Chương III. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA

Bài 7. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Căn bậc hai

* Căn bậc hai của số thực không âm a là số thực x sao cho $x^2 = a$.
Nhận xét:

- Số âm không có căn bậc hai;
- Số 0 có một căn bậc hai duy nhất là 0;
- Số dương a có đúng hai căn bậc hai đối nhau là $\sqrt{a}$ (căn bậc hai số học của a) và $-\sqrt{a}$.

* Tính chất của căn bậc hai: $\sqrt{a^2} = |a|$ với mọi số thực a.

2. Căn thức bậc hai:

* Định nghĩa
Căn thức bậc hai là biểu thức có dạng $\sqrt{A}$, trong đó A là một biểu thức đại số. A được gọi là biểu thức lấy căn hoặc biểu thức dưới dấu căn.
$\sqrt{A}$ xác định khi A lấy giá trị không âm, ta thường viết là $A \geq 0$. Ta nói $A \geq 0$ là điều kiện xác định (hay điều kiện có nghĩa) của $\sqrt{A}$.

* Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$
Tương tự như căn bậc hai của một số thực không âm, với A là một biểu thức, ta cũng có:

+ Với $A \geq 0$, ta có $\sqrt{A} \geq 0, (\sqrt{A})^2 = A$;

+ $\sqrt{A^2} = |A|$

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tìm căn bậc hai của một số

Bài toán 1. Tìm các căn bậc hai của $4; \dfrac{16}{9}; 3$.

Lời giải

Ta có: $4 > 0$ nên 4 có hai căn bậc hai là 2 và -2 vì $2^2 = 4$ và $(-2)^2 = 4$

Ta có: $\dfrac{16}{9} > 0$ nên $\dfrac{16}{9}$ có hai căn bậc hai là $\dfrac{4}{3}$ và $-\dfrac{4}{3}$ vì $\left(\pm\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$.

Ta có $3 > 0$ nên 3 có hai căn bậc hai là $\sqrt{3}$ và $-\sqrt{3}$. Vì $(\pm\sqrt{3})^2 = 3$.

Bài toán 2. Giải phương trình:

a) $x^2 = 4$; b) $x^2 = 2$; c) $x^2 = -2$; d) $x^2 = 0$.

Hướng dẫn: Nghiệm của phương trình $x^2 = a$ (với $a \geq 0$) là các căn bậc hai của a.

Lời giải

a) Ta có $4>0$ nên 4 có hai căn bậc hai là 2 và -2 vì $(\pm 2)^2=4$.

Vậy $x^2=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Tập nghiệm của phương trình $x^2=4$ là $S=\{-2;2\}$.

b) Ta có $2>0$ nên 2 có hai căn bậc hai là $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$ vì $(\pm\sqrt{2})^2=2$.

Vậy $x^2=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Tập nghiệm của phương trình $x^2=2$ là $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$.

c) Ta có: $-2<0$ nên -2 không có căn bậc hai $\Rightarrow$ phương trình $x^2=-2$ vô nghiệm.

Vậy $S=\varnothing$.

d) Ta có $x^2=0 \Rightarrow x=0$.

Tập nghiệm phương trình $x^2=0$ là $S=\{0\}$.

(Bạn đừng nhầm với $S=\varnothing$ và $S=\{0\}$).

Ta có thể giải cách khác nhau sau, chẳng hạn.

$*\, x^2=4 \Leftrightarrow x^2-2^2=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

$*\, x^2=2 \Rightarrow x^2-2=0 \Rightarrow x^2-(\sqrt{2})^2=0 \Rightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bài toán 3. Tìm căn bậc hai số học của số sau:

a) 144; b) $\dfrac{16}{9}$; c) $1,21$; d) $(-1,69)^2$.

Hướng dẫn: Gọi x (không âm) là căn bậc hai số học của số a, ta có: $x^2=a$, ta đưa về bài toán 2 .

Lời giải

a) Gọi $x\left(x\geq 0\right)$ là căn bậc hai số học của 144, ta có: $144>0$, nên 144 có một căn số học là 12, ta viết: $\sqrt{144}=12$ vì $12^2=144$.

b) Ta có: $\sqrt{\dfrac{16}{9}}=\dfrac{4}{3}$ vì $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{4}{3}>0 \\ \left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{16}{9} \end{array}\right.$.

c) Ta có: $\sqrt{1,21}=1,1$ vì $\left\{\begin{array}{l} 1,1>0 \\ (1,1)^2=1,21 \end{array}\right.$.

d) Ta có $\sqrt{(-1,69)^2}=\sqrt{(1,69)^2}=1,69$ vì $1,69>0$.

II. Phương trình dạng: $\sqrt{A}=B$

Cách giải: $\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \begin{cases} B\ge 0 \\ A=B^2 \end{cases}$.

(Thực chất của vấn đề là ta đã bình phương hai vế, vì $(\sqrt{A})^2=A$).

Bài toán 4. Giải phương trình:

a) $\sqrt{x}=3$; b) $\sqrt{x-2}=1$; c) $\sqrt{x}=x$; d) $\sqrt{6-4x+x^2}=x+4$.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{x}=3 \Rightarrow \begin{cases} 3\ge 0 \text{ (luôn đúng)} \\ x=3^2 \end{cases} \Rightarrow x=9$. Tập nghiệm: $S=\{9\}$.

b) Ta có $\sqrt{x-2}=1 \Rightarrow \begin{cases} 1\ge 0 \text{ (luôn đúng)} \\ x-2=1 \end{cases} \Rightarrow x=3$. Tập nghiệm: $S=\{3\}$.

c) Ta có $\sqrt{x}=x \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x(x-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$. Tập nghiệm: $S=\{0;1\}$

.

d) Ta có $\sqrt{6-4x+x^2}=x+4 \Rightarrow \begin{cases} x+4\ge 0 \\ 6-4x+x^2=(x+4)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ 6-4x+x^2=x^2+8x+16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ 12x=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ x=-\dfrac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow x=-\dfrac{5}{6}$. Tập nghiệm: $S=\left\{-\dfrac{5}{6}\right\}$

.

Bài toán 5. Giải phương trình:

a) $\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1}=0$; b) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x^2+5x+4}=0$.

Hướng dẫn: Ta đưa về dạng $\sqrt{A}=\sqrt{B}$

Ta có $\begin{cases} \sqrt{B}\ge 0 \\ A=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B\ge 0 \\ A=B \end{cases}$.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1}=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-1}=\sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x^2-1=x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-x=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x(x-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x=0 \vee x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x=0 \vee x=1 \end{cases} \Rightarrow x=1$.

Tập nghiệm: $S=\{1\}$.

Chú ý: Ta có thể xét $\sqrt{A}=\sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A\ge 0 \\ A=B^2 \end{cases}$, nhưng ở bài toán này, ta không nên đặt $x^2-1\ge 0$.

Ta xét bài toán b) sau đây:

b) Ta có: $\sqrt{x+4}-\sqrt{x^2+5x+4}=0 \quad \Rightarrow \sqrt{x+4}=\sqrt{x^2+5x+4} \quad \Rightarrow \begin{cases} x+4\ge 0 \\ x^2+5x+4=x+4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ x^2+4x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ x(x+4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ x=0 \vee x+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ x=0 \vee x=-4 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4 \end{array}\right.$.

Tập nghiệm: $S=\{-4;0\}$.

Ta có thể xét bài toán tương tự sau đây: $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}=0$

Vì $\sqrt{x^2-1}\ge 0$ và $\sqrt{x-1}\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}\ge 0$.

Vậy $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ \sqrt{x-1}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Rightarrow x=1$.

Bạn hãy giải phương trình sau:

1) $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x-3}=0$ Đáp số: $x=3$

2) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x-1}=0$ Đáp số: $x=1$

3) $\{x-2<1=\sqrt{1}$ Đáp số: $x=4$.

III. Tìm điều kiện xác định của biểu thức

Bài toán 6. Tìm x để cho căn thức sau có nghĩa.

a) $\sqrt{-2x+1}$ b) $\sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$ c) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}$ d) $\sqrt{\dfrac{-3}{x^2+1}}$

Hướng dẫn: $\sqrt{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A\ge 0$; $\dfrac{1}{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A\ne 0$.

Lời giải

a) $\sqrt{-2x+1}$ xác định(có nghĩa) $\Rightarrow -2x+1\ge 0 \Rightarrow 2x\le 1 \Rightarrow x\le \dfrac{1}{2}$.

b) $\sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$ xác định $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+2}\ge 0 \\ x+2\ne 0 \end{cases} \Rightarrow x+2>0 \Rightarrow x>-2$.

c) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}$ xác định $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\ge 0 \\ x^2\ne 0 \end{cases} \Rightarrow x\ne 0$.

d) $\sqrt{\dfrac{-3}{x^2+1}}$ xác định $\Rightarrow \dfrac{-3}{x^2+1}\ge 0$ (không tồn tại).

Bài toán 7. Tìm x để căn thức sau có nghĩa.

a) $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ b) $\sqrt{x(1-x)}$ c) $\sqrt{\dfrac{1+x}{2-x}}$

Hướng dẫn: Ta tìm điều kiện cho tất cả các căn bậc hai xác định.

Lời giải

a) $\sqrt{x}$ và $\sqrt{1-x}$ xác định $\Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 1-x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\le 1 \end{cases} \Rightarrow 0\le x\le 1$

b) $\sqrt{x(1-x)}$ xác định $\Rightarrow x(1-x)\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 1-x\ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x\le 0 \\ 1-x\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\le 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x\le 0 \\ x\ge 1 \end{cases}$ (vô lí)

$\Rightarrow 0\le x\le 1$

c) $\sqrt{\dfrac{1+x}{2-x}}$ xác định $\Rightarrow \dfrac{1+x}{2-x}\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+x\ge 0 \\ 2-x>0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 1+x\le 0 \\ 2-x<0 \end{cases} \Rightarrow -1\le x<2$

Bài toán 8. Tìm x để biểu thức sau xác định :

a) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$ b) $\sqrt{x^2-1}$ c) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 2.

Lời giải

a) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$ xác định $\Rightarrow (x-1)(x-3)\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x-3\ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-1\le 0 \\ x-3\le 0 \end{cases} \Rightarrow x\ge 3$ hoặc $x\le 1$

b) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{(x-1)(x+1)}$

Vậy $\sqrt{x^2-1}$ xác định $\Rightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x+1\ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-1\le 0 \\ x+1\le 0 \end{cases} \Rightarrow x\ge 1$ hoặc $x\le -1$

c) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ xác định $\Rightarrow \dfrac{x-1}{x-2}\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x-2>0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-1\le 0 \\ x-2<0 \end{cases} \Rightarrow x>2$ hoặc $x\le 1$

IV. Rút gọn biểu thức

Bài toán 9. Rút gọn:

a) $A=\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$ b) $B=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$ c) $C=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}-\sqrt{3}$

Hướng dẫn: Áp dụng hằng đẳng thức: $\sqrt{A^2}=|A|$.

Lời giải

a) Ta có : $A=\left|\sqrt{3}-2\right|=-\left(\sqrt{3}-2\right)$; vì $\sqrt{3}-2<0$

Vậy $A=2-\sqrt{3}$.

b) Ta có : $B=\left|2-\sqrt{5}\right|=-\left(2-\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}-2$;(vì $2-\sqrt{5}<0$).

c) Ta có: $C=\left|\sqrt{3}-1\right|-\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)-\sqrt{3}=-1$ (vì $\sqrt{3}-1>0$).

Bài toán 10. Rút gọn:

a) $A=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ b) $B=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

c) $C=\sqrt{23+8\sqrt{7}}-\sqrt{7}$ d) $D=\sqrt{11-6\sqrt{2}}-3+\sqrt{2}$

Hướng dẫn: a) Ta có $3+2\sqrt{2}=1+2.1.\sqrt{2}+2 \;\; =1^2+2.1.\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$

$\Rightarrow \sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)2}=\left|1+\sqrt{2}\right|=1+\sqrt{2}$.

(Các biểu thức khác được làm tương tự).

Lời giải

a) Ta có : $A=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}-\sqrt{2-2\sqrt{2}+1} \;\; =\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+2.\sqrt{2}.1+1^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}.1+1^2}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} \;\; =\left|\sqrt{2}+1\right|-\left|\sqrt{2}-1\right|=\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)=2$

b) Ta có: $B=\sqrt{4-2.2\sqrt{3}+3}+\sqrt{4+2.2\sqrt{3}+3} \;\; =\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$

$=\left|2-\sqrt{3}\right|+\left|2+\sqrt{3}\right|=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$

c) Ta có: $C=\sqrt{16+2.4.\sqrt{7}+7}-\sqrt{7} \;\; =\sqrt{\left(4+\sqrt{7}\right)^2}-\sqrt{7}=\left|4+\sqrt{7}\right|-\sqrt{7} \;\; =4+\sqrt{7}-\sqrt{7}=4$

d) Ta có: $D=\sqrt{9-2.3\sqrt{2}+2}-3+\sqrt{2} \;\; =\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}-3+\sqrt{2}=\left|3-\sqrt{2}\right|-3+\sqrt{2}$

$=3-\sqrt{2}-3+\sqrt{2}=0$

Bài toán 11. Rút gọn biểu thức: a) A = $\sqrt{x^2-12x+36}-x$

b) B = $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}$ c) C = $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

Hướng dẫn:

a) ta có: $x^2-12x+36=\left(x-6\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\left(x-6\right)^2}=\left|x-6\right|$

b), c) Đưa các biểu thức trong một dấu căn trở thành bình phương của một tổng hoặc một hiệu.

Lời giải

a) Ta có: A = $\sqrt{\left(x-6\right)^2}-x=\left|x-6\right|-x \quad \Rightarrow \begin{cases} x-6-x, \text{ nếu } x\ge 6 \\ -\left(x-6\right)-x, \text{ nếu } x<6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6, \text{ nếu x} \ge 6 \\ \text{6-2x, nếu } x<6 \end{cases}$

b) Ta có: B = $\sqrt{\left(x-2\right)-2\sqrt{x-2}.1+1}+\sqrt{x-2+2\sqrt{-2}.1+1}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-2}+1\right)^2}=\left|\sqrt{x-2}-1\right|+\left|\sqrt{x-2}+1\right|$

Trường hợp 1:

Nếu $\sqrt{x-2}-1\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x-2}\ge 1 \Rightarrow x-2\ge 1 \Rightarrow x\ge 3$, ta có B = $\sqrt{x-2}-1+\sqrt{x-2}+1=2\sqrt{x-2}$

Trường hợp 2:

Nếu $\sqrt{x-2}-1\le 0 \Rightarrow x-2<1 \Rightarrow 0\le x-2<1 \Rightarrow 2\le x<3$ Ta có:
$B=-\left(\sqrt{x-2}-1\right)+\left(\sqrt{x-2}+1\right)=2$

Vậy: Nếu $x\ge 3$, ta có $B=2\sqrt{x-2}$

Nếu $2\le x<3$ ta có $B=2$

c) Ta có $C=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|$

Trường hợp 1:

Nếu $\sqrt{x-1}-1\ge 0 \Rightarrow x\ge 2$ Ta có $C=2\sqrt{x-1}$

Trường hợp 2:

Nếu $\sqrt{x-1}-1<0 \Rightarrow \sqrt{x-1}<\sqrt{1} \Rightarrow 0\le x-1<1 \Rightarrow 1\le x<2$

Ta có: $C=\sqrt{x-1}+1-\left(\sqrt{x-1}-1\right)=2$

Vậy: Nếu $x\ge 2$ ta có $C=2\sqrt{x-1}$

Nếu $1\le x<2$ ta có $C=2$

Cách giải khác: (đối với bài toán c).

Đặt $u=\sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} u>0 \\ u^2=x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u\ge 0 \\ x=u^2+1 \end{cases}$

Khi đó, ta có: $C=\sqrt{u^2+1+2u}+\sqrt{u^2+1-2u}=\sqrt{(u+1)^2}+\sqrt{(u-1)^2}=|u+1|+|u-1|$

Trường hợp 1:

Nếu $u-1\ge 0 \Rightarrow u\ge 1 \Rightarrow \sqrt{x-1}\ge 1 \Rightarrow x\ge 2$ Ta có: $C=2u=2\sqrt{x-1}\left(u\ge 0 \Rightarrow u+1>0\right)$

Trường hợp 2:

Nếu $u-1<0 \Rightarrow u<1 \Rightarrow \sqrt{x-1}<1$

$u\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x-1}\ge 0 \Rightarrow x\ge 1 \Rightarrow \sqrt{x-1}<1 \Rightarrow x-1<1 \Rightarrow x<2$

Vậy $1\le x<2$

Ta có: $C=u+1-(u-1)=2$

(Bạn có thể giải lại bài toán b, theo cách này)

Bài toán 12. Tính giá trị của biểu thức

a) $A=-4x-2+\sqrt{9x^2-6x+1}$, với $x=2014$

b) $B=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+4x+4}$, với $x=2015$

Hướng dẫn: Đưa biểu thức dưới dấu căn trở thành bình phương một tổng hoặc một hiệu và áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$.

Lời giải

a) Ta có: $A = -4x - 2 + \sqrt{(3x-1)^2} = -4x - 2 + |3x-1|$

Thay $x = 2014$ vào biểu thức trên, ta được:

$A = -4.2014 - 2 + |3.2014 - 1| = -4.2014 - 2 + 3.2014 - 1 = -2014 - 3 = -2017$

b) Ta có: $B = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+2)^2} = |x-2| + |x+2|$

Thay $x = 2015$ vào biểu thức trên, ta được:
$B = |2015 - 2| + |2015 + 2| = 2015 - 2 + 2015 + 2 = 4030$

V. Giải phương trình

Bài toán 13. Giải phương trình

a) $\sqrt{x^2} = 5$ b) $\sqrt{25x^2} = 10$ c) $\sqrt{9x^2} = 2x + 1$ d) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 1$

Hướng dẫn: Biến đổi biểu thức dưới dấu căn trở thành bình phương của một tổng hoặc một hiệu và áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{x^2} = 5 \Rightarrow |x| = 5 \Rightarrow \begin{cases} 5 \ge 0 \text{ (luôn đúng)} \\ x = \pm 5 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 5$

Tập hợp nghiệm: $S = \{-5; 5\}$.

b) Ta có: $\sqrt{25x^2} = 10 \Rightarrow \sqrt{(5x)^2} = 10 \Rightarrow |5x| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 10 \ge 0 \text{ (luôn đúng)} \\ 5x = \pm 10 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 2$

Tập hợp nghiệm: $S = \{-2; 2\}$.

c) Ta có: $\sqrt{9x^2} = 2x + 1 \Rightarrow \sqrt{(3x)^2} = 2x + 1 \Rightarrow |3x| = 2x + 1 \, (*)$

Điều kiện $2x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{-1}{2}$

Khi đó: (*) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 2x + 1 \\ 3x = -(2x+1) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-1}{5} \end{array}\right. \left(\text{thoả mãn điều kiện } x \ge \dfrac{-1}{2}\right)$

Tập hợp nghiệm: $S = \left\{-\dfrac{1}{5}; 1\right\}$.

VI. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức

Bài toán 14: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

a) $\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ b) $\sqrt{x - 2 + 2\sqrt{x-3}} + \sqrt{x + 6 + 6\sqrt{x-3}}$

Hướng dẫn: Áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

và $|A|+|B|\ge|A+B|$ dấu $"="$ xảy ra $\Rightarrow AB\ge 0$ (A và B cùng dấu hoặc bằng 0).

Lời giải

a) Ta có: $A=|x|+|x-2|=|x|+|2-x|\ge|x+(2-x)|=2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 2.

Dấu $"="$ xảy ra, chẳng hạn $x=0$

(Khi đó thoả mãn điều kiện $x(2-x)\ge 0$)

Chú ý: Ta không cần tìm hết tất cả các giá trị của x thoả mãn $x(2-x)\ge 0$. Nếu ta có: $x(2-x)\ge 0\Rightarrow 0\le x\le 2$).

Ta có thể giải cách khác.

Ta có $A=|x|+|x+2|$

Trường hợp 1:

Nếu $x\ge 2\Rightarrow A=x+x-2=2x-2$

Với $x\ge 2\Rightarrow 2x\ge 4\Rightarrow 2x-2\ge 2$

Giá trị nhỏ nhất của A bằng 2.

Trường hợp 2:

Nếu $0\le x<2\Rightarrow A=x-(x-2)=2$

Trường hợp 3: Nếu $x<0\Rightarrow A=-x-(x-2)=-2x+2$

Vì $x<0\Rightarrow -2x>0\Rightarrow -2x+2>2$

Vậy kết hợp các kết quả của ba trường hợp, ta có: giá trị nhỏ nhất của A bằng 2.

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=0$

b) Ta có: $B=\left|\sqrt{x-3}+1\right|+\left|\sqrt{x-3}+3\right|$

Điều kiện: $x-3\ge 0\Rightarrow x\ge 3$ khi đó biểu thức trong các dấu giá trị tuyệt đối đều dương.

Ta có: $B=\sqrt{x-3}+1+\sqrt{x-3}+3=2\sqrt{x-3}+4$

Vì $x\ge 3\Rightarrow 2\sqrt{x-3}\ge 0\Rightarrow 2\sqrt{x-3}+4\ge 4$

Vậy giải trị nhỏ nhất của B bằng 4.

Dấu $"="$ xảy ra $\Rightarrow x=3$.

Chú ý: Từ kết quả trên, ta có bài toán giải phương trình:

$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}}=4$.

Chương III. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA

BÀI 8. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khai căn bậc hai và phép nhân

Liên hệ giữa phép khai căn bậc hai và phép nhân:

Với A, B là các biểu thức không âm, ta có: $\sqrt{A}.\sqrt{B}=\sqrt{AB}$.

Chú ý: Kết quả trên có thể mở rộng cho nhiều biểu thức không âm, chẳng hạn:

$\sqrt{A}.\sqrt{B}.\sqrt{C}=\sqrt{A.B.C}\left(\text{với } A\geq 0; B\geq 0; C\geq 0\right)$.

2. Khai căn bậc hai và phép chia

Liên hệ giữa phép khai căn bậc hai và phép chia:

Nếu A, B là các biểu thức với $A\geq 0, B>0$ thì $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A}{B}}$.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Khai căn bậc hai của một tích

Bài toán 1. Tính:

a) $\sqrt{90.4,9}$ b) $\sqrt{12,1.360}$ c) $\sqrt{2,5.14,4}$ d) $\sqrt{2^4.(-3)^2}$

Hướng dẫn: Áp dụng quy tắc khai căn một tích:

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}\ (a\geq 0, b\geq 0), \left(\sqrt{A}\right)^2=\sqrt{A^2}=A\left(A\geq 0\right)$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{90.4,9}=\sqrt{9.49}=\sqrt{9}.\sqrt{49}=3.7=21$

b) Ta có: $\sqrt{12,1.360}=\sqrt{121.36}=\sqrt{121}.\sqrt{36}=11.6=66$

c) Ta có: $\sqrt{2,5.14,4}=\sqrt{36}=6$

Cách khác: $\sqrt{2,5.14,4}=\sqrt{5.144.\frac{1}{100}}=5.12.\frac{1}{10}=6$

d) Ta có: $\sqrt{2^4.(-3)^2}=\sqrt{\left(2^2\right)^2}.\sqrt{(-3)^2}=4.|-3|=12$

Bài toán 2. Rút gọn rồi tính:

a) $\sqrt{25^2-24^2}$ b) $\sqrt{17^2-8^2}$ c) $\sqrt{117^2-108^2}$ d) $\sqrt{6,8^2-3,2^2}$ e) $\sqrt{21,8^2-18,2^2}$

Hướng dẫn: Áp dụng hằng đẳng thức: $a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{25^2-24^2}=\sqrt{\left(25-24\right)\left(25+24\right)}=\sqrt{1.49}=7$

b) Ta có: $\sqrt{17^2-8^2}=\sqrt{(17-8)(17+8)}=\sqrt{9.25}=3.5=15$

c) Ta có: $\sqrt{117^2-108^2}=\sqrt{(117-108)(117+108)}=\sqrt{9.225}=3.15=45$

d) Ta có: $\sqrt{6,8^2-3,2^2}=\sqrt{(6,8-3,2)(6,8+3,2)}=\sqrt{3,6.10}=\sqrt{36}=6$

e) Ta có: $\sqrt{21,8^2-18,2^2}=\sqrt{(21,8-18,2)(21,8+18,2)}=\sqrt{3,6.40}=\sqrt{36}.\sqrt{4}=6.2=12$

Bài toán 3. Rút gọn:

a) $A=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ b) $B=\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ c) $C=\sqrt{8+2\sqrt{15}}-\sqrt{5}$

Hướng dẫn: Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geq 0, b\geq 0)$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{3-2.\sqrt{3.2}+2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}.\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

b) Ta có: $B=\sqrt{5+2\sqrt{5.2}+2}+\sqrt{5-2\sqrt{5.2}+2}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2.\sqrt{5}.\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-2.\sqrt{5}.\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}=\left|\sqrt{5}+\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right|=2\sqrt{5}$

c) Ta có $C=\sqrt{5+2\sqrt{5.3}+3}-\sqrt{5}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2.\sqrt{5}.\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{5}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{5}=\left|\sqrt{5}+\sqrt{3}\right|-\sqrt{5}=\sqrt{3}$

II. Nhân các căn bậc hai

Bài toán 4. Tính:

a) $A=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ b) $B=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

c) $C=\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}$ d) $D=\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}$

Hướng dẫn: Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai:

$$\sqrt{A}.\sqrt{B}=\sqrt{A.B}\ \ (A\geq 0;\ B\geq 0)$$

Các bài b), c), d) ta phải bình phương hai vế, rồi sau đó khai căn bậc hai.

Lời giải

a) Ta có $A=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3-2}=1$

b) Nhận xét $\sqrt{3}-\sqrt{2}>0\ \Rightarrow\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}>0$; $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}>0$.

Vậy $B>0$.

Ta xét $B^2 = \left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2$

$= \left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2 + 2\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \left(\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2$

$= \sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right).\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} + \sqrt{3}-\sqrt{2} \quad = 2\sqrt{3}+2.1$ (xem bài toán a)

$= 2+2\sqrt{3} \qquad \Rightarrow B = \sqrt{2+2\sqrt{3}}$

c) Nhận xét: $C > 0$.

Ta xét $C^2 = \left(\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2 \qquad = \left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2 + 2\sqrt{4+\sqrt{7}}.\sqrt{4-\sqrt{7}} + \left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$

$= 4+\sqrt{7}+2\sqrt{\left(4+\sqrt{7}\right).\left(4-\sqrt{7}\right)} + 4-\sqrt{7} \quad = 8+2\sqrt{16-7} = 8+2\sqrt{9} \quad = 8+6 = 14$

$\Rightarrow C = \sqrt{14}$

d) Nhận xét $D < 0$ vì $\sqrt{3-\sqrt{5}} < \sqrt{3+\sqrt{5}}$

Ta xét $D^2 = \left(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 \quad = \left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 - 2\sqrt{3-\sqrt{5}.\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$

$= 3-\sqrt{5}-2\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right).\left(3+\sqrt{5}\right)} + 3+\sqrt{5} \quad = 6-2\sqrt{9-5} = 6-2.2 = 2$

$\Rightarrow D = -\sqrt{2}$ (vì $D < 0$).

Chú ý: Các biểu thức $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ và $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ được gọi là hai biểu thức liên hợp.

Bài toán 5. Tính: a) $A = \left(\sqrt{6}+\sqrt{10}\right).\sqrt{4-\sqrt{15}}$ b) $B = \left(3+\sqrt{5}\right).\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right).\sqrt{3-\sqrt{5}}$

c) $C = \left(4+\sqrt{15}\right).\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right).\sqrt{4-\sqrt{15}}$

Hướng dẫn: Áp dụng cả hai quy tắc khai căn một tích và nhân các căn bậc hai.

Lời giải

a) Ta có: $A = \left(\sqrt{6}+\sqrt{10}\right).\sqrt{4-\sqrt{15}} = \left(\sqrt{3.2}+\sqrt{5.2}\right).\sqrt{4-\sqrt{15}}$

$= \left(\sqrt{3}.\sqrt{2}+\sqrt{5}.\sqrt{2}\right).\sqrt{4-\sqrt{15}} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right).\sqrt{2}.\sqrt{4-\sqrt{15}}$

$= \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right).\sqrt{2\left(4-\sqrt{15}\right)} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right).\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

$= \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right).\sqrt{5-2\sqrt{5}.\sqrt{3}+3} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right).\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 5-3 = 2$

b) Ta có: $B = \left(3+\sqrt{5}\right).\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right).\sqrt{3-\sqrt{5}} \quad = \left(3+\sqrt{5}\right).\left(\sqrt{5}-1\right).\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{5}}$

$= \left(3+\sqrt{5}\right).\left(\sqrt{5}-1\right).\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} = \left(3+\sqrt{5}\right).\left(\sqrt{5}-1\right).\left(\sqrt{5}-1\right) \quad = \left(3+\sqrt{5}\right).\left(\sqrt{5}-1\right)^2$

$$=\left(3+\sqrt{5}\right).\left(6-2\sqrt{5}\right) \qquad =2\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)=2\left(9-5\right)=2.4=8.$$

c) Ta có: $C=\left(4+\sqrt{15}\right).\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right).\sqrt{4-\sqrt{15}} \;=\left(4+\sqrt{15}\right).\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right).\sqrt{2}.\sqrt{4-\sqrt{15}}$

$$=\left(4+\sqrt{15}\right).\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right).\sqrt{8-2\sqrt{15}} \;=\left(4+\sqrt{15}\right).\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2=\left(4+\sqrt{15}\right).\left(8-2\sqrt{15}\right)$$

$$=2\left(4+\sqrt{15}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)=2\left(16-15\right)=2.1=2.$$

III. Phân tích thành nhân tử

Bài toán 6. Phân tích thành nhân tử

a) $A=\sqrt{xy}+2\sqrt{x}-3\sqrt{y}-6 \quad \left(x\ge 0;\ y\ge 0\right)$

b) $B=ab+b\sqrt{a}+\sqrt{a}+1$

c) $C=a-3\sqrt{ab}+2b$

d) $D=2x-7\sqrt{xy}+5y$

Hướng dẫn: Áp dụng quy tắc khai căn một tích: $\sqrt{AB}=\sqrt{A}.\sqrt{B}$ và các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử đã học ở lớp 8: Nhóm các số hạng, dùng hằng đẳng thức, thêm bớt một vài số hạng để làm xuất hiện nhân tử chung.

Lời giải

a) Ta có: $A=\sqrt{xy}+2\sqrt{x}-3\sqrt{y}-6=\sqrt{x}\left(\sqrt{y}+2\right)-3\left(\sqrt{y}+2\right)=\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{y}+2\right)$

b) Ta có: $B=ab+b\sqrt{a}+\sqrt{a}+1=\left[\left(\sqrt{a}\right)^2b+b\sqrt{a}\right]+\left(\sqrt{a}+1\right)$

$$=b\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)+\left(\sqrt{a}+1\right)=\left(\sqrt{a}+1\right)\left(b\sqrt{a}+1\right)$$

c) Ta có: $C=a-3\sqrt{ab}+2b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\sqrt{a}.\sqrt{b}-2\sqrt{a}.\sqrt{b}+2\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-2\sqrt{b}\right)$

d) Ta có: $D=2x-7\sqrt{xy}+5y=2\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}.\sqrt{y}-5.\sqrt{x}.\sqrt{y}+5\left(\sqrt{y}\right)^2$

$$=2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)-5\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}-5\sqrt{y}\right)$$

Bài toán 7. Phân tích thành nhân tử

a) $A=a-\sqrt{a}-6$

b) $B=\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}$

c) $C=x\sqrt{x}+y\sqrt{y}$

Hướng dẫn: Xem cách giải bài toán 6

Lời giải

a) Ta có: $A=a-\sqrt{a}-6=\left(\sqrt{a}\right)^2+2\sqrt{a}-3\sqrt{a}-6$

$$=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+2\right)-3\left(\sqrt{a}+2\right)=\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-3\right)\ ;\quad \left(a\ge 0\right)$$

b) Ta có: $B=\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{b}\right)^3$

$$=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a^2}+\sqrt{a}.\sqrt{b}+\sqrt{b^2}\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right);\quad \left(a\ge 0;\ b\ge 0\right)$$

c) Ta có: $C = x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = \left(\sqrt{x}\right)^3 + \left(\sqrt{y}\right)^3$

$$= \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x^2} - \sqrt{x}.\sqrt{y} + \sqrt{y^2}\right) = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x - \sqrt{xy} + y\right); \quad (x \ge 0; \quad y \ge 0)$$

IV. Chứng minh một đẳng thức

Bài toán 8.

a) Cho $\sqrt{x+5} + \sqrt{8-x} = 5 \quad (1)$ Chứng minh rằng $\sqrt{(x+5)(8-x)} = 6$. $\quad (-5 \le x \le 8)$

b) Cho $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1 \quad (2)$ Chứng minh rằng $\sqrt{x - x^2} = 0$. $\quad (0 \le x \le 1)$

Hướng dẫn: Bình phương hai vế đẳng thức đã cho và tính tích của hai căn thức.

Lời giải

a) Bình phương hai vế của đẳng thức (1) ta được

$\left(\sqrt{x+5} + \sqrt{8-x}\right)^2 = 25 \qquad \Rightarrow x + 5 + 2\sqrt{x+5}.\sqrt{8-x} + 8 - x = 25$

$\Rightarrow \sqrt{(x+5)(8-x)} = 25 - 13 \qquad \Rightarrow \sqrt{(x+5)(8-x)} = 6$ (đpcm)

Chú ý: Em có thể giải bài toán sau:

1) Cho $\sqrt{x+5} + \sqrt{8-x} = 5$ Hãy tính $\sqrt{(x+5)(8-x)}$ và $\sqrt{-x^2 + 3x + 40}$.

(Ta có $(x+5)(8-x) = -x^2 + 3x + 40$)

2) Cho $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$. Hãy tính $\sqrt{x+5} + \sqrt{x}$.

Nhân hai vế của đẳng thức $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$ với $\sqrt{x+5} + \sqrt{x}$ (là biểu thức liên hợp của $\sqrt{x+5} - \sqrt{x}$).

Điều kiện $x \ge 0 \Rightarrow x + 5 > 0 \Rightarrow \sqrt{x+5} + \sqrt{x} > 0$.

Ta có: $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1 \qquad \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right) = \sqrt{x+5}+\sqrt{x} \\ x \ge 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 5 - x = \sqrt{x+5} + \sqrt{x} \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5 \end{cases}$

Vậy $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$.

Bạn hãy giải bài toán sau:

Cho $\sqrt{25 - x^2} - \sqrt{15 - x^2} = 2$. Tính $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{15 - x^2}$. (Đáp số $\sqrt{25 - x^2} - \sqrt{15 - x^2} = 5$).

b) Bình phương hai vế đẳng thức (2) ta được:

$\left(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow x + 2\sqrt{x}.\sqrt{1-x} + 1 - x = 1 \Rightarrow \sqrt{x(1-x)} = 0 \Rightarrow \sqrt{x - x^2} = 0$. (đpcm)

Chú ý: Ta có thể giải bài toán sau:

Giải phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1$. (Đáp số $x=1$)

Bài toán 9. Cho $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1 \quad (*)$ Chứng minh rằng $x+y=0$.

Hướng dẫn:

Nhân hai vế của đẳng thức $(*)$ lần lượt với các biểu thức liên hợp của $x+\sqrt{1+x^2}$ và $y+\sqrt{1+y^2}$

Sau đó nghĩ đến việc làm xuất hiện tổng $x+y$ bằng cách cộng hai vế.

Lời giải

Với $x=0$ và $y=0$ suy ra $x+y=0$.

Giải sử $x\neq 0$, nhân hai vế của đẳng thức $(*)$ với $\sqrt{1+x^2}-x$, ta được

$$\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=\sqrt{1+x^2}-x$$

$$\Rightarrow \left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=\sqrt{1+x^2}-x \qquad (**)$$

Tương tự, nhân hai vế của đẳng thức $(*)$ với $\sqrt{1+y^2}-y$, ta được

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\sqrt{1+y^2}-y \qquad (***)$$

Cộng $(**)$ với $(***)$ ta được

$$x+y+\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}-x-y \;\Rightarrow 2(x+y)=0\Rightarrow x+y=0.$$ (đpcm)

V. Giải phương trình

Bài toán 10. Giải phương trình

a) $\sqrt{4x-20}+\sqrt{x+5}-\frac{1}{3}\sqrt{9x-45}=4 \quad (1)$

b) $\sqrt{16-32x}-\sqrt{12x}=\sqrt{3x}+\sqrt{9-18x} \quad (2)$

c) $\sqrt{x^2-9}-\sqrt{4x-12}=0 \quad (3)$

Hướng dẫn: a) Áp dụng quy tắc khai căn một tích $\sqrt{AB}=\sqrt{A}.\sqrt{B} \;\; (A\geq 0;\; B\geq 0)$ và công thức

$$\sqrt{a}=b\Leftrightarrow \begin{cases} b\geq 0 \\ a=b^2 \end{cases}$$

Lời giải

a) $(1) \Rightarrow \sqrt{4(x-5)}+\sqrt{x-5}-\frac{1}{3}\sqrt{9(x-5)}=4 \qquad \Rightarrow \sqrt{4}.\sqrt{x-5}+\sqrt{x-5}-\frac{1}{3}\sqrt{9}.\sqrt{x-5}=4$

$$\Rightarrow 2.\sqrt{x-5}+\sqrt{x-5}-\sqrt{x-5}=4 \Rightarrow 2.\sqrt{x-5}=4\Rightarrow \sqrt{x-5}=2\Rightarrow \begin{cases} 2\geq 0 \\ x-5=4 \end{cases}\Rightarrow x=9$$

b)Ta có $(2)\Rightarrow \sqrt{16(1-2x)}-\sqrt{4.3x}=\sqrt{3x}+\sqrt{9(1-2x)}$

$$\Rightarrow 4\sqrt{1-2x}-2\sqrt{3x}=\sqrt{3x}+3\sqrt{1-2x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-2x}=3\sqrt{3x} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 1-2x=9.3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=\dfrac{1}{29} \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1}{29}$$

c) Ta có $(3)\Rightarrow \sqrt{(x-3)(x+3)}-\sqrt{4(x-3)}=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3}\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0 & (*) \\ x\ge 3 & (**) \end{cases}$

Giải $(*)$ ta được $\sqrt{x-3}=0$ hoặc $\sqrt{x+3}=2$

$x=3$ hoặc $x=1$.

Kết hợp với $(**)$ suy ra $x=3$.

Bài toán 11. Giải phương trình:

a) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x}=1$ b) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$ c) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5$

Hướng dẫn:

Bình phương hai vế với điều kiện cần thiết và rút gọn, ta được phương trình chứa một căn thức.

Lời giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 0 \\ 1-x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow 0\le x\le 1$

Bình phương hai vế phương trình (1) ta được:

$$1-x+2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}+x=1 \Rightarrow 2\sqrt{(1-x)x}=0 \Rightarrow \sqrt{(1-x)x}=0 \Rightarrow (1-x)x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x=0 \\ x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện, ta có tập hợp nghiệm: $S=\{0;1\}$.

b) Ta có: (2) $\Rightarrow \sqrt{x+5}=1+\sqrt{x}$ (*)

$$\Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x+5=(1+\sqrt{x})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x+5=1+2\sqrt{x}+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2\sqrt{x}=4 \end{cases} \Rightarrow x=4$$

- Cách giải khác (Dùng biểu thức liên hợp)

Nhân hai vế của phương trình (2) vơi $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}$

(Với điều kiện $x\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x+5}+\sqrt{x}>0$), ta có:

$$(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})=\sqrt{x+5}+\sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x+5})^2-(\sqrt{x})^2=\sqrt{x+5}+\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5(**)$$

Cộng vế vợi vế (*) và (**), ta được:

$2\sqrt{x+5}=6 \Rightarrow \sqrt{x+5}=3 \Rightarrow x+5=9 \Rightarrow x=4$ (thỏa mãn điều kiện $x\ge 0$)

VI. Chứng minh đẳng thức

Bài toán 12. Chứng minh rằng: $|ax+by|\le \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$ với mọi $a,b,x,y\in R$

Bất đẳng thức Bunyakovsky.

Hướng dẫn: Bình phương hai vế bất đẳng thức cần chứng minh và biến đổi tương đương.

Lời giải

Ta có: $|ax+by| \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow (ax+by)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$

$\Rightarrow a^2x^2+2abxy+b^2y^2 \le a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

$\Rightarrow (ay-bx)^2 \ge 0$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với mọi a,b,x,y thuộc $\mathbb{R}$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow ay-bx=0 \Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}, x\ne 0, y\ne 0$

(với $x=0$ và $y=0$, bất đẳng thức luôn đúng).

Bài toán 13. Chứng minh rằng $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$ với $a\ge 0; b\ge 0$.

Hướng dẫn: Bình phương hai vế và rút gọn như bài toán 12 .

Lời giải

Ta co: $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)} \Rightarrow a+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+b \le 2(a+b)$

$\Rightarrow a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b \ge 0 \Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$ (luôn dúng).

Nhận xét: Ta có thê áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ở trên như sau:

Ta có: $1\cdot\sqrt{a}+1\cdot\sqrt{b} = |1\cdot\sqrt{a}+1\cdot\sqrt{b}| \le \sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{a+b}$

$\Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2}\cdot\sqrt{a+b} \Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$ (dpcm).

Bài toán 14. So sánh $\sqrt{x+y}$ và $\sqrt{x}+\sqrt{y}(x>0, y>0)$.

Hướng dẫn: Ta chứng minh $\sqrt{x+y} < \sqrt{x}+\sqrt{y}$ băng cách bình phương hai vế như đã làm ở bài toán 12 và 13 .

Lời giải

Với $x>0, y>0$, ta co: $\sqrt{x+y} < \sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\Rightarrow x+y < (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \Rightarrow x+y < x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y$

$\Rightarrow 2\sqrt{xy} > 0$ (luôn đúng với $x>0, y>0$)

Nhận xét: Bạn hãy để ý các kết quả đã biết sau đây:

$\sqrt{x\cdot y} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{y} \quad (x\ge 0, y\ge 0)$

$\sqrt{x+y} < \sqrt{x}+\sqrt{y}(x>0, y>0)$

Bài toán 15. So sánh:

a) $\sqrt{3}+2$ và $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ và $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{2014}+\sqrt{2016}$ và $2\sqrt{2015}$

Lời giải

a) Ta co: $(\sqrt{3}+2)^2 = 3+2\cdot\sqrt{3}\cdot 2+4 = 7+4\sqrt{3}.$

Lại có: $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}+6+2 = 8+2\sqrt{12} = 8+2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = 8+4\sqrt{3}$

vì $7<8 \Rightarrow 7+4\sqrt{3} < 8+4\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3}+2)^2 < (\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 \Rightarrow \sqrt{3}+2 < \sqrt{2}+\sqrt{6}$

b) Ta có: $\sqrt{2}+\sqrt{3} < \sqrt{10}$

$\Rightarrow (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 < 10 \Rightarrow 2+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+3 < 10 \Rightarrow 2\sqrt{6} < 5 \Leftrightarrow (2\sqrt{6})^2 < 25 \Rightarrow 24 < 25$ (luôn dúng).

c) Ta có: $\sqrt{2014}+\sqrt{2016} < 2\sqrt{2015}$

$\Rightarrow (\sqrt{2014}+\sqrt{2016})^2 < 4.2015 \Rightarrow 2014+2.\sqrt{2014}.\sqrt{2016}+2016 < 8060 \Rightarrow 2\sqrt{2014.2016} < 4030$

$\Rightarrow \sqrt{2014.2016} < 2015 \Rightarrow 2014.2016 < 2015^2 \Rightarrow 4060224 < 4060225$

Ta có thể chứng minh bài toán tổng quát sau:

Vơi $n \in \mathbb{N}$, ta luôn có: $\sqrt{n}+\sqrt{n+2} < 2\sqrt{n+1}$

Bài toán 16.

a) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\mathrm{A}=\sqrt{\mathrm{x}-2}+\sqrt{\mathrm{y}-1}$, với $\mathrm{x}+\mathrm{y}=5$.

Hướng dẫn: a) Xét giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của y^2.

b) Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky.

Lời giải

a) Với điều kiện: $x \ge 0$ và $1-x \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$

Khi đó $\mathrm{y}>0$. Ta xét y^2 :

$y^2 = x+2\sqrt{x(1-x)}+1-x \Leftrightarrow y^2 = 1+2\sqrt{x(1-x)}$

Vì $\sqrt{x(1-x)} \ge 0 \Rightarrow 1+\sqrt{x(1-x)} \ge 1$

Vậy $y^2 \le 1 \Rightarrow y \ge 1$

Giá trị nhỏ nhất của y bằng 1 .

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Lại có: $\sqrt{x(1-x)} = \sqrt{-x^2+x} = \sqrt{-\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2} \le \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

Vậy: $y^2 \ge 1+2\cdot\dfrac{1}{2} = 2 \Rightarrow y \le \sqrt{2}$

Giá trị lớn nhất của y bằng $\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Cách khác:

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=|1\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{1-x}|\le\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{1-x})^2}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow y\le\sqrt{2}$ (tiếp tục như cách giải trên)

b) Điều kiện: $2\le x\le 4$.

Theo bất dảng thức Bunyakovsky, ta có:

$1.\ \sqrt{x-2}+1\cdot\sqrt{4-x}\le\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{x-2})^2+(\sqrt{4-x})^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$

$\Rightarrow y\le 2$. Vậy giá trị lớn nhất của y bằng 2.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{1}=\frac{\sqrt{4-x}}{1}\Leftrightarrow x-2=4-x\Leftrightarrow x=3$

c) Điều kiện $x\ge 2$ và $y\ge 1$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$1.\ \sqrt{x-2}+1\cdot\sqrt{y-1}\le\sqrt{1^2+1^2}+\sqrt{x-2+y-1}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x+y-3}$

Vì $x+y=5\Rightarrow A\le\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-3}=2$

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 2.

Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x-2}=\sqrt{y-1}\\ x+y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$.

Bài toán 17. Tìm x, biết:

a) $\sqrt{9x}-\sqrt{36x}+\sqrt{121x}<8$ b) $\sqrt{x-1}+5\sqrt{4x-4}-\sqrt{9x-9}<4$ c) $\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x-2}>0$

Hướng dẫn: Áp dụng quy tắc khai căn một tích.

Lời giải

a) (1) $\Rightarrow 3\sqrt{x}-6\sqrt{x}+11\sqrt{x}<8\ \Rightarrow 8\sqrt{x}<8\Rightarrow\sqrt{x}<1\Rightarrow 0\le x<1$.

b) (2) $\Rightarrow\sqrt{x-1}+10\sqrt{x-1}-3\sqrt{x-1}<4\ \Rightarrow 8\sqrt{x-1}<4\Rightarrow\sqrt{x-1}<\frac{1}{2}\ \Rightarrow\begin{cases}x-1\ge 0\\ x-1<\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow 1\le x<\frac{5}{4}$

c) (3) $\Rightarrow\sqrt{x-2}(\sqrt{x+2}-1)>0$

Điều kiện: $x-2>0(x-2=0$: không thỏa mãn) $\Rightarrow x>2$.

Khi đó: (3) $\Rightarrow\sqrt{x+2}-1>0\Rightarrow\sqrt{x+2}>1\Rightarrow x+2>1\Rightarrow x>-1$ (luôn thỏa mãn với $x>2$)

Vậy $x>2$.

VII. Liên hệ giữa phép khai căn bậc hai và phép chia

Bài toán 1. Tính: a) $\sqrt{\frac{6,4}{8,1}}$ b) $\sqrt{\frac{0,25}{1,44}}$ c) $\sqrt{2\frac{2}{49}}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{\frac{6,4}{8,1}}=\sqrt{\frac{64}{81}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}}=\frac{8}{9}$.

b) Ta có: $\sqrt{\frac{0,25}{1,44}}=\sqrt{\frac{25}{144}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{144}}=\frac{5}{12}$.

c) Ta có: $\sqrt{2\frac{2}{49}}=\sqrt{\frac{100}{49}}=\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{49}}=\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}$.

Bài toán 2. Rút gọn biểu thức:

a) $A=\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$, vơĩ $x>0, y\neq 0$ b) $B=2a^2\sqrt{\frac{b^4}{4a^2}}, a<0$ c) $C=5ab\sqrt{\frac{25a^2}{b^6}}, a<0, b>0$

Lời giải

a) Ta có: $A=\frac{y}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^4}}=\frac{y}{x}\cdot\frac{|x|}{y^2}$

Vì $x>0 \Rightarrow |x|=x$. Vậy $A=\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y^2}=\frac{1}{y}(y\neq 0)$

b) Ta có $B=2a^2\sqrt{\frac{b^4}{4a^2}}=2a^2\cdot\frac{b^2}{2|a|}$

c) Ta có: $C=5ab\sqrt{\frac{25a^2}{b^6}}=5ab\frac{5\cdot|a|}{|b^3|}$

Vi $a<0 \Rightarrow |a|=-a; b>0 \Rightarrow |b^3|=b^3$. Vâyy $C=5ab\frac{-5a}{b^3}=-\frac{25a^2}{b^2}$

Bài toán 3. Rút gọn

a) $A=\sqrt{\frac{4a^2+12a+9}{b^2}}$ với $a>-\frac{3}{2}$; $b<0$

b) $B=(x-y).\sqrt{\frac{xy}{(x-y)^2}}$ với $x<y<0$.

c) $C=(2x-y).\sqrt{\frac{4}{4x^2-4xy+y^2}}$

Lời giải

a) Ta có: $A=\sqrt{\frac{4a^2+12a+9}{b^2}}=\frac{\sqrt{(2a+3)^2}}{\sqrt{b^2}}=\frac{|2a+3|}{|b|}$

Vì $a > -\dfrac{3}{2} \Rightarrow 2a > -3 \Rightarrow 2a+3 > 0 \Rightarrow |2a+3| = 2a+3$;

$b < 0 \Rightarrow |b| = -b$

Vậy $A = \dfrac{2a+3}{-b} = -\dfrac{2a+3}{b}$

b) Ta có: $B = (x-y).\sqrt{\dfrac{xy}{(x-y)^2}} = (x-y).\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{(x-y)^2}} = (x-y).\dfrac{\sqrt{xy}}{|x-y|}$

Vì $x < y \Rightarrow x-y < 0 \Rightarrow |x-y| = -(x-y)$.

Vậy $B = (x-y).\dfrac{\sqrt{xy}}{-(x-y)} = -\sqrt{xy}$ (với $x < y < 0 \Rightarrow xy > 0$)

c) Ta có: $C = (2x-y).\sqrt{\dfrac{4}{4x^2-4xy+y^2}} = (2x-y).\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{(2x-y)^2}} = \dfrac{2(2x-y)}{|2x-y|} = \begin{cases} 2, nêu' 2x > y \\ -2, nêu' 2x < y \end{cases}$

Bài toán 4. Tính:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$ c) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{60}}$

Lời giải

a) Ta có: $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\dfrac{2}{18}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$

b) Ta có: $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\dfrac{3}{27}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$

c) Ta có: $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{60}} = \sqrt{\dfrac{15}{60}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

Bài toán 5. Tính:

a) $A = \left(2\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + 4\sqrt{80}\right) : \sqrt{5}$;

b) $B = \sqrt{\dfrac{2}{5}} + \dfrac{8}{\sqrt{10}} - \dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

c) $C = \sqrt{\dfrac{7}{2}} - \dfrac{7\sqrt{2}-2\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} + \dfrac{7}{\sqrt{14}}$

Lời giải

a) Ta có :

$$A=\left(2\sqrt{20}-3\sqrt{45}+4\sqrt{80}\right):\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{20}}{\sqrt{5}}-\frac{3\sqrt{45}}{\sqrt{5}}+\frac{4\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$$

$$=2\sqrt{\frac{20}{5}}-3\sqrt{\frac{45}{5}}+4\sqrt{\frac{80}{5}}=2\sqrt{4}-3\sqrt{9}+4\sqrt{16}=4-9+16=11$$

b) Ta có :

$$B=\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{8}{\sqrt{10}}-\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2+8}{\sqrt{10}}-\left(\sqrt{10}-1\right)=\frac{10}{\sqrt{10}}-\left(\sqrt{10}-1\right)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{10}\right)^2}{\sqrt{10}}-\sqrt{10}+1=\sqrt{10}-\sqrt{10}+1=1$$

c) Ta có :

$$C=\sqrt{\frac{7}{2}}-\frac{7\sqrt{2}-2\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}+\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}-\sqrt{14}+\frac{7}{\sqrt{14}}=\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}+\frac{7}{\sqrt{14}}\right)-\sqrt{14}$$

$$=\frac{7+7}{\sqrt{14}}-\sqrt{14}=\sqrt{14}-\sqrt{14}=0$$

Bài toán 6. Rút gọn biểu thức :

a) $A=\left(3\sqrt{a^2b}-4\sqrt{ab^2}+5ab\right):\sqrt{ab}$ với $a>0;b>0$.

b) $B=\left(\sqrt{x^2y}+\sqrt{xy^2}-2\sqrt{xy}\right):\sqrt{xy}$ (với $x>0;y>0$).

Lời giải

a) Ta có: $A=\left(3\sqrt{a^2b}-4\sqrt{ab^2}+5ab\right):\sqrt{ab}\quad=\frac{3\sqrt{a^2b}}{\sqrt{ab}}-\frac{4\sqrt{ab^2}}{\sqrt{ab}}+\frac{5ab}{\sqrt{ab}}$

$$=3\sqrt{\frac{a^2b}{ab}}-4\sqrt{\frac{ab^2}{ab}}+5\sqrt{\frac{(ab)^2}{ab}}\quad=3\sqrt{a}-4\sqrt{b}+5\sqrt{ab}$$

b) Ta có: $B=\sqrt{\frac{x^2y}{xy}}+\sqrt{\frac{xy^2}{xy}}-2\sqrt{\frac{xy}{xy}}\;=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}-2=|x|+|y|-2$

Vì $x,y>0\Rightarrow|x|=x;|y|=y$

Vậy $B=x+y-2$

Bài toán 7: Rút gọn biểu thức:

a) $A=\frac{x+\sqrt{xy}}{y+\sqrt{xy}}(x>0,y>0)$

b) $B=\frac{\sqrt{x^2y}+\sqrt{xy^2}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}(x>0,y>0)$

c) $C=\dfrac{\sqrt{am}+\sqrt{bn}-\sqrt{an}+\sqrt{bm}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}(a,b,m,n>0)$

Hướng dẫn: Phân tích các tử số. mẫu số thành nhân tử và rút gọn.

Lời giải:

a) Ta có: $A=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{x}\sqrt{y}}{\left(\sqrt{y}\right)^2+\sqrt{x}\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

b) Ta có: $B=\dfrac{\left(\sqrt{x^2}\sqrt{y}+\sqrt{x}\sqrt{y^2}\right)+\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)(\sqrt{xy}+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{xy}+1$

c) Ta có: $C=\dfrac{\sqrt{am}+\sqrt{bn}-\sqrt{an}+\sqrt{bm}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$=\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{m}-\sqrt{n})+\sqrt{b}(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=(\sqrt{m}-\sqrt{n})$

Bài toán 8. Rút gọn biểu thức:

a) $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}(x>0,x\neq 1)$

b) $B=\dfrac{4-4\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-35}+\dfrac{2}{\sqrt{x}-7}-\dfrac{3}{\sqrt{x}+5}(x\geq 0,x\neq 49)$

c) $C=\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}:\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}(x>0,y>0,x\neq y)$

Hướng dẫn: Tìm mẫu thức chung, quy đồng các phân thức và thực hiện các phép toán về phân thức

Lời giải

a) Ta có: $A=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

Cách khác:

Ta có thể đặt $u=\sqrt{x};u\geq 0\Rightarrow u^2=x$

Ta được: $A=\dfrac{u}{u-1}-\dfrac{2u-1}{u^2-u}$

(Đến đây ta làm phép toán về phân thức đã biết ở lớp 8, bạn hãy tự làm tiếp)

* Nếu cho $x=3$, ta có bài toán: Tính:

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{2\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}$. (Ta cũng có thể cho x một giá trị khác).

b) Ta có: $x-2\sqrt{x}-35=x+5\sqrt{x}-7\sqrt{x}-35$

$=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+5\right)-7\left(\sqrt{x}+5\right)$

$=\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-7\right)$

Vậy $B=\frac{4-4\sqrt{x}+2(\sqrt{x}+5)-3(\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-7)}$

$=\frac{4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}+10-3\sqrt{x}+21}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-7)}=\frac{-5\sqrt{x}+35}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-7)}=\frac{-5(\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-7)}=\frac{-5}{\sqrt{x}+5}$

Nhận xét: Ta có thể đặt $u=\sqrt{x}, u\geq 0\Rightarrow x=u^2$ và đưa về biểu thức sau:

$B=\frac{4-4u}{u^2-2u-35}+\frac{2}{u-7}-\frac{3}{u+5}$ (Tiếp tục như bài toán a)

Từ kết quả $B=\frac{-5}{\sqrt{x}+5}(x\geq 0, x\neq 49)\Rightarrow B<0$, ta có bài toán:

Cho $B=\frac{4-4\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-35}+\frac{2}{\sqrt{x}-7}-\frac{3}{\sqrt{x}+5}$

1) Chứng tỏ rằng $B<0$ với $x\geq 0; x\neq 49$.

2) Tìm các giá tri x sao cho B nhận giá trị nguyên.

(Đáp số $x=0$)

c) Ta có: $C=\frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{xy}}:\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ $=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2=x-y$

Bài toán 9. Giải phương trình:

a) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=2$ (1) b) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=2$ (2)

Hướng dẫn: Áp dụng quy tắc chia hai căn thức bậc hai và công thức:

$$\sqrt{A}=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\geq 0\\A=B^2\end{cases}$$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ (với điều kiện $x+1\geq 0$ và $x-1>0$)

$\Rightarrow x\geq -1$ và $x>1\Rightarrow x>1$)

Vậy (1) $\Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ 2\ge 0 \text{ (luôn đúng)} \\ \dfrac{x+1}{x-1}=4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x+1=4(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x+1=4x-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ 3x=5 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

b) Ta có: $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=2 \Rightarrow \begin{cases} 2\ge 0 \\ \dfrac{x-1}{x+1}=4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=4(x+1) \\ x+1\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ne -1 \\ 3x=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ne -1 \\ x=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{5}{3}$$

Chú ý: Phương trình (2) có dạng $\sqrt{A}=B$, ta chỉ đặt điều kiện $B\ge 0$, không cần đặt ra $A\ge 0$.

Bài toán 10. Giải phương trình:

a) $\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{x-1}}=x+3 \quad (1)$ b) $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{\sqrt{x-3}}=x-1 \quad (2)$

Hướng dẫn: Áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\sqrt{\dfrac{A}{B}}$, với điều kiện $A\ge 0$ và $B>0$

Lời giải

Ta có $x^2+2x-3=x^2-x+3x-3=x(x-1)+3(x-1)=(x-1)(x+3)$

Biến đổi vế trái của phương trình (1), ta được:

$$\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}}=\sqrt{x+3}$$

(với $(x-1)(x+3)\ge 0$ và $x-1>0 \Rightarrow x>1$)

Vậy với $x>1$, ta có: (1) $\Rightarrow \sqrt{\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}}=x+3$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3}=x+3 \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x+3=(x+3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x+3=1 \end{cases}$$

(vì $x>1 \Rightarrow x+3>0$, ta chia hai vế phương trình trên cho $x+3$)

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3=1 \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x>1 \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

Tập hợp nghiệm của (1): $S=\varnothing$

b) Ta có: $x^2-4x+3=x^2-3x-x+3=x(x-3)-(x-3)=(x-3)(x-1)$

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-4x+3\ge 0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x-1)>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Rightarrow x>3$

Vậy $(2)\Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ \sqrt{\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}}=x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ \sqrt{\dfrac{(x-3)(x-1)}{x-3}}=x-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ \sqrt{x-1}=x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ x-1=(x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ x-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ x=2 \end{cases}$

Phương trình (2) vô nghiệm.
Tập hợp nghiệm của (2): $S=\varnothing$.

Chú ý: Bạn hãy xem cách giải phương trình sau: $\sqrt{\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}}=x-1$ *(*)*

Lời giải:

Ta có $(^*)\Rightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=(x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ \dfrac{(x-3)(x-1)}{x-3}=(x-1)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ne 3 \\ x-1=(x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ne 3 \\ \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1\ ;x=2.$

(Ta không cán đặt điều kiện $\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}\ge 0$, mà chỉ cần đặt $x-1\ge 0$).

Bài toán 11. Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{\dfrac{-1}{x-1}}<1$ b) $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}}>1$

Hướng dẫn: a) Áp dụng công thức $\sqrt{A}<B\Leftrightarrow 0<A<B^2$.
b) Áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai.

Lời giải:

a) Ta có: (1) $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{x-1}\ge 0 \\ -\dfrac{1}{x-1}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1<0 \\ \dfrac{1}{1-x}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-x>0 \\ \dfrac{1}{1-x}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-x>0 \\ 1<1-; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow x<0$

b) Ta co: (2) $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{x-2}}>1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}}>1 \\ x>2 \end{cases}$

$x-2>0\Rightarrow x>2\Rightarrow (x-2)(x+2)>0\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2}>1 \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2>1 \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow x>2$

Ta có thể giải bài toán tương tự sau: $\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}>1$ (*)

(Ta có: $\left(^*\right)\Rightarrow \dfrac{x^2-4}{x-2}>1\Rightarrow \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}>1\Rightarrow \begin{cases}x\neq 2\\ x+2>1\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x\neq 2\\ x>-1\end{cases}$

Bài toán 12. Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{\dfrac{16}{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$, với $0<x<2$ (1)

b) $\sqrt{\dfrac{x^2-16}{x-3}}-\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$, với $3<x<8$ (2)

c) $(x+3)\dfrac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{8-x}}\geq 0$ (3)

Hướng dẫn:

a) $\sqrt{\dfrac{16}{2-x}}=\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{2-x}}=\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}$

b) Điều kiện $x-3>0$ nên ta có thể nhân hai vế của (2) với $\sqrt{x-3}>0$.

c) Đặt điều kiện $6-x\geq 0$ và $8-x>0\Rightarrow x\leq 6\Rightarrow \dfrac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{8-x}}\geq 0$

Lời giải:

a) Ta có: (1) $\Rightarrow \dfrac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2\Rightarrow \begin{cases}2-x>0\\ 4-(\sqrt{2-x})^2<2\left(\sqrt{x-2}\right)\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases}x<2\\ 4-(2-x)<2\sqrt{2-x}\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x<2\\ x+2<2\sqrt{2-x}\ (*)\end{cases}$$

$(*)\Rightarrow x^2+8x+16-20<0\ \Rightarrow (x+4)^2<20\ \ \Rightarrow \sqrt{(x+4)^2}<\sqrt{20}\Rightarrow |x+4|<\sqrt{20}$

$$\Rightarrow -\sqrt{20}<x+4<\sqrt{20}\ \ \Rightarrow -4-\sqrt{20}<x<\sqrt{20}-4$$

Kết hợp điều kiện $0<x<2$, ta lấy $0<x<2$.

b) Điều kiện $x-3>0\Rightarrow x>3$

Từ (2) $\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-16}{x-3}}+(\sqrt{x-3})^2\\ x>3\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x^2-16\geq 0\\ \sqrt{x-3}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+x-3>5\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x^2-16\geq 0\\ x>3\\ \sqrt{x^2-16}>8-x(*)\end{cases}$

Với $x<8\Rightarrow 8-x>0$

Bình phương hai vế bất phương trình (*), ta được:

$\begin{cases}3<x<8\\ x^2-16>(8-x)^2\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}\geq 3<x<8\\ x^2-16>64-16x+x^2\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}3<x<8\\ 16x>80\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}3<x<8\\ 16x>80\end{cases}\Rightarrow 5<x<8$

c) Điều kiện: $\begin{cases}6-x\ge 0\\ 8-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le 6\\ x<8\end{cases}\Rightarrow x\le 6$. Khi đó $\dfrac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{8-x}}\ge 0$

Vậy (3) $\Rightarrow\begin{cases}x\le 6\\ x+3\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le 6\\ x\ge -3\end{cases}\Rightarrow -3\le x\le 6$

Bạn hãy tự giải các bài toán sau:

Tìm x, biết:

a) $(x+3)\sqrt{\dfrac{6-x}{8-x}}\ge 0$ b) $(x+2)\sqrt{\dfrac{4-x}{5-x}}<0$

Hướng dẫn: a) Điều kiện $\dfrac{6-x}{8-x}\ge 0\Rightarrow x>8$ hoặc $x\le 6$

Khi đó $\sqrt{\dfrac{6-x}{8-x}}\ge 0$. Từ đó $(1)\Rightarrow x+3\ge 0\Rightarrow x\ge -3$

Vậy $-3\le x\le 6$ hoặc $x>8$

b) Đáp số: $x<-2$.

Bài toán 13. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a}{\sqrt{a-1}}\ge 2$, với a >1 b) $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\ge 2$ c) $\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}}\ge 1$

Hướng dẫn: Dùng phép biến đổi tương đương hoặc áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai.

Lời giải:

a) Ta có với $a>1\Rightarrow a-1>0\Rightarrow\sqrt{a-1}>0$

$$\frac{a}{\sqrt{a-1}}\ge 2\Rightarrow a\ge 2\sqrt{a-1}\Rightarrow a-1\ge 2\sqrt{a-1}-1\Rightarrow(\sqrt{a-1})^2-2\sqrt{a-1}+1\ge 0\Rightarrow(\sqrt{a-1}-1)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng $\forall a>1$.

Dấu " = " xảy *ra* $\Leftrightarrow\sqrt{a-1}-1=0\Leftrightarrow a=2$

Cách giải khác, ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{a-1}}\ge 2\quad\Rightarrow\frac{a-1+1}{\sqrt{a-1}}\ge 2\Rightarrow\frac{(\sqrt{a-1})^2+1}{\sqrt{a-1}}\ge 2\Rightarrow\sqrt{a-1}+\frac{1}{\sqrt{a-1}}\ge 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\sqrt{a-1}$ và $\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}$ ta có.

$$\sqrt{a-1}+\frac{1}{\sqrt{a-1}}\ge 2\cdot\sqrt{\sqrt{a-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a-1}}}=2\ (dpcm)$$

(Có thể đặt $t=\sqrt{a-1}\Rightarrow t^2=a-1$, ta chứng minh: $I+^2x+\dfrac{t^2+1}{t}\ge 2,\forall t>0\Big)$

Nhận xét: 1) Từ bất đẳng thức đã cho: $\frac{a}{\sqrt{a-1}} \ge 2$, ta suy ra $\frac{\sqrt{a-1}}{a} \le \frac{1}{2}; \forall a > 1$

2) Tương tự, ta còn có: $\frac{\sqrt{b-2}}{b} \le \frac{1}{2\sqrt{2}}; \forall b > 2$

Từ (1) và (2), ta có bài toán: Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{a-1}}{a} + \frac{\sqrt{b-2}}{b} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \forall a > 1; b > 2$.

b) Ta có: $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2 \Rightarrow x^2 + 2 \ge 2\sqrt{x^2+1}$, vì $x^2 \ge 0, \forall x$

$\Rightarrow x^2 + 1 > 0, \forall x \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 + 1 \ge 2\sqrt{x^2+1} \quad \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+1} - 1\right)^2 \ge 0$ (luôn đúng, $\forall x$)

Cách giải khác:

Đặt $u = \sqrt{x^2+1}$; vì $x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 + 1 \ge 1 \Rightarrow u > 0 \Rightarrow u^2 = x^2 + 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng:

$$\frac{u^2+1}{u} \ge 2 \Rightarrow u^2 + 1 \ge 2u \text{ (vì } u > 0 \text{)} \Rightarrow u^2 + 1 - 2u > 0 \Rightarrow (u-1)^2 \ge 0 \text{ (luôn đúng)}$$

c) Đặt $u = \sqrt{4x^2+1}; u > 0 \Rightarrow u^2 = 4x^2 + 1 \Rightarrow 4x^2 = u^2 - 1 \qquad \Rightarrow 2x^2 = \frac{u^2-1}{2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{\frac{u^2-1}{2}+1}{u} \ge 1 \Rightarrow \frac{u^2+1}{2u} \ge 1 \Rightarrow u^2 + 1 \ge 2u \text{ (vò } u > 0 \text{)} \Rightarrow (u-1)^2 \ge 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Cách giải khác, ta có: $\frac{2x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}} \ge 1$

$$\Rightarrow \frac{4x^2+2}{\sqrt{4x^2+1}} \ge 2 \Rightarrow \frac{4x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} \ge 2 \Rightarrow \sqrt{4x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} \ge 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\sqrt{4x^2+1}$ và $\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$ ta có đpcm.

Bài toán 14.

a) Tìm giá trị lơn nhất của biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x-1}}{x}, x > 1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R}$

Hướng dẫn: Xem bài toán 13.

Lờ giải

a) Ta chứng minh được $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \le \frac{1}{2}, \forall x > 1$ (theo bài toán 13, a)

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy $ra \Rightarrow \sqrt{x-1}=1 \Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2$.

Ta còn có: $\dfrac{\sqrt{y-2}}{2} \le \dfrac{1}{2\sqrt{2}}, y>2$ (xem bài toán 13; b)

Bạn hãy giải bài toán sau:
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$A=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}+\dfrac{\sqrt{y-2}}{y}\left(x\ge 1; y\ge 2\right)$ $\quad B=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}+\dfrac{\sqrt{y-2}}{y}+\dfrac{\sqrt{z-3}}{z}\left(x\ge 1; y\ge 2; z\ge 3\right)$

$C=\dfrac{xy\sqrt{z-2}+yz\sqrt{x-3}+zx\sqrt{y-4}}{x>z}\left(x\ge 3; y\ge 4; z\ge 2\right)$ $\quad D=\dfrac{a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}}{ab}\left(a\ge 1; b\ge 1\right)$

Đáp số: $maxA=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}; maxB=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$; $maxC=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4}; maxD=1$

Bài toán 15.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$, (với $a>0, b>0$) 1

b) Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác và $P=\dfrac{a+b+c}{2}$ (nửa chu vi)

Chứng minh rằng: a) $\sqrt{(p-a)(p-b)}\le\dfrac{c}{2}$ b) $\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}\ge\dfrac{4}{c}$

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy.

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\dfrac{1}{a}$ và $\dfrac{1}{b}$, ta có:

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}}=2\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ (dpcm)

(Ta có thể biến đôi tương đương như sau:

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{2}{\sqrt{ab}}\Rightarrow\dfrac{a+b}{ab}\ge\dfrac{2}{\sqrt{ab}}\Rightarrow\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}\ge 2\Rightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}\Rightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$

b) Ta có:

$p-a=\dfrac{a+b+c}{2}-a=\dfrac{a+b+c-2a}{2}=\dfrac{b+c-a}{2}>0$

- Tương tự: $\mathrm{p}-\mathrm{b}>0$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$\sqrt{(p-a)(p-b)}\le\dfrac{p-a+p-b}{2}=\dfrac{2p-a-b}{2}=\dfrac{a+b+c-a-b}{2}=\dfrac{c}{2}$

- Tương tự:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{(p-a)(p-b)}} \geq \frac{2}{\sqrt{(p-a)(p-b)}}$$

Theo chứng minh trên, ta có:

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{c}{2} \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} \geq \frac{2}{c}$$

Vậy $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{c}$

Nhận xét: Từ các kết quả trên, ta có thể giải bài toán sau:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}$$

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

(với a, b, c là độ dài ba canh của tam giác, p là nửa chu vi).

Bài 9. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

- Nếu a là một số và b là một số không âm thì $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$.

- Chú ý: Phép biến đổi trên gọi là phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

- Nếu a và b là hai số không âm thì $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$.

- Nếu a là số âm và b là số không âm thì $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$.

Chú ý: Các phép biến đổi trên gọi là phép đưa thừa số vào trong dấu căn.

3. Trục căn thức ở mẫu

- Với các biểu thức A, B và $B > 0$, ta có $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.

- Với các biểu thức A, B, C mà $\mathrm{A} \ge 0, \mathrm{A} \ne \mathrm{B}^2$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A}+B} = \frac{C(\sqrt{A}-B)}{A-B^2}, \frac{C}{\sqrt{A}-B} = \frac{C(\sqrt{A}+B)}{A-B^2}.$$

- Với các biểu thức A, B, C mà $A \ge 0, B > 0, A \ne B$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A+B}; \frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}.$$

4. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

Khi rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần phối hợp các phén tính (cộng, trừ, nhân, chia) và các phép biến đổi đã học (đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn, khử mẫu của biểu thức lấy căn, trục căn thức ở mẫu).

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Bài toán 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{180\mathrm{x}^2}; \mathrm{x} < 0$ b) $\sqrt{25x^3}; x \ge 0$ c) $\sqrt{9a^2 b}; a \ge 0; b \ge 0$ d) $\sqrt{72x^4 y^2}; y < 0$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{180\mathrm{x}^2} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 .5\mathrm{x}^2} = 2.3|x|\sqrt{5}$ vì $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$.

Vậy $\sqrt{180x^2} = -6x\sqrt{5}$.

b) Ta có: $\sqrt{25x^3} = \sqrt{5^2 \cdot x^2 x} = 5|x| \cdot \sqrt{x}$ vì $x \ge 0 \Rightarrow |x| = x$.

Vậy $\sqrt{25x^3} = 5x\sqrt{x}$.

c) Ta có: $\sqrt{9a^2 b} = \sqrt{3^2 a^2 b} = 3|a|\sqrt{b}$ vì $a \ge 0 \Rightarrow |a| = a$.

Vậy $\sqrt{9a^2b} = 3a\sqrt{b}$.

d) Ta có: $\sqrt{72x^4y^2} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2 x^4 y^2} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2 \left(x^2\right)^2 y^2} = 6x^2|y|\sqrt{2}$ vì $y<0 \Rightarrow |y| = -y$

Vậy $\sqrt{72x^4y^2} = -6x^2y\sqrt{2}$.

Bài toán 2. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $A = \sqrt{22+12\sqrt{2}}$ b) $B = \sqrt{32+12\sqrt{7}}$ c) $C = \sqrt{18-6\sqrt{5}}$

Hướng dẫn:

a) Áp dụng phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn: $\sqrt{A^2 \cdot B} = |A|\sqrt{B}$; $B \geq 0$

Ta viết $22+12\sqrt{2} = 2(11+6\sqrt{2}) = 2\left(3^2 + 2.3\cdot\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2\right)$

Lời giải

a) Ta có: $A = \sqrt{2\left(3^2+2.3\sqrt{2}+2\right)} = \sqrt{2\cdot(3+\sqrt{2})^2} = |3+\sqrt{2}|\cdot\sqrt{2} = (3+\sqrt{2})\sqrt{2}$

b) Ta có: $B = \sqrt{2(16+6\sqrt{7})} = \sqrt{2(9+2\cdot 3\cdot\sqrt{7}+7)} = \sqrt{2(3+\sqrt{7})^2} = |3+\sqrt{7}|\sqrt{2} = (3+\sqrt{7})\sqrt{2}$

c) Ta có: $C = \sqrt{3(6-2\sqrt{5})} = \sqrt{3(1-2.1\cdot\sqrt{5}+5)} = \sqrt{3(1-\sqrt{5})^2} = |1-\sqrt{5}|\sqrt{3} = (\sqrt{5}-1)\sqrt{3}$

(Vì $1-\sqrt{5}<0 \Rightarrow |1-\sqrt{5}| = -(1-\sqrt{5}) = \sqrt{5}-1$).

Bài toán 3. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $A = \sqrt{\dfrac{8}{x^2-4xy+4y^2}}$ với $x<2y$ b) $B = \dfrac{1}{1-5x}\sqrt{3x^2\left(25x^2-10x+1\right)}$ với $0 \leq x < \dfrac{1}{5}$

Huớng dẫn: Xem lời giải bài toán 1, sau khi đưa thừa số ra ngoài dấu căn, ta rút gọn nếu được.

Lời giải

a) Ta có: $A = \sqrt{\dfrac{4.2}{(x-2y)^2}} = \dfrac{2}{|x-2y|}\sqrt{2}$, vì $x<2y \Rightarrow x-2y<0$

$\Rightarrow |x-2y| = -(x-2y) = 2y-x$

Vậy: $A = \dfrac{2\sqrt{2}}{2y-x}$.

b) Ta có: $B = \dfrac{1}{1-5x}\cdot\sqrt{3x^2(5x-1)^2} = \dfrac{1}{1-5x}|x|\cdot|5x-1|\sqrt{3}$

$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$;

$x < \dfrac{1}{5} \Rightarrow 5x<1 \Rightarrow 5x-1<0 \quad \Rightarrow |5x-1| = -(5x-1) = 1-5x$

Vậy $B = x\sqrt{3}$.

Bài toán 4. Rút gọn biểu thức:

a) $A=\sqrt{9a}-\sqrt{16a}+\sqrt{49a}$ với $a\geq 0$. b) $B=5\sqrt{1+x}+\sqrt{4x+4}-\sqrt{9+9x}$ với $x\geq -1$.

Hướng dẫn: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn và rút gọn.

Lời giải

a) Ta có: $A=3\sqrt{a}-4\sqrt{a}+7\sqrt{a}=6\sqrt{a}$ (với $a\geq 0$).

b) Ta có: $B=5\sqrt{1+x}+\sqrt{4(1+x)}-\sqrt{9(1+x)}=5\sqrt{1+x}+2\sqrt{1+x}-3\sqrt{1+x}=4\sqrt{1+x}$.

Bài toán 5. Rút gọn:

a) $A=\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}$ với $(a>0;\, b>0)$

b) $B=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{xy})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x-y)\left(\sqrt{x^3}+x\right)}$ với $(x>0; y>0, x\neq y)$.

Hướng dẫn:

Áp dụng: $\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2\cdot a}=|a|\sqrt{a}$ hoặc $\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2\cdot a}=a\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2\sqrt{a}=(\sqrt{a})^3$

Lời giải

a) Ta có:

$$A=\frac{\sqrt{a^2a}+\sqrt{b^2b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=\frac{|a|\sqrt{a}+|b|\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}$$

$$=\frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}$$

$$=a-2\sqrt{ab}+b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$

- Bạn có thể giải bài toán tương tự:

* Rút gọn biểu thức

1) $\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt{ab}$; $(a>0, b>0)$

2) $\dfrac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}$; $(a>0, b>0, a\neq b)$

Chú ý:

Ta có $\dfrac{2a(1-a)}{2(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})(1+a)}=\dfrac{a}{1+a}$

b) Với $x>0, y>0, x\neq y$, ta có:

$$B=\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{xy})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x-y)\left(\sqrt{x^3}+x\right)}=\frac{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x-y)(x\sqrt{x}+x)}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}(x-y)}{x(x-y)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

II. Đưa thừa số vào trong dấu căn

Bài toán 6. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $-3\sqrt{5}$ d) $-4\sqrt{2}$

Hướng dẫn:

Áp dụng $A\sqrt{B}=\sqrt{A^2B}$ $(A\ge 0, B\ge 0)$; $A\sqrt{B}=-\sqrt{A^2B}$ $\left(A<0, B\ge 0\right)$.

Lời giải

a) $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{18}$ b) $2\sqrt{6}=\sqrt{2^2\cdot 6}=\sqrt{24}$

c) $-3\sqrt{5}=-\sqrt{3^2.5}=-\sqrt{45}$ d) $-4\sqrt{2}=-\sqrt{4^2\cdot 2}=-\sqrt{32}$

Bài toán 7. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) a$\sqrt{13}$, $a<0$ b) a$\sqrt{\frac{7}{a}}$; $a>0$ c) $x\sqrt{\frac{-23}{x}}$; $x<0$ d) $2x\sqrt{\frac{y}{2x}}$; $x>0,\ y\ge 0$

Hướng dẫn:

Áp dụng $A\sqrt{B}=\sqrt{A^2B}(A\ge 0,\ B\ge 0)$; $A\sqrt{B}=-\sqrt{A^2B}$ $\left(A<0;\ B\ge 0\right)$

Lời giải

a) Ta có, với $a<0\Rightarrow a\sqrt{13}=-\sqrt{13a^2}$.

b) Ta có, với $a>0\Rightarrow a\sqrt{\frac{7}{a}}=\sqrt{\frac{7a^2}{a}}=\sqrt{7a}$.

c) Ta có, với $x<0\Rightarrow x\sqrt{\frac{-23}{x}}=-\sqrt{\frac{-23(x)^2}{x}}=-\sqrt{-23x}$

d) Ta có, với $x>0, y\ge 0\Rightarrow \sqrt{\frac{(2x)^2y}{2x}}=\sqrt{2xy}$.

Ta có thể xét bài toán sau:

1) Đưa thừa số vào trong dấu căn: $2x\sqrt{\frac{y}{2x}}$.

Trước hết, ta tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa: $\frac{y}{2x}\ge 0\Leftrightarrow \begin{cases} xy\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}$

Trường hợp 1: $x>0$ và $y>0$, ta có: $2x\sqrt{\frac{y}{2x}}=\sqrt{\frac{(2x)^2.y}{2x}}=\sqrt{2xy}$. (Xem bài toán d).

Trường hợp 2: $x<0$ và $y\le 0$, ta có: $2x\sqrt{\frac{y}{2x}}=-\sqrt{\frac{(2x)^2y}{2x}}=-\sqrt{2xy}$

2) Đưa thừa số vào trong dấu căn: $\dfrac{a}{a-b}\sqrt{\dfrac{a-b}{a}}$

Hướng dẫn: Điều kiện $\begin{cases}\dfrac{a-b}{a}\ge 0\\ a-b\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x=0 \text{ hoặc } x=2\end{cases}$

Với $\dfrac{a-b}{a}>0\Rightarrow\dfrac{a}{a-b}>0$

Vậy $\dfrac{a}{a-b}\sqrt{\dfrac{a-b}{a}}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{a-b}\right)^2.\dfrac{a-b}{a}}=\sqrt{\dfrac{a}{a-b}}$

III. Giải phương trình

Bài toán 8. Giải phương trình:

a) $2\sqrt{3x}-\sqrt{48x}+\sqrt{108x}+\sqrt{3x}=5$ (1)

b) $\sqrt{50x-25}+\sqrt{8x-4}-3\sqrt{x}=\sqrt{72x-36}-\sqrt{4x}$ (2)

c) $\sqrt{x^2-9}-\sqrt{4x-12}=0$ (3)

d) $\sqrt{2x^2+8x+8}+\sqrt{x+2}=0$ (4)

Hướng dẫn: Rút gọn biểu thức bằng cách đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

Lời giải

a) Ta có: (1) $\Rightarrow 2\sqrt{3x}-\sqrt{16.3x}+\sqrt{36.3x}+\sqrt{3x}=5\quad\Rightarrow 2\sqrt{3x}-4\sqrt{3x}+6\sqrt{3x}+\sqrt{3x}=5$

$\Rightarrow 5\sqrt{3x}=5\Leftrightarrow\sqrt{3x}=1\qquad\Rightarrow\begin{cases}1\ge 0\\ 3x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

b) Ta có: (2) $\Rightarrow\sqrt{25(2x-1)}+\sqrt{4(2x-1)}-3\sqrt{x}=\sqrt{36(2x-1)}-\sqrt{4x}$

$\Rightarrow 5\sqrt{2x-1}+2\sqrt{2x-1}-3\sqrt{x}=6\sqrt{2x-1}-2\sqrt{x}$

$\Rightarrow\sqrt{2x-1}=\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 2x-1=x\end{cases}\Rightarrow x=1$

c) Ta có: (3) $\Rightarrow\sqrt{(x-3)(x+3)}-\sqrt{4(x-3)}=0\quad\Rightarrow\begin{cases}x\ge 3\\ \sqrt{x-3}\sqrt{x+3}-2\sqrt{x-3}=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\ge 3\\ \sqrt{x-3}\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0\end{cases}\qquad\Rightarrow\begin{cases}x\ge 3\\ x=3 \text{ hoặc } x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=3$

d) Ta có: (4) $\Rightarrow\sqrt{2(x+2)^2}+\sqrt{x+2}=0$

Điều kiện: $x+2\ge 0\Rightarrow\sqrt{x+2}\ge 0$ và $\sqrt{2(x+2)^2}\ge 0\qquad\Rightarrow\sqrt{2(x+2)^2}+\sqrt{x+2}\ge 0$

Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow x+2=0\Leftrightarrow x=-2$.

+ (Bạn có thể giải tương tự như bài toán c)

(4) $\Rightarrow\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{(x+1)^2+9}\ge\sqrt{9}=3\qquad\Rightarrow x+2=0$ hoặc $\sqrt{2(x+2)}+1\Rightarrow 0\Rightarrow x=-2$

IV. Giải bất phương trình

Bài toán 9. Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{9x}-\sqrt{36x}+\sqrt{121x}<8$ (1) b) $\sqrt{x-1}+5\sqrt{4x-4}-\sqrt{9x-9}<4$ (2)

c) $\sqrt{2x^2-12x+18}+\sqrt{x-3}>0$ (3) d) $\sqrt{x^2-4}-\sqrt{4x+8}>0$ (4)

Hướng dẫn: Biến đổi biểu thức như bài toán 8 .

Lời giải

a) Ta có: (1) $\Rightarrow 3\sqrt{x}-6\sqrt{x}+11\sqrt{x}<8 \quad \Rightarrow 8\sqrt{x}<8 \Rightarrow \sqrt{x}<1 \Rightarrow 0\le x<1$

b) Ta có: (2) $\Rightarrow 8\sqrt{x-1}<4 \Rightarrow 2\sqrt{x-1}<1 \quad \Rightarrow \sqrt{4x-4}<1 \Rightarrow 0\le 4x-4<1 \quad \Rightarrow 1\le x<\frac{5}{4}$

c) Ta có: (3) $\Rightarrow \sqrt{2\left(x^2-6x+9\right)}+\sqrt{x-3}>0 \quad \Rightarrow \sqrt{2}.\sqrt{\left(x-3\right)^2}+\sqrt{x-3}>0$

$\Rightarrow \sqrt{x-3}\left[\sqrt{2\left(x-3\right)}+1\right]>0$

Vì $x-3\ge 0 \Rightarrow \sqrt{2\left(x-3\right)}+1>0$ ($x=3$ không thỏa mãn)

Vậy: (3) $\Rightarrow x-3>0 \Rightarrow x>3$.

d) Ta có: (4) $\Rightarrow \sqrt{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}-2\sqrt{x+2}>0 \quad \Rightarrow \sqrt{x+2}\left(\sqrt{x-2}-2\right)>0$

Với điều kiện $x+2\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x-2}-2>0$ ($x+2=0$ không thỏa mãn)

Khi đó: (4) $\Rightarrow \sqrt{x-2}-2>0 \quad \Rightarrow \sqrt{x-2}>2 \Rightarrow x-2>4 \Rightarrow x>6$

Kết hợp điều kiện $x>2$, ta lấy: $x>6$

Bạn có thể giải bất phương trình sau:

1) $\sqrt{x^2-9}-\sqrt{4\left(x+3\right)}<0$ 2) $\sqrt{x^2-9}-\sqrt{4\left(x+3\right)}>0$

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán d)

Bài toán 10. So sánh:

a) $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{3}$ và $5\sqrt{2}$ c) $-6\sqrt{2}$ và $-5\sqrt{3}$.

Hướng dẫn: Đưa thừa số vào trong dấu căn.

Lời giải

a) Ta có: $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2.2}=\sqrt{18};2\sqrt{3}=\sqrt{2^2.3}=\sqrt{12}$

Lại có: $12<18 \Rightarrow \sqrt{12}<\sqrt{18}$. Vậy $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$

b) Ta có: $5\sqrt{2}=\sqrt{25.2}=\sqrt{50};4\sqrt{3}=\sqrt{4^2.3}=\sqrt{48}$

Lại có: $48<50 \Rightarrow \sqrt{48}<\sqrt{50}$. Vậy $4\sqrt{3}<5\sqrt{2}$

c) Ta có: $6\sqrt{2}=\sqrt{6^2.2}=\sqrt{72};5\sqrt{3}=\sqrt{5^2.3}=\sqrt{75}$

Lại có: $72<75 \Rightarrow \sqrt{72}<\sqrt{75}$. Vậy $6\sqrt{2}<5\sqrt{3} \Rightarrow -6\sqrt{2}>-5\sqrt{3}$.

V. Trục căn thức ở mẫu

Bài toán 11. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\dfrac{5}{3\sqrt{8}}$ b) $\dfrac{1}{3\sqrt{20}}$ c) $\dfrac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\dfrac{A}{\sqrt{B}}=\dfrac{A\sqrt{B}}{B}(B>0)$

Lời giải

a) Ta có: $\dfrac{5}{3\sqrt{8}}=\dfrac{5\sqrt{8}}{3.8}=\dfrac{5.2\sqrt{2}}{3.8}=\dfrac{5\sqrt{2}}{12}$

b) Ta có: $\dfrac{1}{3\sqrt{20}}=\dfrac{\sqrt{20}}{3.20}=\dfrac{2\sqrt{5}}{60}=\dfrac{\sqrt{5}}{30}$

c) Ta có: $\dfrac{\left(2\sqrt{2}+2\right)\sqrt{2}}{5.2}=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{5.2}=\dfrac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{5.2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{5}$

d) Ta có: $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{2.3}=\dfrac{3\sqrt{3}+3}{2.3}=\dfrac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{2.3}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Chú ý: Ta có thể giải bài toán trục căn thức ở mẫu bằng cách khác:

$$\frac{5}{3\sqrt{8}}=\frac{5}{3.\sqrt{4.2}}=\frac{5}{6\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{6.2}=\frac{5\sqrt{2}}{12}$$

(Bài toán b) cũng giải tương tự như thế)

Bài toán 12. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{a+b\sqrt{a}}{b\sqrt{a}}$ c) $\dfrac{a}{\sqrt{2a^3}}$ d) $\dfrac{2a^2}{\sqrt{2a^5}}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức: $\dfrac{A}{\sqrt{B}}=\dfrac{A\sqrt{B}}{B}(B>0)$

Lời giải

a) Điều kiện $a>0$, ta có $\dfrac{2}{\sqrt{a}}=\dfrac{2\sqrt{a}}{a}$

b) Điều kiện $a>0, b\neq 0$.

Ta có: $\dfrac{a+b\sqrt{a}}{b\sqrt{a}}=\dfrac{\left(a+b\sqrt{a}\right)\sqrt{a}}{ab}=\dfrac{a\sqrt{a}+ab}{ab}=\dfrac{\sqrt{a}+b}{b}(a>0,b\neq 0)$

c) Điều kiện $a>0$. Ta có: $\dfrac{a}{\sqrt{2a^3}}=\dfrac{a.\sqrt{2a^3}}{2a^3}=\dfrac{a^2.\sqrt{2a}}{2a^3}=\dfrac{\sqrt{2a}}{2a}$

d) Điều kiện $a>0$, ta có: $\dfrac{2a^2}{\sqrt{2a^5}}=\dfrac{2a^2\sqrt{2a^5}}{2a^5}=\dfrac{2a^2.a^2\sqrt{2a}}{2a^5}=\dfrac{1}{a}\sqrt{2a}$

Bài toán 13. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+1}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}$ c) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$ e) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\dfrac{C}{\sqrt{A}\pm B}=\dfrac{C\left(\sqrt{A}\mp B\right)}{A-B^2}\left(A\ge 0; A\ne B^2\right)$.

Lời giải

a) Ta có: $\dfrac{3}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\dfrac{3\sqrt{3}-3}{3-1}=\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$.

b) Ta có: $\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1}=2\left(\sqrt{2}+1\right)$.

c) Ta có: $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{4+4\sqrt{3}+3}{4-3}=7+4\sqrt{3}$.

d) Ta có: $\dfrac{\left(2\sqrt{10}-5\right)\left(4+\sqrt{10}\right)}{16-10}=\dfrac{8\sqrt{10}+20-20-5\sqrt{10}}{6}=\dfrac{3\sqrt{10}}{6}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

e) Ta có: $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}=\dfrac{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{8}+2\right)}{8-4}=\dfrac{2\sqrt{24}+4\sqrt{3}-\sqrt{48}-2\sqrt{6}}{4}$

$=\dfrac{4\sqrt{6}+4\sqrt{3}-4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{4}=\dfrac{2\sqrt{6}}{4}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Bài toán 14. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\dfrac{a}{3+\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{p}{2\sqrt{p}-1}$ c) $\dfrac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$ d) $\dfrac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2}$

Hướng dẫn: Xem cách giải bài toán 6 .

Lời giải

a) Ta có: $\dfrac{a}{3+\sqrt{a}}=\dfrac{a\left(3-\sqrt{a}\right)}{3^2-a}=\dfrac{a\left(3-\sqrt{a}\right)}{9-a}\left(a\ge 0 \text{ và } a\ne 9\right)$

b) Ta có: $\dfrac{p}{2\sqrt{p}-1}=\dfrac{p\left(2\sqrt{p}+1\right)}{\left(2\sqrt{p}\right)^2-1^2}=\dfrac{p\left(2\sqrt{p}+1\right)}{4p-1}$

c) Ta có: $\dfrac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}=\dfrac{\left(a+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}\right)}{1-a}=\dfrac{\sqrt{a}\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}\right)}{1-a}=\dfrac{\sqrt{a}\left(1-a\right)}{1-a}=\sqrt{a}$

Nhận xét: Ta có thể giải cách khác.

$\dfrac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)}{1+\sqrt{a}}=\sqrt{a}$ (rút gọn phân thức bằng cách phân tích đa thức thành nhân tử).

d) Ta có: $\dfrac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2}=\dfrac{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}-2\right)}{\sqrt{p}-2}=\sqrt{p}$.

Bài toán 15. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$ d) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{10}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức: $\dfrac{C}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\dfrac{C(\sqrt{A}\mp\sqrt{B})}{A-B}(A\geq 0, B\geq 0, A\neq B)$

Lời giải:

a) Ta có $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\dfrac{4(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}=2(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

b) Ta có: $\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\dfrac{2(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{6-5}=2(\sqrt{6}+\sqrt{5})$

c) Ta có: $\dfrac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}=\dfrac{3(\sqrt{10}-\sqrt{7})}{10-7}=\sqrt{10}-\sqrt{7}$

d) Ta có: $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$

e) Ta có: $\dfrac{10}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{10(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{10(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{12-2}=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

Bài toán 16. Trục căn thức ở mẫu

a) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}(a>b>0)$ b) $\dfrac{2ab}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}(a>0,b>0)$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}(a\geq 0)$ d) $\dfrac{b}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}(a>b>0)$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức

$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{C(\sqrt{A}\mp\sqrt{B})}{A-B}(A\geq 0, B\geq 0, A\neq B)$$

Lời giải:

a) Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b},(a>b>0)$

b) Ta có: $\dfrac{2ab}{\sqrt{2}+\sqrt{b}}=\dfrac{2ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b},(a>0,b>0)$.

c) $\dfrac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{a+1-a}=\sqrt{a+1}-\sqrt{a},(a\geq 0)$

d) $\dfrac{b}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}=\dfrac{b(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})}{(a+b)-(a-b)}=\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{2},(a>b>0)$.

Bài toán 17 .

a) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ b) $\dfrac{a}{a\sqrt{a}+1}(a>0,b\neq 1)$ c) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}-1}$

Lời giải

a) Ta có: $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\dfrac{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2}{\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}}=2+\sqrt{3}$.

b) Ta có: $\dfrac{a}{a\sqrt{a}+1}=\dfrac{a(a\sqrt{a}-1)}{(a\sqrt{a})^2-1}=\dfrac{a(a\sqrt{a}-1)}{a^3-1},(a>0,b\neq 1)$.

c) Ta có: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+1)^2-2}=\dfrac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{(\sqrt{3}+1-\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

d) Ta có $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}-1}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{1+\sqrt{2}}+1)}{(\sqrt{1+\sqrt{2}})^2-1^2}=\sqrt{1+\sqrt{2}}+1$

Bài toán 18. So sánh (không dùng máy tính bỏ túi và bảng số)

a) $\sqrt{12}-\sqrt{11}$ và $\sqrt{11}-\sqrt{10}$

b) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ và $\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}$.

Hướng dẫn: Xét các biểu thức liên hợp của các biểu thức đã cho, chẳng hạn: $\sqrt{12}-\sqrt{11}$ và $\sqrt{12}+\sqrt{11},\sqrt{3}-1$ và $\sqrt{3}+1$.

Lời giải:

a) Ta có: $(\sqrt{12}-\sqrt{11})(\sqrt{12}+\sqrt{11})=12-11=1\Rightarrow\sqrt{12}-\sqrt{11}=\dfrac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$.

Tương tự, ta có: $\sqrt{11}-\sqrt{10}=\dfrac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}$

Vì $\sqrt{12}+\sqrt{11}>\sqrt{11}+\sqrt{10}\Leftrightarrow\sqrt{12}>\sqrt{10}\Leftrightarrow 12>10$ (hiển nhiên) nên

ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{10}}<\dfrac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}\Rightarrow\sqrt{12}-\sqrt{11}<\sqrt{11}-\sqrt{10}$

Nhận xét::

1) Từ kết quả $\sqrt{12}-\sqrt{11}<\sqrt{11}-\sqrt{10}\quad\Rightarrow\sqrt{12}+\sqrt{10}<2\sqrt{11}$.

- Một cách tổng quát với $n\in\mathbb{N}^*$ ta có: $\sqrt{n+2}+\sqrt{n}<2\sqrt{n+1}$ (xin bạn tự chứng minh)
- Nếu lấy $n=2014$, ta có bài toán:
  So sánh $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{(\sqrt{x-1})^2-2\sqrt{x-1}+1}$ và $2\sqrt{2015}$, v.v...)

2) Ta có: $\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

Vì vậy, ta có thể nói đây là phép "trục căn thức ở tử số".

b) Học sinh tự giải.

Bài toán 19. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}\geq -1,\forall x\geq 1$

b) $\dfrac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}\geq\sqrt{2},\forall x\geq 1,x\neq 3$

c) $\dfrac{y}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}<\dfrac{z}{\sqrt{x+z}-\sqrt{x-z}},\forall x>y>z>0$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\dfrac{C}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\dfrac{C(\sqrt{A}\neq\sqrt{B})}{A-B}$ $(A\geq 0, B\geq 0, A\neq B)$

Lời giải

a) Ta có: $\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=\dfrac{(x-2)(\sqrt{x-1}-1)}{(x-1)-1}=\sqrt{x-1}-1(x\neq 2)$

Vì $x\geq 1, x\neq 2\Rightarrow\sqrt{x-1}\geq 0\Rightarrow\sqrt{x-1}-1\geq -1$ (Nếu $x=2\Rightarrow\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=0>-1$, hiển nhiên)

Vậy $\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}\geq -1, \forall x\geq 1$.

Nhận xét: Ta có bài toán khó hơn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\dfrac{x-2+}{\sqrt{x-1}+1}, \forall x\geq 1.$ (Đáp số: $\min\limits_{x\geq 1} P=-1$ (với $x=1$)

(Bài toán có thể giải cách khác như sau:

Ta có: $\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}\geq -1\Rightarrow x-2\geq -1(\sqrt{x-1}+1)$ (vì $\sqrt{x-1}+1>0, \forall x\geq 1$)

$\Rightarrow x+\sqrt{x-1}-1\geq 0$ $\Rightarrow(x-1)+\sqrt{x-1}\geq 0, \forall x\geq 1$ $\Rightarrow\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)\geq 0$ (hiển nhiên đúng $\forall x\geq 1$)

Nhưng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của P thì ta phải trục căn thức ở mẫu.

b) Ta có $\dfrac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}=\dfrac{(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-1})^2-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})}{x-3}=\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\geq\sqrt{2}$

(vì $x\geq 1, x\neq 3$)$\Rightarrow\sqrt{x-1}\geq 0$

(Em hãy suy nghĩ xem, ta không làm cách hai như bài toán a)

Ta còn có bài toán: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\dfrac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}, \forall x\geq 1; x\neq 3$, (Đáp số: $\min P=\sqrt{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x=1)

c) Ta có: $\dfrac{y}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}=\dfrac{y\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)}{(x+y)-(x-y)}=\dfrac{y(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})}{2y}=\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{2}$

Tương tự: $\dfrac{z}{\sqrt{x+z}-\sqrt{x-z}}=\dfrac{\sqrt{x+z}+\sqrt{x-z}}{2}$

Còn lại, ta sẽ chứng minh:

$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}<\sqrt{x+z}+\sqrt{x-z}$ (*) (với $x>y>z>0$)

Bình phương hai vế bất đẳng thức (*), ta được:

$(*)\Leftrightarrow x+y+2\sqrt{x^2-y^2}+x-y<x+z+2\sqrt{x^2-z^2}+x-z\Leftrightarrow\sqrt{x^2-y^2}<\sqrt{x^2-z^2}$

$\Leftrightarrow x^2-y^2<x^2-z^2\Leftrightarrow y^2>z^2\Leftrightarrow y>z>0$ (hiển nhiên).

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Bài toán 20. Rút gọn:

a) $A=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{10}}$ b) $B=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{100}}$

Hướng dẫn: Trục căn thức ở mẫu số của mỗi số hạng.

Lời giải:

a)Ta có $A=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\ldots+\frac{\sqrt{10}-\sqrt{9}}{10-9}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{9}-\sqrt{8}+\sqrt{10}-\sqrt{9}$

$=\sqrt{10}-1$

Nhận xét: Vì $\sqrt{10}>\sqrt{9}\Rightarrow\sqrt{10}-1>\sqrt{9}-1$

Ta có bài toán: So sánh: $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{10}}$ và 2.

Bài toán tương tự: So sánh $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ và 9

b) Ta có: $B=2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{2\sqrt{100}}\right)$

$<2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}\right)=2(\sqrt{100}-1)=18$

Bài toán tương tự.

Rút gọn:

a) $P=\frac{1}{1+\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{9}+13}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2017}}$ b) $Q=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2014}}$

VI. Giải phương trình

Bài toán 21.

a) $\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=2$ (1) b) $\frac{4x^2}{(1-\sqrt{2x+1})^2}=2x+6$ (2) c) $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2}=x-4$ (3)

Hướng dẫn: Trục căn thức ở mẫu:

Lời giải

a) Ta có: (1) $\Rightarrow\frac{(x-2)(\sqrt{x-1}-1)}{x-2}=2(x\geq1,x\neq2)$

$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}-1=2\\x\geq1;x\neq2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}=3\\x\geq1;x\neq2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-1=9\\x\geq1,x\neq2\end{cases}\Rightarrow x=10$

b) Điều kiện: $x \ge -\frac{1}{2}$ và $1-\sqrt{2x+1} \ne 0 \Rightarrow x \ge \frac{-1}{2}$ và $x \ne 0$.

Khi đó: $(2) \Rightarrow \frac{4x^2(1+\sqrt{2x+1})^2}{(1-\sqrt{2x+1})^2(1+\sqrt{2x+1})^2} = 2x+6$

$\Rightarrow \frac{4x^2(2+2x+2\sqrt{2x+1})}{(1-2x-1)^2} = 2x+6 \Rightarrow \sqrt{2x+1} = 2$

$\Rightarrow 2x+1 = 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ (Thỏa mãn diều kiện $x \ge \frac{-1}{2}$ và $x \ne 0$)

c) Điều kiện: $x \ge -1$. Ta có:

$(1) \Rightarrow \frac{x^2(1-\sqrt{1+x})^2}{(1+\sqrt{1+x})^2(1-\sqrt{1+x})^2} = x-4 (x \ne 0)$

$\Rightarrow 2+x-2\sqrt{1+x} = x-4 \Rightarrow \sqrt{1+x} = 3 \Rightarrow 1+x = 9 \quad \Rightarrow x = 8$ (Thoả mãn điều kiện $x \ge -1$ vì $x \ne 0$)

Bài toán 22. Giải phương trình $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x$

Hướng dẫn: Đặt điều kiện và nhân hai vế với biểu thức liên hợp của vế trái.

Lời giải

Điều kiện $-2 \le x \le 1$

Ta có $(*) \Rightarrow (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$

$\Rightarrow 2x = x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \qquad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 (**) \end{array}\right.$

Xét phương trình $(**)$. Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$1.\sqrt{1+x} + 1.\sqrt{1-x} \le \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{1+x+1-x} = 2$

Dấu " = " xảy ra $\Rightarrow \sqrt{1+x} = \sqrt{1-x} \quad \Rightarrow x = 0$ (Thỏa mãn điều kiện: $-1 \le x \le 1$).

Đáp số: $x = \mathbf{0}$. (có thể bình phương hai vế)

Cách trình bày khác như sau:

$(*) \Rightarrow \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = x \quad \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = x \Rightarrow 2x = x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$

Ta được kết quả như cách giải trên. Việc này ta tạm gọi là “ trục căn thức ở tử”

Bạn hãy giải bài sau:

1) $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}$

2) $4(x+1)^2=(2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2$

3) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+x}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=x$

4) $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\dfrac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$

Đáp số: 1) $x=2$ 2) $x=3$ 3) $x=-2$ 4) $x=\dfrac{2}{3};\ x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

VII. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Bài toán 23. Rút gọn:

a) $A=\left(\dfrac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)^2$ $(x\ge 0$ và $x\ne 1)$.

b) $B=\left(\dfrac{2-a\sqrt{a}}{2-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\cdot\left(\dfrac{2-\sqrt{a}}{2-a}\right)(a\ge 0; a\ne 2; a\ne 4)$.

c) $C=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}(x>0, x\ne 1)$.

Hướng dẫn: Thực hiện phép tính trong dấu ngoặc trước.

Lời giải

a) Ta có: $A=\left[\dfrac{(1-\sqrt{x})(x+\sqrt{x}+1)}{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right]\left[\dfrac{1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}\right]^2$

$=(x+2\sqrt{x}+1)\cdot\dfrac{1}{(1+\sqrt{x})^2}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)^2}=1$

b) Ta có: $B=\dfrac{2-a\sqrt{a}+2\sqrt{a}-a}{2-\sqrt{a}}\cdot\dfrac{2-\sqrt{a}}{2-a}$

$=\dfrac{(2-a)+\sqrt{a}(2-a)}{2-\sqrt{a}}\cdot\dfrac{2-\sqrt{a}}{2-a}=\dfrac{(2-a)(1+\sqrt{a})}{2-a}=1+\sqrt{a}$

c) Ta có: $C=\dfrac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}-\dfrac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

$=\dfrac{x+\sqrt{x}+1-x+\sqrt{x}-1+x+1}{\sqrt{x}}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$

(Ta có thể đặt $u=\sqrt{x}; u\ge 0\Rightarrow x=u^2$ và đưa về biểu thức theo biến u như đã học ở lớp 8)

Bài toán 24. Rút gọn biểu thức:

a) $A=\left(\dfrac{3x-3\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}(x\ge 0, x\ne 1)$

b) $B=\dfrac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}(x\ge 0, x\ne 9)$

c) $C=\dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}(x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9)$

Hướng dẫn: Phân tích các mẫu thức thành nhân tử.

Lời giải

a) Ta có: $x+\sqrt{x}-2=x-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-2\ =\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)+2(\sqrt{x}-1)=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)$

Vậy $A=\left[\dfrac{(3x-3\sqrt{x}-3)+(\sqrt{x}+2)-(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}\right]\cdot(\sqrt{x}+2)\quad=\dfrac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)}=3\sqrt{x}$

Cách khác: Đặt $\text{u}=\sqrt{v},\ \text{u}\ge 0 => x=u^2$

Khi đó: $\text{A}=\left(\dfrac{3\text{u}^2-3\text{u}-3}{\text{u}^2+\text{u}-2}+\dfrac{1}{\text{u}-1}-\dfrac{1}{\text{u}+2}\right):\dfrac{1}{\text{u}+2}$

Biến đổi và rút gọn, ta được kết quả trên, với chú ý rằng:

$u^2+u-2=(u-1)(u+2)$

Ta có $x-2\sqrt{x}-3=x+\sqrt{x}-3\sqrt{x}-3=\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)-3(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)$

Khi đó

$$B=\frac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}-\frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}=\frac{x\sqrt{x}-3-(2\sqrt{x}-6)(\sqrt{x}-3)-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-3-2x+6\sqrt{x}+6\sqrt{x}-18-x-\sqrt{x}-3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-3x+8\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}=\frac{x(\sqrt{x}-3)+8(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}=\frac{(\sqrt{x}-3)(x+8)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}=\frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$$

c) Ta có: $x-5\sqrt{x}+6=x-3\sqrt{x}-2\sqrt{x}+6=\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)-2(\sqrt{x}-3)\ =(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)$

Vậy $C=\dfrac{2\sqrt{x}-9-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}$

$$=\frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}=\frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}$$

$=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$(vì $x-\sqrt{x}-2=x+\sqrt{x}-2\sqrt{x}-2$

$=\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)-2(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)$

Có thể đặt $\text{u}=\sqrt{\text{x}};\text{u}\ge 0\Rightarrow \text{x}=\text{u}^2$

Bài toán 25. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1}$.

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức P.

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tìm x để $P=10$.

Lời giải

a) P xác định $\Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \sqrt{x}+1\ne 0 \\ x-\sqrt{x}+1\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\ne 1 \end{cases}$ (Vì $x-\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, với mọi $x\ge 0$ và $x\ne 1$);

khi $x\ge 0$ và $x\ne 1\Rightarrow x\sqrt{x}+1>0$ và $\sqrt{x}+1>0$.

b) Ta có $x\sqrt{x}+1=(\sqrt{x})^3+1^3=(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$

Vậy $P=\left[\frac{x+2-(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}\right]\cdot\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

c) $P=10$ $(x\ge 0; x\ne 1)\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1}=10\Rightarrow 10(\sqrt{x}-1)=1 \quad \Rightarrow 10\sqrt{x}-10=1\Rightarrow 10\sqrt{x}=11$

$\Rightarrow x=\frac{121}{100}$ (Thỏa mãn diều kiện).

Bài toán 26. Cho biểu thức $A=\frac{1}{2+2\sqrt{a}}+\frac{1}{2-2\sqrt{a}}-\frac{a^2+1}{1-a^2}$

a) Tìm điều kiện xác định của A.   b) Rút gọn biểu thức A.   c) Tìm giá trị của a; biết $A<\frac{1}{3}$.

Lời giải

a) Biểu thức A có nghĩa (xác định) $\Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ 2+2\sqrt{a}\ne 0 \\ 2-2\sqrt{a}\ne 0 \\ 1-a^2\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\ge 0 \\ 2(1+\sqrt{a})\ne 0 \\ 2(1-\sqrt{a})\ne 0 \\ (1-a)(1+a)\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\ge 0 \\ a\ne 1 \end{cases}$

b) Ta có:

$$A=\frac{1}{2(1+\sqrt{a})}+\frac{1}{2(1-\sqrt{a})}-\frac{a^2+1}{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})(1+a)}$$
$$=\frac{(1-\sqrt{a})\cdot(1+a)+(1+\sqrt{a})(1+a)-2\left(a^2+1\right)}{2(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})(1+a)}$$
$$=\frac{1+a-\sqrt{a}-a\sqrt{a}+1+a+\sqrt{a}+a\sqrt{a}-2a^2-2}{2(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})(1+a)}=\frac{2a(1-a)}{2(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})(1+a)}=\frac{a}{1+a}$$

c) $A<\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{a}{1+a}<\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{a}{1+a}-\frac{1}{3}<0 \quad \Rightarrow\frac{2a-1}{3(1+a)}<0\Rightarrow 2a-1<0$ (vì $a\ge 0$; nên mẫu số luôn dương)

$\Rightarrow a<\frac{1}{2}$. Kết hợp điều kiện, ta có $0\le a<\frac{1}{2}$.

Bài toán 27. $A=\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$

a) Tìm điều kiện có nghĩa của A. b) Rút gọn A. c) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Lời giải

a) Biểu thức A có nghỉa (xác định) $\Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\sqrt{x}-1\ne 0 \\ x+\sqrt{x}+1\ne 0 \\ 1-\sqrt{x}\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\ne 1 \end{cases}$

b) Ta có: $x\sqrt{x}-1=(\sqrt{x})^3-1=(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)$

Mẫu thức chung: $x\sqrt{x}-1$

Vậy $A=\dfrac{x+2+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{x\sqrt{x}-1}=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}=\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$

c) Vì $x\ge 0\Rightarrow A=0$ khi $x=0; A>0$ khi $x>0$ với $x>0$.

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{1}{A}=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1$

Theo bất đẳng thức Cauchy: $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ge 2\sqrt{\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=2\Rightarrow \dfrac{1}{A}\ge 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{1}{A}$ bằng 3.

Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow x=1$ Khi đó A có giá trị lớn nhất là $\dfrac{1}{3}$

Dấu " = " xảy ra khi $x=1$ (với $x=0$ thì $A=0<\dfrac{4}{3}$)

Đáp số: giá trị lớn nhất của A bằng $\dfrac{1}{3}$ (khi $x=1$).

Bài toán 28. Giải phương trình:

a) $\sqrt{2x^2-4x+1}=x-1$ (1) b) $\sqrt{4x-20}-3\sqrt{\dfrac{x-5}{9}}=\sqrt{1-x}$ (2)

Áp dụng: $\sqrt{A}=B\Leftrightarrow \begin{cases} B\ge 0 \\ A=B^2 \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có: (1) $\Rightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ 2x^2-4x+1=(x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ 2x^2-4x+1=x^2-2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-2x=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x(x-2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x=0 \ \ hoac\ x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x=0\ hoac\ x=2 \end{cases} \Rightarrow x=2$

b) Ta có: (2) $\Rightarrow 2\sqrt{x-5}-3.\frac{1}{3}\sqrt{x-5}=\sqrt{1-x}\Rightarrow\sqrt{x-5}=\sqrt{1-x}\Rightarrow\begin{cases}1-x\ge 0\\ x-5=1-x\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\le 1\\ x=3\end{cases}\Rightarrow x=\varnothing$

Vậy phương trình (2) vô nghiệm.

Bài toán 29. Giải phương trình $\sqrt{x-5}+\sqrt{7-x}=2$ (*)

Lời giải

Ta có: (*)$\Rightarrow\begin{cases}5\le x\le 7\\ x-5+2\sqrt{(x-5)(7-x)}+7-x=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5\le x\le 7\\ 2\sqrt{(x-5)(7-x)}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5\le x\le 7\\ (x-5)(7-x)=1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}5\le x\le 7\\ x^2-12x+36=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5\le x\le 7\\ (x-6)^2=0\end{cases}\Rightarrow x=6$

Vậy phương trình (*) có nghiệm $x=6$

Cách giải khác:

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$\sqrt{x-5}+\sqrt{7-x}=1\sqrt{x-5}+1\sqrt{7-x}\le\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{x-5+7-x}=2$

Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow\sqrt{x-5}=\sqrt{7-x}\Rightarrow x-5=7-x\Rightarrow x=6$

Vậy phương trình (*) có nghiệm $x=6$

Ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy như sau:

$\sqrt{x-5}=\sqrt{(x-5).1}\le\frac{x-5+1}{2}=\frac{x-4}{2}\quad(x\le 7)$

Vậy: $\sqrt{x-5}+\sqrt{7-x}\le\frac{x-4}{2}+\frac{8-x}{2}=2$

Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow\begin{cases}x-5=1\\ 7-x=1\end{cases}\Rightarrow x=6$

Vậy phương trình (*) có nghiệm $x=6$

Bài toán 30. Giải phương trình: $\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}+\sqrt{(1+x)(3-x)}=2$

Hướng dẫn: Để ý đến biểu thức dưới các dấu căn, ta đặt ẩn phụ:

$u=\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}$, từ đó tính $\sqrt{(1+x)(3-x)}$ qua u

Lời giải

Đặt $u=\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\ (-1\le x\le 3)\Rightarrow u\ge 0$

$\Rightarrow u^2=1+x+2\sqrt{(1+x)(3-x)}+3-x\Rightarrow\sqrt{(1+x)(3-x)}=\frac{u^2-4}{2}$

Ta có phương trình: $\frac{u^2-4}{2}+u=2\Rightarrow u^2+2u-8=0\Rightarrow u^2+2u+1=9\Rightarrow(u+1)^2=3^2$

$\Rightarrow|u+1|=3$

Vì $u\ge 0\Rightarrow|u+1|=u+1\Rightarrow u=2$

Vậy $\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2 \Rightarrow \begin{cases}-1\le x\le 3\\ 1+x+2\sqrt{(1+x)(3-x)}+3-x=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1\le x\le 3\\ 2\sqrt{(1+x)(3-x)}=0\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\end{array}\right.$

Nhận xét: Ta có thể xét điều kiện của u chặt chẽ hơn:

$2\le u\le 2\sqrt{2}$. Thật vậy:

Thaeo bất đẳng thức Bunyakovsky:

$1.\sqrt{1+x}+1.\sqrt{3-x}\le\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{1+x+3-x}=2\sqrt{2}\Rightarrow u\le 2\sqrt{2}$

Lại có: $u^2=4+2\sqrt{(1+x)(3-x)}\ge 4$ $(vì\ -1\le x\le 3)$

$\Rightarrow\sqrt{(1+x)(3-x)}\ge 0\Rightarrow u\ge 2$

Ta có bài toán mới sau đay: “Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $A=\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}$”

BÀI 10. CĂN BẬC BA VÀ CĂN THỨC BẬC BA

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Căn bậc ba

* Căn bậc ba của số thực a là số thực x thỏa mãn $x^3 = a$.

Chú ý: Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc ba. Căn bậc ba của só a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$. Trong kí hiệu $\sqrt[3]{a}$, số 3 được gọi là chỉ só của căn. Phép tìm căn bậc ba của một số gọi là phép khai căn bậc ba.

Nhận xét: $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$ với mọi số thực a.

2. Căn thức bậc ba

Căn thức bậc ba là biểu thức dạng $\sqrt[3]{A}$ trong đó A là một biểu thức đại số.

B. PHÂN LOẠI CÁC DẠNG BÀI TẬP

I. Tính căn bậc ba

Bài toán 1. Tính:

a) $\sqrt[3]{216}$ b) $\sqrt[3]{-512}$ c) $\sqrt[3]{-0,001}$ d) $\sqrt[3]{1,331}$ e) $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}$

Hướng dẫn: $\sqrt[3]{a^3} = a$ với mọi số thực a.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6.$ b) Ta có: $\sqrt[3]{-512} = \sqrt[3]{-(8)^3} = -8.$

c) Ta có: $\sqrt[3]{-0,001} = \sqrt[3]{-(0,1)^3} = -0,1$ d) $\sqrt[3]{1,331} = \sqrt[3]{(1,1)^3} = 1,1$

e) $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}} = \sqrt[3]{-\left(\dfrac{2}{3}\right)^3} = -\dfrac{2}{3}.$

Bài toán 2. Sử dụng MTCT, tính căn bậc ba sau đây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

a) $\sqrt[3]{2,1}$ b) $\sqrt[3]{-18}$ c) $\sqrt[3]{0,35}$ d) $\sqrt[3]{3,25}$

e) $\sqrt[3]{45}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{2,1} \approx 1,28;$ b) Ta có: $\sqrt[3]{-18} \approx -2,62;$

c) Ta có: $\sqrt[3]{0,35} \approx 0,70$ d) Ta có: $\sqrt[3]{3,25} \approx 1,48;$ e) Ta có: $\sqrt[3]{45} \approx 3,56$

Bài toán 3. Tính:

a) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{64}};$ b) $2\left(\sqrt[3]{27} + 5\sqrt[3]{216}\right).\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}}.$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{64}} = 2 + (-3) - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{5}{4}.$

b) $2\left(\sqrt[3]{27} + 5\sqrt[3]{216}\right).\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}} = 2\left(\sqrt[3]{3^3} + 5\sqrt[3]{6^3}\right).\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{4}\right)^3} = (2.3 - 5.6).\dfrac{1}{4} = (-24).\dfrac{1}{4} = -6.$

Bài toán 4. Tính giá trị các căn thức: $\sqrt[3]{5x-1}$ tại $x=0$ *và* $x=-1,4$.

Lời giải

- Với $x=0$, *ta có*: $\sqrt[3]{5.0-1}=\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{(-1)^3}=-1.$
- Với $x=-1,4$ *ta có*: $\sqrt[3]{5.(-,14)}=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2.$

II. RÚT GỌN BIỂU THỨC

Bài toán 5. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}$; b) $\sqrt[3]{27x^3-27x^2+9x-1}$; c) $\sqrt[3]{8x^3-12x^2+6x-1}$;

Hướng dẫn: $(a-1)^3=a^3-3a^2+3a-1$;

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}=\sqrt[3]{(x-1)^3}=x-1.$

b) Ta có: $\sqrt[3]{27x^3-27x^2+9x-1}=\sqrt[3]{(3x-1)^3}=3x-1.$

c) Ta có: $\sqrt[3]{8x^3-12x^2+6x-1}=\sqrt[3]{(2x-1)^3}=2x-1.$

Bài toán tương tự:

Rút gọn: a) $\sqrt[3]{8x^3+12x^2+6x+1}$ b) $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}$.

Bài toán 6. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}$; b) $\sqrt[3]{(2\sqrt{2}+1)^2}$; c) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}\right)^3$.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}=1-\sqrt{2}.$ b) Ta có: $\sqrt[3]{(2\sqrt{2}+1)^3}=2\sqrt{2}+1$

c) Ta có: $\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}\right)^3=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3}=\sqrt{2}+1.$

Nhận xét:

- Vì $\left(\sqrt{2}+1\right)^3=1-3\sqrt{2}+6-2\sqrt{2}=7-5\sqrt{2}$, ta có bài toán rút gọn $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$
- Từ bài toán b) và c), ta có bài toán sau:
- Rút gọn $\sqrt[3]{25+22\sqrt{2}}$; $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$.

Bài toán 7. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

a) $x+5+\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}$; tại $x=-3$; b) $x+\sqrt[3]{1-9x+27x^2-27x^3}$; tại $x=2$.

Lời giải

a) Ta có: $x+5+\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}=x+5+\sqrt[3]{(x+1)^3}=x+5+x+1=2x+6$

Tại $x=-3$; ta có: $2.(-3)+6=-6+6=0$

b) Ta có: $x+\sqrt[3]{1-9x+27x^2-27x^3}=x+\sqrt[3]{(1-3x)^3}=x+(1-3x)=-2x+1$

Tại $x=2$. Ta có: $-2.2+1=-3$

Bài toán 8. Rút gọn biểu thức:

a) $A=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$; b) $B=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn: Lập phương hai vế. Xem nhận xét ở bài toán 6.

Lời giải

a) Đặt $a=20+14\sqrt{2}$; $b=20-14\sqrt{2}$

Ta có: $A=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\Rightarrow A^3=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3=a+b+3\sqrt[3]{ab}.(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$

Ở đó: $a+b=20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}=40$

$ab=\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\left(20-14\sqrt{2}\right)}=\sqrt[3]{8}=2$

Vậy $A^3=40+6A.$ $\quad\Rightarrow A^3-6A-40=0$ $\quad\Rightarrow (A-4)(A^2+4A+10)=0$

$\Rightarrow A-4=0$ *vì* $A^2+4A+10=(A+2)^2+6\geq 6>0\Rightarrow A=4$ *vì* $(A+2)^2+6\geq 6>0$ vô nghiệm

Cách khác: $A=\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3}=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4.$

b) Ta có: $B=\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2.$

Nhận xét: Ta có thể làm như bài toán a)

Ta có bài toán sau:

1. Chứng tỏ rằng: $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ là một nghiệm của phương trình $x^3-6x-40=0$
2. Chứng tỏ rằng: $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ là một nghiệm của phương trình $x^3+3x-14=0$

Bài toán tương tự:

Chứng minh rằng:

a) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ là một số tự nhiên

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ là một số tự nhiên

III. Giải phương trình

Bài toán 9. Giải phương trình:

a) $\sqrt[3]{x-1}=2$; b) $\sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{12-5x}=1$

Hướng dẫn: Lập phương trình hai vế.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{x-1}=2\Rightarrow x-1=8\Rightarrow x=9$.

b) Ta co: $\sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{12-5x}=1$

$$\Rightarrow (5x+7)+3\left(\sqrt[3]{5x+7}\right)^2\cdot\sqrt[3]{12-5x}+3\cdot\sqrt[3]{5x+7}\cdot\left(\sqrt[3]{12-5x}\right)^2+12-5x=1$$

$$\Rightarrow 19+3\sqrt[3]{5x+7}.\sqrt[3]{12-5x}.\left(\sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{12-5x}\right)=1$$

mà $\sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{12-5x}=1$

$\Rightarrow 19+3\cdot\sqrt[3]{(5x+7)(12-5x)}=1$ $\quad\Rightarrow \sqrt[3]{(5x+7)(12-5x)}=-6$

$\Rightarrow (5x)^2-12.(5x)-300=0$ $\quad\Rightarrow x^2-x-12=0$ $\quad\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-3\end{array}\right.$

Thử lại: $x=4; x=-3$ đều là nghiệm của phương trình.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Căn bậc hai của 4 là:

A. 2. **B.** -2. **C.** 2 và -2. **D.** $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$.

Câu 2. Căn bậc hai số học của 49 là:

A. 7. **B.** -7. **C.** 7 và -7. **D.** $\sqrt{7}$ và $-\sqrt{7}$.

Câu 3. Rút gọn biểu thức $\sqrt[3]{\left(4-\sqrt{17}\right)^3}$ ta được:

A. $4+\sqrt{17}$. **B.** $4-\sqrt{17}$. **C.** $\sqrt{17}-4$. **D.** $-4-\sqrt{17}$.

Câu 4. Độ dài đương kính (mét) của hình tròn có diện tích $4\,\text{m}^2$ sau khi làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai bằng:

A. $2,26$. **B.** $2,50$. **C.** $1,13$. **D.** $1,12$.

Câu 5. Một vật rơi tự do từ độ cao $396,9\,\text{m}$. Biết quãng đường chuyển động S (mét) của vật phụ thuộc vào thời gian t (giây) bơi công thức $S=4,9t^2$. Vật chạm đất sau:

A. 8 giây. **B.** 5 giây. **C.** 11 giây. **D.** 9 giây.

Hướng dẫn - Đáp số

Câu 1. Chọn C.

Câu 2. Chọn A.

Câu 3. $\sqrt[3]{\left(4-\sqrt{17}\right)^3}=4-\sqrt{17}$. Chọn B.

Câu 4. $2\text{R}=2\cdot\sqrt{\dfrac{4}{\pi}}\approx 2,26$. Chọn A.

Câu 5. $\text{t}=\sqrt{\dfrac{\text{S}}{4,9}}=\sqrt{\dfrac{396,9}{4,9}}=9$ giây. Chọn D.

B. TỰ LUẬN

Bài 1. Không sử dựng MCCT, tính giá trị của biểu thức:

$$A=\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}+\sqrt{4\left(2+\sqrt{3}\right)^2}-\frac{1}{2-\sqrt{3}}.$$

Bài 2. Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{4}{\sqrt{x}+2}(x>0,x\neq 4)$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A tại $x=14$.

Bài 3. Biết rằng nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn tính bởi công thức $Q=I^2Rt$, trong đó Q là nhiệt lượng tính bằng đơn vị Joule (J,R là diện trở tính bằng dơn vị Ohm (Ω), I là cường độ dòng diện tính bàng đơn vị Ampe (A), t là thời gian tính bằng giây (s). Dòng điện chạy qua một dây dẫn co $R = 10\Omega$ trong thời gian 5 giây.

a) Thay dấu "?" trong bảng sau bàng các giá trị thích hợp.

$I(A)$	1	1,5	2
$Q(J)$	?	?	?

b) Cường độ dòng điện là bao nhiêu Ampe để nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn đạt 800 J ?

Bài 4. Tìm điều kiện có nghĩa của biểu thức:

a) $A = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ b) $B = \sqrt{x-2} + \dfrac{1}{x-2}$

Bài 5. Chứng minh:

a) $2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ b) $\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

Bài 6. Tính:

a) $A = \sqrt{2}\left(\sqrt{21}+3\right)\cdot\sqrt{5-\sqrt{21}}$ b) $B = \sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}$

Bài 7. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}\right) : \dfrac{x-\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+1} (x > 0)$

a) Rút gọn biểu thức P. b) Tìm x sao cho $P < 0$.

Bài 8. Tìm x, biết: $\left(3-2\sqrt{x}\right)\left(2+3\sqrt{x}\right) = 16-6x$.

Bài 9. Tìm điều kiện để mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $A = \dfrac{1}{1-\sqrt{x-1}}$ b) $B = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

Bài 10. Rút gọn:

a) $M = \left(4+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ b) $N = \dfrac{\sqrt{8-\sqrt{15}}}{\sqrt{30}-\sqrt{2}}$.

Bài 11. Rút gọn biểu thức: $P = \left(\dfrac{8-x\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}\right)\cdot\left(\dfrac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)^2 \quad (x \geq 0; x \neq 4)$

Bài 12. Tìm x, biết: $\left(3-\sqrt{2x}\right)\left(2-3\sqrt{2x}\right) = 6x-5$ (*).

Hướng dẫn giải

Bài 1. $A = \left|\sqrt{3}-2\right| + \left|2\left(2+\sqrt{3}\right)\right| - \dfrac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}$

Bài 2. a) $A=\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2-4\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{x+4\sqrt{x}+4-4\sqrt{x}+8}{x-4}=\dfrac{x+12}{x-4}$.

b) Với $x=14$, ta có $A=\dfrac{14+12}{14-4}=\dfrac{13}{5}$.

Bài 3. a) Ta có bảng sau:

$I(A)$	1	1,5	2
$Q(J)$	50	112,5	200

b) $I=\sqrt{\dfrac{Q}{Rt}}=\sqrt{\dfrac{800}{10.5}}=4(\text{A})$.

Bài 4. a) A có nghĩa $\Rightarrow \begin{cases} x-3\neq 0\\ x-3>0\end{cases} \Rightarrow x-3>0 \Rightarrow x>3$

b) B có nghĩa $\Rightarrow \begin{cases} x-2\geq 0\\ x-2\neq 0\end{cases} \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow x>2$

Bài 5. a) Ta có: $2\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{4\left(2+\sqrt{3}\right)}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{6+2\sqrt{12}+2}$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}=\left|\sqrt{6}+\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}+\sqrt{6}(\text{dpcm}).$$

b) Ta có: $\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{\sqrt{4}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(\text{dpcm})$.

Bài 6. a) Ta có: $A=\left(\sqrt{21}+3\right)\sqrt{10-2\sqrt{21}}=\sqrt{3}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2}$

$$=\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}.$$

b) Ta có: $B=\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)=5-1=4$

Bài 7. a) Ta có $P=\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}\right]:\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}\right)^3+1}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}:\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}$

$$=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

b) Ta có: $P<0$ (điều kiện $x>0$)

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}<0 \Rightarrow \sqrt{x}-1<0($ vì $\sqrt{x}>0$ khi $x>0)$

$\Rightarrow \sqrt{x}<1 \Rightarrow 0<x<1$.

Bài 8. Ta có: $\left(3-2\sqrt{x}\right)\left(2+3\sqrt{x}\right)=16-6x$ (1) Điều kiện: $x \ge 0$.

$(1) \Rightarrow 6+9\sqrt{x}-4\sqrt{x}-6x=16-6x \Rightarrow 5\sqrt{x}=10 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$ (nhận)

Bài 9. a) A có nghĩa $\Rightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 1-\sqrt{x-1} \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ \sqrt{x-1} \ne 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x-1 \ne 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ne 2 \end{cases}$

b) B có nghĩa $\Rightarrow x^2-2x+1>0 \Rightarrow (x-1)^2>0 \Rightarrow x \ne 1$.

Bài 10. a) Ta co: $M=\left(4+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{\left(4-\sqrt{3}\right)^2}=\left(4+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)=16-3=13\right.$

b) Ta có: $\mathrm{N}=\dfrac{\sqrt{8-\sqrt{15}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{15}-1\right)}=\dfrac{\sqrt{2\left(8-\sqrt{15}\right)}}{2\left(\sqrt{15}-1\right)}=\dfrac{\sqrt{16-2\sqrt{15}}\left(\sqrt{15}+1\right)}{2.14}$

$=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{15}-1\right)^2}\cdot\left(\sqrt{15}+1\right)}{28}=\dfrac{\left(\sqrt{15}-1\right)\left(\sqrt{15}+1\right)}{28}=\dfrac{14}{28}=\dfrac{1}{2}.$

Bài 11. Ta có: $P=\left[\dfrac{(2-\sqrt{x})(4+2\sqrt{x}+x)}{2-\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\right]\cdot\left[\dfrac{(2-\sqrt{x})^2}{(2+\sqrt{x})^2}\right]$

$=\left(4+2\sqrt{x}+x+2\sqrt{x}\right)\cdot\dfrac{\left(2-\sqrt{x}\right)^2}{\left(2+\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{\left(2+\sqrt{x}\right)^2\cdot\left(2-\sqrt{x}\right)^2}{\left(2+\sqrt{x}\right)^2}=\left(2-\sqrt{x}\right)^2$

Bài 12. Ta có: $(*) \Rightarrow 6-9\sqrt{2x}-2\sqrt{2x}+6x=6x-5 \Rightarrow -11\sqrt{2x}=-11 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}.$