TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN

LỚP TOÁN THẦY DUY

GV: PHẠM LÊ DUY - SĐT: 0704.963.919

TOÁN 12

Chương 1

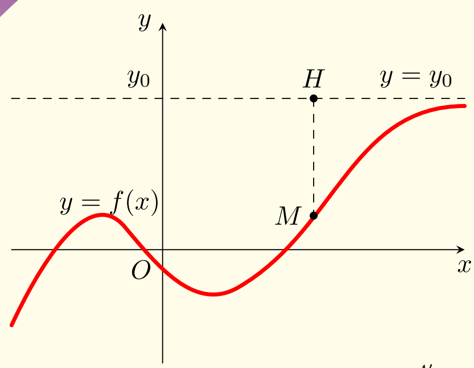
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

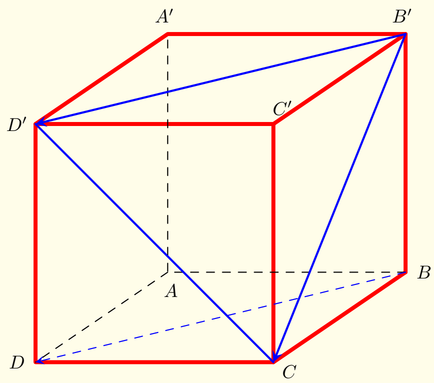
Nắm Lý Thuyết A

Hiểu Ví Dụ B

Siêng Luyện Tập C

Giải Được Toán D





LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1 ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

BÀI 1. ĐƠN ĐIỆU & CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

0.1 Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

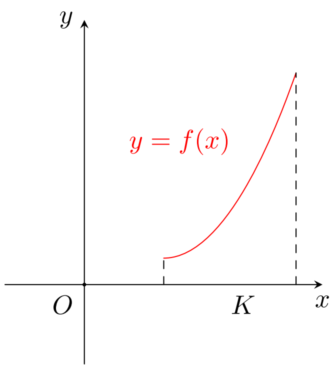
Định nghĩa 1. Kí hiệu $\mathbb{K}$ là khoảng; đoạn; nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{K}$.

Hàm số $y = f(x)$

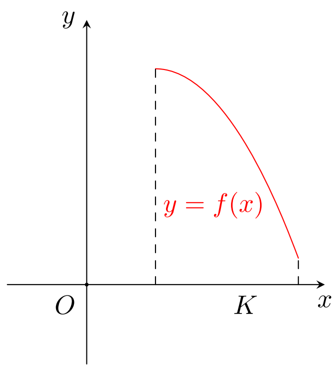
- Gọi là đồng biến trên $\mathbb{K}$ nếu $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.
- Gọi là nghịch biến trên $\mathbb{K}$ nếu $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

⚠

- *Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{K}$ thì đồ thị đi lên từ trái sang phải (Hình a).*
- *Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{K}$ thì đồ thị đi xuống từ trái sang phải (Hình b).*



Hình a)



Hình b)

0.2 Tính đơn điệu của hàm số

Định lí 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{K}$.

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{K}$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{K}$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{K}$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{K}$.

⚠

- *Định lí vẫn đúng trong trường hợp $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm trong $\mathbb{K}$.*
- *Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{K}$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng $\mathbb{K}$.*

0.3 Khái niệm cực trị của hàm số

Định nghĩa 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- $\exists h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.
- $\exists h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

- *Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là $f_{CĐ}$ hay $y_{CĐ}$. Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.*
- *Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT}. Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.*
- *Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.*
  Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (cực trị) của hàm số.

0.4 Cách tìm cực trị của hàm số

Định lí 2. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Định lí trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

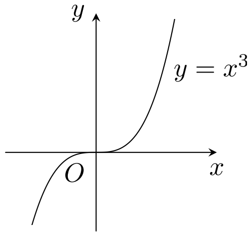
x	a		x_0		b
y'		$+$		$-$	
y		$\nearrow$	$y_{\text{CĐ}}$	$\searrow$	

Hàm số f đạt cực đại tại $x = x_0$.

x	a		x_0		b
y'		$-$		$+$	
y		$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	

Hàm số f đạt cực tiểu tại $x = x_0$.

- *Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:*
  - ***Bước 1:*** *Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số.*
  - ***Bước 2:*** *Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\} \in \mathscr{D}$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.*
  - ***Bước 3:*** *Lập bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.*
- *Nếu $f'(x_0) = 0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.*
  Chẳng hạn, hàm số $f(x) = x^3$ có $\begin{cases} f'(x) = 3x^2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$, nhưng $x = 0$ không phải là điểm cực trị của hàm số.



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1.1. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi một công thức

Phương pháp:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\} \in \mathscr{D}$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 3:** Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ theo thứ tự tăng dần. Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4:** Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 1. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 6$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 12x^2 + 6x - 36$.

Cho $y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	58	$\searrow$	$-\frac{111}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $\left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-2; \dfrac{3}{2}\right)$.

Ví dụ 2. Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \forall x \neq -1.$$

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty; \lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Ví dụ 3. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4}$.

Lời giải

Điều kiện $-x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-2; 2]$.

$y' = \dfrac{-x}{\sqrt{-x^2 + 4}}$.

Cho $y' = 0 \Rightarrow x = 0$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$				$+$	0	$-$			
$f(x)$			0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0		

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Ví dụ 4. Xét tính đơn điệu của hàm số $y=\log_3\left(x^2-2x\right)$.

Lời giải

Điều kiện $x^2-2x>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<0. \end{array}\right.$

Ta có $y'=\dfrac{2x-2}{\left(x^2-2x\right)\ln 3}$.

Khi đó, $y'=0 \Leftrightarrow x=1$ (loại).

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$				$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$				$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Dạng 1.2. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi đồ thị - bảng biến thiên

Phương pháp:

- Với đồ thị hàm số, quan sát: hướng lên–xuống của đường cong (chiều từ trái sang phải).
- Với bảng biến thiên, quan sát: hướng lên–xuống của mũi tên (chiều từ trái sang phải).
- Với bảng xét dấu, quan sát: dấu âm-dương của $f'(x)$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$.

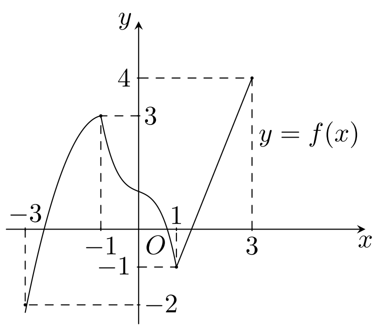
Lời giải

Từ bảng biến thiên của hàm số, ta có

- Trong $(0; 1)$ mũi tên "đi xuống" nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
- Trong $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$ mũi tên "đi lên" nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Ví dụ 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và có đồ thị như hình bên. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$.



Lời giải

Từ đồ thị của hàm số, ta có

- Trong $(-3; -1)$ và $(1; 3)$ đồ thị "đi lên" nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$ và $(1; 3)$.
- Trong $(-1; 1)$ đồ thị "đi xuống" nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Dạng 1.3. Xác định cực trị của hàm số cho bởi công thức

Phương pháp:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\} \in \mathscr{D}$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 3:** Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ theo thứ tự tăng dần. Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

- **Bước 4:** Kết luận hàm số đạt cực trị tại $x = ?$, $y = ?$ (nếu có).

Ví dụ 1. Tìm cực trị của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 6x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow y_{\text{CĐ}} = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y_{\text{CT}} = 0$.

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm số $y = -x^4 + 2x^3 - 2x - 1$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = -4x^3 + 6x^2 - 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{5}{16}. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{5}{16}$	$\searrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y_{\text{CĐ}} = -\dfrac{5}{16}$.

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x+2}{3x-1}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

Đạo hàm $y' = -\dfrac{7}{(3x-1)^2} < 0, \forall x \neq \dfrac{1}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$\frac{1}{3}$	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{1}{3}$

Vậy hàm số không có cực trị.

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{1 - x}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{-x^2 + 2x}{(1-x)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 2 \Rightarrow y_{\text{CĐ}} = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 0 \Rightarrow y_{\text{CT}} = 4$.

Ví dụ 5. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2^{x^2 - 5x}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(x) = 2^{x^2-5x}\left(x^2 - 5x\right)' \ln 2 = 2^{x^2-5x}(2x - 5)\ln 2$.

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2^{-\frac{25}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$

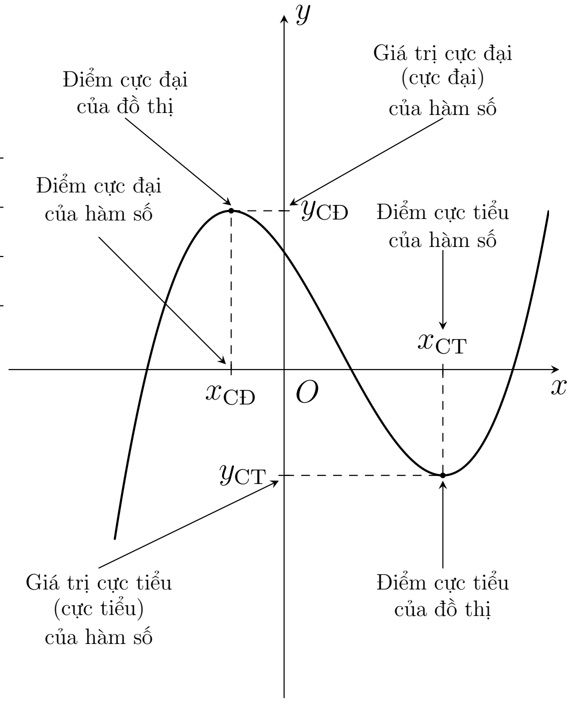
Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{5}{2} \Rightarrow y_{CT} = 2^{-\frac{25}{4}}$.

Dạng 1.4. Xác định cực trị của hàm số cho bởi bảng biến thiên – đồ thị

- **Nhận xét:** Hàm số $f(x)$

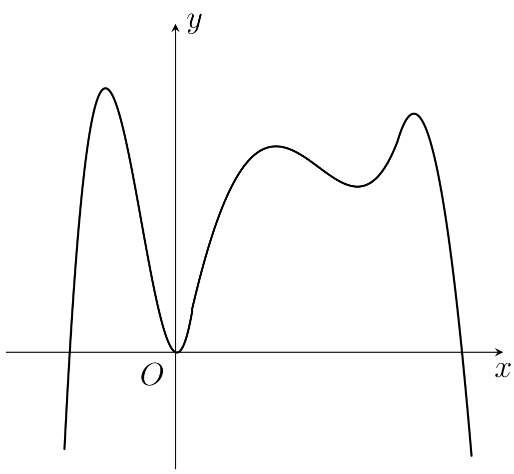
có cực trị	y' đổi dấu
không cực trị	y' không đổi dấu
chỉ có 1 cực trị	y' đổi dấu 1 lần
có 2 cực trị	y' đổi dấu 2 lần
có 3 cực trị	y' đổi dấu 3 lần

- Đối với một hàm số bất kì, hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm x_0 mà tại đó đạo hàm triệt tiêu $f'(x_0) = 0$ hoặc đạo hàm không xác định tại đó.



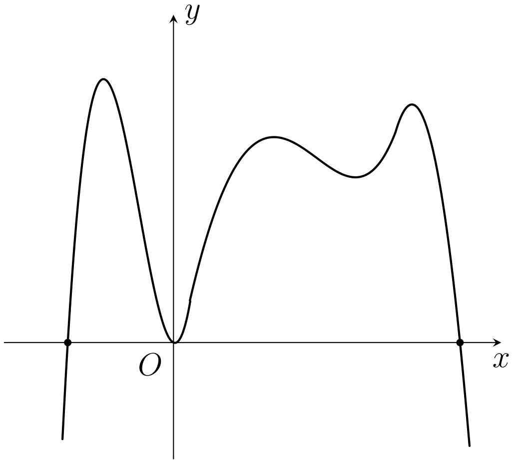
Ví dụ 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = 0 \\ x = x_2 \end{array}\right.$.



- $f'(x)$ qua x_1 đổi dấu từ "$-$" sang "$+$" nên hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu $x = x_1$.
- $f'(x)$ qua $x = 0$ không đổi dấu nên hàm số $f(x)$ không có cực trị tại $x = 0$.
- $f'(x)$ qua x_2 đổi dấu từ "$+$" sang "$-$" nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại $x = x_2$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 1 cực tiểu và 1 cực đại.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

- $f'(x)$ qua $x = -1$ đổi dấu từ "$+$" sang "$-$" nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại $x = -1$.
- $f'(x)$ và $f(x)$ không xác định tại $x = 0$ nên hàm số $f(x)$ không có cực trị tại $x = 0$.
- $f'(x)$ qua $x = 1$ đổi dấu từ "$-$" sang "$+$" nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại $x = 1$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 1 cực tiểu và 1 cực đại.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hãy thiết lập công thức hàm số $y = f(x)$ đã cho?

Lời giải

Đạo hàm $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(0; 2)$ và $(3; -4)$, ta có

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \\ f(3) = -4 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ c = 0 \\ a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + 2 = -4 \\ 3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 2 \\ 27a + 9b = -6 \\ 27a + 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4}{9} \\ b = -2 \\ c = 0 \\ d = 2. \end{cases}$$

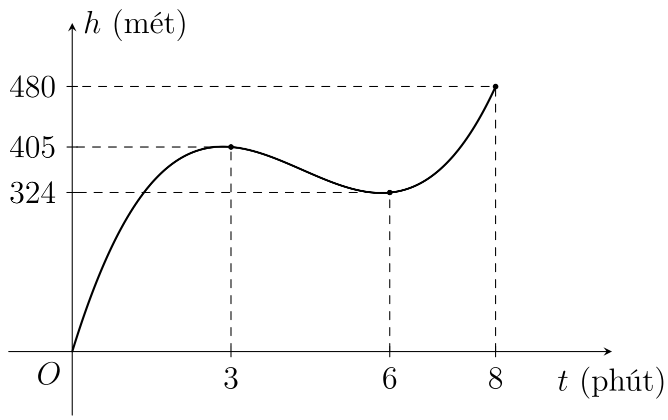
Vậy công thức của hàm số cần tìm có dạng $y = f(x) = \dfrac{4}{9}x^3 - 2x^2 + 2$.

Dạng 1.5. Toán thực tế áp dụng tính đơn điệu của hàm số

- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại t_0.
- Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$.

Ví dụ 1.

Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn như hình bên. Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao?



Lời giải

Từ đồ thị hàm số $h(t)$, ta nhận xét:

- Trong khoảng thời gian từ 3 phút đến 6 phút thì khinh khí cầu giảm dần độ cao.
- Trong 3 phút đầu tiên và trong khoảng thời gian từ 6 phút đến 8 phút thì khinh khí cầu tăng dần độ cao.

Ví dụ 2. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t (giây) được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Lời giải

Xét hàm $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ trên $[0; +\infty)$.

$v'(t) = 6t - 12$. Cho $v'(t) = 0 \Rightarrow t = 2$.

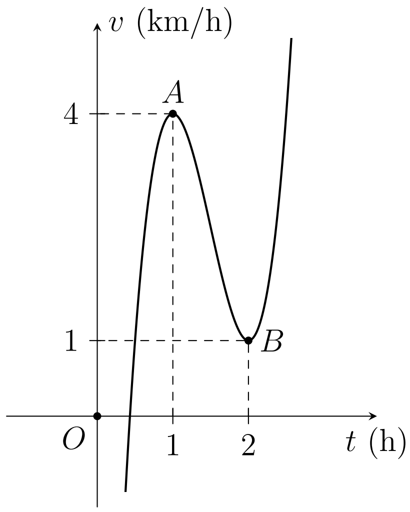
Bảng biến thiên của hàm số $v(t)$:

t	0		2		$+\infty$
$v'(t)$		$-$	0	$+$	
$v(t)$	9	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy trong khoảng thời gian 2 giây đầu tiên thì vận tốc chất điểm giảm dần và sau thời điểm 2 giây thì vận tốc chất điểm tăng dần.

Ví dụ 3.

Một vật chuyển động với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị của hàm số dạng hàm bậc ba như hình bên. Biết rằng tại thời điểm $t_1 = 1$ h vật có vận tốc $v_1 = 4$ km/h và tại thời điểm $t_2 = 2$ h vật có vận tốc $v_2 = 1$ km/h. Tính vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ h.



Lời giải

Giả sử hàm số vận tốc có dạng $v(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, $t > 0$.

Ta có $v'(t) = 3at^2 + 2bt + c$.

Dựa vào đồ thị hàm số, tại các thời điểm t_1, t_2 đồ thị hàm vận tốc đi qua các điểm cực trị $A(1;4)$, $B(2;1)$.
Khi đó

$$\begin{cases} v(1)=4 \\ v'(1)=0 \\ v(2)=1 \\ v'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=4 \\ 3a+2b+c=0 \\ 8a+4b+2c+d=1 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-27 \\ c=36 \\ d=-11. \end{cases}$$

Suy ra $v(t)=6t^3-27t^2+36t-11$ (km/h).
Vậy vận tốc của vật tại thời điểm $t=3$ h là

$$v(3)=6\cdot 3^3-27\cdot 3^2+36\cdot 3-11=16 \text{ km/h}.$$

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$.

D. Hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$.

Câu 2. Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; 0)$. **B.** $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 3. Hàm số $y = \dfrac{5 - 2x}{x + 3}$ nghịch biến trên

A. $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(-\infty; -3)$. **D.** $(3; +\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

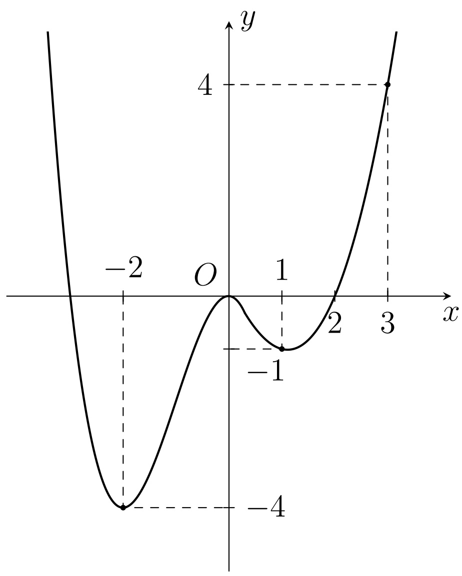
A. $(-3; 0)$. **B.** $(-3; 3)$. **C.** $(0; 3)$. **D.** $(-\infty; -3)$.

Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

A. $(-4; 0)$. **B.** $(2; 3)$.

C. $(-1; 1)$. **D.** $(1; 3)$.



Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x = -2$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -1$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 8. Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

A. $x = 1$. **B.** $(3; 1)$. **C.** $x = 3$. **D.** $\left(1; \frac{7}{3}\right)$.

Câu 9. Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

A. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. **B.** $y = \frac{2x - 2}{x + 1}$.

C. $y = x^2 - 2x + 1$. **D.** $y = -x^3 + x + 1$.

Câu 10. Hàm số $y = \frac{2x + 3}{x + 1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -4. **D.** 3.

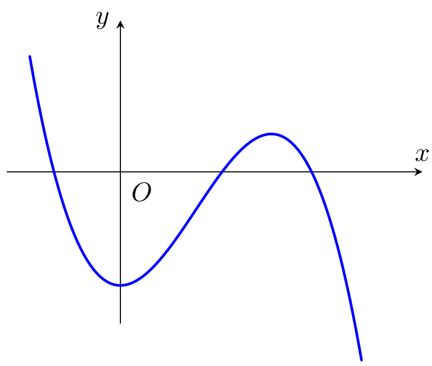
Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x = -1$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.

Câu 13. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số này là

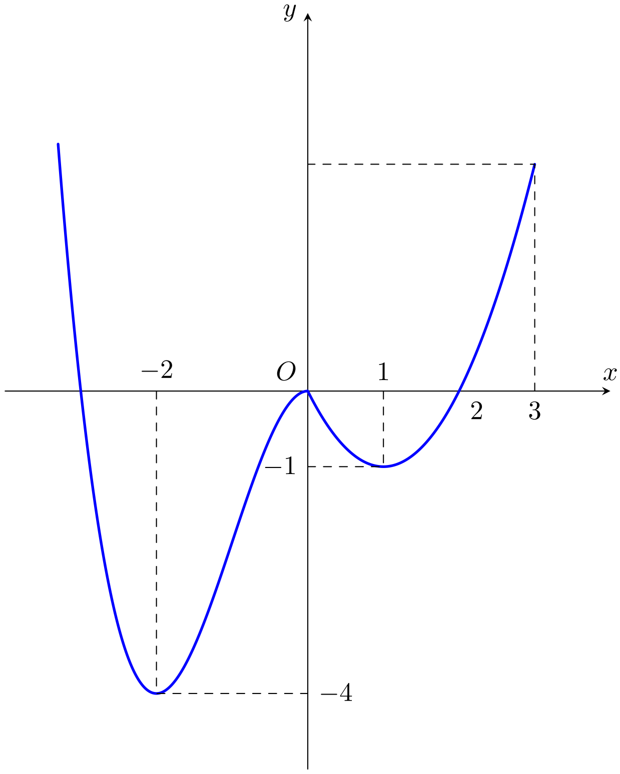


A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 14. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = \dfrac{x-1}{x-2}$. **B.** $y = -x^3 - 3x$. **C.** $y = x^3 + x$. **D.** $y = \dfrac{x+1}{x+3}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

A. $(-2;1)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-1;2)$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^2(1-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 19. Hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 20. Hàm số $y = \dfrac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; +\infty)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 0)$. **D.** $(-1; 1)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 1)$. **B.** $(-\infty; -1)$. **C.** $(1; 3)$. **D.** $(3; +\infty)$.

Câu 23. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Câu 24. Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Trong khoảng thời gian nào khinh khí cầu giảm dần độ cao?

A. $\left(1; \dfrac{5}{2}\right)$. **B.** $(0; 3)$. **C.** $(3; 6)$. **D.** $\left(\dfrac{7}{2}; 8\right)$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$. Có bao nhiêu khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

a) Điểm cực đại của hàm số là $x = -1$.

b) Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 4$.

c) Giá trị cực đại của hàm số là $y = 14$.

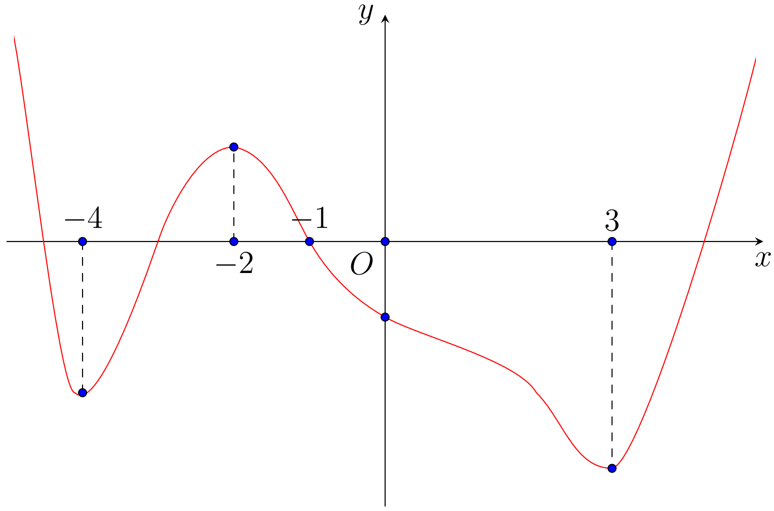
d) Giá trị cực tiểu của hàm số là $y = -111$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 26. Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^2+x+4}{x+1}$.

A. $x_{CĐ} = -3$, $x_{CT} = 1$. **B.** $x_{CT} = -3$, $x_{CĐ} = 1$.
C. $x_{CĐ} = -5$, $x_{CT} = 3$. **D.** $x_{CT} = -5$, $x_{CĐ} = 3$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như trong hình dưới đây.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

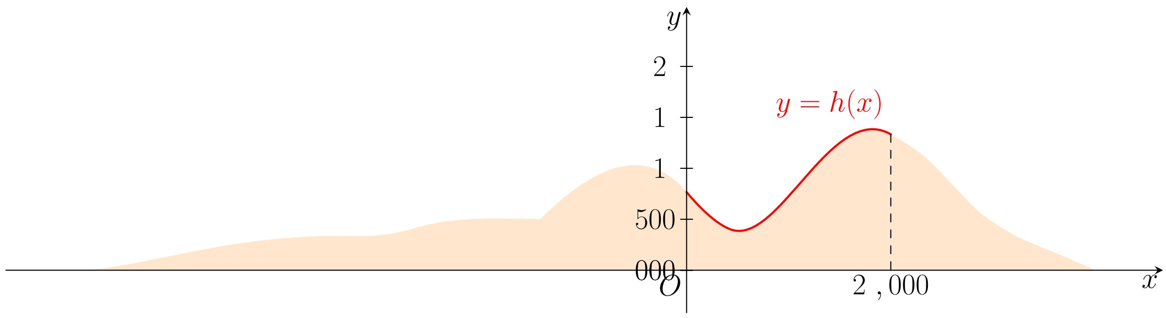
A. Điểm cực đại của hàm số là $x = -4$.

B. Điểm cực đại của hàm số là $x = -2$.

C. Điểm cực tiểu của hàm số là $x = -2$.

D. Điểm cực đại của hàm số là $x = 3$.

Câu 28. Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số $y = h(x) = -\dfrac{1}{1320000}x^3 + \dfrac{9}{3520}x^2 - \dfrac{81}{44}x + 840$ với $0 \leq x \leq 2000$. Tìm tọa độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn $[0; 2000]$.



A. $\left(1800; \dfrac{7365}{16}\right)$ và $\left(450; \dfrac{15315}{11}\right)$.

B. $\left(480; \dfrac{1515}{16}\right)$ và $\left(450; \dfrac{7365}{16}\right)$.

C. $\left(480; \dfrac{1515}{16}\right)$ và $\left(1750; \dfrac{7561}{16}\right)$.

D. $\left(1800; \dfrac{15315}{11}\right)$ và $\left(450; \dfrac{7365}{16}\right)$.

Câu 29. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = 2x + 1 - \sqrt{2x^2 - 8}$.

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-2; 2)$.

Câu 30. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $v(t) = x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

A. $t \in (0;2)$. **B.** $t \in (0;3)$. **C.** $t = 2$. **D.** $t \in (2;+\infty)$.

Câu 31. Cho hàm số $y = x - 2\sqrt{x^2+4}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng $-2\sqrt{3}$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng $-\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Câu 32. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $(1 \le x \le 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Vậy hộ này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét để thu được lợi nhuận tối đa?

A. 6 mét. **B.** 10 mét. **C.** 18 mét. **D.** 12 mét.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(3;4)$.

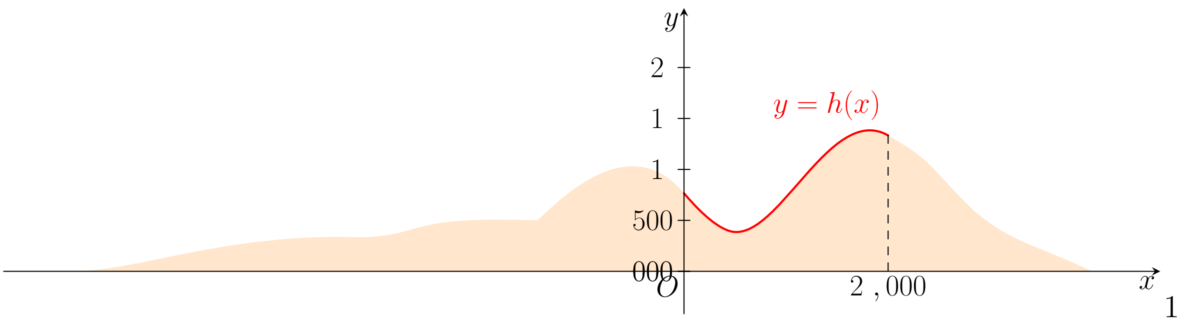
Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau.



Hàm số $y = f(2-3x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;3)$.

1. B	2. C	3. C	4. A	5. B	6. D	7. C	8. B	9. B	10. B
11. C	12. A	13. B	14. C	15. C	16. C	17. C	18. D	19. C	20. B
21. A	22. C	23. A	24. C	25. C	26. A	27. B	28. D	29. C	30. A
31. A	32. B	33. D	34. C	35. A					

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\longrightarrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

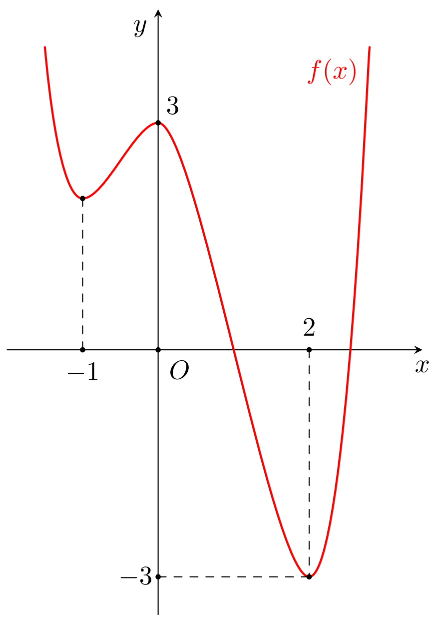
a) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-3; -2)$.
b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$.
c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
d) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$.
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.
c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$.

c) Đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

d) Nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

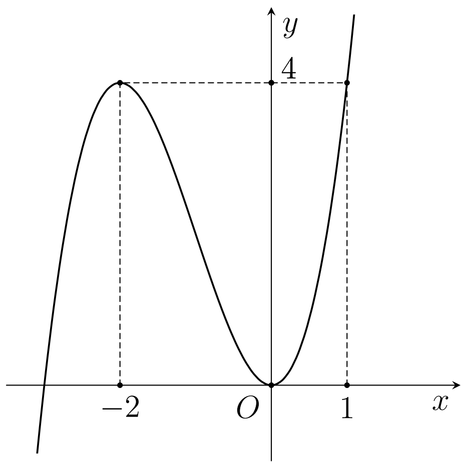
a) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

b) Hàm số nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

c) Hàm số đồng biến trên $(0;2)$.

d) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như trong hình dưới đây.



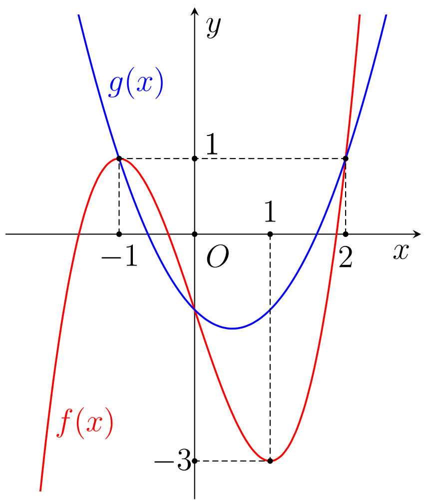
a) Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$.

b) Hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

c) Hàm số nghịch biến trên $(-2;1)$.

d) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị là các đường cong như trong hình dưới đây.



a) Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0 > 1$.

b) Hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực trị.

c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là $x = 1$.

d) Giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$ là $y_0 = 1$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

a) Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.

b) Hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.

c) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

d) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \dfrac{2}{3}$ có đồ thị (C).

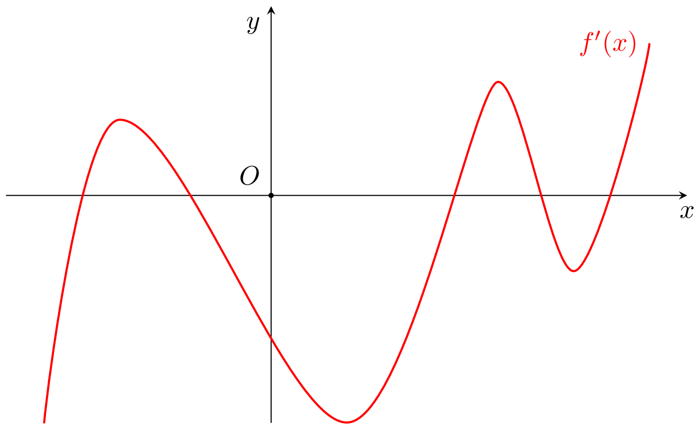
a) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

b) Giá trị cực tiểu của hàm số là $x = 3$.

c) Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là $x = 1$.

d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục và có đồ thị trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ.



a) Hàm số $y = f(x)$ đã cho có 4 điểm cực trị.

b) Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

c) Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực đại.

d) Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại dương.

Câu 10. Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $(a; b)$ lần lượt là m và M. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

a) $m < M$.

b) $f(a) = m$.

c) Với mọi $x \in (a; b)$ ta có $f(x) > m$.

d) Với mọi $x \in (a;b)$ ta có $m \leq f(x) < M$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

a) Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm.

b) Phương trình $f(x) = C$ vô nghiệm với $m \leq C \leq M$.

c) Bất phương trình $f(x) > M$ vô nghiệm.

d) Bất phương trình $f(x) > m$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

a) $\min\limits_{[0;1]} y = 0$.

b) $\min\limits_{[0;2]} y = y(0)$.

c) $\min\limits_{[-1;0]} y + \max\limits_{[0;1]} y = 4$.

d) $\min\limits_{\left[-\frac{3}{2};0\right]} \dfrac{1}{y} = \dfrac{8}{25}$.

Câu 13. Cho hàm số $y = 2\sin x - 1$. Khi đó

a) $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 1$.

b) $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -3$.

c) $\max\limits_{[0;\pi]} y = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

d) $\min\limits_{[0;\pi]} y = y(0) = -1$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có bảng biến thiên như sau

x	0		1		3
y'		$+$	0	$-$	
y	8	$\nearrow$	9	$\searrow$	5

a) Có 7 số nguyên m để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$.

b) Giá trị m lớn nhất để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ là 7.

c) Giá trị m nhỏ nhất để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ là 3.

d) Tổng các giá trị của m để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ là 45.

Câu 15. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x}$. Khi đó

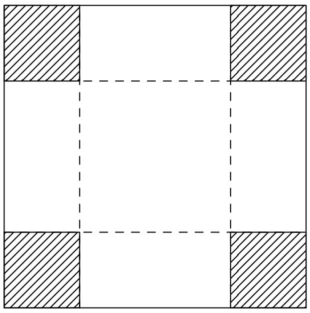
a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ là 1.

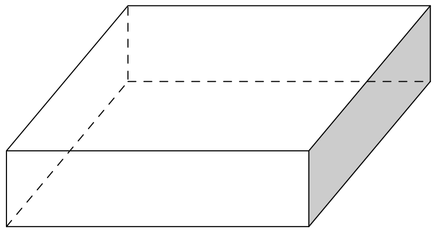
b) Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x}$ trên $(0;\pi)$.

c) Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x}$ trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

d) Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x}$ trên $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Câu 16. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.





a) Ta có $0 < x < \dfrac{a}{2}$.

b) Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a - 2x)^2 \left(0 < x < \dfrac{a}{2}\right)$.

c) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\dfrac{2a^3}{9}$.

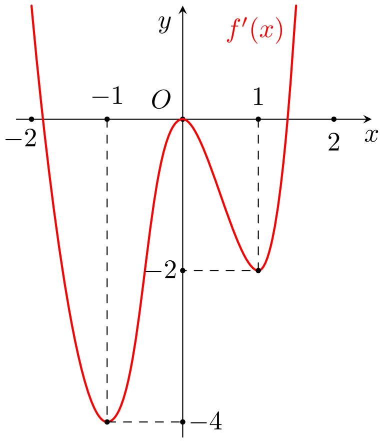
d) Cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất bằng $\dfrac{a}{6}$.

1. a Đ b S c Đ d Đ	2. a S b Đ c S d S	3. a Đ b S c Đ d S
4. a Đ b Đ c Đ d S	5. a Đ b Đ c S d S	6. a S b S c S d Đ
7. a S b Đ c S d S	8. a Đ b S c S d S	9. a S b Đ c S d Đ
10. a S b S c S d S	11. a Đ b S c Đ d S	12. a Đ b S c Đ d S
13. a Đ b Đ c Đ d Đ	14. a S b S c S d Đ	15. a Đ b Đ c Đ d Đ
16. a Đ b Đ c S d Đ		

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Hãy xác định số khoảng đồng biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$. KQ:

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục và có đồ thị trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ bên dưới.



Giả sử hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$. Trong khoảng $(a; b)$ có bao nhiêu giá trị nguyên nhỏ hơn 2024? KQ:

Câu 3. Cho hàm số $f'(x) = x(x^2 - 1)(x + 1)^3$. Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại? KQ:

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$+$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị? KQ:

1. 2	**2.** 3	**3.** 1	**4.** 2

BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathscr{D}$.

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathscr{D}$ nếu $\begin{cases} f(x) \leq M; \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D}\colon f(x_0) = M \end{cases}$, ta kí hiệu $M = \max\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x)$ hoặc $M = \max\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.

- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathscr{D}$ nếu $\begin{cases} f(x) \geq M; \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D}\colon f(x_0) = M \end{cases}$, ta kí hiệu $m = \min\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x)$ hoặc $m = \min\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.

!

- Quy ước rằng khi nói GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ (mà không xét "trên tập $\mathscr{D}$") thì ta hiểu đó là GTLN hay GTNN của $y = f(x)$ trên tập xác định của hàm số.
- Để tìm GTLN hay GTNN của hàm số trên tập $\mathscr{D}$, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập $\mathscr{D}$ để kết luận.

2. Tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất trên đoạn

⚠ *Cách tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất trên đoạn Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$*

- ***Bước 1:*** *Tìm các điểm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ thuộc $(a; b)$ sao cho $f'(x) = 0$.*
- ***Bước 2:*** *Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \ldots; f(x_n); f(b)$.*
- ***Bước 3:*** *Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị ở Bước 2. Khi đó $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ và $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.*

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 2.1. Giá trị lớn nhất - nhỏ nhất trên đoạn

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$

- **Bước 1:** Tìm các điểm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ thuộc $(a;b)$ sao cho $f'(x)=0$.
- **Bước 2:** Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \ldots; f(x_n); f(b)$.
- **Bước 3:** Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị ở Bước 2. Khi đó $M=\max\limits_{[a;b]} f(x)$ và $m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+1$ trên đoạn $[-2;2]$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(n) \\ x=-1(n)\end{array}\right.$

Ta có $f(-2)=-1;\ f(-1)=3;\ f(1)=-1;\ f(2)=3$

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=3$ khi $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2\end{array}\right.$ và $\min\limits_{[-2;2]} f(x)=-1$ khi $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1\end{array}\right.$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$.

Lời giải

Điều kiện $1-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}+x\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=0 \Leftrightarrow 1-x^2-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}(n) \\ x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(n).\end{array}\right.$

Ta có $f(-1)=0;\ f\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{-1}{2};\ f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2};\ f(1)=0.$

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=\dfrac{1}{2}$ khi $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=\dfrac{-1}{2}$ khi $x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

Dạng 2.2. Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của hàm số trên khoảng

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$.

- Bước 1: Tìm điều kiện xác định của hàm số $y=f(x)$.
  - $f(x)$ không liên tục trên $(a;b) \Rightarrow$ Không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

- $f(x)$ liên tục trên $(a;b) \Rightarrow$ Bước tiếp theo.

- Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.
- Bước 3: Tìm các điểm $x_1; x_2; \cdots; x_n$ thuộc $(a;b)$ sao cho $f'(x) = 0$, hoặc $f'(x)$ không xác định.
- Bước 4: Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a;b)$ cho trước.
- Bước 5: Xác định điểm "cao nhất" và điểm "thấp nhất" của đồ thị hàm số trên $(a;b)$.
- Bước 6: Kết luận giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$.

Nhận xét.
- *Nếu đề bài không cho sẵn $(a;b)$ thì thường sẽ lấy luôn tập xác định làm khoảng phải xét.*
- *Đây là phương pháp tổng quát, tùy vào bài toán sẽ giản lược bớt 1 vài bước.*

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 2x + 4$ trên khoảng $(0;3)$.

Lời giải

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $(0;3)$.

Ta có $y' = -2x + 2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1(n)$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		1		3
y'		$+$	0	$-$	
y	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{(0;3)} y = 5$ tại $x = 1$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 4$ trên $[-3;2)$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1(n) \\ x = -1(n) \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	-3		-1		1		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-22	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2

Vậy $\max\limits_{[-3;2)} f(x) = -2$ khi $x = -1$ và $\min\limits_{[-3;2)} f(x) = -22$ khi $x = -3$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

Điều kiện $x \neq 0$.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in (0; +\infty) \\ x = -2 \notin (0; +\infty). \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y = y(2) = 4$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ trên $(-1; -\infty)$.

Lời giải

Điều kiện $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0(n)$.

Ta có bảng biến thiên

x	-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty \ \Vert\ +\infty$	↘	0

Vậy hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Dạng 2.3. Sử dụng cách đánh giá để tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất

Sử dụng bất đẳng thức thường xuyên

- **Bất đẳng thức Cô-si**:
  - Với hai số thực không âm $a+b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra khi $\Leftrightarrow a=b$.
  - Với ba số thực không âm: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.
  - Với n thực không âm: $a_1+a_2+\ldots+a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3...=a_n$.
- **Bất đẳng thức Bunhiacopxki**
  - Dạng cơ bản:$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \geq (ac+bd)^2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$.
  - Dạng tổng quát:
    Với hai bộ số $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ và $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ ta có
    $$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$
    Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$.

Ví dụ 1. Giả sử M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $y=2+3\sin x$. Tính $M+m$.

Lời giải

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $-3 \leq 2+3\sin x \leq 5$.
$M=5$, đạt được khi $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
$m=-3$, đạy được khi $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Suy ra $M+m=4$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{386x}{x^2+2x+5}$.

Lời giải

T heo bất đẳng thức AM - GM, ta có

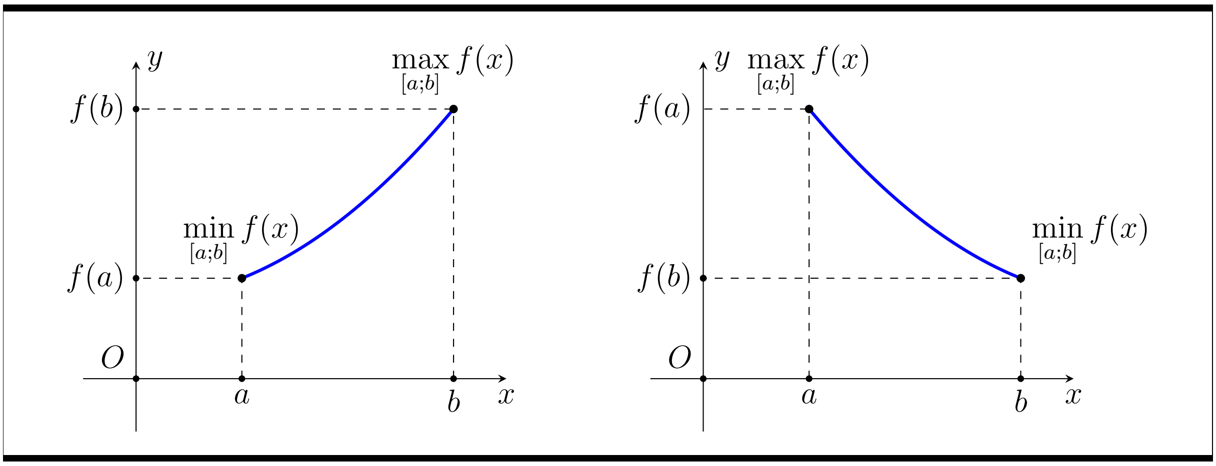
$$\begin{aligned} x+\frac{5}{x} \geq 2\sqrt{5} \quad & \Rightarrow x+\frac{5}{x}+2 \geq 2\sqrt{5}+2 \\ & \Rightarrow \frac{386}{x+\dfrac{5}{x}+2} \leq \frac{386}{2\sqrt{5}+2} \\ & \Rightarrow f(x) = \frac{386x}{x^2+2x+5} \leq \frac{386}{2\sqrt{5}+2}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{x} \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$. (vì $x > 0$)

Dạng 2.4. Ứng dụng giá trị lớn nhất – nhỏ nhất

- **Bài toán bất phương trình**
  - Chuyển bất phương trình đã cho về dạng $f(x) - g(x) \geq 0$ và tìm điều kiện tồn tại của bất phương trình.
  - Đặt hàm số $y = h(x) = f(x) - g(x)$, xét tính đơn điệu của $y = h(x)$ trên điều kiện xác định.
  - Từ đó kết luận về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- **Bài toán bất phương trình chứa tham số**

  Ta đưa bất phương trình đề bài cho về một trong các dạng sau
  - Nếu $m \geq f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathscr{D}$ thì $m \geq \max\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.
  - Nếu $m \leq f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathscr{D}$ thì $m \leq \min\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.
  - Nếu $m \geq f(x)$ có nghiệm $x \in \mathscr{D}$ thì $m \geq \min\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.
  - Nếu $m \leq f(x)$ có nghiệm $x \in \mathscr{D}$ thì $m \leq \max\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.
- **Nhận xét**
  - Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \max\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x) = f(a) \\ \min\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x) = f(b). \end{cases}$
  - Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \max\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x) = f(b) \\ \min\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x) = f(a). \end{cases}$



Ví dụ 1. Giải bất phương trình $\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3} \geq 4$.

Lời giải

Điều kiện $x \geq \dfrac{1}{5}$. Ta có

$$\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3} \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}-4 \geq 0.$$

Xét hàm số $y=f(x)=\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}-4$ liên tục trên nữa khoảng $\left[\dfrac{1}{5};+\infty\right)$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{5}{2\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}}>0, \forall x>\dfrac{1}{5}$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{5};+\infty\right)$.

x	$\frac{1}{5}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Mặt khác: $f(1)=0$. Khi đó bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow f(x) \geq f(1)=0$.

Vậy nghiệm bất phương trình là: $x \geq 1$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x} \geq 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Điều kiện $-2 \leq x \leq 4$.

Xét $f(x)=\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}-2\sqrt{3}$ trên $[-2;4]$.

Có $f'(x)=\dfrac{3\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}>0, \forall x \in(-2;4)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[-2;4]$.

x	2		1		4
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	$f(2)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(4)$

Mặt khác, $f(1) = 0$. Khi đó bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \geq 1$.
So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $[1; 4]$.

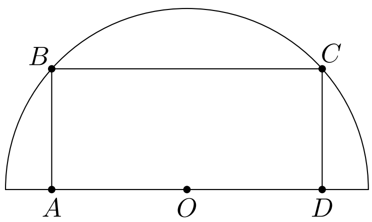
Dạng 2.5. Bài toán thực tế áp dụng giá trị lớn nhất - nhỏ nhất

Phương pháp

- *Bước* 1*:* Gọi ẩn và xác định điều kiện cho ẩn.
- *Bước* 2*:* Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và các đại lượng đã biết.
- *Bước* 3*:* Xét hàm số biểu thị đại lượng mà đề bài yêu cầu. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên điều kiện của ẩn.
- *Bước* 4*:* Kết luận.

Ví dụ 1.

Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6$ cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



Lời giải

Gọi chiều dài $AD = 2x$ với $0 < x < 6$
$\Rightarrow AB = \sqrt{36 - x^2}$
Diện tích hình chữ nhật là $S = 2x\sqrt{36 - x^2}$.
Xét $f(x) = x\sqrt{36 - x^2}$ với $0 < x < 6$

Ta có $f'(x) = \sqrt{36 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3\sqrt{2} \in (0; 6) \\ x = 3\sqrt{2} \notin (0; 6) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		$3\sqrt{2}$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	36	$\searrow$	0

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là 36 cm^2.

Ví dụ 2. Một doanh nghiệp cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là $x^3 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y - 27y^3$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp đó cần sử dụng máy A trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày).

Lời giải

Theo giả thiết

- Thời gian làm việc của máy A là x ngày;
- Thời gian làm việc của máy B là y ngày.

Ta có $x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x \qquad (*)$
Vì $0 < y \leq 6 \Rightarrow 4 \leq x < 10$.
Số tiền lãi $x^3 + 2x + 326y - 27y^3$.
Thay (*) vào ta được

$$x^3 + 2x + 326\,(10 - x) - 27\,(10 - x)^3 = 28x^3 - 810x^2 + 7776x - 23740.$$

Đặt $f(x) = 28x^3 - 810x^2 + 7776x - 23740$ với $x \in [4; 10)$.
Ta có $f'(x) = 84x^2 - 1620x + 7776$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 84x^2 - 1620x + 7776 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \in [4; 10) \\ x = \dfrac{72}{7} \notin [4; 10)\,. \end{array}\right.$$

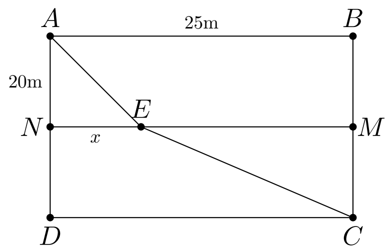
Bảng biến thiên

x	4		9		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(4)$	$\nearrow$	$f(9)$	$\searrow$	$f(10)$

Từ bảng biến thiên ta có $x = 9$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3.

Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25$ m, chiều rộng $AD = 20$ m được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN, biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15 m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được 30 m. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C.



Lời giải

Cách 1.

Do cần thời gian xây là ngắn nhất nên con đường làm trên mỗi miền phải là những đường thẳng.

Gọi AE và EC lần lượt là đoạn đường cần làm.

Với $NE = x$ m (với $0 \leq x \leq 25$)

$\Rightarrow EM = 25 - x$ (m).

Ta được $\begin{cases} AE = \sqrt{AN^2 + EN^2} = \sqrt{100 + x^2} \\ EC = \sqrt{MC^2 + EM^2} = \sqrt{100 + (25 - x)^2}. \end{cases}$

Thời gian để làm đoạn đường từ A đến C là

$$\frac{AE}{15} + \frac{EC}{30} = \frac{\sqrt{100 + x^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25 - x)^2 + 100}}{30}.$$

Đặt $t(x) = \dfrac{\sqrt{100 + x^2}}{15} + \dfrac{\sqrt{(25 - x)^2 + 100}}{30}$ (với $0 \leq x \leq 25$).

$t'(x) = \dfrac{x}{15\sqrt{100 + x^2}} - \dfrac{25 - x}{30.\sqrt{(25 - x)^2 + 100}}$.

Xét

$$
\begin{aligned}
& t'(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x}{15\sqrt{100+x^2}} - \frac{25-x}{30.\sqrt{(25-x)^2+100}} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2x\sqrt{(25-x)^2+100} = (25-x)\sqrt{100+x^2} \\
\Leftrightarrow\ & 4x^2\left((25-x)^2+100\right) = (25-x)^2\left(100+x^2\right) \\
\Leftrightarrow\ & 4x^2(25-x)^2 + 400x^2 - 100(25-x)^2 - (25-x)^2x^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4(25-x)^2\left(x^2-25\right) + x^2\left(20^2-(25-x)^2\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-5)\left(4(25-x)^2(x+5) + x^2(45-x)\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 5.
\end{aligned}
$$

Ta được $\begin{cases} t(0) = \dfrac{4+\sqrt{29}}{6} \\ t(5) = \dfrac{2\sqrt{5}}{3} \\ t(25) = \dfrac{1+\sqrt{29}}{3}. \end{cases}$

Vậy thời gian ngắn nhất làm được con đường đi từ A đến C là $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ (h).

Cách 2.

Đặt $t(x) = \dfrac{\sqrt{10^2+x^2}}{15} + \dfrac{\sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30}$

$\Leftrightarrow t(x) = \dfrac{\sqrt{20^2+(2x)^2} + \sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30}$ (với $0 \le x \le 25$).

Lại có

$\sqrt{20^2+(2x)^2} + \sqrt{(25-x)^2+10^2} \ge \sqrt{(45-x)^2+(2x+10)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{20^2+(2x)^2} + \sqrt{(25-x)^2+10^2} \ge \sqrt{5(x-5)^2+2000}.$

Do đó $t(x) \ge \dfrac{\sqrt{5(x-5)^2+2000}}{30} \ge \dfrac{\sqrt{2000}}{30} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}.$

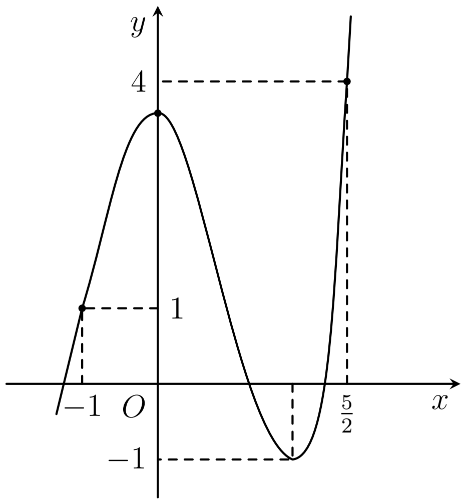
Vậy $t(x)_{\min} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ (h) khi và chỉ khi $x = 5$ (m).

Vậy thời gian ngắn nhất làm được con đường đi từ A đến C là $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ (h).

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1, \dfrac{5}{2}\right]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1, \dfrac{5}{2}\right]$ là

A. $M = 4, m = 1$.
B. $M = 4, m = -1$.
C. $M = \dfrac{7}{2}, m = -1$.
D. $M = \dfrac{7}{2}, m = 1$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$		3		5		7		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$+\infty$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[3; 7]$. Ta có giá trị của $M + 2m$ là

A. $M + 2m = 1$.
B. $M + 2m = 7$.
C. $M + 2m = 3$.
D. $M + 2m = 4$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-1; 2]$. Giá trị của $M + m$ bằng bao nhiêu?

x	-3		-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$			3				2		
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	-2				0				1

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $\left[-\sqrt{3}; \sqrt{5}\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-3		-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$			3				2		
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	-2				0				1

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y = 0$. **B.** $\max\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y = 2$.

C. $\max\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y = 2\sqrt{5}$. **D.** $\min\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y = 1$.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $M = 5$. **B.** $M = -5$. **C.** $M = \dfrac{1}{3}$. **D.** $M = -\dfrac{1}{3}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là bao nhiêu?

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			3				1
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	1				-1		

A. $\max\limits_{\mathbb{R}} = -\dfrac{1}{2}$. **B.** $\max\limits_{\mathbb{R}} = -1$. **C.** $\max\limits_{\mathbb{R}} = 1$. **D.** $\max\limits_{\mathbb{R}} = 3$.

Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x + 3 - \dfrac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4; -2)$.

A. $\min\limits_{[-4;-2)} y = 4$. **B.** $\min\limits_{[-4;-2)} y = 7$. **C.** $\min\limits_{[-4;-2)} y = 5$. **D.** $\min\limits_{[-4;-2)} y = \dfrac{15}{2}$.

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3x^4 + 4x^3 + 1$ bằng

A. 11. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$. **B.** $\max\limits_{(-1;1]} f(x) = f(0)$.

C. $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$. **D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Kí hiệu $M = \max\limits_{x\in[0;2]} f(x)$, $m = \min\limits_{x\in[0;2]} f(x)$. Khi đó $M + m$ bằng

A. $-\dfrac{4}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 1.

Câu 11. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$ đạt được tại x_0. Giá trị x_0 bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -1.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\max\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x) = f(1)$. **B.** $\max\limits_{x\in(-1;1]} f(x) = f(0)$.

C. $\min\limits_{x\in(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$. **D.** $\min\limits_{x\in(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau

x	-5		1		7
y'		$-$	0	$+$	
y	0	↘	2	↗	9

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{x\in[-5;7)} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5;7)$.

B. $\max\limits_{x\in[-5;7)} f(x)=6$ và $\min\limits_{x\in[-5;7)} f(x)=2$.

C. $\max\limits_{x\in[-5;7)} f(x)=9$ và $\min\limits_{x\in[-5;7)} f(x)=2$.

D. $\max\limits_{x\in[-5;7)} f(x)=9$ và $\min\limits_{x\in[-5;7)} f(x)=6$.

Câu 14. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{t^2+t+4}{t+1}$ trên đoạn $[0;10]$.

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{114}{11}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 15. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\cos x-\dfrac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0;\pi]$.

A. $\max\limits_{x\in[0;\pi]} y=\dfrac{2}{3}$. **B.** $\max\limits_{x\in[0;\pi]} y=\dfrac{10}{3}$. **C.** $\max\limits_{x\in[0;\pi]} y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\max\limits_{x\in[0;\pi]} y=0$.

Câu 16. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0{,}035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất?

A. $x=8$. **B.** $x=10$. **C.** $x=15$. **D.** $x=7$.

Câu 17. Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau thời gian t sử dụng độc tố. Vào thời điểm nào thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

A. Ngay từ lúc bắt đầu sử dụng độc tố. **B.** Sau 0,5 giờ.

C. Sau 2 giờ. **D.** Sau 1 giờ.

Câu 18. Một sợi dây kim loại dài 120 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình bên dưới).

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là (làm tròn đến hàng đơn vị)?

A. 504. **B.** 462. **C.** 426. **D.** 498.

1. B	2. B	3. A	4. C	5. C	6. D	7. B	8. D	9. A	10. B
11. A	12. A	13. A	14. A	15. C	16. B	17. D	18. A		

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[a;b]$ lần lượt là m và M. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

a) $m = \min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.

b) $m \leq M$.

c) Với mọi $x \in [a;b]$ ta có $f(x) \geq m$.

d) Với mọi $x \in [a;b]$ ta có $f(x) < M$.

Câu 2. Cho hàm số$y = f(x)$ xác định, liên tục trên$\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

d) Hàm số có đúng một cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$		$\nearrow$	2	$\searrow$	-4

Khi đó

a) Hàm số có hai điểm cực trị.

b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

d) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(2;+\infty)$.

1. a Đ b Đ c Đ d S	2. a S b S c Đ d S	3. a Đ b S c Đ d Đ

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bao nhiêu? KQ:

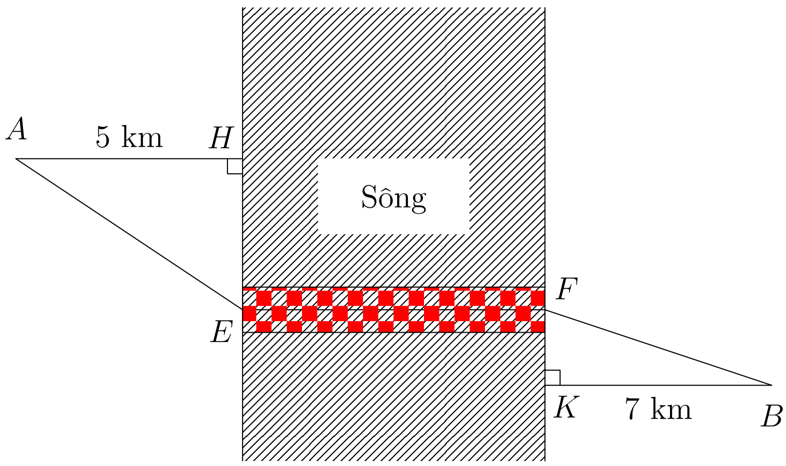
Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ bằng KQ:

Câu 3. Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng KQ:

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{2x-2}$ trên khoảng $(0;1)$. (kết quả làm tròn đến hàng phần chục). KQ:

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất hàm số $y = \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}$. KQ:

Câu 6. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 5 km và thành phố B cách con sông một khoảng là 7 km (hình vẽ), biết $HE + KF = 24$ km và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố B là bao nhiêu để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? (kết quả làm tròn đến km).



KQ:

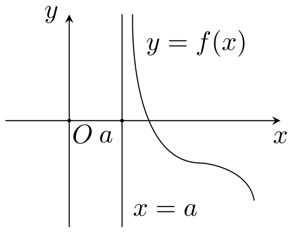
1. 0	2. 5	3. 1	4. 5,5	5. 3
6. 16				

BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

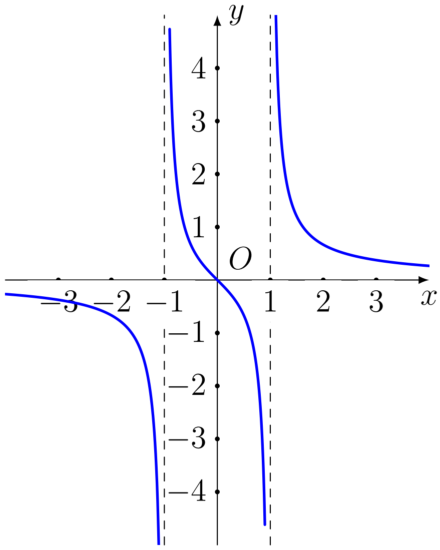
1. Tiệm cận đứng

Định nghĩa 1. Đường thẳng $x = a$ được gọi là một đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đúng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:



- $\lim \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$.
- $\lim \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.
- $\lim \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.
- $\lim \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

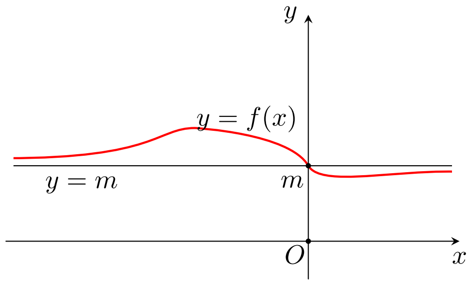
⚠ *Đồ thị hàm số* $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ *cùng với hai tiệm cận đứng* $x = 1$ *và* $x = -1$



2. Tiệm cận ngang

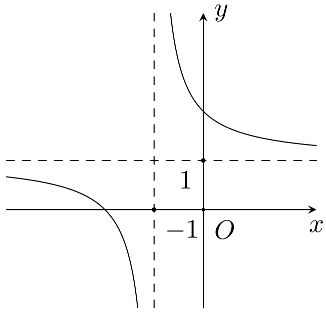
Định nghĩa 2. Đường thẳng $y = m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = m$ hoặc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = m$.



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = m$

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x}{x+1}$ cùng với tiệm cận ngang $y = 1$ và tiệm cận đứng $x = -1$.

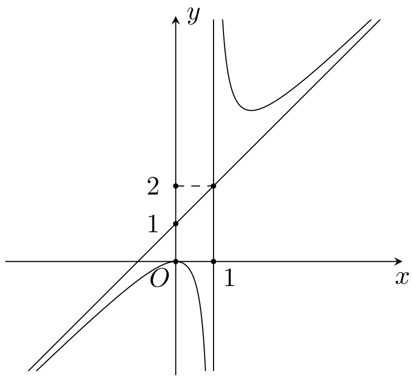


3. Tiệm cận xiên

Định nghĩa 3. Đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$, được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

- $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Đồ thị hàm số $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ cùng tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận xiên $y = x + 1$.



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 3.1. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị

a) Bước 1: Tìm Tập xác định của hàm số. Giả Sử $D = (-\infty; +\infty) \backslash \{x_0\}$.

b) Bước 2: Quan sát Bảng biến thiên hoặc đồ thị, tìm giới hạn

- $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} y = y_0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} y = y_0\end{array}\right. \Rightarrow y = y_0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0^-} y = +\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} y = -\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} y = +\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} y = -\infty\end{array}\right. \Rightarrow x = x_0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} [y-(ax+b)] = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [y-(ax+b)] = 0\end{array}\right. \Rightarrow y = ax+b$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

⚠

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y = y_1;\ \lim\limits_{x\to-\infty} y = y_2 \Rightarrow y = y_1; y = y_2$ *là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.*
- *Tập xác định không có chứa $+\infty$; $-\infty$ thì đồ thị hàm số không có đường tiện cận ngang.*
- *Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ thì đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.*

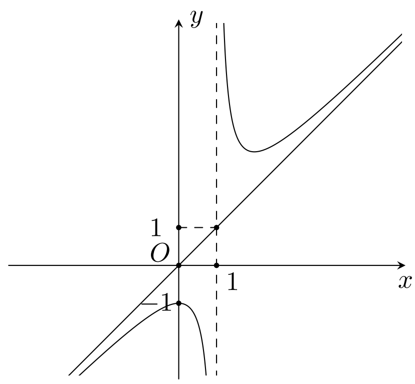
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có báng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1 ↘		$+\infty$ || 2	↘	-3	↗	3

Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 2.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.



Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ -2	↗	1	↘	-5

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là bao nhiêu?

Dạng 3.2. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị

a) Bước 1: Tìm Tập xác định của hàm số. Giả Sử $D = (-\infty; +\infty) \backslash \{x_0\}$.

b) Bước 2: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn (nếu có): $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Bước 3: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn (nếu có): $\lim\limits_{x \to k^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to k^-} f(x)$.

d) Bước 3: Tìm tiệm cận xiên (dành cho hàm số có dạng phân thức có bậc tử số lớn hơn bậc mẫu số 1 bậc) bằng một trong hai cách sau:

- Cách 1: Nếu biểu diễn $f(x) = ax + b + g(x)$ thì tính $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} [y - (ax + b)] = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} [y - (ax + b)] = 0 \end{cases} \Rightarrow y = ax + b$
- Cách 2: Xác định đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ bằng cách xác định hệ số a, b:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ hoặc } a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ với } a \notin 0.$$

Khi đó tương ứng ta có $b = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - ax]$ hoặc $b = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax]$

⚠

- *Đồ thị hàm số chỉ có thể có một trong hai loại tiệm cận ngang hoặc tiệm cận xiên.*
- *Nếu hàm số xác định trên toàn bộ tập số thực thì không có tiệm cận đứng.*
- *Hàm số hằng $y = b$ có đồ thị nhận $y = b$ là tiệm cận ngang, hàm số bậc nhất $y = ax + b$ có đồ thị nhận chính nó $y = ax + b$ là tiệm cận xiên.*

Câu 1. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

Câu 2. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+1}{x}$.

Câu 3. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1}$

Dạng 3.3. Đường tiệm cận liên quan góc – khoảng cách – diện tích

a) Bước 1: Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

b) Bước 2: Dựa vào các giả thiết: khoảng cách, góc, diện tích,$\cdots$để tính toán hoặc thiết lập phương trình, hệ phương trình để tìm ẩn cần tìm.

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - x}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Tính khoảng cách từ $M(2;1)$ đến đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C).

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) cắt hai trục tọa độ lần lượt tại hai điểm A, B. Tính diện tích của tam giác OAB đó.

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{4x+4}{3-x}$ có đồ thị là (C). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C).

Dạng 3.4. Bài toán thực tế và ý nghĩa của giá trị gần về tiệm cận

a) Bước 1: Biểu diễn các đại lượng với nhau thông qua hàm số.

b) Bước 2: Tìm tiệm của hàm số vừa tìm được.

c) Bước 3: Nêu ý nghĩa của giá trị gần về tiệm cận.

Câu 1. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \dfrac{300x}{100 - x}$(triệu đồng), $0 \leq x < 100$. Hãy cho biết

a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

b) Có thể loại bỏ được 10% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Câu 2. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x) = 200\left(5 - \dfrac{9}{2+x}\right)$, trong đó $x \geq 1$.

a) Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Câu 3. Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

a) Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t) = \dfrac{30t}{200+t}$.

b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

c) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

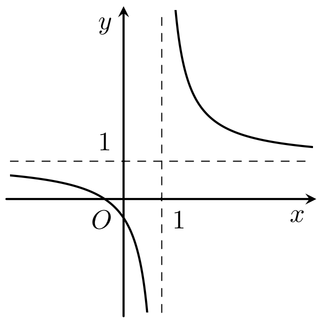
Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	$-4 \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

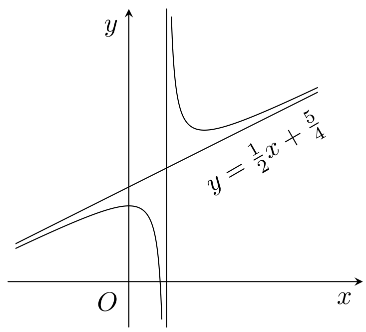
A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 2. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình là



A. $x = 1$. **B.** $x = 2$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = 2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ có đồ thị như hình bên. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là



A. $x = \dfrac{1}{2}$. **B.** $y = 2x - 1$.

C. $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{4}$. **D.** $x = 1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Câu 5. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ là

A. $y = -2$. **B.** $y = 1$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 2$.

Câu 6. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+1}{x-1}$ là

A. $y = \dfrac{1}{4}$. **B.** $y = 4$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = -1$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus [-1; 1]$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

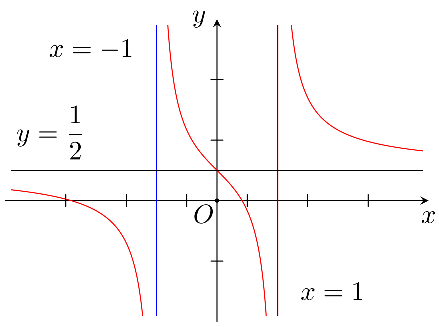
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$				$-$	
y	2		$+\infty$		0		-2

Tính tổng số đường tiệm cận đứng và số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.



a)

Câu 9. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ là

A. $y = 1$. **B.** $y = -2$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 2$.

Câu 10. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+2024}{x-1}$ là

A. $x = 2$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -1$.

Câu 11. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = x + 2 + \dfrac{3}{2x+1}$ là

A. $y = \dfrac{1}{2}$. **B.** $y = 2x + 1$. **C.** $y = x - 2$. **D.** $y = x + 2$.

Câu 12. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-16}{x+5}$ là

A. $y = 2x + 5$. **B.** $y = x + 5$. **C.** $y = x - 5$. **D.** $y = 2x - 5$.

Câu 13. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-5}{x+1}$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 14. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường tiệm cận đứng bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 3.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	||	$-$	
y	$+\infty \searrow$		1 || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || 1	$\searrow$	0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 16. Đồ thị hàm số nào sau đây có một tiệm cận?

A. $y = \dfrac{x+3}{2x-1}$. **B.** $y = \dfrac{x^2+3x-2}{x+3}$.

C. $y = \dfrac{4}{x-1}$. **D.** $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Câu 17. Đường thẳng $2y+1=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

A. $y = \dfrac{x+1}{2x+1}$. **B.** $y = \dfrac{x^2+x+1}{1-2x}$.

C. $y = \dfrac{2x+1}{1-x}$. **D.** $y = \dfrac{3-x^2}{2x^2-3x+1}$.

Câu 18. Đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào sau đây?

A. $y = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$. **B.** $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

C. $y = \dfrac{x+1}{x^2+4x+3}$. **D.** $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-2}$ có đồ thị (C). Góc tạo bởi đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) với trục hoành bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $120°$. **D.** $135°$.

Câu 20. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-1

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ có tổng cộng 3 đường tiệm cận.

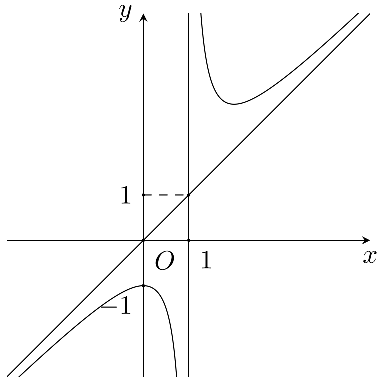
Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị và đường tiệm cận xiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

C. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có hệ số góc là một số âm.

D. Hàm số không có cực trị.



1. D	2. A	3. C	4. D	5. B	6. B	7. C	8. B	9. A	10. C
11. D	12. C	13. B	14. B	15. D	16. D	17. D	18. B	19. A	20. D
21. D	22. A								

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$			$+\infty \Vert$		5		
	4		$\Vert -\infty$				3

Khi đó

a) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

b) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình là $x = -2$.

c) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang có phương trình là $x = 3$ và $x = 4$.

d) Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4x^2 - 9}}{x - 1}$. Khi đó

a) Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.

c) Đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

d) Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{5x + 1 - \sqrt{x+1}}{x^2 - 2x}$. Khi đó

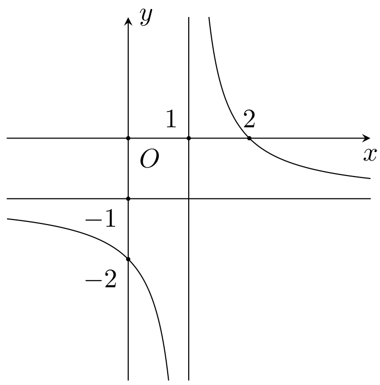
a) Đường thẳng $x = 0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

b) Đường thẳng $y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

c) Đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

d) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x + b}{cx + d}$ với $b, c, d \in \mathbb{Z}$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Khi đó

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = -1$.

d) Tổng $b + c + d = 5$.

Câu 5. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \dfrac{15t}{9t^2 + 1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$.

a) Đồ thị hàm số $y(t)$ có một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận xiên.

b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 5$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = \dfrac{1}{3}$.

d) Sau một thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng 5 mg/l.

Câu 6. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x + 2}$. Khi đó

a) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.

b) Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2; -6)$.

c) Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $4\sqrt{2}$.

d) Tiệm cận xiên của hàm số đi qua điểm $M(0; -4)$.

1. a S b Đ c S d Đ	2. a Đ b S c Đ d Đ	3. a S b Đ c Đ d S
4. a S b Đ c Đ d S	5. a S b Đ c S d Đ	6. a Đ b Đ c S d Đ

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-2}{x+1}$. Giả sử đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = a$ và đường tiệm cận ngang là $y = b$. Tính giá trị $a + b$. KQ: ☐

Câu 2. Cho hàm số có bảng biến thiên bên dưới.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

Đồ thị hàm số có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận? KQ: ☐

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$ có đồ thị (C). Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) là đường thẳng $\Delta\colon y = ax + b$. Tính $a + b$. KQ: ☐

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x-2}$ có đồ thị (C). Hai đường tiệm cận của đồ thị (C) cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình thang vuông có diện tích S. Tính S. KQ: ☐

1. 2	**2.** 2	**3.** -1	**4.** 6

BÀI 4. KHẢO SÁT & VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ CƠ BẢN

A. LÝ THUYẾT

1. Sơ đồ khảo sát hàm số

Định nghĩa 1. a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Xét sự biến thiên của hàm số:

- Tìm y', xét dấu y', xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.
- Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
- Lập bảng biến thiên của hàm số.

c) Vẽ đồ thị của hàm số:

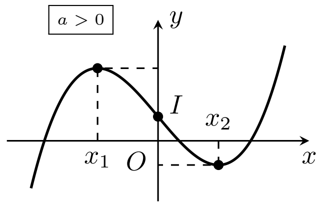
- Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm), ...
- Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
- Vẽ đồ thị hàm số.

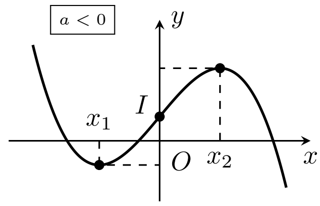
Chỉ ra tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số (nếu có).

2. Khảo sát hàm số

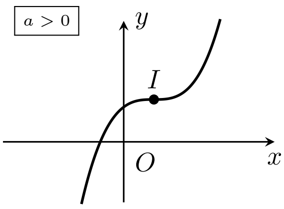
- Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$.

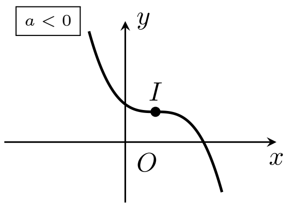
  TH1. Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 $(b^2 - 3ac > 0)$.



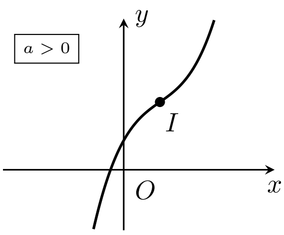


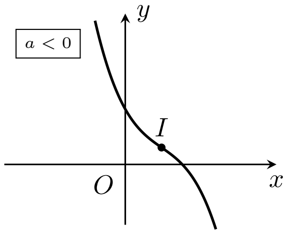
  TH2. Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép x_0 $(b^2 - 3ac = 0)$.





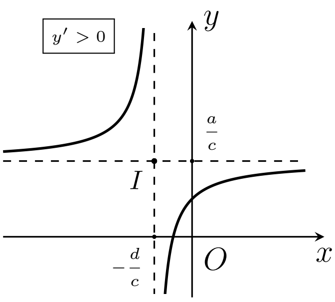
  TH3. Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm $(b^2 - 3ac < 0)$.

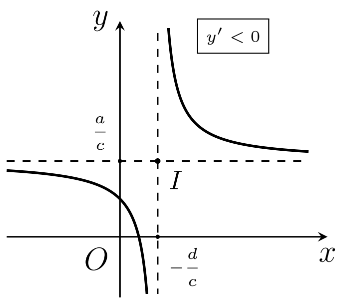




Trường hợp: $y' = 0$ vô nghiệm và có nghiệm kép, đồ thị hàm số sẽ ở dạng luôn đơn điệu nhưng trường hợp có nghiệm kép thì đồ thị hàm số có 1 điểm hơi ngang ngang 1 chút (nhìn hình vẽ trên).

- Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$.



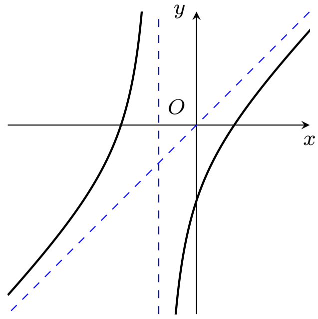


– *Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng* $x = -\dfrac{d}{c}$, *tiệm cận ngang* $y = \dfrac{a}{c}$.

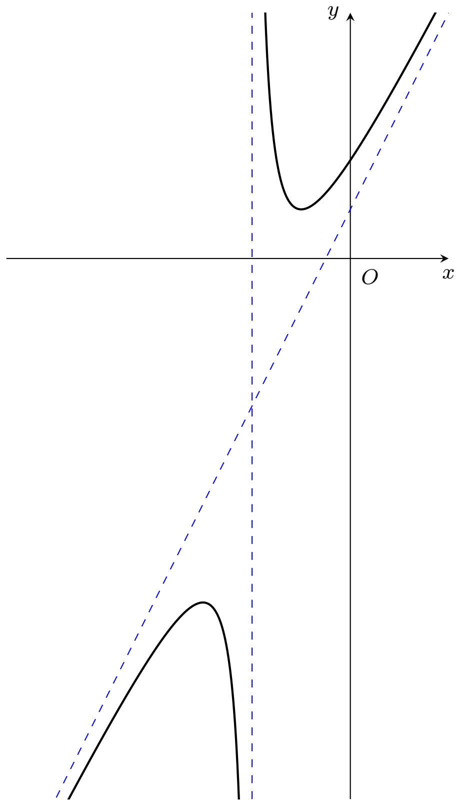
– *Các điểm đặc biệt:*
Giao điểm với $Ox : A\left(-\dfrac{b}{a}; 0\right)$, *giao điểm với* $Oy : B\left(0; \dfrac{b}{d}\right)$.
Giao của hai đường tiệm cận $I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$ *là tâm đối xứng.*

- Hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ $(ad \neq 0)$.

  – $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép



  – $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt



- *Ta luôn tách được* $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = \dfrac{a}{d}x + f + \dfrac{m}{dx + e}$.
- *Khi đó đồ thị hàm số có tiện cận đứng* $x = -\dfrac{e}{d}$. *Tiệm cận xiên* $y = \dfrac{a}{d}x + f$.

- *Đồ thị của hàm số* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ *luôn nhận điểm* $I(x_0; y_0)$ *làm tâm đối xứng, trong đó* x_0 *là nghiệm của phương trình* $y'' = 0$ *và* $y_0 = y(x_0)$.
- *Đồ thị của hàm số* $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$:
  - *Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;*
  - *Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.*
- *Đồ thị của hàm số* $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ $(ad \neq 0)$:
  - *Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;*
  - *Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.*

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 4.1. Khảo sát hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$

Bước 1: Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Giới hạn:

- Với $a > 0$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} = -\infty$.
- Với $a < 0$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$.

Đạo hàm và cực trị: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Khi đó:

Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} > 0$.

Gọi $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị, theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a}. \end{cases}$

Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0$.

Bảng biến thiên.

Đồ thị hàm số:

- Không có tiệm cận.

- Tâm đối xứng là điểm có hoành độ thỏa mãn $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{3a}$.

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Sự biến thiên:

Ta có $y' = -3x^2 + 6x$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Giới hạn: $\lim\limits_{x \to +\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 3x^2 - 4) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 3x^2 - 4) = +\infty$.

Bảng biến thiên

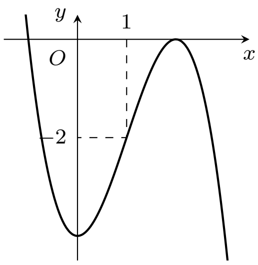
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$; nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

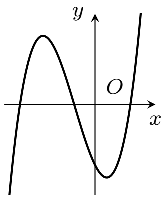
Hàm số đạt giá trị cực tiểu $y_{\text{CT}} = -4$ tại $x_{\text{CT}} = 0$.

Hàm số đạt giá trị cực đại $y_{\text{CĐ}} = 0$ tại $x_{\text{CĐ}} = 2$.

Đồ thị có tâm đối xứng là $I(1; -2)$.



Ví dụ 2. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hãy xác định dấu của các hệ số a, b, c và d.



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy: $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty \Rightarrow a > 0$; đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; d) \Rightarrow d < 0$.
Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 dựa vào hình vẽ ta thấy $x_1 < 0$, $x_2 > 0$.

Mặt khác $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y' = 0$ suy ra $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a} < 0 & \Rightarrow b > 0 \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} < 0 & \Rightarrow c < 0. \end{cases}$

Vậy $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $d < 0$.

Dạng 4.2. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất

$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $x \neq -\dfrac{d}{c}$

Bước 1: Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Giới hạn:

- Giới hạn và đường tiệm cận
  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \dfrac{a}{c}$ suy ra $y = \dfrac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
  $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = -\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = -\infty$,
  $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = -\infty$ suy ra $x = -\dfrac{d}{c}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- Đạo hàm và cực trị: $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
  - Nếu $ad - bc > 0, \forall x \in \mathscr{D}$.
    Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right)$.
  - Nếu $ad - bc < 0, \forall x \in \mathscr{D}$.
    Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right)$.

Bảng biến thiên.
Đồ thị hàm số luôn nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$.

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Sự biến thiên:

Ta có $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) = 2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) = 2$ suy ra $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

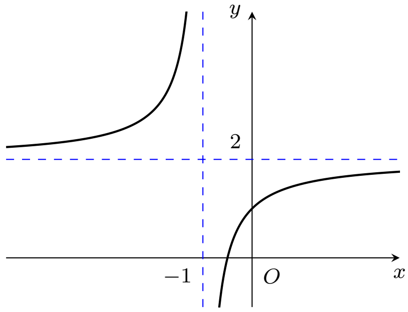
$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) = +\infty$ suy ra $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$	‖	$+$
y	$2 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 2$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$; $(-1; +\infty)$.

Đồ thị đi qua điểm $(0; 1)$ và có tâm đối xứng là $I(-1; 2)$.



Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x}{x+1}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên:

Ta có $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

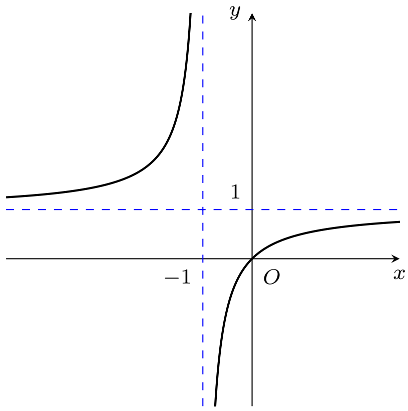
Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 1$ suy ra $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \left(\dfrac{x}{x+1}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \left(\dfrac{x}{x+1}\right) = +\infty$ suy ra $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$; $(-1; +\infty)$.
Đồ thị đi qua điểm $(0; 1)$ và có tâm đối xứng là $I(-1; 1)$.



Dạng 4.3. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất

$y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ với $ad \neq 0; x \neq -\dfrac{e}{d}$
Tử và mẫu không có nghiệm chung. Viết hàm số dưới dạng (bằng cách chia đa thức)

Bước 1: Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{e}{d}\right\}$.

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số
Giới hạn:

- Giới hạn và đường tiệm cận
  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [y - (\alpha x + \beta)] = 0$ suy ra $y = \alpha x + \beta$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
  $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{e}{d}\right)^{\pm}} y = \pm\infty$ suy ra $x = -\dfrac{e}{d}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- Đạo hàm và cực trị: $y' = \dfrac{\alpha(dx + e)^2 - \gamma d}{(dx + e)^2}$.
  Dấu của đạo hàm là dấu của $g(x) = \alpha(dx + e)^2 - \gamma d$.
  - Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép thì không có cực trị.

– Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì có hai cực trị.

Bảng biến thiên.
Đồ thị hàm số:

- Tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có).
- Đồ thị hàm số luôn nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Nhận xét. *Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.*
Đồ thị hàm có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ *có hai nghiệm phân biệt khác* $-\dfrac{e}{d}$.
Trong trường hợp đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình đường thẳng qua hai cực trị là $y = \dfrac{2ax+b}{d}$.
Mọi tiếp tuyến tại điểm $M \in (C)$ *cắt hai đường tiệm cận tại* A, B *thì* M *là trung điểm* AB.
Diện tích tam giác IAB *không đổi.*
Mọi điểm $M \in (C)$ *có tích khoảng cách từ* M *đến hai đường tiệm cận là một hằng số.*
Nếu từ một điểm E *nằm trên một đường tiệm cận của* (C) *thì qua* E *kẻ duy nhất một tiếp tuyến với* (C).

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}$.

Lời giải

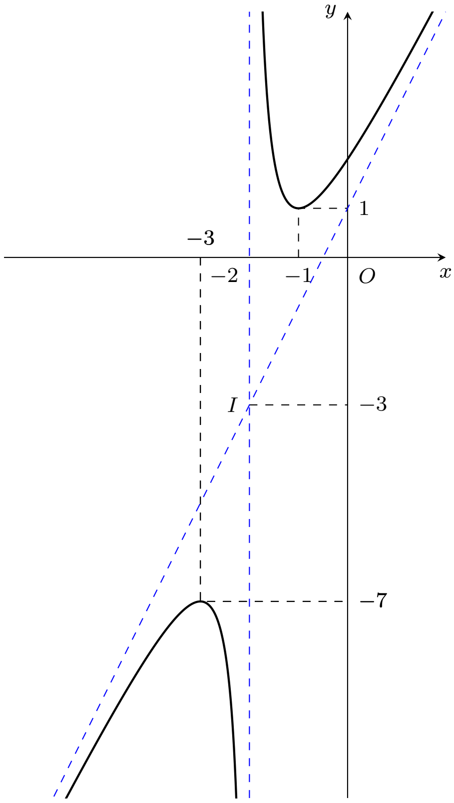
Ta có $y = \dfrac{2x^2+5x+4}{x+2} = 2x + 1 + \dfrac{2}{x+2}$.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to -2^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to -2^-} y = -\infty$ nên $x = -2$ là đường tiệm đường cận đứng.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} [y - (2x+1)] = 0$ nên $y = 2x+1$ là đường tiệm cận xiên.
Sự biến thiên:
Ta có $y' = 2 - \dfrac{2}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2+8x+6}{(x+2)^2}$.
$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2+8x+6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3. \end{array}\right.$
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-1; +\infty)$.
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$ và $(-2; -1)$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị:

Giao điểm với trục tung $A(0;2)$.

Giao điểm với trục hoành: không có.



Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2+x-2}{x+1}$.

Lời giải

Ta có $y = \dfrac{x^2+x-2}{x+1} = x - \dfrac{2}{x+1}$.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên:

Ta có $y' = 1 + \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

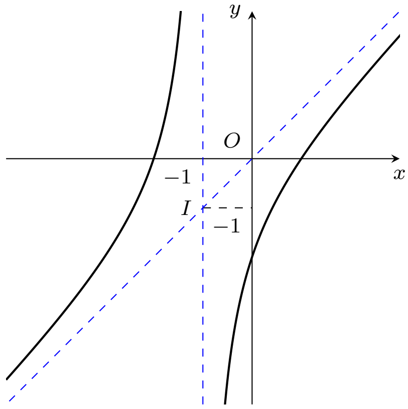
Hàm số không có cực trị.

Giới hạn và đường tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = -\infty$ nên $x = -1$ là đường tiệm đường cận đứng.
$\lim\limits_{x\to+\infty} [y - x] = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} [y - x] = 0$ nên $y = x$ là đường tiệm cận xiên.
Bảng biến thiên

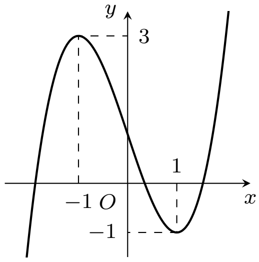
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$	‖	$+$
y	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

Đồ thị:
Giao điểm với trục tung $(0; -2)$.
Giao điểm với trục hoành là các điểm $(-2; 0)$ và $(1; 0)$.
Nhận giao điểm $I(-1; -1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
Nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



🗀 Dạng 4.4. Nhận dạng hàm số khi biết đồ thị - bảng biến thiên

Ví dụ 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Viết công thức của hàm số.



Lời giải

Ta thấy đồ thị có hai cực trị, nên hàm số của đồ thị đã cho có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$.
Mà đồ thị giao với trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $d = 1$.
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
Vì đồ thị có 2 điểm cực trị nên $y' = 0$ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -1$ nên

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 0.$$

Theo Viet thì $1 \cdot (-1) = \dfrac{c}{3a} \Leftrightarrow c = -3a$.
Suy ra hàm số có dạng $y = ax^3 - 3ax + 1$.
Mặt khác đồ thị đi qua điểm $(1; -1)$ nên

$$y(1) = -1 \Leftrightarrow a - 3a + 1 = -1 \Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow c = -3.$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = x^3 - 3x + 1$.

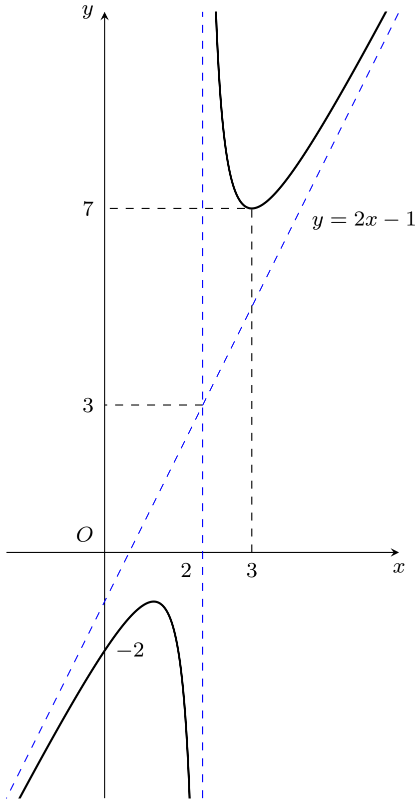
Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \dfrac{ax - 1}{2x + b}$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Xác định a, b.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

Lời giải

Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = -1$ nên $x = -1$ là nghiệm của $2x + b = 0$.
Suy ra $2(-1) + b = 0 \Leftrightarrow b = 2$.
Mặt khác đồ thị có đường tiệm cận ngang $y = -1$ nên $\dfrac{a}{2} = -1 \Leftrightarrow a = -2$.
Vậy hàm số đã cho có $a = -2$, $b = 2$.

Ví dụ 3. Cho hàm số hữu tỉ $y = \dfrac{2x^2 + ax + b}{cx - 2}$ có đồ thị như hình bên. Viết công thức của hàm số.



Lời giải

Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 2$ nên $x = 2$ là nghiệm của

$$cx - 2 = 0 \Leftrightarrow c \cdot 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow c = 1.$$

Suy ra hàm số có dạng $y = \dfrac{2x^2 + ax + b}{x - 2}$. Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; -1)$ và $(3; 7)$ nên

$$\begin{cases} y(1) = -1 \\ y(3) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2 + a + b}{1 - 2} = -1 \\ \dfrac{18 + 3a + b}{3 - 2} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 4. \end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = \dfrac{2x^2 - 5x + 4}{x - 2}$.

Dạng 4.5. Nhận dạng đồ thị - bảng biến thiên khi biết hàm số

Vận dụng các kiến thức liên quan: Đơn điệu, Cực trị, Đường tiệm cận

- **Bước 1:** Tập xác định.
- **Bước 2:** Sự biến thiên
  - Chiều biến thiên.

  - Cực trị.
  - Đường tiệm cận.
  - Điểm đi qua.

- **Bước 3:** Kết luận đồ thị.

Ví dụ 1. Xác định bảng biến thiên của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 9$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(1; +\infty)$.

Cực trị

- Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{\text{CĐ}} = -4$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$ và $y_{\text{CT}} = -36$.

Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-36	↗	-4	↘	$-\infty$

Ví dụ 2. Xác định đồ thị của hàm số hữu tỉ $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1} = x - 1 + \dfrac{4}{x + 1}$.

Đạo hàm $y' = 1 - \dfrac{4}{(x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -3)$ và $(1; +\infty)$.

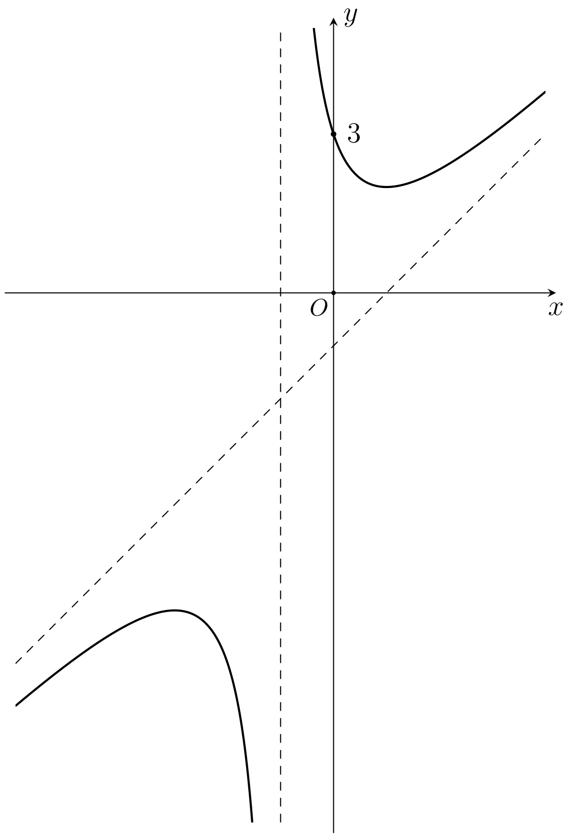
Hàm số nghịch biến trên $(-3; -1)$ và $(-1; 1)$.

Cực trị

- Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$ và $y_{\text{CĐ}} = -6$.

- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{\text{CT}} = 2$.

Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$.
Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} [y - (x-1)] = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [y - (x-1)] = 0$.
$\Rightarrow$ Đồ thị có đường tiệm cận xiên là $y = x - 1$.
Mặt khác $\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to (-1)^-} y = -\infty$.
$\Rightarrow$ Đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x = -1$.
Vẽ đồ thị



Dạng 4.6. Xác định dấu – giá trị các hệ số

a) **Loại 1:** Hàm đa thức bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$.

- **Bước 1:** Nhìn vào nhánh ngoài cùng của đồ thị Xác định dấu của hệ số a.
- **Bước 2:** Điểm cắt trục tung: xác định dấu hệ số d.
- **Bước 3:** Nhìn vào hai điểm cực trị (nếu có). Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$.
  - Nếu đồ thị hàm số không có điểm cực trị $\Rightarrow \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0$.

- Nếu đồ thị hàm số có hai điểm cực trị:
  Các điểm cực trị x_1, x_2 của hàm số là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.
  Khi đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$ (Vi-ét).
  Dựa vào vị trí của x_1, x_2 để suy luận các phép tính $x_1 + x_2$ và $x_1 x_2$ mang dấu gì.
  Nếu không cho tọa độ rõ ràng, ước lượng khoảng cách từ O tới các điểm x_1, x_2.

- **Bước 4:** Xác định tọa độ các điểm đã cho.
- **Bước 5:** Dựa vào điểm uốn U-Là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.
  - x_U là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.
  - Điểm U là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị.

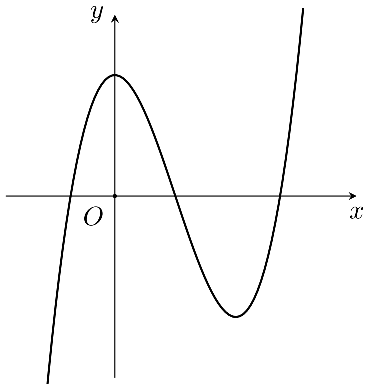
Nhận xét: Bảng biến thiên mô phỏng đồ thị hàm số. Cách đọc bảng biến thiên giống như cách đọc đồ thị.

b) **Loại 2:** Hàm phân thức $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ và $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$.

- **Bước 1:** Xác định các đường tiệm cận. Dùng công thức tính nhanh định nghĩa) để tìm mối quan hệ giữa các hệ số.
  Lưu ý: Giao điểm của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.
- **Bước 2:** Xác định các điểm thuộc đồ thị hàm số: giao với các trục tọa độ, cực trị.
- **Bước 3:** Từ hình dáng đồ thị (bảng biến thiên), xác định dấu của đạo hàm dựa vào các khoảng đồng biến/nghịch biến. Từ đó xác định dấu của các hệ số.

Ví dụ 1.

Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong các hệ số a, b, c, d có bao nhiêu giá trị dương?



Lời giải

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị có nhánh cuối cùng đi lên nên $a > 0$.

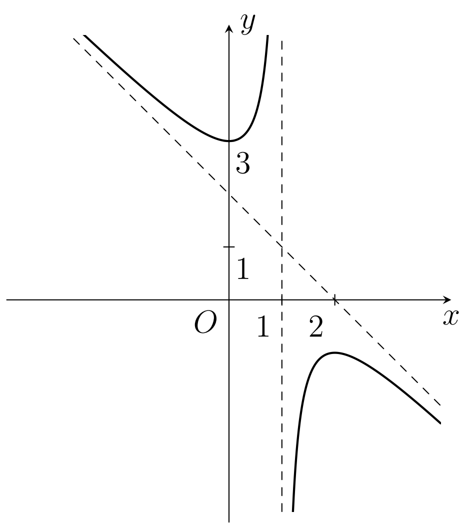
Đồ thị giao với trục Oy tại điểm có tung độ lớn hơn 0 nên $d > 0$.

Từ đồ thị ta thấy hàm số có 1 điểm cực trị bằng 0 nên $c = 0$ và một điểm cực trị dương nên $-\dfrac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy trong các hệ số a, b, c, d có 2 giá trị dương là a và d.

Ví dụ 2.

Cho hàm số hữu tỉ $y = ax + 2 + \dfrac{b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên. Tính$P = a + b + c$.



Lời giải

Ta có $y = ax + 2 + \dfrac{b}{x+c}$.

Nên đồ thị của hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = ax + 2$, mà như hình vẽ đường tiệm cận xiên đi qua điểm $(1; 1)$ suy ra $1 = a \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow a = -1$.

Đồ thị của hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ nên $1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$.

Khi đó hàm số đã cho có dạng $y = -x + 2 + \dfrac{b}{x-1}$.

Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 3)$ nên $-0 + 2 + \dfrac{b}{0-1} = 3 \Leftrightarrow 2 - b = 3 \Leftrightarrow b = -1$.

Vậy $P = a + b + c = -1 + (-1) + (-1) = -3$.

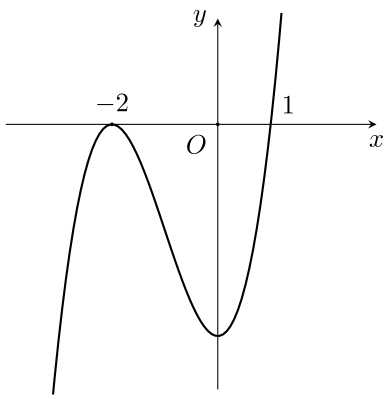
Dạng 4.7. Đọc đồ thị của đạo hàm

Xác định tính đơn điệu, cực trị, giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$, $g(x) = f(u(x))$, $g(x) = g(f(x))$ khi biết đồ thị (bảng biến thiên) của đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ hoặc $y = f'(u(x))$.

- **Bước 1:** Tính $g'(x)$ (chú ý hàm hợp dạng $g(x) = f(u(x)) \Rightarrow g'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$).
- **Bước 2:** Giải $g'(x) = 0$ ta được $x_1; x_2; \ldots; x_i$ là các điểm mà tại đó $g'(x) = 0$ hoặc $g'(x)$ không xác định.
- **Bước 3:** Lập bảng xét dấu của $g'(x)$ lập được bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$. Dựa vào bảng biến thiên xét các tính chất đơn điệu, cực trị, min, max...

Ví dụ 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $y = f'(x)$ có đồ thị trong hình dưới đây. Lập bảng xét dấu của $y = f'(x)$?



Lời giải

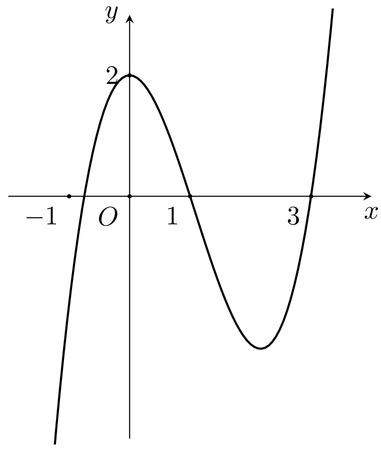
Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta có, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $y = f'(x)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Ví dụ 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $y = f'(x)$ có đồ thị trong hình dưới đây. Tìm điểm cực đại của hàm số đã cho



Lời giải

Từ đồ thị của $f'(x)$ ta có, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$ với $(x_1 < 0)$.

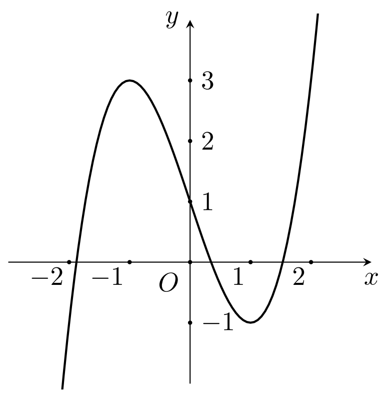
Bảng biến thiên của $y = f(x)$.

x	$-\infty$		x_1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	f_{CT}	$\nearrow$	$f_{\text{CĐ}}$	$\searrow$	f_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Ví dụ 3.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xác định giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x - 1) - 2x + 1$ trên $[0; 1]$.



Lời giải

Ta có $g'(x) = 2f'(2x - 1) - 2$.

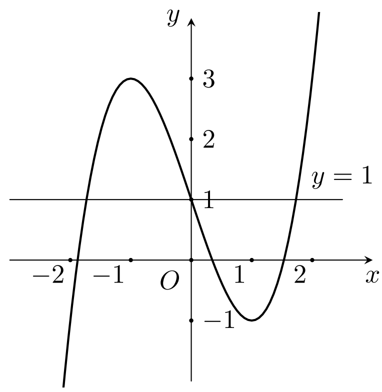
Cho $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2f'(2x - 1) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow f'(2x - 1) \geq 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy trên $[0; 1]$.

Đường thẳng $y = 1$ cắt $y = f'(x)$ tại $x = 0$.

Ta nhận thấy

- Đồ thị $y = f'(x)$ nằm phía trên $y = 1$ khi $x < 0$.
- Đồ thị $y = f'(x)$ nằm phía dưới $y = 1$ khi $x > 0$.



Do đó $f'(2x-1) \geq 1 \Leftrightarrow 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{2}$.
Từ đó ta lập được bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(x)$ trên đoạn $[0; 1]$ là $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Dạng 4.8. Sự tương giao

Các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là các đường (C_1), (C_2), khi đó:

- Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ chính là số giao điểm của các đồ thị (C_1), (C_2).
- Số giao điểm của các đường (C_1), (C_2) chính là số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

Ví dụ 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị của hàm số $y = 3x^3 - 9x + 3(m-1)$ giao với trục hoành tại hai điểm phân biệt?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 3x^3 - 9x + 3(m-1)$ với trục hoành là

$$3x^3 - 9x + 3(m-1) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x = m - 1 (1).$$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 3x$ (C) có $f'(x) = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì $f(x) = -x^3 + 3x$ (C) giao $y = m - 1$ tại hai điểm phân biệt. Do đó $m = 3$ hoặc $m = -1$.

Vậy chỉ có một giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

C. LUYỆN TẬP

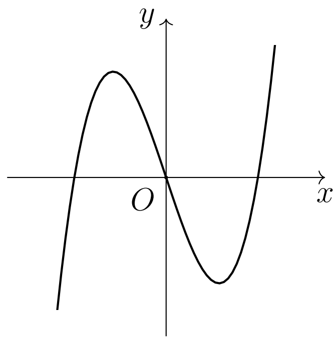
PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ đồng biến trên khoảng

A. $(0; 2)$. **B.** $(-\infty; 0)$. **C.** $(1; 4)$. **D.** $(4; +\infty)$.

Câu 2.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

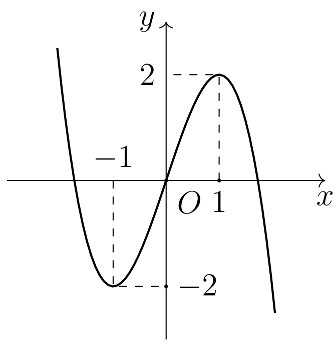


A. $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = -x^3 + 3x$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2$.

Câu 3.

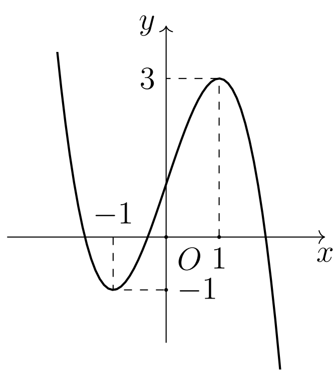
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là

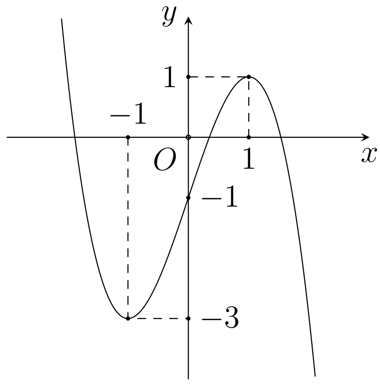


A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 5.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt?

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.



Câu 6. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

A. $y = -1$. **B.** $y = 4$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = 0$.

Câu 7. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5x+1}{x-1}$ là

A. $y = -\dfrac{1}{5}$. **B.** $y = 5$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = 0$.

Câu 8. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \dfrac{(n-3)x + n - 2017}{x + m + 3}$ (m, n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m + n$.

A. 0. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 9. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{2x - 2}$ là

A. $x = 1$. **B.** $x = \dfrac{1}{2}$.

C. $x = 2$. **D.** Không có tiệm cận đứng.

Câu 10. Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 11. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 12. Biết rằng đường thẳng $y = 4x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x + 1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0 = 10$. **B.** $y_0 = 13$. **C.** $y_0 = 11$. **D.** $y_0 = 12$.

Câu 13.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có đồ thị như hình bên

Xét các mệnh đề sau:

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

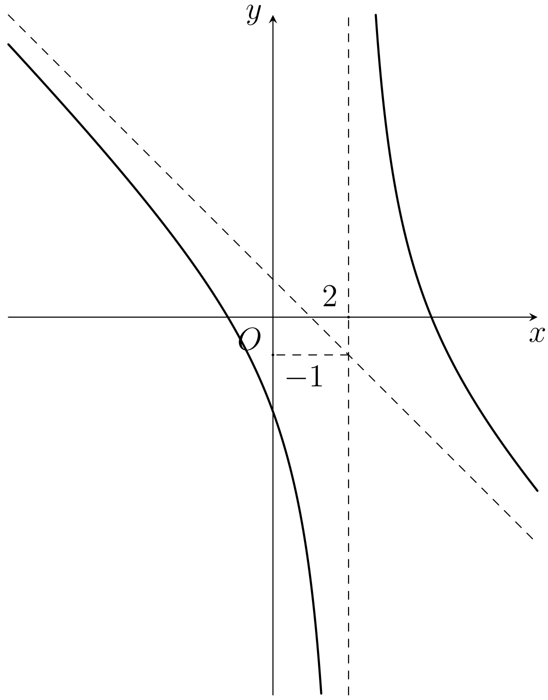
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

c) Điểm $I(1; 2)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

d) Hệ số a và m trái dấu.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.



Câu 14. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2$ và đồ thị hàm số $y = x^2 + 5x$ là

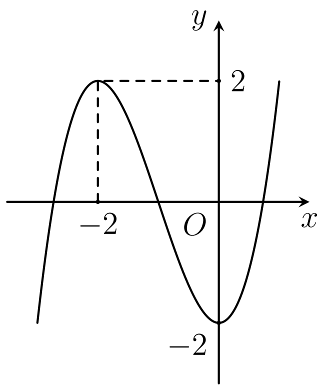
A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 15.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^3 - 3x^2 - 2$. **B.** $y = x^3 + 3x^2 - 2$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 - 2$.



Câu 16. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \dfrac{2x + 4}{x - 1}$. Khi đó hoành độ x_I của trung điểm I của đoạn MN bằng bao nhiêu?

A. $x_I = 2$. **B.** $x_I = 1$. **C.** $x_I = -5$. **D.** $x_I = -\frac{5}{2}$.

Câu 17. Biết đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x + 5}{x - 2}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2. Giá trị $x_1 + x_2$ bằng

A. -1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

»

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

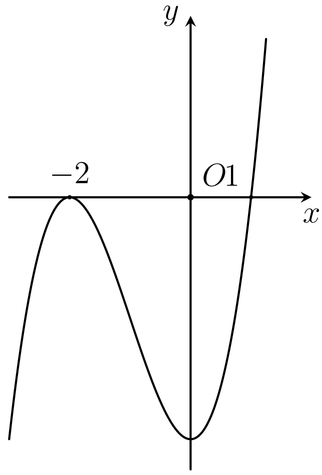
A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 19.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(-4;-2)$.

C. $(-\infty;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

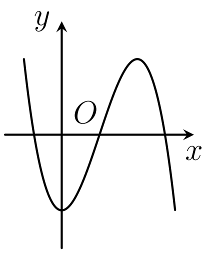


Câu 20. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên sau?

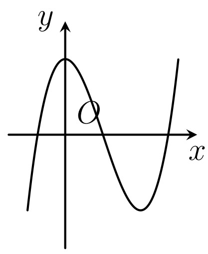
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
$f(t)$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-2

A. $y=\dfrac{x-1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-2x}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-2+x}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$.

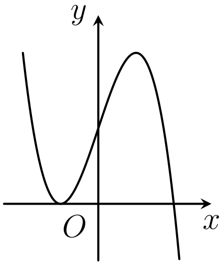
Câu 21. Hình nào dưới đây là dạng đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2-2$?



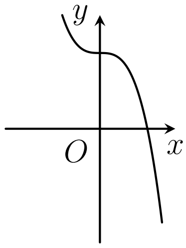
A. .



B. .

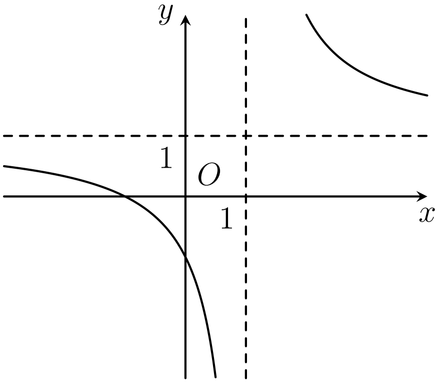
C. 

.

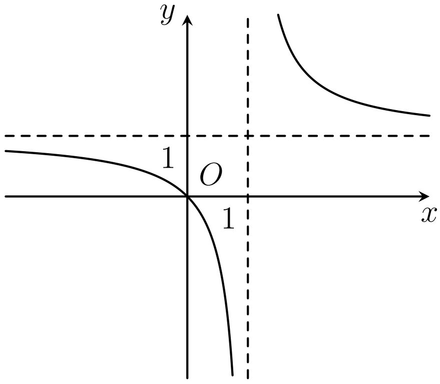
D. 

.

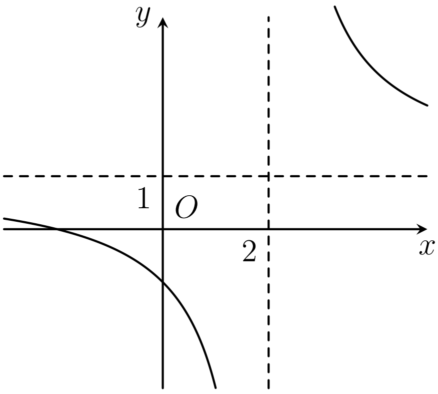
Câu 22. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$?

A. 

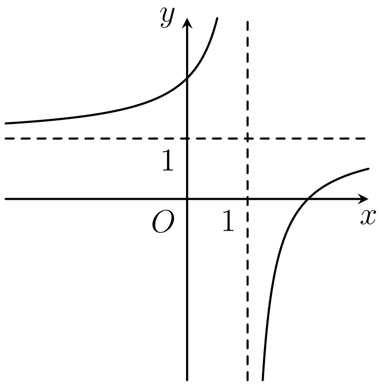
.

B. 

.

C. 

.

D. 

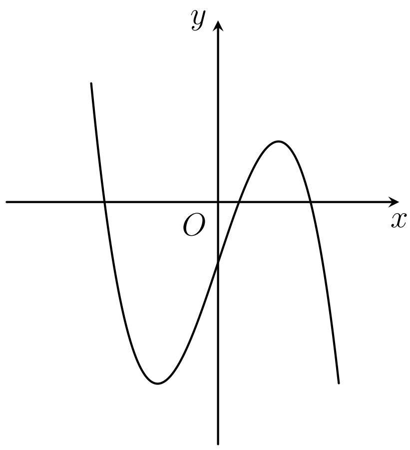
.

Câu 23.

Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$ $(a; d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, d > 0$. **B.** $a < 0, d > 0$.

C. $a > 0, d < 0$. **D.** $a < 0, d < 0$.



Câu 24. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

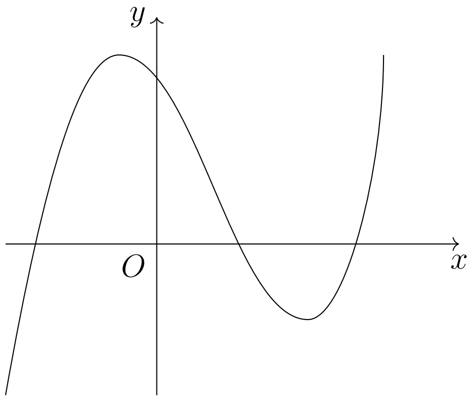
x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 25.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d.

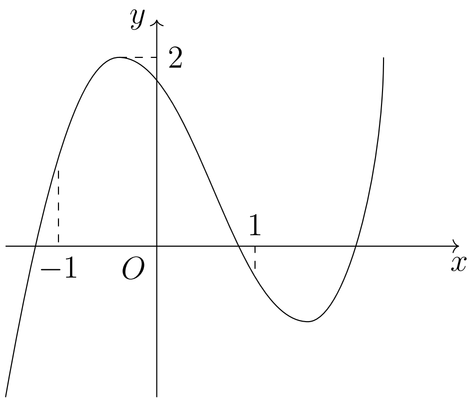


A. $a > 0$, $b > 0$, $d > 0$, $c > 0$.
B. $a > 0$, $c > 0 > b$, $d < 0$.
C. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.
D. $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d > 0$.

Câu 26.

Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới Khẳng định nào là đúng?

A. $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d < 0$.
B. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d < 0$.
C. $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $d > 0$.
D. $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d > 0$.



Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $m < 0$. **B.** $m > 0$. **C.** $0 < m < \dfrac{27}{4}$. **D.** $m > \dfrac{27}{4}$.

Câu 28. Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B. Khi đó diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ bằng)

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 29. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có tiệm cận xiên là

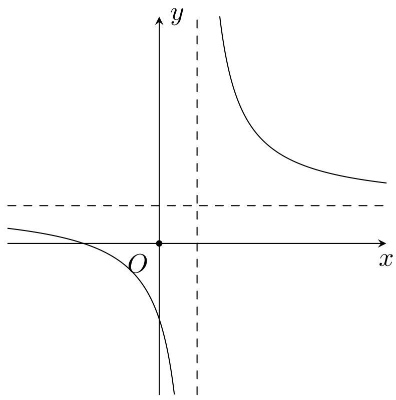
A. $y = x$. **B.** $y = -x$. **C.** $y = x + 1$. **D.** $y = -x + 1$.

Câu 30.

Cho hàm số $y = \dfrac{(a-1)x + b}{(c-1)x + d}$, $d < 0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $a > 1$, $b > 0$, $c < 1$. **B.** $a > 1$, $b < 0$, $c > 1$.

C. $a < 1$, $b > 0$, $c < 1$. **D.** $a > 1$, $b > 0$, $c > 1$.

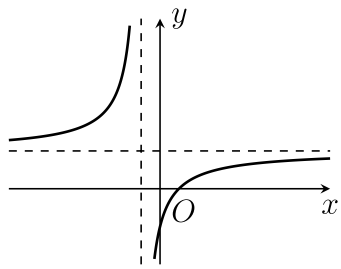


Câu 31.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng.

A. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc > 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} ad < 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} ad > 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.



Câu 32. Tính tổng các hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - 3}{4 - x}$ và $y = 6 - x$.

A. 12. **B.** 27. **C.** -12. **D.** -27.

Câu 33. Một học sinh được giao thiết kế một cái hộp thỏa mãn: Tổng của chiều dài và chiều rộng bằng 12 cm; tổng của chiều rộng và chiều cao là 24 cm. Giáo viên yêu cầu học sinh ấy phải thiết kế sao cho thể tích cái hộp lớn nhất, giá trị thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 600. **B.** $843\sqrt{3}$. **C.** $384\sqrt{3}$. **D.** $348\sqrt{3}$.

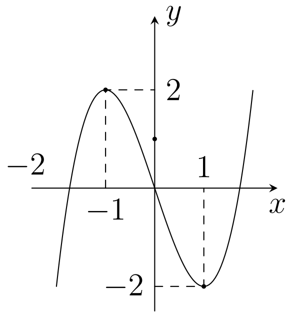
Câu 34. Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 400 km tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv3t$. Trong đó c là hằng số cho trước; E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng

A. 9 km/h. **B.** 8 km/h. **C.** 10 km/h. **D.** 12 km/h.

1. A	2. A	3. D	4. B	5. C	6. B	7. B	8. A	9. D	10. C
11. A	12. B	13. B	14. A	15. B	16. B	17. C	18. D	19. C	20. D
21. A	22. D	23. D	24. A	25. D	26. D	27. D	28. D	29. A	30. D
31. C	32. A	33. C	34. A						

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho đồ thị hàm số bậc ba như hình bên dưới.



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **ĐÚNG**? Khẳng định nào **SAI**?

a) Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1;\ 2)$.

b) Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

d) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua gốc toạ độ O.

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đồ thị (C). Các mệnh đề sau, **ĐÚNG** hay **SAI**
.

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1); (-1; 0)$.

b) Hàm số có hai điểm cực trị.

c) Đồ thị (C) không cắt trục Ox.

d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1; 2)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 - 3x + 4}{x - 3}$ có đồ thị là (C). Những mệnh đề sau **Đúng** hay **Sai**?

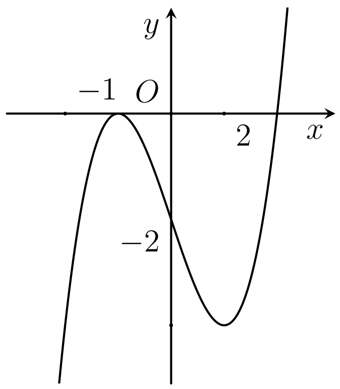
a) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y = -x - 6$.

b) Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3; -9)$ làm tâm đối xứng.

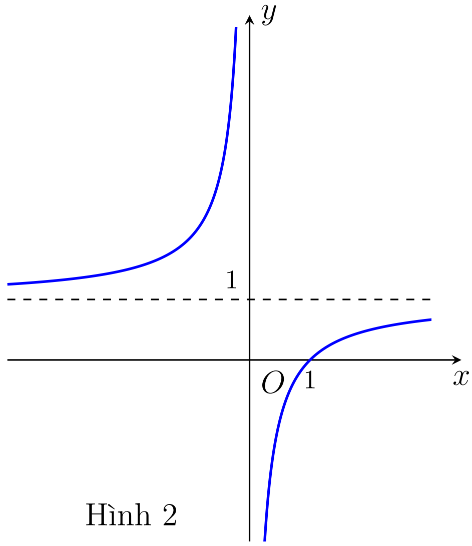
c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

d) Đồ thị không cắt trục Ox.

Câu 4. Cho ba dạng đồ thị hàm số.



Hình 1



Hình 2

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hình 3

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **ĐÚNG**? Khẳng định nào **SAI**?

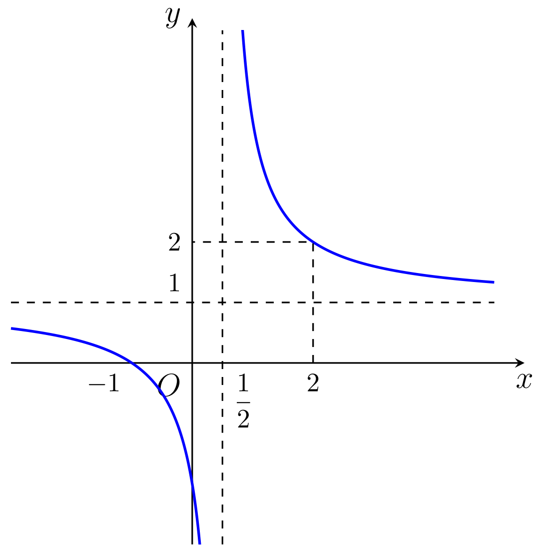
a) Hình 1 là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hệ số $a > 0$ và $d = -2$.

b) Hình 2 là đồ thị hàm số có dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ thoả $a = c$, với $a \neq 0,\ \ c \neq 0$.

c) Hình 3 là đồ thị hàm số có dạng $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $a \neq 0,\ \ m \neq 0$ và có điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(2;3)$.

d) Hình 3 có $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 5. Cho hai đồ thị hàm số hình 1 là $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ và hình 2 là $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$



Hình 1

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Hình 2

Xét tính **ĐÚNG**, **SAI** các mệnh đề sau

a) Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ thoả mãn $a + 2d = 0$.

b) Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ thoả mãn $3b - 4c - 2d = 0$.

c) Hình 2 có đồ thị hàm số có dạng là $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

d) Hình 2 là đồ thị hàm số có tổng các hệ số $a + b + c + d < 0$.

Câu 6. Cho hàm số $y = x - \dfrac{1}{x+1}$.

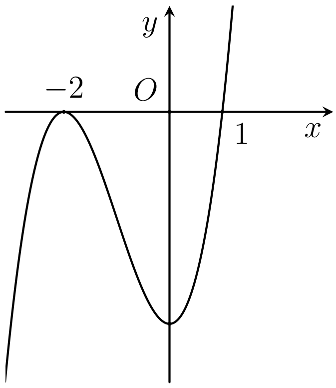
a) Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại M.
Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = 2x - 1$.

c) Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau.

d) Để đường thẳng $y = k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA \perp OB$ khi đó k là nghiệm của phương trình $k^2 - k - 1 = 0$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$ và xét tính **ĐÚNG**, **SAI** của các mệnh đề sau.

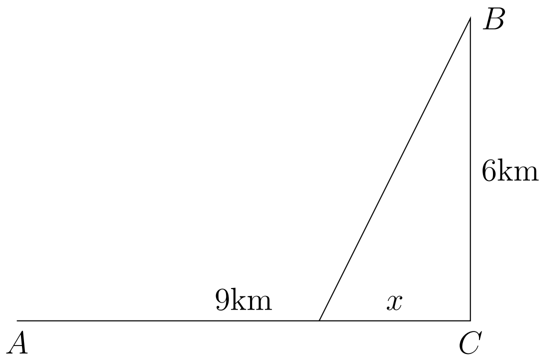
a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

b) Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

c) Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

d) Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Câu 8. Một công ty muốn xây một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ biển đến một điểm B trên một hòn đảo (như hình vẽ).



Giá để xây đường ống trên bờ là 50 000 USD mỗi km và 130 000 USD để xây mỗi km dưới nước. Gọi C là điểm trên bờ biển sao cho BC vuông góc với bờ biển, $BC = 6$ km, $AC = 9$ km. Gọi M là vị trí trên đoạn AC sao cho khi làm ống dẫn theo đường gấp khúc AMB thì chi phí ít nhất. Xét tính **ĐÚNG, SAI** các mệnh đề dưới đây.

a) Nếu công ty lắp đường ống theo đường ACB thì chi phí hết số tiền 1 230 000 USD.

b) Nếu công ty lắp đường ống thẳng theo đường trên biển từ A đến B thì chi phí hết số tiền nhỏ hơn 1 400 000 USD.

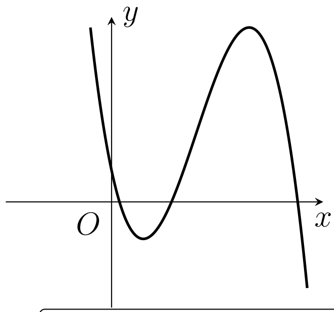
c) Nếu công ty lắp đường ống theo đường gấp khúc AMB thì khi M là trung điểm của AC chi phí hết số tiền 1 200 000 USD.

d) Chi phí thấp nhất để hoàn thành việc xây dựng đường ống dẫn là 1 170 000 USD.

1. a Đ b S c Đ d Đ	2. a Đ b Đ c S d S	3. a Đ b Đ c Đ d S
4. a Đ b Đ c Đ d S	5. a Đ b Đ c Đ d S	6. a S b Đ c S d Đ
7. a S b S c S d S	8. a Đ b S c Đ d Đ	

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1.
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

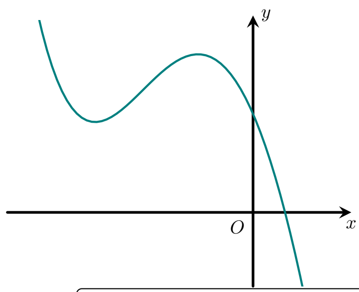


KQ:

Câu 2. Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(1; 0)$ và có điểm cực trị $(-2; 0)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

KQ:

Câu 3.
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?



KQ:

Câu 4. Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức:

$$C(x) = 0{,}0001x^2 - 0{,}2x + 10000$$

trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng (1 vạn đồng $= 10\,000$ đồng). Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M(x) = \dfrac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn và tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí. Tìm chi phí trung bình thấp nhất cho một cuốn tạp chí xuất bản (*đơn vị: vạn đồng*), biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá $30\,000$ cuốn.

KQ:

Câu 5. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $(1 \leq x \leq 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Tìm lợi nhuận tối đa mà hộ làm nghề dệt này có thể thu được mỗi ngày (*đơn vị: nghìn đồng*). KQ:

1. a Đ b S c Đ d	2. a Đ b Đ c S d	3. a Đ b Đ c Đ d	4. a Đ b Đ c Đ d
5. a Đ b Đ c Đ d S	6. a S b Đ c S d	7. a S b S c S d	8. a Đ b S c Đ d Đ