9}$$

$$|x-1| = 3$$

$$x-1 = 3 \text{ hoặc } x-1 = -3$$

$$x = 4 \text{ hoặc } x = -2$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là M(4;4) và N(-2;1).

c) Đường thẳng (d') song song với (d) nên có phương trình $y = \frac{1}{2}x + b (b \neq 2)$.

$$\text{Điểm } A(2; y_0) \in (P) \Rightarrow y_0 = \frac{1}{4} \cdot (2)^2 \Rightarrow y_0 = 1.$$

$$\text{Vậy } A(2;1). A \in (d') \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b \Rightarrow b = 0.$$

$$\text{Phương trình } (d'): y = \frac{1}{2}x$$

Bài 12. Cho hàm số $y = (m+1)x^2$ và $y = 2x - 1$.

a) Tìm m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại điểm A có hoành độ bằng 2.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = (m+1)x^2$ với m vừa tìm được ở câu a).

Hướng dẫn giải

- a) Thế $x = 2$ (hoành độ của điểm A) vào phương trình $y = 2x - 1$. Từ đó tìm được m nhờ phương trình $y = (m + 1)x^2$.
- b) Lập bảng giá trị.

Lời giải

a) A thuộc đường thẳng $y = 2x - 1$ và hoành độ bằng 2 nên tung độ của A : $y = 2 \cdot 2 - 1 \Rightarrow y = 3$
 Vậy $A(2; 3)$.

Lại có A là giao điểm của parabol $y = (m + 1)x^2$ và $y = 2x - 1$ nên ta có $3 = (m + 1) \cdot (2)^2$

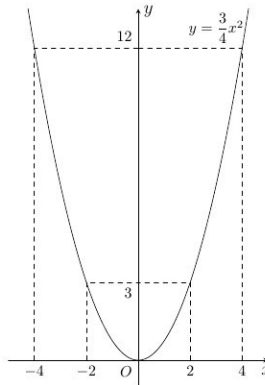
$$\Rightarrow 4m + 4 = 3 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}. \text{ Vậy } y = \frac{3}{4}x^2.$$

b) Vẽ parabol (P) : $y = \frac{3}{4}x^2$.

Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{3}{4}x^2$	12	3	0	3	12

Parabol (P) có đỉnh O và nhận trục tung làm trục đối xứng.



Bài 13. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

- a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số đã cho.
- b) Trên (P) lấy hai điểm A, B có hoành độ lần lượt -2 và 1 .

Viết phương trình đường thẳng AB .

Hướng dẫn giải

b) $A(-2; y_0)$; $A \in (P) \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}(-2)^2 \Rightarrow y_0 = -2$.

Tương tự tính B . Từ đó viết phương trình đường thẳng AB (có dạng: $y = ax + b$)

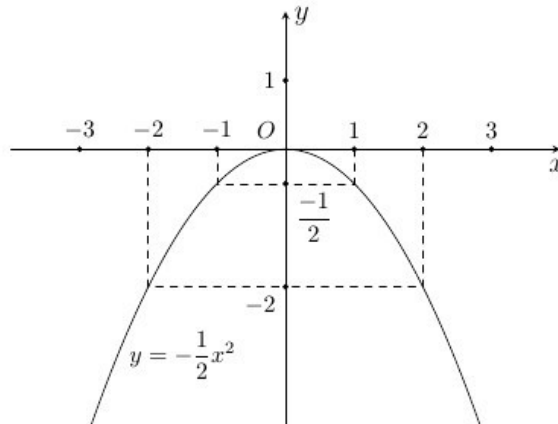
Lời giải

a) Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
-----	----	----	---	---	---

$y = \frac{1}{2}x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2
----------------------	----	----------------	---	----------------	----

Đồ thị (P) là một parabol có đỉnh O và nhận trục tung làm trục đối xứng.



b) Đặt $A(-2; y_0) \in (P)$

$$\Rightarrow y_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)(-2)^2 \Rightarrow y_0 = -2$$

Vậy $A(-2; -2)$.

Đặt $B(1; y_1) \in (P) \Rightarrow y_1 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1^2 \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}$. Vậy $B\left(1; -\frac{1}{2}\right)$

Đường thẳng AB có phương trình $y = ax + b$ (d).

$$A \in (d) \Rightarrow -2 = -2a + b; B \in (d) \Rightarrow -\frac{1}{2} = a + b$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -2a + b = -2 \\ a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 2 \\ a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB có dạng: $y = \frac{1}{2}x - 1$.

∞ HẾT ∞

BÀI 19. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Định nghĩa phương trình bậc hai một ẩn.

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là hệ số và $a \neq 0$.

2. Cách giải phương trình bậc hai một ẩn có dạng đặc biệt

$$ax^2 + bx = 0; ax^2 + c = 0.$$

Dùng phương pháp đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức để đưa về trái về một bình phương.

- Lưu ý:**
- Nếu $A \cdot B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.
 - Nếu $A^2 = B (B \geq 0)$ thì $A = \sqrt{B}$ hoặc $A = -\sqrt{B}$.

3. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$.

Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý:

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, với $b = 2b'$ và $\Delta' = b'^2 - ac$.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.
- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.
- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Các công thức ở trên gọi là công thức nghiệm thu gọn.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tìm các hệ số a, b, c của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Bài 1. Tìm các hệ số a, b , của phương trình:

a) $x^2 - 8x + 2 = 0$

b) $5x^2 + 2x = 4 - x$

c) $x^2 + \sqrt{2}x = 0$

d) $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$

e) $x^2 + 4x = 4 - m^2$

f) $x^2 + m(x - 1) = 1 - m$

Hướng dẫn: Đưa mỗi phương trình về dạng $ax^2 + bx + c = 0$.

Lời giải

- a) Ta có: $a = 1; b = -8; c = 2$.

Chú ý: $b = -8$ chứ không phải $b = 8$.

b) Ta có: $5x^2 + 2x = 4 - x \Leftrightarrow 5x^2 + 3x - 4 = 0$.

Vậy $a = 5; b = 3; c = -4$.

Chú ý: Biến đổi phương trình để cho vế phải bằng 0.

c) Ta có: $a = 1; b = \sqrt{2}; c = 0$.

d) Ta có: $a = -\frac{1}{2}, b = 2; c = 2$.

e) Ta có: $x^2 + 4x = 4 - m^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + m^2 - 4 = 0$

Vậy $a = 1; b = 4; c = m^2 - 4$.

Chú ý: $c = m^2 - 4$, bạn đừng tưởng rằng $c = -4$.

f) Ta có: $x^2 + m(x - 1) = 1 - m \Leftrightarrow x^2 + mx - 1 = 0$

Vậy $a = 1, b = m; c = -1$.

Bài 2. Tìm các hệ số a, b, c của phương trình.

a) $2x^2 - (1 - 2a)x + a - 1 = 0$

b) $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$

c) $3x^2 + 2(m - 3)x + 2m + 1 = 0$

d) $-x^2 + (m - 2)x + 2 = 0$

Lời giải

Đặt phương trình $Ax^2 + Bx + C = 0$

a) Ta có: $A = 2; B = -(1 - 2a); C = a - 1$.

b) Ta có: $A = m; B = -2(m - 1); C = m - 3$.

c) Ta có: $A = 3; B = 2(m - 3); C = 2m + 1$.

d) Ta có: $A = -1; B = m - 2; C = 2$.

Chú ý: Ở câu a , người ta đã dùng chữ a để chỉ tham số; x là ẩn, nên ta phải dùng chữ hoa: $Ax^2 + Bx + C = 0$.

Bài 3. Tìm các hệ số a, b, c của phương trình:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12}$ (1)

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = 2$ (2)

c) $(x+1)\left(\frac{1}{x} - 2\right) = 5$ (3)

Hướng dẫn: Quy đồng và rút gọn phương trình về dạng $ax^2 + bx + c = 0$.

Lời giải

a) Điều kiện $x \neq 0; -2$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x + 2 + x = \frac{5}{12}x(x + 2)$

$\Leftrightarrow 24x + 24 = 5x^2 + 10x \Leftrightarrow 5x^2 - 14x - 24 = 0$

Vậy $a = 5; b = -14; c = -24$.

b) Điều kiện: $x \neq 0; 1$.

Ta có: (2) $\Leftrightarrow x - 1 + x = 2x(x - 1)$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 2x^2 - 2x \Leftrightarrow -2x^2 + 4x - 1 = 0$$

Vậy $a = -2; b = 4; c = -1$.

Chú ý: Ta có thể nhân hai vế phương trình với -1 (đổi dấu hai vế), ta được:

$$2x^2 - 4x + 1 = 0. \text{ Lúc này } a = 2; b = -4; c = 1.$$

c) Ta có: (3) $\Leftrightarrow (x + 1)(1 - 2x) = 5x; x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x - 2x^2 + 1 - 2x - 5x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 1 = 0$$

Vậy $a = 2; b = 6; c = -1$.

II. Giải phương trình bậc hai khuyết

Bài 4. Giải phương trình sau:

a) $2x^2 - \sqrt{2}x = 0$ (1)

b) $x^2 - 4 = 0$ (2)

c) $3x^2 = 27$ (3)

d) $x^2 + 1 = 0$ (4)

Hướng dẫn: Rút gọn về dạng $f(x) = 0$. Phân tích $f(x)$ thành nhân tử.

Lời giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow x(2x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

b) Ta có: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Chú ý: Có thể viết gọn: $x = \pm 2$, nhưng ta phải hiểu $x = 2$ hoặc $x = -2$; không phải $x = 2$ và $x = -2$. (Ở trên, bạn chú ý đến dấu ngoặc vuông)

Cách khác: Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2 = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \Leftrightarrow |x| = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2$$

c) Ta có: (3) $\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{9}$

$$\Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Cách khác: (3) $\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

d) Vì $x^2 > 0, \forall x \Rightarrow x^2 + 1 > 0$. Vậy phương trình (4) vô nghiệm.

Bài 5. Cho phương trình $x^2 + mx - 35 = 0$.

- a) Tìm m biết rằng phương trình có một nghiệm bằng 7.
 b) Giải phương trình với m vừa tìm được.

Hướng dẫn: $x = 7$ là nghiệm của phương trình $x^2 + mx - 35 = 0$ nên thay $x = 7$ vào phương trình, ta được: $7^2 + m \cdot 7 - 35 = 0$. Từ đó tìm được m .

Lời giải

a) Vì $x = 7$ là một nghiệm của phương trình đã cho, nên thay $x = 7$ vào phương trình, ta được $7^2 + m \cdot 7 - 35 = 0 \Leftrightarrow 49 + 7m - 35 = 0$
 $\Leftrightarrow 7m = -14 \Leftrightarrow m = -2$

b) Theo kết quả trên, với $m = -2$, phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 35 &= 0 \quad (*) \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 36 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 6^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} &= \sqrt{6^2} \Leftrightarrow |x-1| = 6 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 6 \\ x-1 = -6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

Cách khác: Ta có: $(*) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 36 = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x-1)^2 - 6^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1-6)(x-1+6) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-7)(x+5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = 0 \\ x+5-0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

Ta cũng có thể biến đổi như sau: $(*) \Leftrightarrow x^2 + 5x - 7x - 35 = 0 \Leftrightarrow x(x+5) - 7(x+5) = 0$
 $\Leftrightarrow (x+5)(x-7) = 0$ (tiếp tục như trên).

Bài 6. Cho phương trình $x^2 + px + q = 0$. Tìm p, q biết rằng phương trình có hai nghiệm $x = 3$ và $x = 4$

Lời giải

Thay $x = 3$ và $x = 4$ vào phương trình $x^2 + px + q = 0$, ta có hệ:

$$\begin{cases} 9 + 3p + q = 0 \\ 16 + 4p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -7 \\ 9 + 3p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -7 \\ q = 12 \end{cases}$$

Bài tập tương tự

Tìm p, q để nghiệm của phương trình $x^2 - 4 = 0$ cũng là nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$.

Lời giải

Ta có: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Thay $x = \pm 2$ vào phương trình $x^2 + px + q = 0$, ta có hệ:

$$\begin{cases} 4+2p+q=0 \\ 4-2p+q=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=-4 \\ p=0 \end{cases}$$

Nhận xét: Ta được phương trình $x^2 + 0x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$, đó chính là phương trình thứ nhất.

Bài 7. Giải phương trình.

a) $x^2 - 5x - 6 = 0$ (1)

b) $x^2 + 3x - 4 = 0$ (2)

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 5.

Lời giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^2 - 6x + x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-6) + (x-6) = 0 \Leftrightarrow (x-6) \cdot (x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-1 \end{cases}$$

Cách khác: (1) $\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} \Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \left|x - \frac{5}{2}\right| = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{2} = \frac{7}{2} \\ x - \frac{5}{2} = -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-1 \end{cases}$$

b) Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2 + 4x - x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x(x+4) - (x+4) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=1 \end{cases}$$

Cách khác: (2) $\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \left|x + \frac{3}{2}\right| = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \\ x + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$$

Bài 8. Tìm tọa độ giao điểm của các đồ thị hàm số sau: $y = 4x^2$; $y = 4x + 3$.

Hướng dẫn: Lập phương trình hoành độ giao điểm.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của hai đồ thị

$$4x^2 = 4x + 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x - 1)^2} = \sqrt{4} \Leftrightarrow |2x - 1| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $x = \frac{3}{2}$, ta tìm được $y = 9$.

Với $x = -\frac{1}{2}$, ta tìm được $y = 1$.

Vậy tọa độ giao điểm của hai đồ thị là: $A\left(\frac{3}{2}; 9\right); B\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Bài 9. Tìm m để phương trình $x^2 + 2mx + 1 = 0$ có nghiệm.

Lời giải

Ta có: $x^2 + 2mx + 1 = x^2 + 2mx + m^2 - m^2 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x + m)^2 = m^2 - 1$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{m^2} \geq \sqrt{1} \Leftrightarrow |m| \geq 1$.

Nhận xét: Ta có thể xét điều kiện để phương trình vô nghiệm: $|m| < 1$.

Bài 10. Tìm m để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung: $x^2 - 1 = 0$ và $x^2 - mx = 0$.

Hướng dẫn: Tìm nghiệm của từng phương trình.

Lời giải

Ta có: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{1} \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$$x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow x(x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}$$

$x = 1$ là nghiệm của phương trình $x^2 - mx = 0$ khi $m = 1$.

$x = -1$ là nghiệm của phương trình $x^2 - mx = 0$ khi $m = -1$.

III. Giải phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Bài 11. Giải phương trình:

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

c) $2x^2 - 7x + 2 = 0$

Hướng dẫn: Xác định các hệ số a, b, c ; sau đó tính Δ ($\Delta = b^2 - 4ac$).

Lời giải

a) Ta có $a = 2; b = -5; c = 2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.2.2 = 25 - 16 = 9 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{-(-5)+3}{2.2} = 2; x_2 = \frac{-(-5)-3}{2.2} = \frac{1}{2}$

b) Ta có: $a = 1; b = -(1 + \sqrt{2}); c = \sqrt{2}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = [-(1 + \sqrt{2})]^2 - 4.1.\sqrt{2}$$

$$= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 4\sqrt{2}$$

$$= 1 - 2\sqrt{2} + 2 = (1 - \sqrt{2})^2 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$$

Phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{(1 + \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 1)}{2.1} = \sqrt{2}; x_2 = \frac{(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1)}{2.1} = 1$$

Cách khác: $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - \sqrt{2}x + \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) - \sqrt{2}(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

c) Ta có: $a = 2; b = -7; c = 2$

$$\Delta = (-7)^2 - 4.2.2 = 49 - 16 = 33 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{33}$$

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}; x_2 = \frac{7 - \sqrt{33}}{4}$

Bài 12. Giải phương trình:

a) $9x^2 - 30x + 225 = 0$

b) $(2x - 3)^2 = 11x - 19$

c) $3(x^2 - 1) = 8x$

d) $9x^2 - 30x + 25 = 0$

e) $5x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$

Hướng dẫn: Xác định các hệ số a, b, c sau đó tính $\Delta (\Delta = b^2 - 4ac)$.

Lời giải

a) Ta có: $9x^2 - 30x + 225 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 75 = 0$

$$a = 3; b = -10; c = 75$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4.3.75 = -800 < 0$$

Phương trình vô nghiệm.

b) Ta có: $(2x - 3)^2 = 11x - 19 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 - 11x + 19 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 23x + 28 = 0$$

$$a = 4; b = -23; c = 28$$

$$\Delta = (-23)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 28 = 81 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$$

Phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{23+9}{2 \cdot 4} = 4; x_2 = \frac{23-9}{2 \cdot 4} = \frac{7}{4}$$

c) Ta có: $3(x^2 - 1) = 8x \Leftrightarrow 3x^2 - 3 - 8x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0$

$$a = 3; b = -8; c = -3$$

$$\Delta = (8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 100 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$$

Phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{8+6}{6} = 3; x_2 = \frac{8-10}{6} = -\frac{1}{3}$$

Chú ý: Em cần sắp xếp các số hạng để đưa về dạng $ax^2 + bx + c = 0$, chẳng hạn: $3x^2 - 3 - 8x = 0$.

d) Ta có: $a = 9; b = -30; c = 25$

$$\Delta = (-30)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 25 = 0$$

Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-(-30)}{2 \cdot 9} = \frac{5}{3}$

Cách khác: Ta có: $9x^2 - 30x + 25 = 0 \Leftrightarrow (3x - 5)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

e) Ta có: $a = 5; b = -2\sqrt{5}; c = 1$.

$$\Delta = (2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 0$$

Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{2\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Cách khác: Ta có: $5x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{5}x - 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Bài 13. Giải phương trình:

a) $(2x+1)^2 = 8x$ (1)

b) $(3x-1)(x+1) = 15$ (2)

c) $2x^2 + 3x - (x-1)(x-2) = 0$ (3)

Hướng dẫn: Rút gọn và đưa về dạng $ax^2 + bx + c = 0$.

Lời giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 - 8x = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0$$

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

(Ta có thể tính Δ và có $\Delta = 0$ nên phương trình có nghiệm kép).

b) Ta có: (2) $\Leftrightarrow 3x^2 + 3x - x - 1 - 15 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 16 = 0$

Trong đó: $a = 3; b = 2; c = -16$

$$\Delta = 4 - 4.3(-16) = 196 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14.$$

Phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{-2+14}{6} = 2; x_2 = \frac{-2-14}{6} = -\frac{8}{3}$$

c) Ta có: (3) $\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - (x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 2 = 0$

Trong đó: $a = 1; b = 6; c = -2$

$$\Delta = 6^2 - 4.1.(-2) = 44 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

Phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{-6+2\sqrt{11}}{2} = -3 + \sqrt{11}; x_2 = \frac{-6-2\sqrt{11}}{2} = -3 - \sqrt{11}$$

IV. Điều kiện phương trình có nghiệm và số nghiệm của phương trình

Bài 14. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

$$x^2 + 2x + m - 2 = 0$$

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $a = 1; b = 2; c = m - 2$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2 - 4.1.(m-2) > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4m + 8 > 0 \Leftrightarrow 12 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 3.$$

Chú ý: Hệ số $c = m - 2$, chứ không phải $c = -2$.

Bài tập tương tự.

+ Tìm m để phương trình vô nghiệm; có nghiệm kép; có nghiệm.

(Đáp số: $m > 3; m = 3; m \leq 3$).

+ Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng 0. (Đáp số: $m = 2$).

Bài 15. Tìm m để phương trình $mx^2 + (2m - 1)x + m + 2 = 0$ có nghiệm.

Hướng dẫn: Xét trường hợp $a = 0; a \neq 0$ và xem chú ý ở bài toán 14.

Lời giải

Ta có: $a = m; b = 2m - 1; m + 2$

+ Nếu $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Phương trình đã cho có nghiệm} &\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - 4.m.(m+2) \geq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 - 8m \geq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12m + 1 \geq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{12} \\ m \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

+ Nếu $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Ta có Phương trình: $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy với $m = 0$, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq \frac{1}{12}$.

Chú ý: + Bạn thường quên xét trường hợp $a = 0$.

+ Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

(Đáp số: $m < \frac{1}{12}$ và $m \neq 0$).

Bài 16. Tìm m để phương trình $(m-1)x^2 + (m+4)x + m + 7 = 0$ có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn: Xét hai trường hợp: $a = 0$ và $a \neq 0$.

(Nếu $a \neq 0$. Phương trình bậc hai có nghiệm kép).

Lời giải

Ta có: $a = m - 1; b = m + 4; c = m + 7$

Trường hợp 1: $a = 0 \Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Ta có phương trình: $5x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{8}$ (nghiệm duy nhất).

Trường hợp 2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0$.

$$\Leftrightarrow (m+4)^2 - 4.(m-1)(m+7) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + 16m - 44 = 0 (*)$$

Giải phương trình (*), có dạng:

$Am^2 + Bm + C = 0$; trong đó: $A = 3; B = 16; C = -44; m$ là ẩn số.

$$\Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 16^2 - 4.3.(44) = 784 > 0 \Rightarrow \sqrt{784} = 28.$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-16+28}{6} \\ m = \frac{-16-28}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{22}{3} \end{cases}$$

Đáp số: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = 1; m = 2; m = -\frac{22}{3}$

Chú ý: Ta phải xét cả khi $a = 0$, phương trình đã cho trở thành phương trình bậc nhất.

Bạn có thể phân biệt với bài toán 17 dưới đây.

Bài 17. Tìm m để phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 2 = 0$ có nghiệm kép.

Hướng dẫn: Phương trình bậc hai có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $a = m; b = -2(m-1); c = 2$.

Phương trình đã cho có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ [-2(m-1)]^2 - 4.m.2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4m^2 - 16m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 4m + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{3}$$

Bài 18. Tìm m để phương trình $x^2 + (2m+1)x + m^2 = 0$ có nghiệm kép và tính nghiệm kép với m vừa tìm được.

Hướng dẫn: Xem bài toán 17.

Lời giải

• Ta có: $a = 1; b = 2m + 1; c = m^2$.

Phương trình đã cho có nghiệm kép khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (2m+1)^2 - 4.1.m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$$

• Với $m = -\frac{1}{4}$, phương trình đã cho có dạng:

$$x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Bài 19. Chứng minh rằng phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$ luôn luôn có nghiệm với mọi m .

Hướng dẫn: Chứng tỏ $\Delta \geq 0, \forall m$.

Lời giải

Ta có: $a = 2; b = 2m - 1; c = m - 1$

$$\Rightarrow \Delta = (2m-1)^2 - 4.2.(m-1) = 4m^2 - 12m + 9$$

$$= (2m-3)^2 \geq 0, \forall m.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm với mọi m .

Bài 20. Chứng tỏ phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có các hệ số a và c trái dấu thì luôn có nghiệm.

Hướng dẫn: Xét biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

Theo giả thiết: a và c trái dấu $\Rightarrow ac < 0 \Rightarrow -ac > 0 \Rightarrow -4ac > 0$

$$\Rightarrow b^2 - 4ac > b^2 \geq 0 \Rightarrow \Delta > 0.$$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Áp dụng: Không tính Δ hãy giải thích vì sao phương trình sau có hai nghiệm phân biệt.

1) $x^2 - (2m+1)x - 1 = 0$

2) $x^2 - mx - m^2 - 1 = 0$

Hướng dẫn:

1) Ta có: $a = 1; c = -1 \Rightarrow ac = -1 < 0$.

\Rightarrow Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

2) Ta có: $a = 1; c = -m^2 - 1$, vì $m^2 \geq 0 \Rightarrow -m^2 \leq 0 \Rightarrow -1 - m^2 \leq -1 < 0$

Vậy a và c trái dấu \Rightarrow phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập tương tự đối với phương trình:

$x^2 - mx - 1 = 0; x^2 - (2m-1)x - m^2 - 2m - 3 = 0$.

V. Giải và biện luận phương trình có tham số

Bài 21. Giải và biện luận phương trình sau

a) $x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$ (1)

b) $mx^2 + (2m-1)x + m + 2 = 0$ (2)

Lời giải

a) Ta có: $a = 1; b = 2m; c = m^2 - 1$

$\Delta = (2m)^2 - 4.1.(m^2 - 1) = 4 > 0, \forall m \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2 > 0$.

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị $m \in R$

$x_1 = \frac{-2m+2}{2} = -m+1; x_2 = \frac{-2m-2}{2} = -m-1;$

b) Ta có: $a = m; b = 2m-1; c = m+2$

Trường hợp 1: $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Ta có phương trình: $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Trường hợp 2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

$\Delta = (2m-1)^2 - 4.m.(m+2) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 - 8m = -12m + 1$.

+) $\Delta < 0 \Leftrightarrow -12m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{12}$ Phương trình vô nghiệm.

+) $\Delta = 0 \Leftrightarrow -12m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{12}$ phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = 5$

+) $\Delta > 0 \Leftrightarrow -12m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{12}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x_1 = \frac{1-2m-\sqrt{1-12m}}{2m}; x_2 = \frac{1-2m+\sqrt{1-12m}}{2m}$

Đáp số: $m = 0$ thì $x = 2$; $m < \frac{1}{12}$ thì $x_1 = \frac{1-2m-\sqrt{1-12m}}{2m}; x_2 = \frac{1-2m+\sqrt{1-12m}}{2m}$.

Bài 22. Giải phương trình:

a) $x^2 - 2(2m+1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0$

b) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 10.

Lời giải

a) $x^2 - 2(2m+1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0$

Ta có: $a = 1; b = -2(2m+1); c = 4m^2 + 4m - 3$

$\Delta = [-2(2m+1)]^2 - 4.1.(4m^2 + 4m - 3) = 16 > 0; \sqrt{\Delta} = 4$

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \frac{2(2m+1) - 4}{2} = 2m - 1; x_2 = \frac{2(2m+1) + 4}{2} = 2m + 3$

b) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$

+) $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Ta có: $a = m+1; b = -2(m-1); c = m-2$

$\Delta = [-2(m-1)]^2 - 4.(m+1).(m-2) = -4m+12$

+) Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow -4m+12 < 0 \Leftrightarrow m > 3$ phương trình vô nghiệm

+) Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow -4m+12 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

+) Nếu $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq -1 \end{cases}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \frac{2m+2 - \sqrt{12-4m}}{2(m+1)} = \frac{m+1 - \sqrt{3-m}}{m+1}; x_2 = \frac{2m+2 + \sqrt{12-4m}}{2(m+1)} = \frac{m+1 + \sqrt{3-m}}{m+1}$

VI. Vị trí tương đối của parabol $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Bài 23. Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 3$

Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d)

Hướng dẫn: Xét phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d)

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d)

$2x^2 = -x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 (*)$

$a = 2; b = 1; c = -3 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4.2.(-3) = 25 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-1-5}{4} = \frac{-3}{2}; x_2 = \frac{-1+5}{4} = 1$

*) Với $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{9}{2}$

*) Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$

Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $A\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$ và $B(1; 2)$

Cách khác: Tọa độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d) thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = -x + 3 \end{cases}$

Trừ vế cho vế của hai phương trình, ta có: $2x^2 + x - 3 = 0$ (sau đó giải tiếp tục như cách trên).

Bài 24. Chứng tỏ rằng parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - 1$ tiếp xúc nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm.

Hướng dẫn: Chứng tỏ phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm kép.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d)

$$\frac{1}{4}x^2 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 = 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0(*)$$

Ta có: $a = 1; b = -4; c = 4 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4.1.4 = 0$

Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 2$

Vậy (P) và (d) tiếp xúc nhau.

Với $x = 2 \Rightarrow y = 1$

Tọa độ tiếp điểm: $M(2; 1)$

Bài tập tương tự. Vẽ parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - 1$. Tìm tọa độ giao điểm.

Bài 25. Cho $(P): y = 2x^2$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(0; -2)$ và tiếp xúc với (P) .

Hướng dẫn: Phương trình đường thẳng $(d): y - (-2) = k(x - 0) \Leftrightarrow y = kx - 2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) .

(P) và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) có nghiệm kép

Lời giải

Phương trình đường thẳng (d) đi qua M có hệ số góc k :

$$y - (-2) = k(x - 0) \Leftrightarrow y = kx - 2$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$2x^2 = kx - 2 \Leftrightarrow 2x^2 - kx + 2 = 0 (*)$$

(P) và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow k^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{k^2} = \sqrt{16}$$

$$\Leftrightarrow |k| = 4 \Leftrightarrow k = 4; k = -4$$

Chú ý: Điều kiện “tiếp xúc”, ta dùng “phương trình hoành độ giao điểm”.

Bài 26. Cho parabol $(P): y = \frac{3}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m$. Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Hướng dẫn: Phương trình hoành độ của parabol $(P): y = \frac{3}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m$ có hai điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ của (P) và (d) :

$$\frac{3}{2}x^2 = x + m \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 2m = 0 (*)$$

Ta có: $a = 3; b = -2; c = 2m$

(P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$$\Leftrightarrow (-2)^2 - 4.3.(-2m) > 0 \Leftrightarrow 4 + 24m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{6}$$

Chú ý: Điều kiện cắt nhau ta dùng “phương trình hoành độ giao điểm có hai nghiệm phân biệt”

+) *Cách khác:* Tọa độ giao điểm của (P) và (d) thỏa mãn hệ:
$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x^2 \\ y = x + m \end{cases}$$

Trừ vế cho vế của hai phương trình trên, ta được $\frac{3}{2}x^2 - x - m = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 2m = 0$, ta được phương trình $(*)$ tiếp tục như trên.

Bài 27. Cho $(P): y = -\frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $(d): y = x - 4$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

b) Viết phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và tiếp xúc với (P) .

Hướng dẫn:

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) .

b) Phương trình $(d'): y = x + m$ ($m \neq 4$)

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d) .

$$-\frac{x^2}{2} = x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 (*)$$

Ta có: $a = 1; b = 2; c = -8 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4.1.(-8) = 36 > 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6$$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2-6}{2} \\ x_2 = \frac{-2+6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

*) Với $x = -4$, thay vào phương trình $y = x - 4 \Rightarrow y = -8$

*) Với $x = 2$, thay vào phương trình $y = x - 4 \Rightarrow y = -2$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $A(-4; -8)$ và $B(2; -2)$

b) Phương trình đường thẳng (d') song song với (d) có dạng $y = x + m$ ($m \neq -4$).

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d') là:

$$-\frac{x^2}{2} = x + m \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2m = 0 (**)$$

Ta có: $a = 1; b = 2; c = 2m$

(P) và (d') tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình $(**)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 4 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Bài 28. Cho $a + b = 1$.

a) Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

b) Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$.

Lời giải

Hướng dẫn:

a) Đặt $y = a^2 + b^2$. Từ giả thiết: $a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a \Rightarrow b^2 = (1 - a)^2$

Vậy: $y = a^2 + (1 - a)^2 \Leftrightarrow y = 2a^2 - 2a + 1 \Leftrightarrow 2a^2 - 2a + 1 - y = 0 (*)$

Tìm điều kiện của y để phương trình $(*)$ có nghiệm:

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$.

$$\Leftrightarrow 4 - 4.2.(1 - y) \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 8 + 8y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2}$$

Vậy $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ (Đpcm).

b) Đặt $z = a^3 + b^3 \Leftrightarrow z = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Từ giả thiết: $a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a \Rightarrow b^2 = (1 - a)^2$

$$\Leftrightarrow z = a^2 - a(1 - a) + (1 - a)^2$$

$$\Leftrightarrow z = 3a^2 - 3a + 1$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 3a + 1 - z = 0 (**)$$

Tìm điều kiện của z để phương trình $(**)$ có nghiệm:

Phương trình $(**)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$.

$$\Leftrightarrow 9 - 4.3.(1 - z) \geq 0 \Leftrightarrow 12z - 3 \geq 0 \Leftrightarrow z \geq \frac{1}{4}$$

Vậy $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$ (Đpcm).

Bài 29. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

Hướng dẫn: Biến đổi biểu thức về dạng $y(x^2 + 1) = 2x \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$ (*)

Tìm điều kiện để phương trình bậc hai theo x có nghiệm.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{2x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow y(x^2 + 1) = 2x$ (vì $x^2 + 1 > 0, \forall x \in R$)

$\Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$ (*)

+ Trường hợp 1: $y = 0 \Rightarrow x = 0$

+ Trường hợp 2: $y \neq 0$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$\Leftrightarrow 4 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4y^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{4y^2} \leq 2$

$\Leftrightarrow |2y| \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1$

Vậy giá trị lớn nhất của y bằng 1.

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Giá trị nhỏ nhất của y bằng -1.

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bài 30. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $y = \sqrt{x+1} - x$.

Hướng dẫn: Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 = x+1 \Rightarrow x = u^2 - 1 (x \geq -1 \Rightarrow u \geq 0)$.

Ta xét như bài toán 29.

Lời giải

Đặt $u = \sqrt{x+1}; x+1 \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$

Ta có: $u^2 = x+1 \Rightarrow x = u^2 - 1$

Vậy $y = u - (u^2 - 1) \Leftrightarrow u^2 - u - 1 + y = 0$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$5 - 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{5}{4}$

Với $y \leq \frac{5}{4}$ phương trình (*) trở thành $u^2 - u - 1 + \frac{5}{4} = 0$, ta tìm được: $u = \frac{1}{2}$

Với $u = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $u \geq 0$).

Vậy $\sqrt{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$

Giá trị lớn nhất của y bằng $\frac{5}{4}$. Dấu “ = ” xảy ra khi và chỉ khi $x = -\frac{3}{4}$

VII. Công thức nghiệm thu gọn

Bài 29. Giải phương trình bằng công thức nghiệm thu gọn.

a) $5x^2 + 2x - 16 = 0$ (1)

b) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 6 = 0$ (2)

c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 1 = 0$ (3)

d) $\sqrt{2}x^2 - 2(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2} - 2 = 0$ (4)

Hướng dẫn: Nhận xét về hệ số b , tính $b' = \frac{b}{2}$ và $\Delta' = b'^2 - ac$

Lời giải

a) $5x^2 + 2x - 16 = 0$ (1)

Ta có: $a = 5; b = 2 \Rightarrow b' = 1; c = -16$

$\Delta' = 1^2 - 5 \cdot (-16) = 81 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{81} = 9$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \frac{-1-9}{5} = -2; x_2 = \frac{-1+9}{5} = \frac{8}{5}$

b) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 6 = 0$ (2)

Ta có: $a = 1; b = -2\sqrt{3} \Rightarrow b' = -\sqrt{3}; c = -6$

$\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - 1 \cdot (-6) = 9 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{9} = 3$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \frac{-(-\sqrt{3})-3}{1} = \sqrt{3} - 3; x_2 = \frac{-(-\sqrt{3})+3}{1} = \sqrt{3} + 3$

c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 1 = 0$ (3)

Ta có: $a = 1; b = -2\sqrt{2} \Rightarrow b' = -\sqrt{2}; c = 2\sqrt{2} - 1$

$\Delta' = (-\sqrt{2})^2 - 1 \cdot (2\sqrt{2} - 1) = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} - 1)^2 > 0$

$\Rightarrow \Delta' = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1 > 0$

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1; x_2 = \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 1$

d) $\sqrt{2}x^2 - 2(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2} - 2 = 0$ (4)

Ta có: $a = \sqrt{2}; b = -2(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow b' = -(\sqrt{2} - 1); c = \sqrt{2} - 2$

$\Delta' = [-(\sqrt{2} - 1)]^2 - \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{1} = 1$

Vậy phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \frac{(\sqrt{2} - 1) - 1}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}; x_2 = \frac{(\sqrt{2} - 1) + 1}{\sqrt{2}} = 1$

Bài 32. Với giá trị nào của m phương trình sau đây vô nghiệm.

a) $3x^2 - 2x + m = 0$ (1)

b) $5x^2 - 18x + m = 0$ (2)

c) $m^2 - 6x + 1 = 0$ (3)

d) $x^2 - 2(m + 3)x + m^2 + 3 = 0$ (4)

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

Lời giải

a) $3x^2 - 2x + m = 0$ (1)

Ta có: $a = 3; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = m$

$\Delta' = (-1)^2 - 3m = 1 - 3m$

Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \neq 0 \\ 1 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$

b) $5x^2 - 18x + m = 0$ (2)

Ta có: $a = 5; b = 18 \Rightarrow b' = 9; c = m$

$\Delta' = 9^2 - 5m = 81 - 5m$

Phương trình (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \neq 0 \\ 81 - 5m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{81}{5}$

Lời giải

Đặt $u = \sqrt{x+1}; x+1 \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$.

Ta có: $u^2 = x+1 \Rightarrow x = u^2 - 1$

Vậy $y = u - (u^2 - 1) \Leftrightarrow u^2 - u - 1 + y = 0$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 5 - 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{5}{4}$

Với $y = \frac{5}{4}$; phương trình (*) trở thành:

$u^2 - u - 1 + \frac{5}{4} = 0$, ta tìm được $u = \frac{1}{2}$

Với $u = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $u \geq 0$).

Ta có $\sqrt{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$ (thỏa mãn)

Giá trị lớn nhất của y bằng $\frac{5}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -\frac{3}{4}$.

VII. Công thức nghiệm thu gọn

Bài 31. Giải phương trình bằng công thức nghiệm thu gọn.

a) $5x^2 + 2x - 16 = 0$

b) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 6 = 0$

c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 1 = 0$

$$d) \sqrt{2}x^2 - 2(\sqrt{2}-1)x + \sqrt{2} - 2 = 0$$

Hướng dẫn: Nhận xét về hệ số b, tính $b' = \frac{b}{2}$ và $\Delta' = b^2 - ac$.

Lời giải

a) Ta có: $a = 5; b = 2 \Rightarrow b' = 1; c = -16$.

$$\Delta' = 1^2 - 5 \cdot (-16) = 81 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{81} = 9$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-1-9}{5} = -2, x_2 = \frac{-1+9}{5} = \frac{8}{5}$.

b) Ta có: $a = 1, b = -2\sqrt{3} \Rightarrow b' = -\sqrt{3}; c = -6$

$$\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - 1 \cdot (-6) = 9 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 3$$

Vậy phương trình (2) có nghiệm phân biệt: $x_1 = \sqrt{3} - 3, x_2 = \sqrt{3} + 3$.

c) Ta có: $a = 1; b = -2\sqrt{2} \Rightarrow b' = -\sqrt{2}; c = 2\sqrt{2} - 1$

$$\Delta' = (-\sqrt{2})^2 - 1 \cdot (2\sqrt{2} - 1) = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} - 1)^2 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1$$

Vậy phương trình (3) có nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1, x_2 = \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 1.$$

d) Ta có: $a = \sqrt{2}; b = -2(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow b' = -(\sqrt{2} - 1); c = \sqrt{2} - 2$

$$\Delta' = [-(\sqrt{2} - 1)]^2 - \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 2) = 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 1$$

Vậy phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{(\sqrt{2} - 1) - 1}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}, x_2 = \frac{(\sqrt{2} - 1) + 1}{\sqrt{2}} = 1.$$

Bài 32. Với giá trị nào của m phương trình sau đây vô nghiệm:

a) $3x^2 - 2x + m = 0$ (1)

b) $5x^2 + 18x + m = 0$ (2)

c) $m^2 - 6x + 1 = 0$ (3)

d) $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$ (4)

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có $a = 3; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = m$

$$\Delta' = (-1)^2 - 3m = 1 - 3m$$

$$\text{Phương trình (1) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \neq 0 \\ 1 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$$

b) Ta có: $a = 5; b = 18 \Rightarrow b' = 9; c = m$

Phương trình (2) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \neq 0 \\ 81 - 5m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{81}{5}$$

c) Ta có $a = m; b = -6 \Rightarrow b' = -3; c = 1$

$$\text{Phương trình (3) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9 - m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > 9 \end{cases}$$

d) Ta có: $a = 1; b = -2(m+3) \Rightarrow b' = -(m+3); c = m^2 + 3$

$$\Delta' = [-(m+3)]^2 - (m^2 + 3) = m^2 + 6m + 9 - m^2 - 3 = 6m + 6$$

$$\text{Phương trình (4) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 6m + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$$

Bài tập tương tự

Tìm m để các phương trình trên có nghiệm kép, có hai nghiệm phân biệt hoặc có nghiệm.

Bài 33. Tìm m để phương trình sau có nghiệm kép:

a) $5x^2 + 2mx - 2m + 5 = 0$ (1)

b) $mx^2 - 4(m-1)x - 8 = 0$ (2)

c) $mx^2 - 100x + m = 0$ (3)

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$.

Lời giải

a) Ta có: $a = 5; b = 2m \Rightarrow b' = m; c = -2m + 5$

$$\Delta' = m^2 - 5(-2m + 5) = m^2 + 10m - 75$$

Phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \neq 0 \\ m^2 + 10m - 75 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 10m - 75 = 0 \quad (*)$$

Giải phương trình (*) $a = 1; b = 10 \Rightarrow b' = 5; c = -75$

$$\Delta' = 25 + 75 = 100 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 10$$

$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 + 10 \\ m = -5 - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -15 \end{cases}$$

b) Ta có: $a = m; b = -4(m-1) \Rightarrow b' = -2(m-1); c = -8$

$$\Delta' = [-4(m-1)]^2 - m \cdot (-8) = 4m^2 + 4$$

$$\text{Phương trình (2) có nghiệm kép} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4m^2 + 4 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) vô nghiệm vì $m^2 \geq 0, \forall m \in R \Rightarrow 4m^2 + 4 > 0, \forall m$.

Vậy không có giá trị m nào để phương trình (2) có nghiệm kép.

c) Ta có: $a = m; b = -100 \Rightarrow b' = -50, c = m$

$$\Delta' = 2500 - m^2$$

Phương trình (3) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2500 - m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 50$

Nhận xét: Với các phương trình đã cho, ta có thể tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 34. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt.

a) $(m+1)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0$ (1)

b) $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$ (2)

c) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$ (3)

d) $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m - 1 = 0$ (4)

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có: $a = m+1; b = 4m \Rightarrow b' = 2m; c = 4m - 1$.

$$\Delta' = (2m)^2 - (m+1)(4m-1) = 4m^2 - 4m^2 + m - 4m + 1 = -3m + 1$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ -3m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < \frac{1}{3} \end{cases}$$

b) Ta có: $a = 1; b = -2(m+3) \Rightarrow b' = -(m+3); c = m^2 + 3$.

$$\Delta' = [-(m+3)]^2 - (m^2 + 3) = m^2 + 6m + 9 - m^2 - 3 = 6m + 6$$

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 6m+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$$

c) Ta có: $a = 1; b = -2(m-1) \Rightarrow b' = -(m-1) = 1-m; c = m^2$.

$$\Delta' = (1-m)^2 - m^2 = 1 - 2m + m^2 - m^2 = 1 - 2m$$

Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$$

d) Ta có: $a = 1; b = -2(m+1) \Rightarrow b' = -(m+1); c = m^2 + m - 1$

$$\Delta' = [-(m+1)]^2 - (m^2 + m - 1) = m^2 + 2m + 1 - m^2 - m + 1 = m + 2$$

Phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ m+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$$

Bài tập tương tự bài d):

"Tìm m để phương trình (4) có hai nghiệm".

Hướng dẫn: Phương trình (4) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m+2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -2.$$

Ta hãy so sánh với bài toán tương tự bài a):

"Tìm m để phương trình (1) có nghiệm".

Lời giải

Trường hợp 1; $a = m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ (*)

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } -4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$$

Vậy $m = -1$: Phương trình (1) có nghiệm.

Trường hợp 2: $a = m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -3m+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \leq \frac{1}{3} \end{cases} (**)$$

Kết hợp (*) và (**), ta có: Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq \frac{1}{3}$.

Chú ý: Khi xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, ta phải xét đến hệ số a trước hết ví dụ bài toán trên: $a = m+1$. Nếu không xét trường hợp $m+1 = 0$ ta sẽ có kết luận không chính xác.

Bài 35. Tìm m để parabol (P): $y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - 2m - 1$ tiếp xúc nhau.

Hướng dẫn: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d), sau đó tìm điều kiện để phương trình có nghiệm kép.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$-\frac{1}{4}x^2 = mx - 2m - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4mx - 8m - 4 = 0(*)$$

Ta có: $a = 1; b = 4m \Rightarrow b' = 2m; c = -8m - 4$

(P) và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 4m^2 + 8m + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 = 0 \Leftrightarrow m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

Nhận xét: Bài: "Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt" được giải tương tự.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m+1)^2 > 0 \Leftrightarrow m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$$

Bài 36. Tìm m để parabol $(P): y = mx^2 (m \neq 0)$ và đường thẳng $y = 2x - 1$ tiếp xúc nhau.

Hướng dẫn: Xem bài toán 35.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$mx^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow mx^2 - 2x + 1 = 0(*)$$

Ta có: $a = m; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = 1$

(P) và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Bài 37. Tìm tọa độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 3$.

Hướng dẫn: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d) :

$$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0(*)$$

Ta có: $a = 1; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = -3$

$$\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (-3) = 4 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 2$$

$$\text{Vậy } (*) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2 \\ x = 1 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

*) Với $x = -1$, ta tìm được: $y = 1$.

*) Với $x = 3$, ta tìm được: $y = 9$.

Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $A(1;1)$ và $B(3;9)$.

Bài 38. Cho parabol $(P): y = \frac{1}{x}x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + m$. Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt?

Hướng dẫn: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) .

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$\frac{1}{2}x^2 = -x + m \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2m = 0 (*)$$

Ta có: $a = 1; b = 2 \Rightarrow b' = 1; c = -2m$.

$$\Delta' = 1 + 2m$$

(P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2m > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m > -\frac{1}{2}.$$

Bài 39. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh $|5x + 12y| \leq 13$.

Hướng dẫn: Đặt $m = 5x + 12y \Rightarrow x = \frac{m - 12y}{5}$.

Thế vào biểu thức $x^2 + y^2 = 1$, ta được phương trình bậc hai của y và m là tham số.

Lời giải

Đặt $m = 5x + 12y \Rightarrow x = \frac{m - 12y}{5}$

Thế x vào đẳng thức $x^2 + y^2 = 1$, ta được:

$$\left(\frac{m - 12y}{5}\right)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 169y^2 - 24my + m^2 - 25 = 0 (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm

$$\Delta' \geq 0 \Rightarrow -25m^2 + 4225 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq 169 \Leftrightarrow |m| \leq 13$$

hay $|5x + 12y| \leq 13$ (đpcm)

Cách khác: Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$|5x + 12y| \leq \sqrt{5^2 + 12^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ vì } x^2 + y^2 = 1, \text{ nên}$$

$$|5x + 12y| \leq \sqrt{169} \cdot \sqrt{1} \Leftrightarrow |5x + 12y| \leq 13$$

Bài 40. Cho $4x + y = 1$. Chứng minh rằng $4x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}$.

Hướng dẫn: Đặt $m = 4x^2 + y^2$.

Từ $4x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 4x$, và thế y vào đẳng thức $m = 4x^2 + y^2$. Ta được phương trình bậc hai của x , tham số m . Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

Lời giải

Đặt $m = 4x^2 + y^2$.

Từ giả thiết: $4x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 4x$. Thế y vào đẳng thức trên, ta được:

$$m = 4x^2 + (1 - 4x)^2 \Rightarrow 20x^2 - 8x + 1 - m = 0 (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$.

$$16 - 20(1 - m) \geq 0$$

$$-4 + 20m \geq 0$$

$$m \geq \frac{1}{5} \text{ hay } 4x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5} \text{ (đpcm)}$$

∞ HẾT ∞

Bài 20. ĐỊNH LÝ VI-ET VÀ ỨNG DỤNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1) Định lý Vi-et.

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$

2) Áp dụng định lý Vi-et để tính nhẩm nghiệm.

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$:

*) Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = \frac{c}{a}$.

*) Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

3) Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $x^2 - Sx + P = 0$.

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Biểu thức đối xứng với các nghiệm $(x_1^2 + x_2^2; x_1^3 + x_2^3; x_1^4 + x_2^4)$

Bài 1. Cho phương trình $x^2 - x - 10 = 0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và tính $x_1^2 + x_2^2$.

Hướng dẫn: $a = 1; c = -10 \Rightarrow ac < 0$

\Rightarrow phương trình có hai nghiệm phân biệt.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

Lời giải

Ta có: $a = 1; c = -10 \Rightarrow ac < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

Nhận xét:

Ta có $ac < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0$ mà $x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 x_2 < 0$.

Vậy khi a và c trái dấu thì phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt và trái dấu (chẳng hạn: $x_1 < 0 < x_2$).

Biểu thức $x_1^2 + x_2^2$ không thay đổi khi ta thay x_1 bởi x_2 và ngược lại, gọi là biểu thức đối xứng của x_1 và x_2 . Bạn cần nhớ một vài công thức sau:

$$S = x_1 + x_2$$

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P$

(biểu thị qua tổng và tích các nghiệm)

$$\bullet x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$$

$$= (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right]$$

$$= S \cdot (S^2 - 3P) = S^3 - 3SP$$

$$\bullet x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2$$

$$= \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 2x_1^2x_2^2 = [S^2 - 2P]^2 - 2P^2$$

$$\bullet |x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$= S^2 - 4P$$

Bài 2. Cho phương trình $2x^2 - 3x - 6 = 0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Tính $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^3 + x_2^3$.

Hướng dẫn: Xem nhận xét ở Bài 1.

Lời giải

Ta có: $a = 2; c = -6 \Rightarrow ac = -12 < 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt (trái dấu) $x_1; x_2$. Theo định lí Vi-et, ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}; x_1x_2 = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\text{Vậy } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2(-3) = \frac{33}{4}.$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = \frac{3}{2} \left[\frac{33}{4} - (-3) \right] = \frac{135}{8}$$

$$\text{Cách khác: Ta cũng có: } x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot (-3) \cdot \frac{3}{2} = \frac{135}{8}.$$

Bài 3. Cho phương trình $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $M = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$, với $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Hướng dẫn: Chứng minh phương trình có nghiệm.

$$\text{Ta có: } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Lời giải

Ta có $a = 1; b = -6 \Rightarrow b' = -3$.

$$\Delta' = 9 - 8 = 1 > 0.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt. Theo định lí Vi-et, ta có:

$$x_1 + x_2 = 6(1) \text{ và } x_1 - x_2 = 8(2)$$

$$\text{Vậy } M = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 \Leftrightarrow M = (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2 \quad (3)$$

Từ (1); (2) và (3), ta có: $M = 6^2 - 5 \cdot 8 = 36 - 40 = -4$

Chú ý: Ta cần chứng tỏ phương trình có nghiệm $x_1; x_2$; sau đó mới áp dụng định lí Vi-et.

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - x + m - 1 = 0$ (*).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$.

b) Hãy tính $x_1^2 + x_2^2$ theo m .

Hướng dẫn:

*) Phương trình đã cho có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ (không cần hai nghiệm phân biệt).

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Lời giải

a) Phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 5 - 4m \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{5}{4}$$

b) Theo định lí Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$

$$\text{Vậy } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1 - 2(m - 1) = 3 - 2m$$

Bài 5. Theo phương trình $3x^2 + 2x - 6 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$; trong đó $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Lời giải

Ta có $a = 3; b = 2; c = -6$

$\Rightarrow a \cdot c = -18 < 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt (khác dấu) x_1, x_2 .

Theo định lí Vi-et, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{2}{3}; x_1x_2 = -2$.

$$\text{Vậy } A = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot (-2) = \frac{76}{9}$$

Nhận xét: Từ kết quả trên, ta có thể tìm được: $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{76}}{3} = \frac{2\sqrt{19}}{3} \Rightarrow x_1 - x_2 = \pm \frac{2\sqrt{19}}{3}$

Bài 6. Cho phương trình $3x^2 - 7x - 4 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, hãy tính.

a) $A = |x_1 - x_2|$

b) $B = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$

Hướng dẫn:

1. Chứng tỏ phương trình có nghiệm.

2. Áp dụng định lí Vi-et, tính:

$$A^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2. \text{ Từ đó tính } A.$$

Lời giải

Ta có: $a = 3; b = -7; c = -4 \Rightarrow a.c = -12 < 0$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Theo định lí Vi-et, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{7}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{-4}{3} \end{cases}$$

a) Ta có: $A^2 = |x_1 - x_2|^2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$
 $= \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{97}{9} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{97}}{3}$.

b) Ta có: $B = \frac{x_1^2 + x_2^3}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{x_1 x_2}$
 $= \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{-4}{3}\right) \cdot \frac{7}{3}}{\frac{-4}{3}} = -\frac{595}{36}$.

Bài 7. Cho phương trình $x^2 - 2x + m + 2 = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Hướng dẫn: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm, áp dụng hệ thức Viète tính $x_1^2 + x_2^2$ qua $x_1 + x_2$ và $x_1 x_2$

Lời giải

Ta có: $a = 1; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = m + 2$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - (m + 2) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$$

Theo hệ thức Viète, ta có $x_1 + x_2 = 2; x_1 x_2 = m + 2$

$$\text{Vậy } x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2(m + 2) = 10 \Leftrightarrow -2m = 10$$

$$\Leftrightarrow m = -5 \text{ (thỏa điều kiện } m \leq -1 \text{)}$$

Đáp số: $m = -5$

Cách khác: Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$. Theo hệ thức Viète, ta có:

$$x_1 + x_2 = 2; x_1 x_2 = m + 2 \text{ (Tương tự cách giải trên):}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow 4 - 2(m + 2) = 10 \Leftrightarrow m = -5$$

Thử lại: Với $m = -5$ ta có phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$

$a = 1; b = -2; c = -3 \Rightarrow ac = -2 < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm.

Chú ý: Vì ta giả sử có nghiệm, để tìm được m , sau đó ta phải thử lại. Nếu làm như cách thứ nhất, ta tìm điều kiện cho phương trình có nghiệm thì không cần thử lại.

Bài 8. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ trong đó $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Hướng dẫn: Trước hết phải tìm điều kiện để phương trình có nghiệm sau đó áp dụng hệ thức Viète để tính $x_1^2 + x_2^2$ qua các hệ số.

Lời giải

Ta có $a = 1; b = -2m \Rightarrow b' = -1m; c = 2m - 3$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (-m)^2 - (2m - 3) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)^2 + 2 \geq 0$$

(luôn đúng với mọi m , vì $(m - 1)^2 \geq 0; \forall m$)

Theo hệ thức Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = 2m - 3$

$$\text{Vậy } A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4m^2 - 2(2m - 3)$$

$$= 4m^2 - 4m + 6 = 4m^2 - 4m + 1 + 5$$

$$= (2m - 1)^2 + 5 \geq 5; \forall m \text{ (vì } (2m - 1)^2 \geq 0, \forall m \text{)}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Chú ý: Nếu ta không đặt điều kiện phương trình có nghiệm thì vẫn đúng đáp số, nhưng lời giải như vậy chưa chính xác.

II. Biểu thức không đối xứng với các nghiệm

Bài 9. Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $3x_1 + 2x_2 = 1$

Hướng dẫn: Biểu thức $3x_1 + 2x_2$ gọi là không đối xứng. Áp dụng hệ thức Viète, tính

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \text{ Ta có hệ phương trình, từ đó tìm được } m$$

Lời giải

Ta có $a = 1; b = 2 \Rightarrow b' = 1; c = m$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$$

Theo hệ thức Viète, ta có $x_1 + x_2 = -2$ và $x_1 x_2 = m$

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

(hệ hai ẩn bậc nhất đối với x_1 và x_2)

Thế $x_1 = 5$ và $x_2 = -7$ vào phương trình $x_1x_2 = m$, ta có:

$$m = 5 \cdot (-7) = -35 \text{ (thỏa điều kiện } m \leq 1 \text{)}$$

Đáp số: $m = -35$

Bài 10. Tìm m để phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 4$

Hướng dẫn: Xem lời giải Bài 9.

Lời giải

Ta có: $a = 1; b = -4 \Rightarrow b' = -2; c = m$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 4 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 4$$

Theo hệ thức viète, ta có $x_1 + x_2 = 4$ và $x_1x_2 = m$

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Vậy $m = 0$ (thỏa điều kiện $m \leq 4$)

III. Tính nhẩm các nghiệm của phương trình bậc hai

Bài 11. Giải phương trình:

a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ (1)

b) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ (2)

c) $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 2 = 0$ (3)

d) $(1 - 2m)x^2 + (2m + 1)x - 2 = 0$ (4)

Hướng dẫn:

• Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$.

• Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm: $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$.

Lời giải

a) Ta có $a = 2; b = -5; c = 3 \Rightarrow a + b + c = 0$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{3}{2}$.

b) Ta có $a = 1; b = -(1 + \sqrt{2}); c = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow a + b + c = 1 - (1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0$$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \sqrt{2}$

c) Ta có $a = m; b = -2(m + 1); c = m + 2$

$a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. Ta nhận thấy:

$$a + b + c = m - 2(m + 1) + m + 2 = 0$$

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{m+2}{m}$ ($m \neq 0$).

$$m = 0 \text{ (3)} \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

d) Ta có $a = 1 - 2m; b = 2m + 1; c = -2$

$$\Rightarrow a + b + c = 0 = 1 - 2m + 2m + 1 - 2 = 0$$

Vậy phương trình (4) có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -\frac{2}{1-2m}$.

$$\left(a \neq 0 \Leftrightarrow 1 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2} \right)$$

Bài 12. Giải phương trình:

a) $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$ (1)

b) $mx^2 + 2(m+1)x + m + 2 = 0$ ($m \neq 0$) (2)

c) $(5 + \sqrt{2})x^2 - (\sqrt{2} - 5)x - 10 = 0$ (3)

Hướng dẫn: Xem hướng dẫn Bài 11.

Lời giải

a) Ta có $a = 1; b = 2m; c = 2m - 1 \Rightarrow a - b + c = 0 = 1 - 2m + 2m - 1 = 0$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = -1; x_2 = -\frac{(2m-1)}{1}$.

b) Ta có $a = m; b = 2(m+1); c = m + 2$

$$\Rightarrow a - b + c = 0 = m - 2(m+1) + m + 2 = 0$$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm $x_1 = -1; x_2 = \frac{-(m+2)}{m}$ ($m \neq 0$).

c) Ta có $a = 5 + \sqrt{2}; b = \sqrt{2} - 5; c = -10$

$$\Rightarrow a - b + c = 0 = 5 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 5) - 10 = 0$$

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm $x_1 = -1; x_2 = \frac{10}{5 + \sqrt{2}}$.

IV. Xét dấu các nghiệm

Ta cần nhớ kết quả như sau:

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Hai nghiệm trái dấu: $(x_1 < 0 < x_2) \Leftrightarrow ac < 0$.

$$\text{Hai nghiệm phân biệt dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Hai nghiệm phân biệt dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$$

Bài 13. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm trái dấu:

$$x^2 + 4x + m = 0$$

Hướng dẫn: Xét $ac < 0 \Leftrightarrow -4ac > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > b^2 \geq 0$.

Vậy $\Delta > 0$. Lại có $ac < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow x_1 x_2 < 0$

Vậy hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

Ta có $a = 1; b = 4; c = m$

Phương trình sau có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m < 0$

Nhận xét: Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt âm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ m > 0 \\ -4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Bài 14. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt dương

$$x^2 - 2x + m = 0$$

Lời giải

Ta có $a = 1; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = m$

Vậy $\Delta' = 1 - m$

Phương trình sau có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ m > 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$$

Bài 15. Tìm m để phương trình $x^2 - 3x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ và thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$

Hướng dẫn: $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 1 - 1 < x_2 - 1$

$$\Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1$$

Vậy $x_1 - 1$ và $x_2 - 1$ trái dấu.

Lời giải

Ta có $a = 1; b = -3; c = m - 1$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 - 1$ và $x_2 - 1$ trái dấu khi và chỉ khi.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4(m - 1) > 0 & (1) \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow m < \frac{13}{4}$. Với điều kiện $m < \frac{13}{4}$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$$x_1 + x_2 = 3; x_1 x_2 = m - 1$$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow (m - 1) - 3 + 1 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Kết hợp $m < 3$ và $m < \frac{13}{4} \Rightarrow m < 3$

Cách khác: Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$ thế t vào phương trình đã cho, ta có:

$$(t + 1)^2 - 3(t + 1) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t + m - 3 = 0 (*)$$

Điều kiện $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1$.

Khi đó, gọi $t_1 = x_1 - 1; t_2 = x_2 - 1$ là hai nghiệm của phương trình (*).

Vậy $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$

Nhân xét: - Cách thứ hai, gọi là đặt ẩn phụ; ta không phải tìm điều kiện: $\Delta > 0$!

Bạn hãy tự giải. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn: $1 < x_1 < x_2$ hoặc $x_1 < x_2 < 1$.

Bài 16. Tìm m để phương trình $x^2 + (2 - m)x + 1 = 0$ có nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $-1 < x_1 < x_2$.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp đặt ẩn phụ. $-1 < x_1 < x_2$ hay $0 < x_1 + 1 < x_2 + 1$

Lời giải

Đặt $t = x + 1$ suy ra $x = t - 1$. Thế x vào phương trình đã cho, ta được:

$$(t - 1)^2 + (2 - m)(t - 1) + 1 = 0 \text{ hay } t^2 - mt + m = 0 (*)$$

Ta có $a = 1; b = -m; c = m$.

Điều kiện $-1 < x_1 < x_2$ hay $0 < x_1 + 1 < x_2 + 1$

Đặt $t_1 = x_1 + 1; t_2 = x_2 + 1$, ta đưa về bài toán. Tìm m để phương trình (*) có hai nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn:

$$0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m > 0 \\ m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-4) > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4$$

Cách khác:

$$*) -1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 < x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \\ x_1 + 1 + x_2 + 1 > 0 \end{cases}$$

Bài toán tương tự với điều kiện $x_1 < -1 < x_2$; $x_1 < x_2 < -1$.

Bài 17. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 5m + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1 ; x_2 thỏa mãn điều kiện: $x_1 \leq x_2 < 3$.

Hướng dẫn: Đặt ẩn phụ $t = x_1 - 3 \leq x_2 - 3 < 0$. Vậy $x_1 - 3$ và $x_2 - 3$ đều cùng âm.

Lời giải

Cách giải thứ nhất.

Đặt $t = x - 3$ suy ra $x = t + 3$. Thế x vào phương trình đã cho, ta được:

$$(t+3)^2 - 2(m-1)(t+3) + 5m + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2(2-m)t + 4 - m = 0 \quad (*)$$

Gọi t_1 ; t_2 là hai nghiệm của phương trình (*).

$$\text{Điều kiện } x_1 \leq x_2 < 3 \Leftrightarrow x_1 - 3 \leq x_2 - 3 < 0 \Leftrightarrow t_1 \leq t_2 < 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m \geq 0 \\ 4 - m > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-3) \geq 0 \\ m < 4 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m < 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m \leq 0 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0$$

$$\text{Với } \begin{cases} m \geq 3 \\ m < 2 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}).$$

$$\text{Với } \begin{cases} m \leq 0 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0$$

Vậy $m \leq 0$.

Cách giải thứ hai: Xét phương trình đã cho: Ta có $x_1 \leq x_2 < 3 \Leftrightarrow x_1 - 3 \leq x_2 - 3 < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ (x_2 - 3)(x_2 - 3) > 0 \\ (x_1 - 3) + (x_2 - 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 > 0 \\ x_1 + x_2 - 6 < 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } x_1 + x_2 = 2m + 2; x_1 x_2 = 5m + 1 : \Delta' = m^2 - 3m.$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} m^2 - 3m \geq 0 \\ 5m + 1 - 3(2m + 2) + 9 > 0 \\ 2m + 2 - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m - 3) \geq 0 \\ 4 - m > 0 \\ 2m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m < 4 \text{ hoặc} \\ m < 2 \end{cases} \begin{cases} m \geq 3 \\ m < 4 \\ m < 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} m \leq 0 \\ m < 4 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

$$\text{Với } \begin{cases} m \geq 3 \\ m < 4 \text{ (vô nghiệm)} \\ m < 2 \end{cases}$$

Vậy $m \leq 0$

V. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng

Bài 18. Tìm hai số u và v biết $u + v = 1$ và $u \cdot v = -2$.

Hướng dẫn: Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm phương trình bậc hai $x^2 - Sx + P = 0$.

Lời giải

Hai số u ; v cần tìm là hai nghiệm phương trình: $x^2 - 1 \cdot x - 2 = 0$ (*)

Ta có: $a = 1$; $b = -1$; $c = -2$. Suy ra $a - b + c = 1 - (-1) - 2 = 0$.

Phương trình (*) có hai nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = 2$.

Vậy hai số cần tìm: $u = -1$; $v = 2$ hoặc $u = 2$; $v = -1$.

Nhận xét: Ta có thể giải bài toán sau: "Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là -1 và 2 ."

Lời giải

Ta có $(-1) + 2 = 1 = S$ và $(-1) \cdot 2 = -2 = P$.

Vậy -1 và 2 là nghiệm của phương trình bậc hai sau đây: $x^2 - 1 \cdot x - 2 = 0$ hay $x^2 - x - 2 = 0$

Bài toán tương tự.

Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là 3 và -5 .

Lời giải

Ta có: $3 + (-5) = -2 = S$ và $3 \cdot (-5) = -15 = P$.

Vậy 3 và -5 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 2x - 15 = 0$.

(Ta cần nhớ phương trình dạng $x^2 - Sx + P = 0$ nên phương trình trên có dạng:
 $x^2 - (-2)x - 15 = 0$.)

Cách khác: $x = -5$ hoặc $x = 3$ là nghiệm phương trình $x + 5 = 0$ hoặc $x - 3 = 0$.

Suy ra $(x + 5)(x - 3) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 5x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$

Bài 19. Tìm hai số u , v ; biết $u + v = 12$; $uv = 28$ và $u > v$.

Lời giải

Hai số u ; v là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 12x + 28 = 0$ (*)

Ta có: $a = 1$; $b = -12 \Rightarrow b' = -6$; $c = 28$.

$$\Delta' = (-6)^2 - 1 \cdot 28 = 8 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Nên phương trình (*) có nghiệm $x = 6 + 2\sqrt{2}$; $x = 6 - 2\sqrt{2}$.

Vậy hai số cần tìm: $u = 6 + 2\sqrt{2}$; $v = 6 - 2\sqrt{2}$ hoặc $u = 6 - 2\sqrt{2}$; $v = 6 + 2\sqrt{2}$.

Bài 20. Cho phương trình $x^2 + x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1 ; x_2 .

Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$.

Hướng dẫn: Xem nhận xét sau Bài 18.

Lời giải

Ta có: $a = 1$; $c = -3$ suy ra $ac = -3 < 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm (trái dấu) x_1 ; x_2 suy ra $x_1 + x_2 = -1$; $x_1 \cdot x_2 = -3$.

Mặt khác: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{3}$; $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{3}$.

Vậy $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0$ hay $3x^2 - x - 1 = 0$

Bài 21. Cho phương trình $x^2 + mx - 5 = 0$ có hai nghiệm x_1 ; x_2 . Lập phương trình có hai nghiệm là $-x_1$ và $-x_2$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 + mx - 5 = 0$, ta có: $a = 1$; $b = m$; $c = -5 \Rightarrow ac = -5 < 0$ suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt (trái dấu). x_1 ; x_2 .

Theo hệ thức Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -m$; $x_1 x_2 = -5$.

Mặt khác: $(-x_1) + (-x_2) = -(x_1 + x_2) = m$; $(-x_1)(-x_2) = x_1 x_2 = -5$

Vậy $-x_1$ và $-x_2$ là hai nghiệm phương trình $x^2 - mx - 5 = 0$.

Bài 22. Tìm m để hai phương trình sau tương đương: $x^2 + mx - 2 = 0$ và $x^2 - 2x + m = 0$ có tập hợp nghiệm trùng nhau.

Hướng dẫn:

1. Hai phương trình bậc hai cùng vô nghiệm hoặc:
2. Hai phương trình bậc hai cùng có nghiệm và tổng; tích hai nghiệm của từng phương trình phải bằng nhau.

Lời giải

Phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$ có hệ số $a = 1$ và $c = -2$ suy ra $ac < 0$, nên phương trình này không thể vô nghiệm, mà sẽ có hai nghiệm x_1 ; x_2 .

Tương tự:

Gọi $x'_1 + x'_2$ là hai nghiệm phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ với điều kiện $\Delta' = 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

Gọi $S_2 = x'_1 + x'_2 = 2$; $P_2 = x'_1 \cdot x'_2 = m$.

$$\text{Vậy hai phương trình tương đương khi và chỉ khi: } \begin{cases} m \leq 1 \\ S_1 = S_2 \\ P_1 = P_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ -m = 2 \\ -2 = m \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Bài toán tương tự.

Tìm m để phương trình sau tương đương: $x^2 + 2x - 3 = 0$ (1) và $2x^2 + mx - 6 = 0$ (2).

Lời giải

Phương trình (1) có $a ; c$ trái dấu nên luôn có hai nghiệm $x_1 ; x_2$

$$\text{Suy ra } S_1 = x_1 + x_2 = -2 ; P_1 = x_1 x_2 = -3$$

Tương tự: Phương trình (2) cũng luôn có hai nghiệm x_3 và x_4

$$\text{Suy ra } S_2 = x_3 + x_4 = -\frac{m}{2} ; P_2 = x_3 x_4 = -3.$$

$$\text{Hai phương trình tương đương} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = S_2 \\ P_1 = P_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -\frac{m}{2} \\ -3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$$

VI. Phân tích thành nhân tử

Bài 23. Tam thức $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm $x_1 ; x_2$. Chứng minh: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Lời giải

Ta có: $x_1 ; x_2$ là nghiệm của tam thức $ax^2 + bx + c$ có nghĩa là phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $x_1 ; x_2$.

$$\text{Theo định lí Viète: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} ; x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Khi đó vế phải được viết dưới dạng

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - x_2 x - x_1 x + x_1 x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] \\ &= a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] = ax^2 + bx + c \quad (\text{Đpcm}). \end{aligned}$$

Áp dụng: Phân tích đa thức $x^2 - 3x + 2$ thành nhân tử.

Phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có $a = 1 ; b = -3 ; c = 2$.

Suy ra $a + b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1 ; x_2 = 2$.

$$\text{Vậy } x^2 - 3x + 2 = 1 \cdot (x - 1)(x - 2).$$

Bài 24. Rút gọn phân thức: $P = \frac{x^2 - 9x + 8}{2x^2 - 3x + 1}$

Hướng dẫn: Phân tích các tam thức ở tử số và mẫu số thành nhân tử.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - 9x + 8 = 0$, ta có: $a = 1 ; b = -9 ; c = 8$.

Suy ra $a + b + c = 1 - 9 + 8 = 0$ suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1 ; x_2 = 8$.

$$\text{Vậy } x^2 - 9x + 8 = 1 \cdot (x - 1)(x - 8).$$

$$\text{Tương tự: } 2x^2 - 3x + 1 = 2 \cdot (x-1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x-1).$$

Điều kiện: $x \neq 1$ và $x \neq \frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy } \frac{x^2 - 9x + 8}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{(x-1)(x-8)}{(x-1)(2x-1)} = \frac{x-8}{2x-1}.$$

Bài 25. Rút gọn phân thức: $P = \frac{\sqrt{x}-1}{x-5\sqrt{x}+6}$

Hướng dẫn: Đặt $a = \sqrt{x}$; $a \geq 0 \Rightarrow x = a^2$. Rút gọn phân thức theo a .

Lời giải

Đặt $a = \sqrt{x}$, $a \geq 0 \Rightarrow x = a^2$.

$$\text{Ta có: } P = \frac{a-1}{a^2-5a+6}$$

Xét phương trình $a^2 - 5a + 6 = 0$; phương trình hai nghiệm: $a_1 = 1$ và $a_2 = 6$.

suy ra $a^2 - 5a + 6 = (a-1)(a-6) = (a-1)(a-6)$

$$\text{Vậy } P = \frac{a-1}{(a-1)(a-6)} = \frac{1}{a-6} \quad (a \neq 1; a \neq 6)$$

Thay $a = \sqrt{x}$ suy ra $P = \frac{1}{\sqrt{x}-6}$.

VII. BIẾT MỘT NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH, TÌM NGHIỆM CÒN LẠI

Bài 26. Chứng tỏ phương trình $3x^2 + 2x - 21 = 0$ có một nghiệm là -3 .

Tìm nghiệm kia.

Hướng dẫn: Thay $x = -3$ vào phương trình.

Dùng hệ thức: $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ để tìm x_2 ($x_1 = -3$) (hoặc $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$).

Lời giải

Thay $x = -3$ vào phương trình đã cho, ta có

$$3 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 21 = 0 \Leftrightarrow 27 - 6 - 21 = 0 \quad (\text{luôn đúng})$$

Vậy $x = -3$ là một nghiệm của phương trình.

Đặt $x_1 = -3$, nghiệm còn lại là x_2 .

Theo hệ thức Viète, ta có: $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-21}{3} = -7$

$$\text{Với } x_1 = -3 \Rightarrow (-3) \cdot x_2 = -7 \Rightarrow x_2 = \frac{7}{3}.$$

Cách khác: Theo hệ thức Viète:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{với } x_1 = -3 \Rightarrow (-3) + x_2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{7}{3}.$$

Bài 27. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có một nghiệm là 2. Tìm nghiệm còn lại.

Hướng dẫn: Xem Bài 26.

Lời giải

Thay $x = 2$ vào phương trình đã cho, ta được:

$$4 - 4m + m - 1 = 0 \Rightarrow -3m = -3 \Rightarrow m = 1$$

Với $m = 1$, phương trình trở thành: $x^2 - 2x = 0$.

$$\Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

Nghiệm còn lại là $x = 0$.

Cách khác: Tương tự, ta có $m = 1$. Đặt $x_1 = 2$.

Theo hệ thức Viète: $x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow 2 + x_2 = 2 \cdot 1 \Rightarrow x_2 = 0$.

(Cũng có thể tìm x_2 nhờ hệ thức $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$).

Bài 28. Cho phương trình $4x^2 + 3x + 3m - m^2 = n$ có một nghiệm $x_1 = -2$. Tìm x_2 và m .

Hướng dẫn: Dùng hệ thức Viète: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ để tìm x_2 ; dùng hệ thức $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ để tìm m .

Lời giải

Theo hệ thức Viète, ta có:

$$x_1 + x_2 = -\frac{3}{4} \text{ và } x_1 = -2 \Rightarrow -2 + x_2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{4}$$

$$\text{Lại theo hệ thức Viète: } x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3m - m^2}{4}; x_1 = -2; x_2 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3m - m^2}{4} = (-2) \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow m^2 - 3m - 10 = 0.$$

Tính nhẩm: $a = 1; c = -10 \Rightarrow ac < 0$, phương trình có nghiệm trái dấu (m_1 và m_2).

$$\text{Ta có: } m_1 m_2 = -10 = (-2) \cdot 5 = 2 \cdot (-5) = 1 \cdot (-10) = (-1) \cdot 10.$$

Vì $m_1 + m_2 = 3$. Vậy ta lấy $m_1 = -2; m_2 = 5$.

$$\text{Đáp số: } x_2 = \frac{5}{4}; m_1 = -2 \text{ (hoặc } m_2 = 5 \text{)}.$$

∞ HẾT ∞

Bài 21. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Các bước giải một bài toán bằng cách lập phương trình:

- Bước 1: Lập phương trình.
 - Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
 - Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
 - Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.
- Bước 2: Giải phương trình.
- Bước 3: Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Toán chuyển động đều

Bài 1. Quãng đường AB dài 90 km, có hai ô tô khởi hành cùng một lúc. Ô tô thứ nhất đi từ A đến B ô tô thứ hai đi từ B đến A. Sau 1 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi. Xe ô tô thứ hai tới A trước xe thứ nhất tới B là 27 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $S = v.t$ (S là quãng đường, v là vận tốc, t là thời gian, $S:(\text{km}); v(\text{km/h}); t(\text{h})$).

Lời giải

Ta có: 27 phút = $\frac{9}{20}$ (giờ).

Sau 1 giờ hai xe gặp nhau nên tổng vận tốc của hai xe bằng 90 (km / h).

Gọi x là vận tốc của xe thứ nhất ($x > 0; x$ tính bằng km / h).

thì vận tốc của xe thứ hai là $90 - x$ (km / h) ($x < 90$)

Thời gian của xe thứ nhất đi từ A đến B là $\frac{90}{x}$ (giờ).

Thời gian của xe thứ hai là $\frac{90}{90 - x}$ (giờ).

Ta có phương trình: $\frac{90}{x} - \frac{9}{90 - x} = \frac{9}{20}$.

$$\Leftrightarrow x^2 - 490x + 18000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \text{ (nhận)} \\ x = 450 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Trả lời: Vận tốc của xe thứ nhất là 40 (km / h); vận tốc của xe thứ hai là 50 (km / h).

Bài 2. Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 120 km trong một thời gian đã định. Sau khi đi 1 giờ, ô tô dừng lại 10 phút. Do đó để đến B đúng như dự kiến, ô tô phải tăng vận tốc thêm 6 km / h . Tính vận tốc ban đầu của ô tô.

Lời giải

Gọi x (km / h ; $x > 0$) là vận tốc ban đầu của ô tô.

Như vậy thời gian dự định để đi từ A đến B là $\frac{120}{x}$ (h).

Ta có 10 phút = $\frac{1}{6}$ (giờ).

Sau khi đi 1 giờ, ô tô đi được một đoạn đường là x (km) (như vận tốc của ô tô đã dự định đi 1 giờ được x (km)).

Vậy quãng đường còn lại là $120 - x$ (km).

Ta có phương trình $\frac{120-x}{x+6} + 1 + \frac{1}{6} = \frac{120}{x}$

$$\Leftrightarrow 6x(120-x) + 7x(x+6) = 720(x+6)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 42x - 4320 = 0(*)$$

$$\Delta = 1; b = 42 \Rightarrow b' = 21; c = -4320$$

$$\Delta' = 21^2 + 4320 = 4341 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 69$$

$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -21 - 69 \\ x = -21 + 69 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -90 \text{ (loại)} \\ x = 48 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Trả lời: Vận tốc dự định của ô tô là 48(km / h).

Bài 3. Một người đi xe đạp từ A đến B dài 36 km. Lúc về người đó tăng vận tốc thêm 3 km / h, do đó thời gian về ít hơn lúc đi là 36 phút. Tính vận tốc lúc đi.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài toán 1.

Lời giải

Gọi x (km / h; $x > 0$) là vận tốc của xe đạp lúc đi từ A đến B; như vậy thời gian đi từ A đến B mất $\frac{36}{x}$ (h).

Lúc về có vận tốc là $x + 3$ (km / h), nên thời gian về là $\frac{36}{x+3}$ (h).

Lại có 36 (phút) = $\frac{3}{5}$ (giờ).

Ta có phương trình: $\frac{36}{x} = \frac{36}{x+3} + \frac{3}{5}$

$$\Leftrightarrow 180(x+3) = 180x + 3x(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 180(x+3) = 180x + 3x(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 9x - 540 = 0(*)$$

$$(a = 3; b = 9; c = -540)$$

$$\Rightarrow \Delta = 9^2 - 4.3.(-540) = 6561 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 81.$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-9-81}{6} \\ x = \frac{-9+81}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -15 \text{ (loại)} \\ x = 12 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Trả lời: Vận tốc lúc đi từ A đến B của người đi xe đạp là 12(km / h).

II. Toán về công việc làm chung

Bài 4. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì 6 giờ đầy bể. Nếu mở vòi chảy một mình cho đầy bể thì vòi thứ hai cần nhiều hơn vòi thứ nhất 5 giờ. Tính thời gian để mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Hướng dẫn: Bài toán quy về đơn vị (bạn xem chương II. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn).

Lời giải

Gọi thời gian để vòi thứ nhất chảy đầy bể là x (giờ) ($x > 0$) thì thời gian để vòi thứ hai chảy đầy bể $x + 5$ (giờ)

Khi đó, mỗi giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể; vòi thứ hai chảy được: $\frac{1}{x + 5}$ bể và cả hai vòi chảy được $\frac{1}{6}$ bể.

Vậy, ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 5} = \frac{1}{6}$

$$\Leftrightarrow 6(x + 5) + 6x = x(x + 5)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (nhân)} \\ x = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Trả lời:

Vòi thứ nhất chảy đầy bể trong 10 giờ.

Vòi thứ hai chảy đầy bể trong 15 giờ.

Bài 5. Hai người cùng làm chung một công việc trong 12 ngày mới xong. Nếu người thứ nhất làm một mình được một nửa công việc và để người thứ hai làm phần còn lại cho xong thì mất tất cả 25 ngày. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì bao lâu sẽ xong?

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 4.

Lời giải

Gọi x (ngày; $x > 0$) là thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc; như vậy một ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc). Người thứ nhất và người thứ hai làm mỗi người một nửa công việc thì mất 25 ngày, vậy tổng số ngày làm riêng của hai người sẽ là $25 \times 2 = 50$ (ngày).

Vậy người thứ hai làm riêng hết $50 - x$ (ngày); nếu do đó một ngày người thứ hai làm được $\frac{1}{50 - x}$ (công việc).

Điều kiện $x < 50$; Theo bài ra, ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{50 - x} = \frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow 12(50 - x) + 12x = x(50 - x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 50x + 600 = 0 (*)$$

$$a = 1; b = -50; c = 600$$

$$\Rightarrow \Delta' = (-25)^2 - 600 = 25 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 5.$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 - 5 \\ x = 25 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \text{ (nhân)} \\ x = 30 \text{ (nhân)} \end{cases}$$

Trả lời: Người thứ nhất và người thứ hai làm một mình xong công việc lần lượt hết 20 ngày; 30 ngày (hoặc ngược lại: (30 ngày hoặc 20 ngày).

III. Tính độ dài, diện tích

Bài 6. Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m, chiều dài hơn chiều rộng là 7 m. Tính diện tích của mảnh đất.

Hướng dẫn: Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông có cạnh huyền là đường chéo hình chữ nhật, hai cạnh góc vuông là hai cạnh hình chữ nhật.

Lời giải

Gọi $x (m; x > 0)$ là chiều rộng của hình chữ nhật, thì chiều dài của nó là $x + 7 (m)$.

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông ABD , ta có:

$$BD^2 = AD^2 + AB^2$$

Vậy ta có phương trình: $x^2 + (x + 7)^2 = 13^2$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 14x - 120 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 7x - 60 = 0 (*)$$

$$(a = 1; b = 7; c = -60)$$

$$\Delta = 289 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 17$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-7-17}{2} \\ x = \frac{-7+17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \text{ (loại)} \\ x = 5 \end{cases}$$

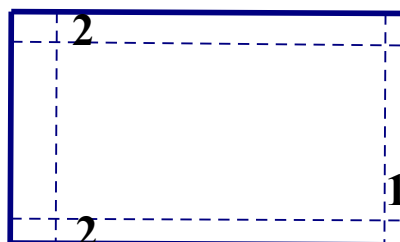
Chiều rộng, chiều dài hình chữ nhật lần lượt là 5 (m) và 12 (m). Vậy diện tích hình chữ nhật là: $60 (m^2)$.

Bài toán tương tự. Cạnh huyền của một tam giác vuông bằng 10 m. Hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 2 m. Tìm các cạnh góc vuông.

(Đáp số: 6 (m); 8 (m)).

Bài 7. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280 m. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn rộng 2 m, diện tích còn lại để trồng trọt là $4256 m^2$. Tính chiều dài, chiều rộng của vườn.

Lời giải



Nửa chu vi của vườn là $\frac{280}{2} = 140$ (m).

Gọi chiều dài của hình chữ nhật là x (m; $70 < x < 140$),
chiều rộng là $140 - x$ (m).

Mỗi bên đắp 2 (m) làm lối đi, nên chiều dài của đất để lại trồng trọt chỉ còn $x - 4$ (m) và chiều rộng là $140 - x - 4 = 136 - x$ (m).

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$(x - 4)(136 - x) = 4256$$

$$\Leftrightarrow 136x - x^2 - 544 + 4x = 4256$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 140x + 4800 = 0 (*)$$

$$(a = 1; b = -140 \Rightarrow b' = -70; c = 4800)$$

$$\Delta' = 4900 - 4800 = 100 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 10$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 70 - 10 \\ x = 70 + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \text{ (loại)} \\ x = 80 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Trả lời: Chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là 80 (m) và 60 (m)

IV. Tìm số tự nhiên

Bài 8. Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.

Hướng dẫn: Hai số tự nhiên liên tiếp là n và $n + 1$ (chẳng hạn: 5 và 6).

Lời giải

Gọi số tự nhiên là x ($x \in N^*$) thì số kế sau nó là $x + 1$. Theo bài ra, ta có phương trình:

$$x(x + 1) - (x + x + 1) = 109$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - x - x - 1 - 109 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 110 = 0 (*)$$

$$(a = 1; b = -1; c = -110)$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-110) = 441 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 21$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + 21}{2} \\ x = \frac{1 - 21}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \text{ (nhận)} \\ x = -10 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Trả lời: Hai số cần tìm là 11 và 12.

Bài 10. Tìm hai số tự nhiên, biết rằng số lớn hơn số bé 5 đơn vị, tổng các bình phương của chúng bằng 4153.

Hướng dẫn: Hai số là a và b thì tổng các bình phương là $a^2 + b^2$ (không phải là $(a + b)^2$).

Lời giải

Gọi số bé là x ($x \in N^*$) thì số lớn sẽ là $x + 5$. Theo đề ra, ta có phương trình:

$$x^2 + (x+5)^2 = 4153$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 10x - 4128 = 0(*)$$

$$a = 2; b = 10 \Rightarrow b' = 5; c = -4128$$

$$\Delta' = 25 + 2.4128 = 8281 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 91$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5-91}{2} \\ x = \frac{-5+91}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -48(\text{loại}) \\ x = 43(\text{nhận}) \end{cases}$$

Trả lời: Số bé là 43; số lớn là $43 + 5 = 48$.

VI. Bài toán về phần trăm

Bài 11. Dân số của một tỉnh sau hai năm tăng từ 2.000.000 người lên 2048288 người. Tính xem hàng năm trung bình dân số tăng bao nhiêu phần trăm?

Hướng dẫn: Tìm số dân tăng từng năm: Sau năm thứ nhất khác với sau năm thứ hai. Ta không thể lấy 2048288 trừ đi 2.000.000 và chia trung bình (chia cho 2).

Lời giải

Gọi phần trăm tăng mỗi năm là $x(\%)$; $x > 0$.

Sau năm thứ nhất số dân của tỉnh là:

$$2.000.000 + 2.000.000 \cdot \frac{x}{100} = 2.000.000 + 20.000x$$

Số dân sau năm thứ hai là:

$$(2.000.000 + 20.000x) \cdot \frac{x}{100} = 200x(x + 100)$$

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$2000.000 + 20.000x + 200x(x + 100) = 2.048.288$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 200x - 241,44 = 0(*)$$

$$(a = 1; b = 200 \Rightarrow b' = 100; c = -241,44)$$

$$\Delta' = 10000 + 241,44 = 10241,44 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 101,2$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -100 - 101,2 \\ x = -100 + 101,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -201,2(\text{loại}) \\ x = 1,2(\text{tm}) \end{cases}$$

Trả lời: Hàng năm dân số tỉnh A tăng $1,2(\%)$.

Bài 12. Một người vay 20 triệu đồng ở ngân hàng thời hạn một năm phải trả cả vốn lẫn lãi. Song được ngân hàng tiếp tục cho vay thêm một năm nữa. Hết hai năm phải trả 24.200.000 đồng. Hỏi lãi suất cho vay là bao nhiêu phần trăm trong một năm.

Hướng dẫn: Bài toán này tương tự như bài toán 11, ta không tính trung bình, mà tính "lãi mẹ đẻ lãi con" mới đúng.

Lời giải

Gọi $x(\%)$; $x > 0$ là lãi suất trong một năm của ngân hàng.

Sau năm thứ nhất người đó phải trả:

$$20.000.000 + 20.000.000 \cdot \frac{x}{100} = 200.000(100 + x)$$

Số tiền sau năm thứ hai tăng thêm là:

$$200.000(100 + x) \frac{x}{100} = 2000x(x + 100)$$

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$200.000(100 + x) + 2000x(x + 100) = 24.2000.000$$

$$2000x^2 + 400.000x - 4.200.000 = 0(*)$$

Giải ra, ta được nghiệm của phương trình (*) là: $\begin{cases} x_1 = 10 \text{ (thỏa)} \\ x_2 = -210 \text{ (loại)} \end{cases}$

Trả lời: Lãi của ngân hàng một năm là 10% .

∞ HẾT ∞

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A. TRẮC NGHIỆM

- Bài 1.** Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$?
- A. (1;2). B. (2;1). C. (-1;2). D. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.
- Bài 2.** Hình vẽ bên là hai đường parabol trong mặt phẳng toạ độ Oxy. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $a < 0 < b$. B. $a < b < 0$. C. $a > b > 0$. D. $a > 0 > b$.
- Bài 3.** Các nghiệm của phương trình $x^2 + 7x + 12 = 0$ là:
- A. $x_1 = 3; x_2 = 4$. B. $x_1 = -3; x_2 = -4$. C. $x_1 = 3; x_2 = -4$. D. $x_1 = -3; x_2 = 4$.
- Bài 4.** Phương trình bậc hai có hai nghiệm $x_1 = 13$ và $x_2 = 25$ là:
- A. $x^2 - 13x + 25 = 0$. B. $x^2 - 25x + 13 = 0$.
C. $x^2 - 38x + 325 = 0$. D. $x^2 + 38x + 325 = 0$.
- Bài 5.** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ là:
- A. 13. B. 19. C. 25. D. 5.
- Bài 6.** Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật có chu vi 20 cm và diện tích 24 cm² là:
- A. 5 cm và 4 cm. B. 6 cm và 4 cm. C. 8 cm và 3 cm. D. 10 cm và 2 cm.

Hướng dẫn- đáp số

- Bài 1.** Chọn D.
Bài 2. Chọn D.
Bài 3. Chọn B.
Bài 4. Chọn C.
Bài 5. $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2; x_1 + x_2 = 5; x_1x_2 = 6$
 $\Rightarrow A = 25 - 2.6 = 13$. Chọn A.
Cách khác: Dùng MTCT, ta có: $x_1 = 2; x_2 = 3$
 $\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 2^2 + 3^2 = 13$. Chọn A.
Bài 6. Gọi a, b lần lượt là chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật ($a > b > 0$).
 $\Rightarrow a + b = 10$ (cm); $ab = 24$ (cm²)
Vậy a, b là nghiệm của phương trình: $x^2 - 10x + 24 = 0$
Phương trình có hai nghiệm là $x = 6$ và $x = 4$.
Ta lấy $a = 4; b = 6$ thoả mãn điều kiện $a > b > 0$.
Chọn B.
Cách khác: Ta thấy $5.4 = 20 \neq 24$.
 $10.2 = 20 \neq 24$

Vậy có thể chọn B hoặc C.

Xét B: $2(6+4) = 20$. Vậy chọn B.

B. TỰ LUẬN

Bài 1. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{5}{2}x^2$ và $y = -\frac{5}{2}x^2$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ

Bài 2. Cho hàm số $y = ax^2$. Xác định hệ số a , biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(3;3)$.

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $5x^2 - 5\sqrt{5}x + 2 = 0$

b) $2x^2 - 2\sqrt{6}x - 8 = 0$

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - 11x + 30 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính:

a) $x_1^2 + x_2^2$;

b) $x_1^3 + x_2^3$.

Bài 5. Tìm hai số u và v , biết:

a) $u + v = 13$ và $uv = 40$;

b) $u - v = 4$ và $uv = 77$.

Bài 6. Các kỹ sư đảm bảo an toàn của đường cao tốc thường sử dụng công thức $d = 0,05v^2 + 1,1v$ để ước tính khoảng cách an toàn tối thiểu d (feet) (tức là độ dài quãng đường mà xe đi được kể từ khi đạp phanh đến khi xe dừng lại) đối với một phương tiện di chuyển với tốc độ v (dặm/giờ) (theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008). Giả sử giới hạn tốc độ trên một đường cao tốc nào đó là 70 dặm/giờ. Nếu một ô tô có thể dừng lại sau 300 feet kể từ khi đạp phanh thì ô tô đó có chạy nhanh hơn giới hạn tốc độ của đường cao tốc này không?

Bài 7. Bác Hương gửi tiết kiệm ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 12 tháng. Sau một năm, do chưa có nhu cầu sử dụng nên bác chưa rút số tiết kiệm này ra mà gửi tiếp và gửi thêm một số tiết kiệm mới với số tiền 50 triệu đồng, cũng với kì hạn 12 tháng. Sau hai năm (kể từ khi gửi lần đầu), bác Hương nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là 176 triệu đồng. Tính lãi suất năm của hình thức gửi tiết kiệm này (giả sử lãi suất không đổi trong suốt quá trình gửi).

Bài 8. Hai khối học sinh lớp 8 và 9 của một trường trung học cơ sở tham gia lao động. Nếu làm chung thì sẽ hoàn thành công việc sau 1 giờ 12 phút. Nếu mỗi khối lớp làm riêng thì khối lớp 9 làm xong nhanh hơn khối lớp 8 là 1 giờ. Hỏi nếu mỗi khối lớp làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc?

Bài 9. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước và sau 5 giờ 50 phút thì đầy bể. Nếu chảy riêng một vòi thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai 4 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì bao lâu mới đầy bể.

Bài 10. Một ca nô chạy từ A đến B và trở về hết tất cả 3 giờ. Tính vận tốc của ca nô khi đi từ A đến B, biết vận tốc lúc đi hơn lúc về là 15 km/h và đoạn sông dài 30 km.

Hướng dẫn

Bài 1. Học sinh tự giải.

Bài 2. Thay $x = 3; y = 3$ vào phương trình $y = ax^2$, ta được: $3 = a.3^2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$.

Bài 3. Đáp số: a) $x = \frac{\pm\sqrt{35} + 3\sqrt{5}}{5}$; b) $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Bài 4. $\Delta = 11^2 - 4.1.30 = 1 > 0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Ta có: $x_1 + x_2 = 11$; $x_1 \cdot x_2 = 30$

a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 11^2 - 2 \cdot 30 = 61$

b) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] = 11 \cdot (11^2 - 3 \cdot 30) = 341$

Cách khác:

Phương trình $x^2 - 11x + 30 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 5$ và $x_2 = 6$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 5^2 + 6^2 = 61$;

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = 5^3 + 6^3 = 341$.

Bài 5. a) $13^2 - 4 \cdot 40 = 9 > 0$

Vậy u, v là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 13x + 40 = 0 \Rightarrow x_1 = 8; x_2 = 5$

Ta lấy $u = 8; v = 5$ hoặc $u = 5; v = 8$

b) Ta có $u - v = 4$ hay $u + (-v) = 4$;

$uv = 77 \Rightarrow u \cdot (-v) = -77$.

$u^2 = 4 \cdot (-77) = 4^2 + 4 \cdot 77 > 0$.

Vậy $u, (-v)$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 4x - 77 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 11$ và $x_2 = -7$

Ta lấy $u = 11; v = 7$

Bài 6. Học sinh tự giải.

Bài 7. Xem bài toán 12.

Đáp số: 9%

Bài 8. Đáp số: Lớp 8 làm trong 3 giờ, lớp 9 làm trong 2 giờ.

Bài 9. Gọi x là thời gian vòi thứ nhất chảy đầy bể ($x > 0$, x tính bằng giờ)

Thời gian vòi thứ hai chảy đầy bể là x

Một giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể), vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{x+4}$ (bể).

Ta có: 5 giờ 50 phút = $\frac{35}{6}$ (giờ)

Khi đó cả hai vòi chảy 1 giờ $\frac{6}{35}$ (bể)

Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{6}{35}$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 23x - 70 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (nhận)} \\ x = \frac{7}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Trả lời: Vòi thứ nhất chảy đầy bể trong 10 giờ, vòi thứ hai chảy đầy bể trong 14 giờ.

Bài 10. Gọi x (km/h; $x > 0$) là vận tốc của ca nô lúc đi; vận tốc của ca nô lúc về sẽ là $x - 15$ ($x > 15$).

Thời gian lúc đi của ca nô là $\frac{30}{x}$; thời gian lúc về: $\frac{30}{x-15}$.

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{30}{x} + \frac{30}{x-30} = 3$

$$\Leftrightarrow 30x - 450 + 30x = 3x(x-15)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 35x + 150 = 0 (*)$$

$$a = 1; b = -35; c = 150 = (-35)^2 - 4.150 = 625 > 0$$

$$\Rightarrow \Delta = \sqrt{625} = 25.$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{35-25}{2} \\ x = \frac{35+25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5(\text{loại}) \\ x = 30(\text{nhận}) \end{cases}$$

Trả lời: Vận tốc lúc đi của ca nô là 30 (km/h).

∞ HẾT ∞