

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

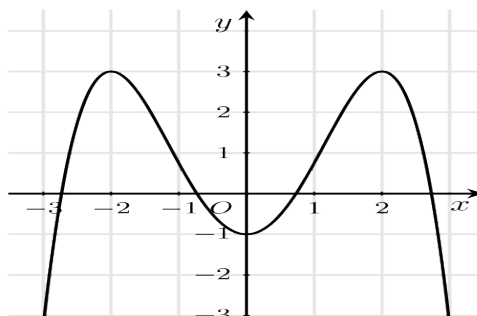
Câu 1: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} có bảng biến thiên hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới:

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		0		$+\infty$
		-4		-2	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 2: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây:



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(7; +\infty)$. B. $(-2; 3)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(-2; 0)$.

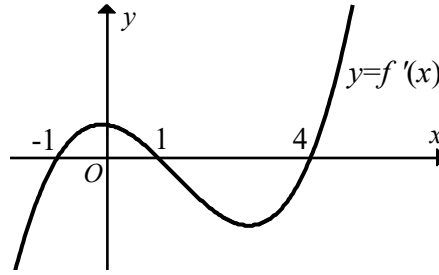
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'		0	0	
		$+$	$-$	$+$
y		0		$+\infty$
	$-\infty$		-2	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 0)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(1; 3)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây:



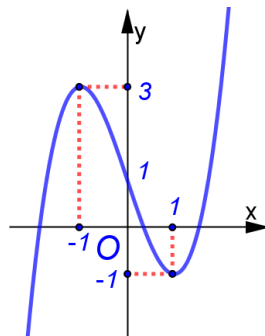
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(1; 4)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 5: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên \mathbb{R} ?

- A. $y = -x^3 + 3x^2 - 9x$. B. $y = -x^3 + x + 1$. C. $y = \frac{x-1}{x-2}$. D. $y = 2x^2 + 3x + 2$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = 1$. B. $x = -1$. C. $y = 3$. D. $M(-1; 3)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	6	11	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	\nearrow -10	\searrow -20	\nearrow $+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là

- A. -10. B. 11. C. 6. D. -20.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$, khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
 B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
 D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

Câu 9: Hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng nào?

- A. $(-4; 2)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. D. $(-4; -1)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} và có đạo hàm $f'(x) = 12x^{2025}(x+1)(3-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 3)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x - 7}{x - 4}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

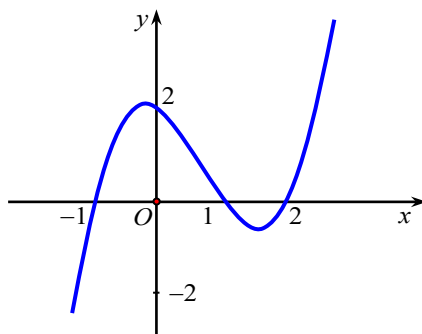
- A. $x_{CT} = 3, x_{CD} = 5$. B. $x_{CT} = -3, x_{CD} = 5$. C. $x_{CT} = 5, x_{CD} = 3$. D. $x_{CT} = 5, x_{CD} = -3$.

Câu 12: Điểm cực tiểu của hàm số $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$ là

- A. $x = 1$. B. $x = -5$. C. $x = 2$. D. $x = 5$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$,
 b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
 d) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$.

- a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
 b) Cực đại của hàm số $f(x)$ là 1.
 c) Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.
 d) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = 2^{x^2 - 3x + \frac{13}{4}}$.

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
 b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
 c) Hàm số có giá trị cực tiểu $y_{CT} = 2$.
 d) Hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y = \log_2(x^2 - 4x + 5)$ có đồ thị là (C) .

- Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.
- Hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
- Giả sử đồ thị hàm số (C) cắt đường thẳng $(d): y = 1$ tại hai điểm A, B và có điểm cực trị là M . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB bằng 2.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Biết rằng tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ là hai khoảng $(a; b), (b; c)$ với $a < b < c$. Tính $T = a + b + c$

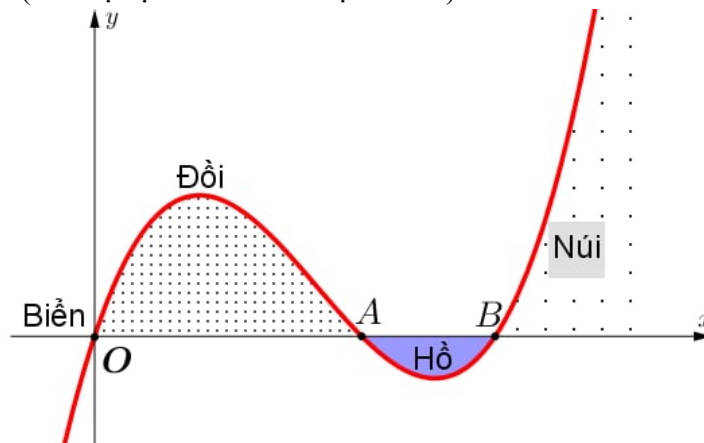
Câu 2: Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^4 - 2ax^2 + b$ có một điểm cực trị là $(1; 2)$. Tính khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho (quy tròn đến hàng phần trăm).

Câu 3: Biết rằng hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ cùng với điểm $I(-\sqrt{5}; -\sqrt{5})$ tạo thành một tam giác. Diện tích tam giác đó bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 4: Xí nghiệp A sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là $TC = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$ và hàm doanh thu là $TR = -2x^2 + 1312x$, với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp A được xác định bằng hàm số $f(x) = TR - TC$, cực đại lợi nhuận của xí nghiệp A khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm?

Câu 5: Hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; a)$ có độ dài lớn nhất. Khi đó a bằng?

Câu 6: Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hoá thành một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là km).



Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OA = 2$ km, độ rộng của hồ $AB = 1$ km và ngọn đồi cao 528 m. Tìm độ sâu của hồ (tính bằng mét) tại điểm sâu nhất? (làm tròn đến hàng đơn vị).

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} có bảng biến thiên hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới:

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		0		$+\infty$

\swarrow -4 \nearrow \searrow -2 \nearrow

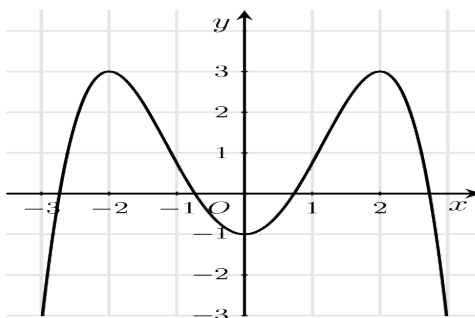
Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 4. B. 1. **C. 2.** D. 3.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm đơn nên hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây:



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(7; +\infty)$. B. $(-2; 3)$. **C. $(-\infty; -2)$.** D. $(-2; 0)$.

Lời giải

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

\nearrow 0 \searrow -2 \nearrow $+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

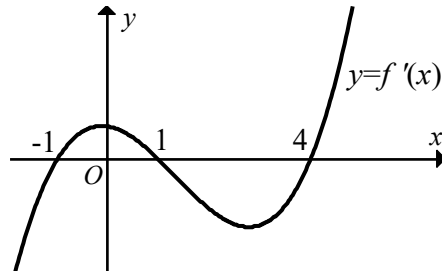
- A. $(-2; 0)$. B. $(-\infty; 0)$. **C. $(1; 3)$.** D. $(3; +\infty)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(3; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$

Câu 4: Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây:



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(1; 4)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) > 0 \forall x \in (-1; 1)$ và $(4; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(4; +\infty)$.

Câu 5: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên \mathbb{R} ?

- A. $y = -x^3 + 3x^2 - 9x$. B. $y = -x^3 + x + 1$. C. $y = \frac{x-1}{x-2}$. D. $y = 2x^2 + 3x + 2$.

Lời giải

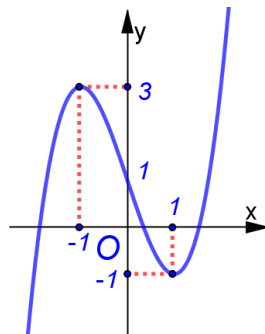
Tập xác định: \mathbb{R}

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x - 9$

$y' = 0 \Leftrightarrow$ PT vô nghiệm.

$y' < 0, \forall x$. Hàm số luôn nghịch biến trên \mathbb{R} .

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = 1$. B. $x = -1$. C. $y = 3$. D. $M(-1; 3)$.

Lời giải

Từ đồ thị, hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	6	11	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	-10	-20	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là

- A. -10. B. 11. C. 6. D. -20.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $y_{CT} = -20$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$, khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.**
- C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \forall x \in D$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Câu 9: Hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng nào?

- A. $(-4; 2)$.
- B. $(-\infty; -2)$.
- C. $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- D. $(-4; -1)$.**

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có. $y' = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2}, \forall x \in D$.

Khi đó $y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$+$
y	$-\infty$	-11	$-\infty$	1	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-4; -1)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} và có đạo hàm $f'(x) = 12x^{2025}(x+1)(3-x), \forall x \in \mathbb{R}$.
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$.**
- B. $(-1; 3)$.
- C. $(3; +\infty)$.
- D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^{2025}(x+1)(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x - 7}{x - 4}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $x_{CT} = 3, x_{CD} = 5$. B. $x_{CT} = -3, x_{CD} = 5$. C. $x_{CT} = 5, x_{CD} = 3$. D. $x_{CT} = 5, x_{CD} = -3$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{(2x-2)(x-4) - (x^2 - 2x - 7)}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x + 15}{(x-4)^2}.$$

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ (tm)} \\ x = 3 \text{ (tm)} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	3	4	5	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$			
y	$-\infty$	\nearrow	4	\searrow	$+\infty$	\searrow	8	\nearrow	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$, và cực đại tại $x = 3$.

Câu 12: Điểm cực tiểu của hàm số $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$ là

- A. $x = 1$. B. $x = -5$. C. $x = 2$. D. $x = 5$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có

$$y' = \frac{(-2x+2)(x+2) - (-x^2 + 2x - 1)}{(x+2)^2} = \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2}.$$

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \text{ (tm)} \\ x = 1 \text{ (tm)} \end{cases}.$$

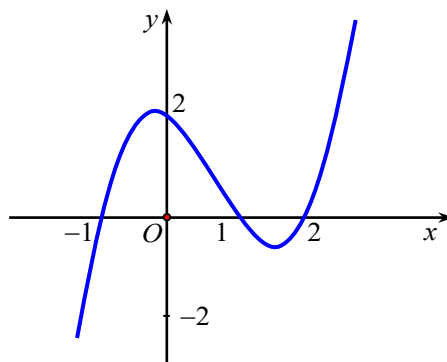
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$			
y	$+\infty$	\searrow	12	\nearrow	$+\infty$	\searrow	0	\searrow	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$ và $y_{CT} = 12$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$,
- b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

- a) Sai, vì dựa vào đồ thị thì $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1; 1) \cup (2; +\infty)$.
- b) Đúng, vì dựa vào đồ thị thì $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1; 1)$.
- c) Sai, vì dựa vào đồ thị thì $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty; -1) \cup (1; 2)$.
- d) Đúng, vì dựa vào đồ thị thì $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (1; 2)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$.

- a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- b) Cực đại của hàm số $f(x)$ là 1.
- c) Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.
- d) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------------	----------------	---------------	---------------

Câu 2
a) S
b) Đ
c) S
d) S

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	$-\infty$	$+\infty$	9	$+\infty$

- a) Từ bảng biến thiên suy ra mệnh đề sai.
 b) Mệnh đề đúng.
 c) Hàm số chỉ có hai điểm cực trị là $x = -1$ và $x = 3$. Vậy mệnh đề sai.
 d) Do hàm số không xác định tại $x = 1$ thuộc $(-1; 3)$ nên mệnh đề sai.

Câu 3: Cho hàm số $y = 2^{x^2 - 3x + \frac{13}{4}}$.

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
 b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
 c) Hàm số có giá trị cực tiểu $y_{CT} = 2$.
 d) Hàm số có 2 điểm cực trị.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

$$y = f(x) = 2^{x^2 - 3x + \frac{13}{4}}.$$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = (2x - 3) \cdot 2^{x^2 - 3x + \frac{13}{4}} \cdot \ln 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \in D$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = 2^{x^2 - 3x + 2}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: Các mệnh đề **a)** và **c)** đúng.
 Các mệnh đề **b)** và **d)** sai.

Câu 4: Cho hàm số $y = \log_2(x^2 - 4x + 5)$ có đồ thị là (C) .

- a) Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.
 b) Hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .
 c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
 d) Giả sử đồ thị hàm số (C) cắt đường thẳng $(d): y = 1$ tại hai điểm A, B và có điểm cực trị là M . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB bằng 2.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Điều kiện xác định: $x^2 - 4x + 5 > 0$ (luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$).

Vậy hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

b) Ta có $y' = \frac{2x - 4}{(x^2 - 4x + 5) \ln 2}$.

Do $y' > 0 \Leftrightarrow x > 2$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

c) Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		0	
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

d) Đồ thị hàm số (C) có điểm cực tiểu là $M(2;0)$ và cắt đường thẳng $(d): y = 1$ tại hai điểm $A(x_1;1), B(x_2;1)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình:

$$\log_2(x^2 - 4x + 5) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow A(1;1), B(3;1).$$

Khi đó $\overrightarrow{MA} = (-1;1), \overrightarrow{MB} = (1;1) \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. Suy ra tam giác MAB vuông tại M .

Do đó, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB là $R = \frac{AB}{2} = 1$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Biết rằng tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ là hai khoảng $(a;b), (b;c)$ với $a < b < c$. Tính $T = a + b + c$

Lời giải

Trả lời: -3

Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu của y' :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

Câu 2: Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^4 - 2ax^2 + b$ có một điểm cực trị là $(1; 2)$. Tính khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho (quy tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 1,41

Ta có $y' = 4x^3 - 4ax$.

Do đồ thị hàm số đã cho có một điểm cực trị là $(1; 2)$ nên ta có

$$\begin{cases} 4.1^3 - 4a.1 = 0 \\ 1^4 - 2a.1^2 + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		2		3		2		$+\infty$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu $A(-1; 2), B(1; 2)$ và một điểm cực đại $C(0; 3)$.

Vậy khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

$$AC = BC = \sqrt{(0-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

Câu 3: Biết rằng hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ cùng với điểm $I(-\sqrt{5}; -\sqrt{5})$ tạo thành một tam giác. Diện tích tam giác đó bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 6,71

Tập xác định \mathbb{R}

$$y' = \frac{(2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+8x+2}{(x^2+1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{5} \\ x = 2 + \sqrt{5} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$2 - \sqrt{5}$		$2 + \sqrt{5}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	1		$-1 - \sqrt{5}$		$-1 + \sqrt{5}$		1

Vậy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(2 - \sqrt{5}; -1 - \sqrt{5})$ và $B(2 + \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5})$

Khi đó $\overline{AB} = (2\sqrt{5}; 2\sqrt{5}) \Rightarrow AB = 2\sqrt{10}$; $\overline{AI} = (2; -1) \Rightarrow AI = \sqrt{5}$; $\overline{IB} = (2 + 2\sqrt{5}; -1 + 2\sqrt{5})$
 $\Rightarrow IB = \sqrt{45 + 4\sqrt{5}}$.

Trong tam giác $\cos A = \frac{AB^2 + AI^2 - BI^2}{2AB \cdot AI} = \frac{40 + 5 - 45 - 4\sqrt{5}}{2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin A = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Diện tích tam giác ABI là: $S_{ABI} = \frac{1}{2} AB \cdot AI \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = 3\sqrt{5} \approx 6,71$.

Cách 2: Áp dụng công thức tính nhanh: Với $\overline{AB} = (a; b)$, $\overline{AI} = (c; d)$ thì diện tích tam giác ABI là: $S_{ABI} = \frac{1}{2} |ad - bc|$

Vậy diện tích tam giác ABI là $S_{ABI} = \frac{1}{2} |-2\sqrt{5} - 4\sqrt{5}| = 3\sqrt{5}$.

Câu 4: Xí nghiệp A sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là $TC = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$ và hàm doanh thu là $TR = -2x^2 + 1312x$, với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp A được xác định bằng hàm số $f(x) = TR - TC$, cực đại lợi nhuận của xí nghiệp A khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Trả lời: 52

Xét hàm số:

$$f(x) = TR - TC = -2x^2 + 1312x - (x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000).$$

$$f(x) = -x^3 + 75x^2 + 312x - 40000.$$

TXĐ: $D = (0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(x) = -3x^2 + 150x + 312 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 52 (N) \\ x = -2 (L) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	52	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	-4000	74416	$-\infty$

Hàm số đạt giá trị cực đại $y_{CD} = 74416$ tại $x = 52$.

Vậy lợi nhuận của công ty đạt cực đại khi số sản phẩm $x = 52$.

Câu 5: Hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; a)$ có độ dài lớn nhất. Khi đó a bằng?

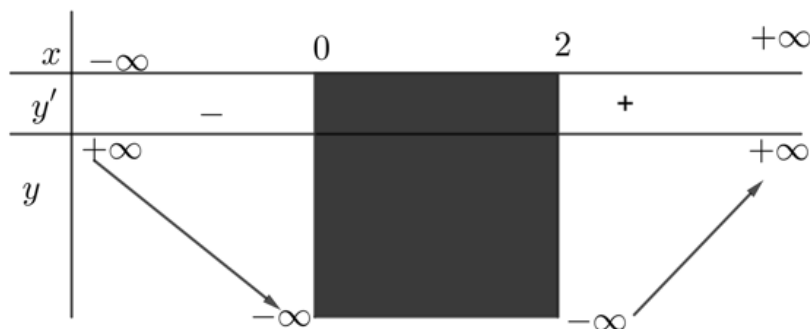
Lời giải

Trả lời: 0

Hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x)$ có tập xác định $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Ta có $y' = \frac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 3}$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

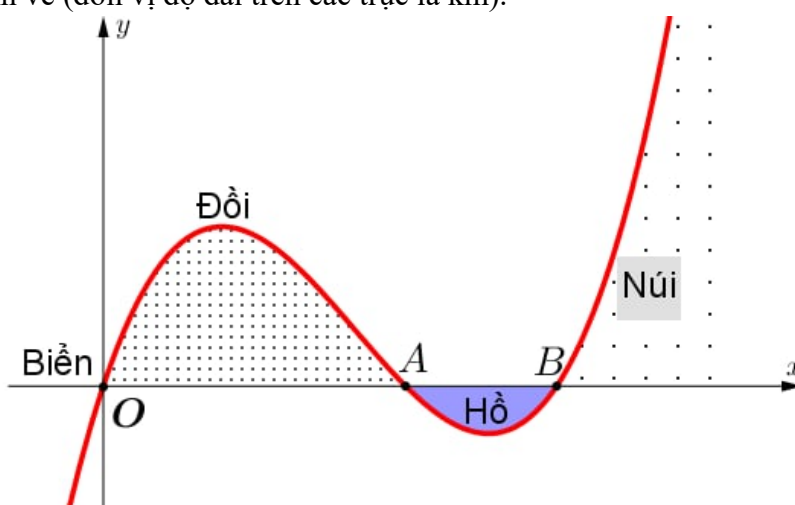
Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số y nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Vậy $a = 0$.

Câu 6: Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hoá thành một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là km).



Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OA = 2$ km, độ rộng của hồ $AB = 1$ km và ngọn đồi cao 528 m. Tìm độ sâu của hồ (tính bằng mét) tại điểm sâu nhất? (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời : 158

Theo đề bài ta có : $OA = 2$ km, $OB = 3$ km và $528 \text{ m} = 0,528 \text{ km}$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $C(3; 0)$ suy ra

$$y = f(x) = ax(x-2)(x-3) = a(x^3 - 5x^2 + 6x) \text{ với } a > 0.$$

$$\text{Ta có : } y' = a(3x^2 - 10x + 6), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{7}}{3} \\ x = \frac{5 - \sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

Từ độ cao của đồi ta có tại vị trí điểm cực đại $x_{CB} = \frac{5 - \sqrt{7}}{3}$; $y_{CB} = 0,528$ suy ra

$$a = \frac{0,528}{\left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right)} \approx 0,25.$$

Điểm sâu nhất của hồ ứng với vị trí của điểm cực tiểu $x_{CT} = \frac{5+\sqrt{7}}{3}$, $y_{CT} \approx 0,1578$.

Vậy độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất xấp xỉ 0,1578 km hay xấp xỉ 158 m.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

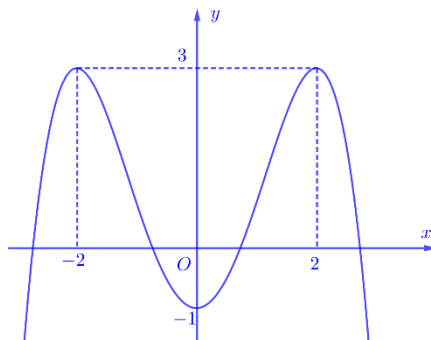
BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên \mathbb{R} .
- B. Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên \mathbb{R} .
- C. Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên \mathbb{R} .
- D. Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên \mathbb{R} .

Câu 2: Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

- A. $x = -1$.
- B. $x = 0$.
- C. $x = 2$.
- D. $A(0; -1)$.

Câu 3: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

- A. $y = \frac{2x+1}{x-3}$.
- B. $y = -x^3 + 2x^2 - 15x - 1$.
- C. $y = -2x^2 + 1$.
- D. $y = x^3 - 2x^2 + 2024x + 5$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1;1)$. B. $(4;+\infty)$. C. $(-\infty;2)$. D. $(0;1)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+			+
y		↗ $+\infty$		↘ $-\infty$	↗ 2

Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2;+\infty)$. B. $(-2;+\infty)$. C. $(-\infty;0)$. D. $(-\infty;2)$.

Câu 6: Hàm số $y = (x^2 - 1)(3x - 2)^3$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x+2)(x+1)(x^2-1), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-1;1)$. B. $(0;+\infty)$. C. $(-\infty;-2)$. D. $(-2;-1)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		0	-	0	+
$f(x)$		↗ 8		↘ 4	↗ 10		

Giá trị cực đại của $f(x)$ là

- A. 4. B. 8. C. 10. D. -2.

Câu 9: Tính giá trị cực đại của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$.

- A. $\frac{1}{e}$. B. 1. C. e . D. 0.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		0	-	0	+
$f(x)$		↗ 4		↘ 0	↗ $+\infty$		

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0;4)$. B. $(0;2)$. C. $(-1;1)$. D. $(-\infty;-1)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 12: Biết $M(1; -5)$ là một điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$. Giá trị $f(2)$ bằng

- A. -3 . B. -21 . C. 3 . D. 15 .

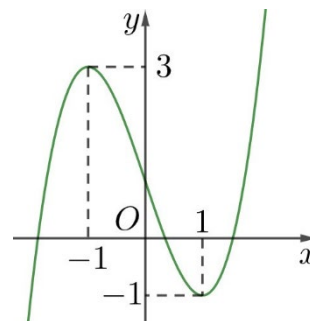
PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			2		-4		$+\infty$

- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
 b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.
 c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.
 d) Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $y = -4$.

Câu 2: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau



- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
 b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là 2.
 c) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị trái dấu.
 d) Phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $d: y = -3x$

Câu 3: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$					
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$		$+\infty$		-1		1		-1		$+\infty$

- a) Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$.
 b) Độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực tiểu là 2.
 c) Hàm số $f(2x)$ nghịch biến trên $(0; 1)$
 d) Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{x^4} [f(x) - 1]^4$ là 5.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)e^x$.

a) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.

b) Giá trị cực tiểu của hàm số là 0.

c) Hàm số $f(x^2)$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$

d) Có 2025 giá trị nguyên của tham số m trong $[-2024; 2025]$ để hàm số:

$$g(x) = f(\ln x) - mx^2 + 4mx - 2 \text{ nghịch biến trên } (e; e^{2024}).$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Biết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 1$ là $ax + by + 4 = 0$. Tính $a + 2b$.

Câu 2: Biết đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị $A(1; -7)$, $B(2; -8)$. Tính $y(-1)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2, (a; b; c \in \mathbb{R})$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	0	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

Có bao nhiêu số dương trong các số $a; b; c$?

Câu 4: Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải (**Hình 1**). Giả sử vị trí $s(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã

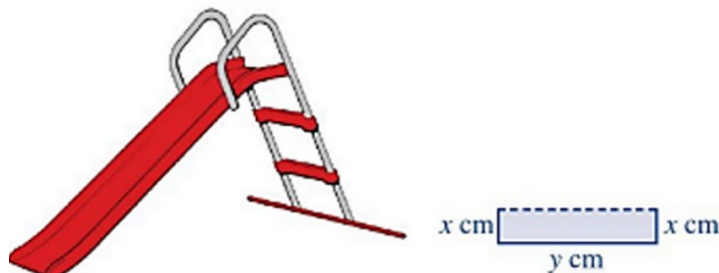
chọn tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t, t \geq 0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị t

nguyên để chất điểm chuyển động sang trái?



Hình 1

Câu 5: Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở Hình 2. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



Hình 2

Gọi S là diện tích mặt cắt. Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?

Câu 6: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0$

trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ là biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất? (quy tròn đến hàng phần trăm).

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} . Mệnh đề nào sau đây đúng?

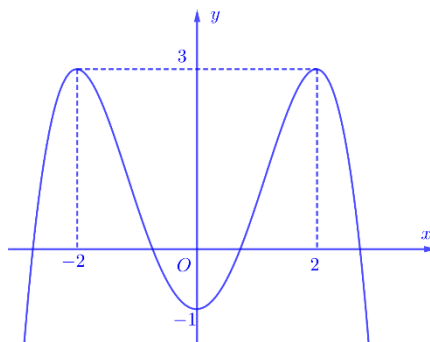
- A. Nếu $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên \mathbb{R} .
- B. Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên \mathbb{R} .**
- C. Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên \mathbb{R} .
- D. Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên \mathbb{R} .

Lời giải

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên \mathbb{R} khi $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

+) Với $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên \mathbb{R} ; Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì hàm số $f(x)$ là hàm hằng trên \mathbb{R} ; Nếu $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì chưa xác định được hàm số $f(x)$ đồng biến hay nghịch biến trên \mathbb{R} .

Câu 2: Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

- A. $x = -1$.
- B. $x = 0$.
- C. $x = 2$.
- D. $A(0; -1)$.**

Câu 3: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

- A. $y = \frac{2x+1}{x-3}$.
- B. $y = -x^3 + 2x^2 - 15x - 1$.**
- C. $y = -2x^2 + 1$.
- D. $y = x^3 - 2x^2 + 2024x + 5$.

Lời giải

Hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 15x - 1$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -3x^2 + 4x - 15 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{vì} \quad \begin{cases} a = -3 < 0 \\ \Delta' = 4 - (-3) \cdot (-15) = -41 < 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 15x - 1$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

Lưu ý: Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-3}$ có $y' = \frac{-7}{(x-3)^2} < 0, \forall x \neq 3$ nên hàm số này nghịch biến trên từng

khoảng xác định của nó.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$-\infty$	4	$+\infty$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1;1)$. B. $(4;+\infty)$. C. $(-\infty;2)$. D. $(0;1)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(0;1)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		$+$	$+$
y	2	$+\infty$	2

Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2;+\infty)$. B. $(-2;+\infty)$. C. $(-\infty;0)$. D. $(-\infty;2)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên của hàm số ta có hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$ do vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 6: Hàm số $y = (x^2 - 1)(3x - 2)^3$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

$y' = (3x - 2)^2 (15x^2 - 4x - 9)$ vì $(3x - 2)^2 \geq 0, \forall x \in R$ nên dấu của y' là dấu của biểu thức $15x^2 - 4x - 9$

$$15x^2 - 4x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 - \sqrt{139}}{15} \\ x = \frac{2 + \sqrt{139}}{15} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{2 - \sqrt{139}}{15}$	$\frac{2 + \sqrt{139}}{15}$	$+\infty$
y'	$+$	0	0	$+$
y	$-\infty$			$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra hàm số có 1 điểm cực đại

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x+2)(x+1)(x^2-1), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(-2; -1)$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu của đạo hàm:

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		8		4		10

Giá trị cực đại của $f(x)$ là

- A. 4. B. 8. C. 10. D. -2.

Lời giải:

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ bằng 8.

Câu 9: Tính giá trị cực đại của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$.

- A. $\frac{1}{e}$. B. 1. C. e . D. 0.

Lời giải:

+) Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

+) $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$. Ta có BBT:

x	0		e		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$		$\frac{1}{e}$		0

+) Dựa vào BBT, hàm số có giá trị cực đại $y = \frac{1}{e}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		4		0		$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0;4)$. B. $(0;2)$. C. $(-1;1)$. D. $(-\infty;-1)$.

Lời giải:

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Lời giải

Vì hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $f'(x)$ đổi dấu 3 lần nên hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 12: Biết $M(1;-5)$ là một điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$. Giá trị $f(2)$ bằng

- A. -3 . B. -21 . C. 3. D. 15.

Lời giải

Ta có:

$$y = f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

Vì $M(1;-5)$ là một điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \end{cases} \text{ (thử lại thỏa yêu cầu)}$$

$$\text{Vậy } f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \Rightarrow f(2) = 3.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		2		-4		$+\infty$

- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
 b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.
 c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.

d) Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $y = -4$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

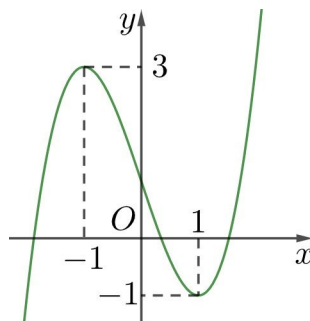
a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(3; +\infty)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

d) Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $y = -4$.

Câu 2: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau



Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là 2.

c) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị trái dấu.

d) Phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $d : y = -3x$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

b) Giá trị cực đại là $y = 3$, giá trị cực tiểu là $y = -1$. Do đó tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là $3 - 1 = 2$.

c) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị là $x = \pm 1$.

d) Gọi $d : y = ax + b$ là đường thẳng qua hai điểm cực trị $A(-1; 3), B(1; -1)$.

$$A, B \in d \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow d : y = -2x + 1$$

Câu 3: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	1	-1	$+\infty$

a) Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$.

b) Độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực tiểu là 2.

c) Hàm số $f(2x)$ nghịch biến trên $(0; 1)$

d) Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{x^4}[f(x)-1]^4$ là 5.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai. Vì hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

b) Đúng.

Ta có: hai điểm cực tiểu lần lượt có tọa độ $(-1;-1)$ và $(1;-1)$.

Do đó độ dài nối 2 điểm cực tiểu là $\sqrt{(1+1)^2 + (-1+1)^2} = 2$.

c) Sai.

Ta có: $[f(2x)]' = 2f'(2x)$

$$[f(2x)]' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Do đó, hàm số đồng biến trên $(\frac{1}{2};1)$.

d) Đúng.

Giả sử $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Từ $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(\pm 1) = 0 \\ f(\pm 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases}$. Suy ra $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

Khi đó $y = \frac{1}{x^4}[2x^4 - 4x^2 + 1]^4 = 2^4 x^4 (x^2 - 2)^4$. Có $y' = 2^4 \cdot 4 \cdot x^3 \cdot (x^2 - 2)^3 \cdot (3x^2 - 2)$.

Và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (nghiệm bội lẻ); $x = \pm\sqrt{2}$ (nghiệm bội lẻ); $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Do đó, hàm số y có 5 cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)e^x$.

a) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

b) Giá trị cực tiểu của hàm số là 0.

c) Hàm số $f(x^2)$ đồng biến trên $(-1;+\infty)$

d) Có 2025 giá trị nguyên của tham số m trong $[-2024;2025]$ để hàm số:

$g(x) = f(\ln x) - mx^2 + 4mx - 2$ nghịch biến trên $(e;e^{2024})$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Đúng.

b) Sai. Vì không đủ cơ sở để xác định hàm số $f(x)$ nên không xác định được giá trị cực tiểu.

c) Sai.

Ta có: $\left[f(x^2) \right]' = 2xf'(x^2) = 2x(x^2 + 1)e^{x^2}$

$\left[f(x^2) \right]' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Do đó, hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$.

d) Sai.

Ta có $g'(x) = \frac{1}{x} f'(\ln x) - 2mx + 4m = \frac{1}{x}(\ln x + 1)e^{\ln x} - 2mx + 4m = \ln x + 1 - 2mx + 4m$

Hàm số nghịch biến trong khoảng $(e; e^{2024})$ khi và chỉ khi $\ln x + 1 - mx + 4m \leq 0, \forall x \in (e; e^{2024})$


$$\Leftrightarrow 2m \geq \frac{\ln x + 1}{x - 2}, \forall x \in (e; e^{2024}).$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x - 2}, x \in (e; e^{2024})$

Ta có $g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x - 1}{(x-2)^2} = \frac{1 - x \ln x}{x(x-2)^2}, x \in (e; e^{2024})$

$$g'(x) < 0, \forall x \in (e; e^{2024})$$

Bảng biến thiên:

x	e	e^{2024}
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$\frac{2}{e-2}$	

Quan sát bảng biến thiên ta có $2m \geq \frac{2}{e-2} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{e-2} \Rightarrow m \geq 2$.

Do $m \in [-2024; 2025], m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{2; 3; \dots; 2025\}$.

Vậy có 2024 giá trị nguyên của tham số m .

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Biết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 1$ là $ax + by + 4 = 0$. Tính $a + 2b$.

Lời giải:

Trả lời: 6

Tập xác định \mathbb{R}

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 9$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

BBT:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		
$f(x)$	$+\infty$			-4		28		$-\infty$

Do đó đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(-1; -4)$ và $B(3; 28)$.

Suy ra đường thẳng AB có phương trình $8x - y + 4 = 0 \rightarrow a = 8; b = -1$.

Câu 2: Biết đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị $A(1; -7)$, $B(2; -8)$. Tính $y(-1)$.

Lời giải

Trả lời: -35

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$\text{Theo bài cho ta có: } \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ a + b + c + d = -7 \\ 8a + 4b + 2c + d = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ 7a + 3b + c = -1 \\ d = -7 - a - b - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -9 \\ c = 12 \\ d = -12 \end{cases}$$

Suy ra: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 12$. Do đó, $y(-1) = -35$.

Câu 3: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2, (a; b; c \in \mathbb{R})$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	0	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

Có bao nhiêu số dương trong các số $a; b; c$?

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$\text{Phương trình } y' = 0 \text{ có hai nghiệm } x_1 < x_2 < 0 \text{ nên } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} < 0 \quad (1) \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \quad (2) \end{cases}$$

Từ (1); (2) suy ra $a; b; c$ cùng dấu. Hơn nữa $y'(0) = c > 0$ nên $a > 0; b > 0; c > 0$.

Câu 4: Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải (**Hình 1**). Giả sử vị trí $s(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t, t \geq 0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị t nguyên để chất điểm chuyển động sang trái?



Hình 1

Lời giải

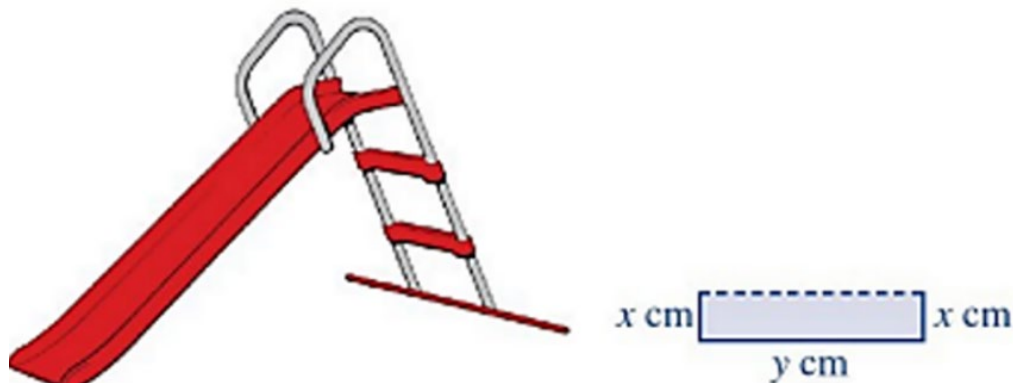
Trả lời: 3

Ta có: Vận tốc $v(t) = s'(t) = (t^3 - 9t^2 + 15t)' = 3t^2 - 18t + 15$

Chất điểm chuyển động theo chiều âm (sang bên trái) khi $v(t) < 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 18t + 15 < 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-5) < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 5$

Do $t \in \mathbb{Z}$ nên $t \in \{2, 3, 4\}$

Câu 5: Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở Hình 2. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



Hình 2

Gọi S là diện tích mặt cắt. Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?

Lời giải

Trả lời: 20

Do tấm kim loại có bề rộng 80 cm nên ta có: $2x + y = 80 \Leftrightarrow y = 80 - 2x$.

Để có thể thiết kế được máng trượt thì $y > 0 \Leftrightarrow 80 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 40$. Suy ra $0 < x < 40$.

Diện tích của mặt cắt máng trượt là: $S = xy = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x$.

Ta có: $S(x) = -2x^2 + 80x$ với $x \in (0; 40)$;

$$S'(x) = -4x + 80;$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = 20.$$

Bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ như sau:

x	0	20	40		
$S'(x)$		+	0	-	
$S(x)$	0	↗	800	↘	0

Do đó, hàm số $S(x)$ đạt cực đại tại $x = 20$ và $S_{CD} = 800$.

Vậy để cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em thì $x = 20$ (cm).

Câu 6: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0$

trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ là biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất? (quy tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải:

Trả lời: 1,61

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{-5000(1+5e^{-t})'}{(1+5e^{-t})^2} = \frac{25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^2}$$

Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

$$\text{Đặt } h(t) = \frac{25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^2}.$$

$$h'(t) = \frac{-25000e^{-t}(1+5e^{-t})^2 - 2 \cdot (-5e^{-t}) \cdot (1+5e^{-t}) \cdot 25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^4}$$

$$= \frac{-25000e^{-t}(1+5e^{-t})(1+5e^{-t}-10e^{-t})}{(1+5e^{-t})^4} = \frac{-25000e^{-t}(1-5e^{-t})}{(1+5e^{-t})^3}$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-25000e^{-t}(1-5e^{-t})}{(1+5e^{-t})^3} = 0 \Leftrightarrow 1-5e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = \ln 5 (\text{tm})$$

Ta có bảng biến thiên với $t \in [0; +\infty)$:

t	0	ln5	$+\infty$
$h'(t)$		0	
$h(t)$		1250	
	$\frac{6250}{9}$		0

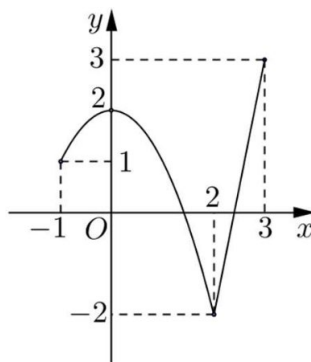
Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5 \approx 1,61$ năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 2: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ ĐỀ TEST 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;2]$ bằng



- A. 3. B. 1. C. -2. D. 2.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-1;2]$. Giá trị của $M + m$ bằng bao nhiêu?

x	-3	-1	0	1	2
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$		3		2	
	-2		0		1

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

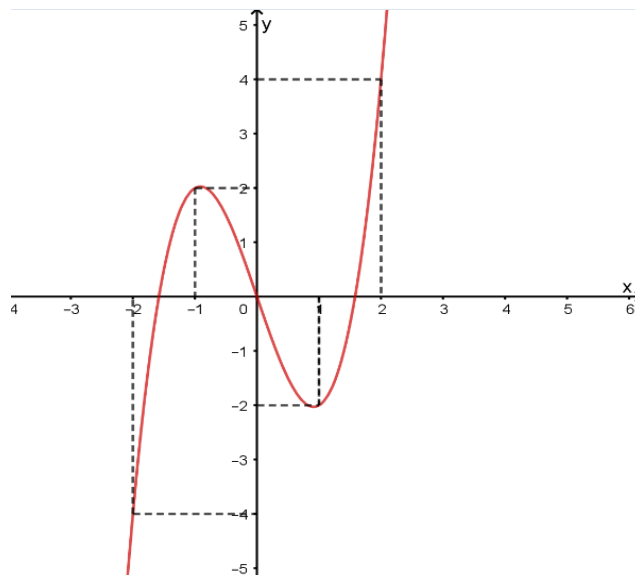
Câu 3: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2;4]$. Khi đó:

- A. $m = 6$. B. $m = -2$. C. $m = -3$. D. $m = \frac{19}{3}$.

Câu 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0;2]$.

- A. $-\frac{9}{4}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. 0. D. 5.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ sau:
 Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:



- A. $\min_{[-2; 2]} f(x) = -4$.
- B. $\min_{[-2; 2]} f(x) = 1$.
- C. $\min_{[-2; 2]} f(x) = 2$.
- D. $\min_{[-2; 2]} f(x) = -2$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

- A. 1.
- B. 3.
- C. 0.
- D. 2.

Câu 7: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{40}x^2(30 - x)$ trên nửa khoảng $(0; +\infty)$

- A. 20.
- B. 24.
- C. 25.
- D. 30.

Câu 8: Cho hàm số $y = 2^x - 4x \ln 2$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 4]$ có dạng $a - b \ln c$. Tính $a + b + c$?

- A. -2.
- B. 14.
- C. 34.
- D. 0.

Câu 9: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$. Giá trị của $M - m$ là

- A. $e - \ln 2 - \frac{1}{2}$.
- B. $e - 1$.
- C. $\ln 2 - \frac{1}{2}$.
- D. $e - 2$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Hàm số có GTLN là 2.
- B. Hàm số có GTNN là 0.
- C. Hàm số đạt GTLN tại $x = 2$.
- D. Hàm số đạt GTNN tại $x = \pm 2$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x) = x - 5 + \frac{1}{x}$, xét trên khoảng $(0; +\infty)$ giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng

- A. 0.
- B. -3.
- C. 4.
- D. -4.

Câu 12: Để hàm số $y = -x^4 + 6x^2 + m$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-1; 1]$ bằng 5 thì giá trị của tham số m bằng

- A. 0.
- B. 5.
- C. -5.
- D. 1.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + \frac{500}{x}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.		
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.		
c)	Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; 5)$ là 150.		
d)	Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ là 150.		

Câu 2: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000.

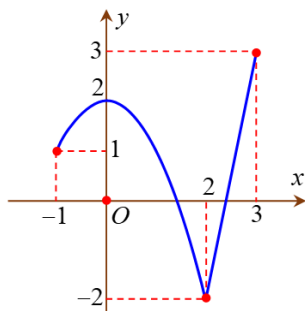
Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Nếu cơ sở bán mỗi chiếc khăn với giá 37000 (đồng) thì số tiền lãi sau 1 tháng là 44 (triệu đồng).		
b)	Sau khi cơ sở tăng giá mỗi chiếc khăn thêm x (nghìn đồng) thì tổng số lợi nhuận một tháng của cơ sở được tính theo công thức $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.		
c)	Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc.		
d)	Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39000 đồng.		

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$		5		2		3		$-\infty$

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 5$.		
b)	$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2$.		
c)	Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1; 1]$ là 7		
d)	$\max_{x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(\sin x) = 5$.		

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$\max_{x \in [-1;3]} f(x) = f(3)$.		
b)	$\min_{x \in [-1;3]} f(x) = -2$.		
c)	Tập giá trị của hàm số $f(x)$ trên $[-1;2]$ là $[-2;3]$		
d)	$\max_{x \in \mathbb{R}} f(3 \sin^2 x - 1) = 2$.		

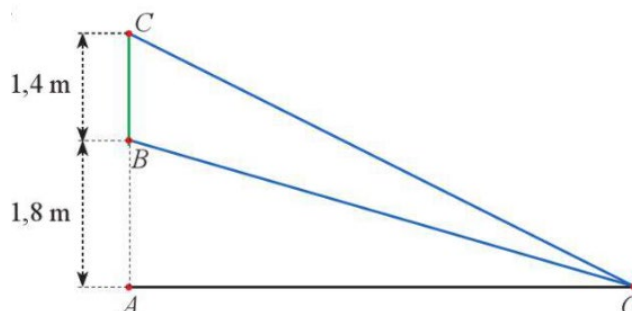
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $[\frac{1}{2}; 2]$ là...

Câu 2: Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$ là... (làm tròn đến hàng trăm)

Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin x + \cos 2x$ trên $[0; \pi]$ là ...

Câu 4: Một màn hình BC có chiều cao $1,4m$ được đặt thẳng đứng và mép dưới của màn hình cách mặt đất một khoảng $BA = 1,8m$. Một chiếc đèn quan sát màn hình được đặt ở vị trí O trên mặt đất. Hãy xác định khoảng cách AO sao cho góc quan sát BOC là lớn nhất.



Câu 5: Một ông nông dân có 240 m hàng rào và muốn rào lại cánh đồng hình chữ nhật tiếp giáp với một con sông. Ông không cần rào cho phía giáp bờ sông. Hỏi ông có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là

Câu 6: Anh Hà dự định làm một cái thùng đựng dầu hình trụ bằng sắt có nắp đậy thể tích $10 m^3$. Chi phí làm mỗi m^2 đáy là 400 ngàn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 ngàn đồng, mỗi m^2 mặt xung quanh là 300 ngàn đồng. Để chi phí làm thùng là ít nhất thì anh Hà cần chọn chiều cao của thùng là bao nhiêu? (Xem độ dày của tấm sắt làm thùng là không đáng kể, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

-----HẾT-----

Tính $y'(2) = 7$; $y'(4) = \frac{19}{3}$; $y'(3) = 6$.

Suy ra $m = 6$.

Sử dụng Casio

Nhập MODE 7. $f(X) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

Start? 2 End? 4 Step? $\frac{1}{9}$. Kết luận.

Câu 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $-\frac{9}{4}$.

B. $-\frac{3}{2}$.

C. 0.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

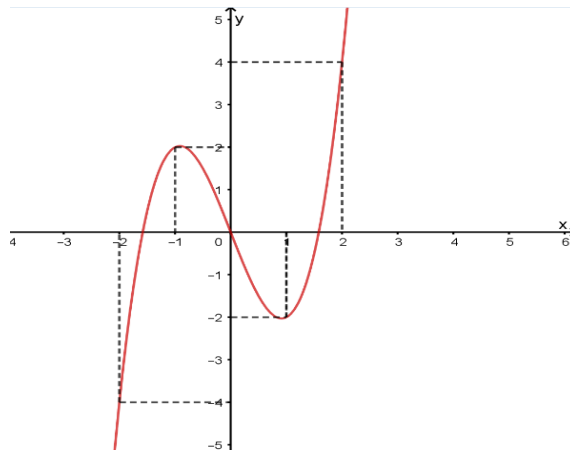
$$f'(x) = 2x - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$f(0) = 0; f(2) = -2; f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\frac{9}{4}$ khi $x = \frac{3}{2}$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ sau:



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $\min_{[-2; 2]} f(x) = -4$.

B. $\min_{[-2; 2]} f(x) = 1$.

C. $\min_{[-2; 2]} f(x) = 2$.

D. $\min_{[-2; 2]} f(x) = -2$.

Lời giải

Quan sát đồ thị trên đoạn $[-2; 2]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ là -4 .

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗ 3	↘ 0	$+\infty$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

- A. 1. **B. 3.** C. 0. D. 2.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên đoạn $[0; 2]$ giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ bằng 3.

Câu 7: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{40}x^2(30-x)$ trên nửa khoảng $(0; +\infty)$

- A. 20. B. 24. C. 25. D. 30.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) = -\frac{1}{40}x^3 + \frac{3}{4}x^2$$

$$f'(x) = -\frac{3}{40}x^2 + \frac{3}{2}x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{40}x^2 + \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(l) \\ x = 20(n) \end{cases}$$

Bảng biến thiên.

x	0	20	$+\infty$
y'	+	0	-
y		25	

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 25 khi $x = 20$

Câu 8: Cho hàm số $y = 2^x - 4x \ln 2$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 4]$ có dạng $a - b \ln c$. Tính $a + b + c$?

- A. -2. **B. 14.** C. 34. D. 0.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 2^x \ln 2 - 4 \ln 2$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow 2^x \ln 2 - 4 \ln 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	0	2	4
y'	-	0	+
y	1	$4 - 8 \ln 2$	$16 - 16 \ln 2$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 4]$ bằng $4 - 8 \ln 2$ tại $x = 2$.

Khi đó: $a + b + c = 4 + 8 + 2 = 14$.

Câu 9: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$. Giá trị của $M - m$ là:

- A. $e - \ln 2 - \frac{1}{2}$. B. $e - 1$. C. $\ln 2 - \frac{1}{2}$. D. $e - 2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = (0; +\infty)$

Ta có $y' = 1 - \frac{1}{x}$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; e\right]$

Xét $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln 2$, $y(1) = 1$, $y(e) = e - 1$

Do đó $m = \min_{\left[\frac{1}{2}; e\right]} y = 1$ và $M = \max_{\left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e - 1$

Suy ra $M - m = e - 1 - 1 = e - 2$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Hàm số có GTLN là 2. B. Hàm số có GTNN là 0.
C. Hàm số đạt GTLN tại $x = 2$. D. Hàm số đạt GTNN tại $x = \pm 2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = [-2; 2]$.

Ta có:

$$+ y' = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$+ y(0) = 2; y(\pm 2) = 0.$$

Vậy $\max_D y = y(0) = 2$; $\min_D y = y(\pm 2) = 0$. Vậy khẳng định C là **sai**.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x) = x - 5 + \frac{1}{x}$, xét trên khoảng $(0; +\infty)$ giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng

- A. 0. **B. -3.** C. 4. D. -4.

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = x - 5 + \frac{1}{x}$ luôn xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \notin (0; +\infty) \end{cases}$$

BBT của hàm số $y = f(x) = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

x	0	1	$+\infty$
y'		-	0
			+
y	$+\infty$		$+\infty$

↘ -3 ↗

Vậy $\min_{(0;+\infty)} y = y(1) = -3$.

Câu 12: Để hàm số $y = -x^4 + 6x^2 + m$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-1;1]$ bằng 5 thì giá trị của tham số m bằng

A. 0.

B. 5.

C. -5.

D. 1.

Lời giải

Ta có:

$$+ y' = -4x^3 + 12x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1;1] \\ x = \sqrt{3} \notin [-1;1] \\ x = -\sqrt{3} \notin [-1;1] \end{cases};$$

$$+ y(0) = m; y(\pm 1) = m + 5;$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1;1]} y = y(\pm 1) = m + 5 = 5 \Leftrightarrow m = 0.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + \frac{500}{x}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0;5)$ là 150.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0;+\infty)$ là 150.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

$$f'(x) = 4x - \frac{500}{x^2} = \frac{4x^3 - 500}{x^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 500 = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Bảng biến thiên.

x	0	5	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	150	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(0;+\infty)$ là 150 khi $x = 5$.

Câu 2: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000.

a) Nếu cơ sở bán mỗi chiếc khăn với giá 37000 (đồng) thì số tiền lãi sau 1 tháng là 44 (triệu đồng).

b) Sau khi cơ sở tăng giá mỗi chiếc khăn thêm x (nghìn đồng) thì tổng số lợi nhuận một tháng của cơ sở được tính theo công thức $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

c) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc.

d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39000 đồng.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm $100x$ chiếc.

Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000 - 100x$ chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12 + x$ (nghìn đồng).

Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:

$$f(x) = (3000 - 100x)(12 + x) \text{ (nghìn đồng).}$$

Xét hàm số $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.

$$f'(x) = -200x + 1800$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -200x + 1800 = 0 \Leftrightarrow x = 9$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x = 9$

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+	-
$f(x)$	$-\infty$	↗ 5 ↘	↘ 2 ↗	↗ 3 ↘	$-\infty$

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 5$.		
b)	$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2$.		
c)	Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1; 1]$ là 7		
d)	$\max_{x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(\sin x) = 5$.		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Trên \mathbb{R} , hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5.

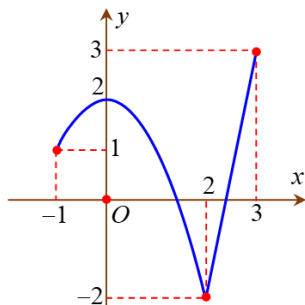
b) Trên \mathbb{R} , hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

c) Trên $[-1;1]$, hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5, giá trị nhỏ nhất bằng 2. Do đó tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1;1]$ là 7

d) Ta có: $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] : \sin x \in [0;1] \longrightarrow \max_{x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(\sin x) = 3.$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$\max_{x \in [-1;3]} f(x) = f(3).$		
b)	$\min_{x \in [-1;3]} f(x) = -2.$		
c)	Tập giá trị của hàm số $f(x)$ trên $[-1;2]$ là $[-2;3]$		
d)	$\max_{x \in \mathbb{R}} f(3 \sin^2 x - 1) = 2.$		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

a) Ta có: $\max_{x \in [-1;3]} f(x) = 3 = f(3).$

b) Ta có: $\min_{x \in [-1;3]} f(x) = -2.$

c) Trên đoạn $[-1;2]$, giá trị lớn nhất của hàm số là 2, giá trị nhỏ nhất là -2 . Do đó tập giá trị của hàm số $f(x)$ trên $[-1;2]$ là $[-2;2]$

d) Đặt $t = 3 \sin^2 x - 1 \Rightarrow t \in [-1;2].$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3 \sin^2 x - 1)$ là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(t)$ trên $[-1;2]$

Dựa vào đồ thị ta có: $\max_{\mathbb{R}} y = \max_{[-1;2]} f(t) = 2.$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ là

Lời giải

Trả lời: 3

Hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

Đặt $y = f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

Ta có $y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$, $y' = 0 \Rightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 2 \right]$.

Khi đó $f(1) = 3, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4}, f(2) = 5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $m = \min_{\left[\frac{1}{2}; 2 \right]} f(x) = f(1) = 3$.

Câu 2: Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$ là... (làm tròn đến hàng trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,37

- Hàm số $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$

Ta có: $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Khi đó, trên khoảng $(1; 4)$, $g'(x) = 0$ khi $x = e$.

$$g(1) = 0, g(e) = \frac{1}{e}, g(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}.$$

Vậy $\max_{[1;4]} g(x) = \frac{1}{e}, \min_{[1;4]} g(x) = 0 \Rightarrow \max_{[1;4]} g(x) + \min_{[1;4]} g(x) = \frac{1}{e} \approx 0,37$.

Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin x + \cos 2x$ trên $[0; \pi]$ là ...

Lời giải

Trả lời: 1,125

Hàm số $f(x) = \sin x + \cos 2x$ liên tục trên $[0; \pi]$

$$f(x) = \sin x + \cos 2x = \sin x + 1 - 2\sin^2 x$$

Đặt $\sin x = t$. Vì $x \in [0; \pi]$ nên $t \in [0; 1]$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $h(t) = -2t^2 + t + 1$ trên $[0; 1]$

Hàm số $h(t) = -2t^2 + t + 1$ liên tục trên $[0; 1]$

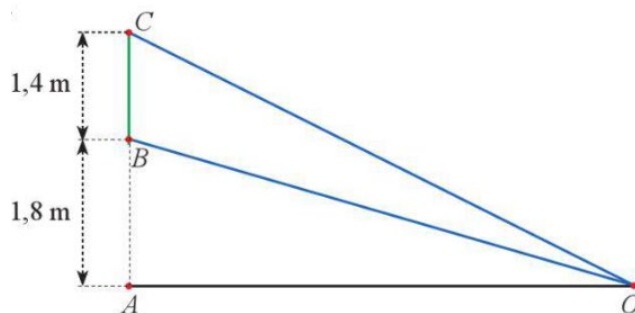
$$h(t) = -2t^2 + t + 1, h'(t) = -4t + 1$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

$$h(0) = 1, h(1) = 0, h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}$$

Vậy $\max_{[0;1]} h(t) = \frac{9}{8}$.

Câu 4: Một màn hình BC có chiều cao $1,4m$ được đặt thẳng đứng và mép dưới của màn hình cách mặt đất một khoảng $BA = 1,8m$. Một chiếc đèn quan sát màn hình được đặt ở vị trí O trên mặt đất. Hãy xác định khoảng cách AO sao cho góc quan sát BOC là lớn nhất.



Lời giải

Trả lời: 2,4.

Đặt $OA = x$ (m) với $x > 0$

$$\text{Ta có: } \tan \widehat{BOC} = \tan(\widehat{AOC} - \widehat{AOB}) = \frac{\tan \widehat{AOC} - \tan \widehat{AOB}}{1 + \tan \widehat{AOC} \cdot \tan \widehat{AOB}}$$

$$= \frac{\frac{AC}{OA} - \frac{AB}{OA}}{1 + \frac{AC \cdot AB}{OA^2}} = \frac{\frac{1,4}{x} - \frac{1,8}{x}}{1 + \frac{3,2 \cdot 1,8}{x^2}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$$

Để góc quan sát BOC lớn nhất thì $\tan \widehat{BOC}$ lớn nhất.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$ với $x > 0$.

Ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và $f'(x) = \frac{-1,4x^2 + 1,4 \cdot 5,76}{(x^2 + 5,76)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2,4$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thì ta có $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2,4$.

Vậy $AO = 2,4$ m thì góc quan sát BOC lớn nhất.

Câu 5: Một ông nông dân có 240 m hàng rào và muốn rào lại cánh đồng hình chữ nhật tiếp giáp với một con sông. Ông không cần rào cho phía giáp bờ sông. Hỏi ông có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là

Lời giải

Trả lời: 7200

Gọi hai kích thước của hình chữ nhật là x và y , với $2x + y = 240$ ($0 < x < 120; 0 < y < 240$).

Suy ra $y = 240 - 2x$

Diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật là:

$$S = xy = x(240 - 2x) = 240x - 2x^2, 0 < x < 120.$$

$$S' = 240 - 4x; S' = 0 \Leftrightarrow x = 60 \in (0; 120)$$

Bảng biến thiên

x	0	60	120	
S'		+	0	-
S	0	7200		26400

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max_{(0;120)} S = 7200 \Leftrightarrow x = 60$

Vậy ông nông dân có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là 7200 m^2 .

Câu 6: Anh Hà dự định làm một cái thùng đựng dầu hình trụ bằng sắt có nắp đậy thể tích 10 m^3 . Chi phí làm mỗi m^2 đáy là 400 ngàn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 ngàn đồng, mỗi m^2 mặt xung quanh là 300 ngàn đồng. Để chi phí làm thùng là ít nhất thì anh Hà cần chọn chiều cao của thùng là. (Xem độ dày của tấm sắt làm thùng là không đáng kể, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 2,34

Gọi bán kính đáy của hình trụ là $R, R > 0$. Ta có

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{10}{\pi R^2}.$$

Suy ra chi phí (đơn vị ngàn đồng) làm thùng

$$C = \pi R^2 \cdot 400 + \pi R^2 \cdot 200 + 2\pi R h \cdot 300$$

$$= 600 \left(\pi R^2 + \frac{10}{R} \right)$$

$$C' = 600 \left(2\pi R - \frac{10}{R^2} \right); C' = 0 \Leftrightarrow 2\pi R - \frac{10}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R^3 = \frac{5}{\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$	$+\infty$	
C'		-	0	+
C	$+\infty$	$1800\sqrt[3]{25\pi}$		$+\infty$

Dẫn đến

$$\min_{(0;+\infty)} C = 1800\sqrt[3]{25\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}.$$

Vậy để chi phí nhỏ nhất thì chiều cao của hình trụ là $h = \frac{10}{\sqrt[3]{25\pi}} \approx 2,34 \text{ m}$.

----- HẾT -----

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 2: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ ĐỀ TEST 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số trên \mathbb{R} là 5. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(x) > 5 \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $f(x) \geq 5 \forall x \in \mathbb{R}, \exists x_0, f(x_0) = 5$.

C. $f(x) < 5 \forall x \in \mathbb{R}$. **D.** $f(x) \leq 5 \forall x \in \mathbb{R}, \exists x_0, f(x_0) = 5$.

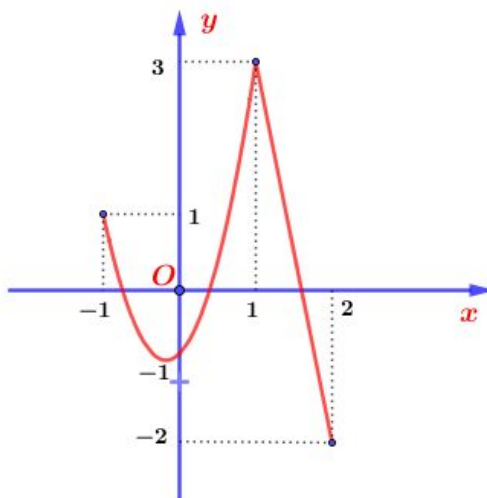
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[0; 3]$ như sau:

x	0	1	3
y	-3	-4	0

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -4.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

A. 3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2

Câu 4: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có bảng biến thiên như sau:

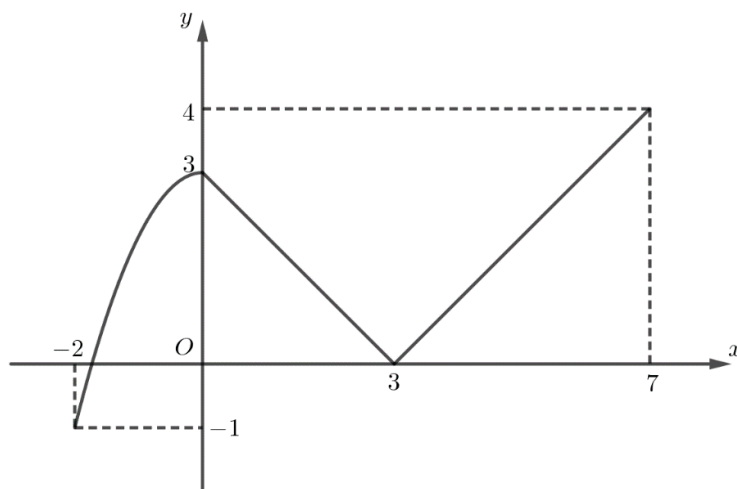
x	-1	0	2	3	
y'	+	0	-	0	+
y	0	5	1	4	

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$.

Khi đó giá trị của $M - m$ là

- A. $M - m = 5$. B. $M - m = 4$. C. $M - m = 6$. D. $M - m = 3$.

Câu 5: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình là



- A. 3. B. 7. C. -1. D. 4.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	
y	2		1		6		2

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trong khoảng $(-\infty; -2)$ là 1.
 B. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trong khoảng $(-\infty; \frac{1}{2})$ là 6.
 C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trong khoảng $(-2; \frac{1}{2})$ là 1.
 D. Hàm số $y = f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Câu 7: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$ là

- A. 1. B. 0. C. $-\frac{4}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 8: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x+1}$ trên tập xác định là

- A. 1. B. 0. C. -1. D. $\sqrt{2}$.

Câu 9: Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin 2x + 2$ trên tập xác định là

- A. 4. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	-1	0	2	3			
y'		+	0	-	0	+	
y	0		5		1		4

- A. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$. B. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3)$. C. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(2)$. D. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Câu 11: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x-3)e^{2x}$.

- A. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{e^5}{2}$. B. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{e^5}{2}$. C. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = e^5$. D. Không tồn tại.

Câu 12: Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên nửa khoảng $[1; e^2]$ lần lượt là m và M . Giá trị của biểu thức $\ln(m+M)$ bằng

- A. 1. B. -1. C. e . D. e^{-1} .

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+

- a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là $f(-1)$.
 b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$ là $f(3)$.
 c) [Giá trị lớn nhất của hàm số $h(x) = f(2x)$ trên đoạn $[-1; 1]$ là $f(-1)$.
 d) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) - 3x^2 + 6x - 5$ trên $[0; 2]$ là $f(0) - 2$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x(x-2)^2(x-3), \forall x \in \mathbb{R}$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số có ba điểm cực trị		
b)	$\min_{x \in (-\infty; 2)} f(x) = f(0)$.		
c)	$\max_{x \in [0; 4]} f(x) = f(3)$.		
d)	$\max f(e^x + e^{-x}) = f(3)$.		

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = \log_2(x^2 - 3x + 2)$

- a) Hàm số có giá trị lớn nhất trên khoảng $(2; +\infty)$.
- b) Hàm số luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 0]$.
- c) Trên đoạn $[-1; 0]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1.
- d) Gọi m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $g(x) = 2^{f(x)} + m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[3; 4]$ bằng -3 . Khi đó $m_0 \in (-5; 0)$.

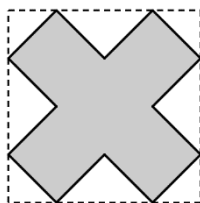
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + m^2 - 2$.

- a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng -4 khi $m = 0$.
- b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(2x)$ trên đoạn $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ bằng -4 khi $m = 0$.
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x+1)$ trên đoạn $[-3; 0]$ bằng 1 khi $m = 1$.
- d) Có 2024 giá trị của nguyên của $m \in (-2023; 2024)$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(1-3x)$ trên đoạn $[-2; 0]$ nhỏ hơn 2.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Người ta muốn sản xuất một bể nước theo dạng khối lăng trụ tứ giác đều, không có nắp trên, làm bằng kính và có thể tích là $16m^3$. Biết giá của mỗi mét vuông kính là 500 000 đồng. Tìm số tiền tối thiểu phải trả để làm bể nước trên (triệu đồng).

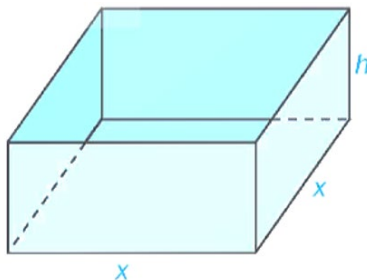
Câu 2: Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gập thành hình hộp chữ nhật không nắp. Thể tích lớn nhất của khối hộp bằng



Câu 3: Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $200m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là 350 nghìn đồng/ m^2 . Hãy xác định chi phí thấp nhất để xây bể (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Câu 4: Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông cạnh $x(cm)$, chiều cao $h(cm)$ và diện tích bề mặt bằng $108cm^2$ như hình dưới đây. Tìm chiều cao $h(cm)$ sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



Câu 5: Ông A muốn mua một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích bằng $100m^2$ để làm khu vườn. Để chi phí xây dựng bờ rào xung quanh khu vườn là ít tốn kém nhất thì ông A đã mua mảnh đất có kích thước $a(m) \times b(m)$ (với a là chiều dài, b là chiều rộng của khu vườn). Khi đó kết quả của $a + 2b$ bằng bao nhiêu?

Câu 6: Một doanh nghiệp tư nhân chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 30 triệu đồng và bán ra với giá 35 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 400 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe X đang bán, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 100 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số trên \mathbb{R} là 5. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(x) > 5 \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $f(x) \geq 5 \forall x \in \mathbb{R}, \exists x_0, f(x_0) = 5$.

C. $f(x) < 5 \forall x \in \mathbb{R}$. **D.** $f(x) \leq 5 \forall x \in \mathbb{R}, \exists x_0, f(x_0) = 5$.

Lời giải

Ta có định nghĩa giá trị nhỏ nhất của hàm số: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[0; 3]$ như sau:

x	0	1	3
y	-3	-4	0

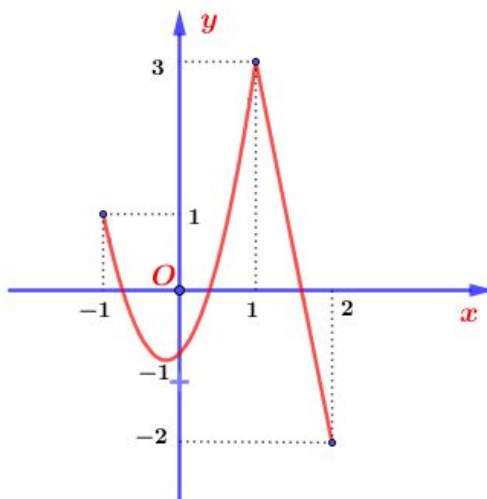
Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -4.

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ là -4 đạt khi $x = 1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

A. 3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta có giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là 3.

Câu 4: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau:

x	-1	0	2	3	
y'	+	0	-	0	+
y	0	5	1	4	

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$.

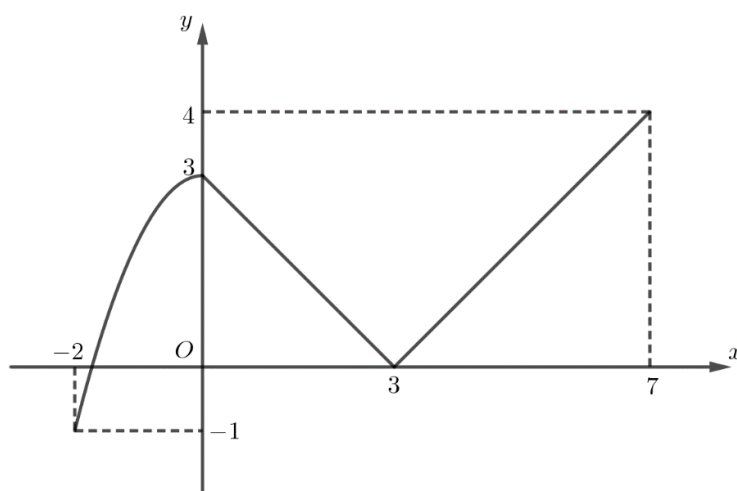
Khi đó giá trị của $M - m$ là

- A. $M - m = 5$. B. $M - m = 4$. C. $M - m = 6$. D. $M - m = 3$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có $M = 5; m = 0 \Rightarrow M - m = 5$.

Câu 5: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình là



- A. 3. B. 7. C. -1. D. 4.

Lời giải

Dựa vào đồ thị giá trị lớn nhất của hàm số là 4 khi $x = 7$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$		
y'		-	0	+	0	-
y	2	1	6	2		

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trong khoảng $(-\infty; -2)$ là 1.
 B. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trong khoảng $(-\infty; \frac{1}{2})$ là 6.
 C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trong khoảng $(-2; \frac{1}{2})$ là 1.

D. Hàm số $y = f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-2; +\infty)$

Câu 7: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$ là

- A. 1. B. 0. C. $-\frac{4}{3}$. **D. $\frac{4}{3}$.**

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}. \text{ Loại } x = -2 \text{ vì không thuộc đoạn } [0; 2].$$

$$y(0) = 0; y(2) = \frac{4}{3}. \text{ Do đó GTLN của hàm số trên đoạn } [0; 2] \text{ là } \frac{4}{3} \text{ đạt được tại } x = 2.$$

Câu 8: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x+1}$ trên tập xác định là

- A. 1. **B. 0.** C. -1. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = [-1; +\infty)$$

Ta có $\sqrt{x+1} \geq 0, \forall x \in [-1; +\infty)$ nên GTNN của hàm số đã cho là 0, đạt được khi $x = -1$.

Câu 9: Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin 2x + 2$ trên tập xác định là

- A. 4.** B. 0. C. 3. D. 1.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}$$

Ta có $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ nên suy ra $1 \leq \sin 2x + 2 \leq 3$. Do đó $y_{\max} = 3; y_{\min} = 1$ nên

$$y_{\max} + y_{\min} = 3 + 1 = 4.$$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	-1	0	2	3			
y'		+	0	-	0	+	
y			5		1		4

- A.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$. **B.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3)$. **C.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(2)$. **D.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$.

Câu 11: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x-3)e^{2x}$.

- A.** $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{e^5}{2}$. **B.** $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{e^5}{2}$. **C.** $\min_{\mathbb{R}} f(x) = e^5$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = (2x - 5)e^{2x}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+
y	0	$-\frac{e^5}{2}$	$+\infty$

Vậy $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{e^5}{2}$.

Câu 12: Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên nửa khoảng $[1; e^2]$ lần lượt là m và M . Giá trị của biểu thức $\ln(m + M)$ bằng

- A. 1. B. -1. C. e . D. e^{-1} .

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e.$$

Bảng biến thiên của hàm số trên nửa khoảng $[1; e^2]$:

x	1	e	e^2
y'	+	0	-
y	0	$\frac{1}{e}$	$\frac{2}{e^2}$

Vậy $m = \min_{[1; e^2]} f(x) = 0; M = \max_{[1; e^2]} f(x) = \frac{1}{e}$.

$$\Rightarrow \ln(m + M) = \ln \frac{1}{e} = -1.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là $f(-1)$.
 b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$ là $f(3)$.
 c) [Giá trị lớn nhất của hàm số $h(x) = f(2x)$ trên đoạn $[-1; 1]$ là $f(-1)$.
 d) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) - 3x^2 + 6x - 5$ trên $[0; 2]$ là $f(0) - 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Đúng.

Vì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-1; 2]$ nên giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$ là $f(-1) \Rightarrow$ a) Đúng.

b) Sai.

Căn cứ BXD ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ nên giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$ là $f(2) \Rightarrow$ b) Sai.

c) Sai.

$$\text{Ta có } h'(x) = 2f'(2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -1 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}.$$

BBT của hàm số $h(x) = f(2x)$ là

x	$-\frac{1}{2}$	1			
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$					

vậy giá trị lớn nhất của hàm số $h(x) = f(2x)$ trên đoạn $[-1; 1]$ là $f(-\frac{1}{2}) \Rightarrow$ c) Sai.

d) Đúng.

Ta có

$$g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x) - 6x + 6 = (2x - 2)[f'(x^2 - 2x) - 3]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } x \in [0; 2] \Rightarrow x^2 - 2x \in [-1; 0]$$

$$\text{Trên } [-1; 0], f'(x^2 - 2x) \leq 0 \Rightarrow f'(x^2 - 2x) - 3 < 0$$

Do đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có bảng biến thiên như sau

x	0	1	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $g(1) = f(-1) - 2$ tại $x = 1 \Rightarrow$ d) Đúng

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x(x-2)^2(x-3), \forall x \in \mathbb{R}$.

	Khẳng định	Đúng	Sai
a)	Hàm số có ba điểm cực trị		
b)	$\min_{x \in (-\infty; 2)} f(x) = f(0)$.		
c)	$\max_{x \in [0; 4]} f(x) = f(3)$.		
d)	$\max f(e^x + e^{-x}) = f(3)$.		

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

Ta có $f'(x) = -x(x-2)^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

BBT:

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$				$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ là $f(3)$.

d) Ta có: $e^x + e^{-x} \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} = 2 \rightarrow \max f(e^x + e^{-x}) = f(3)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = \log_2(x^2 - 3x + 2)$

a) Hàm số có giá trị lớn nhất trên khoảng $(2; +\infty)$.

b) Hàm số luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 0]$.

c) Trên đoạn $[-1; 0]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

d) Gọi m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $g(x) = 2^{f(x)} + m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[3; 4]$ bằng -3 . Khi đó $m_0 \in (-5; 0)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) SAI

Hàm số có tập xác định $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) ĐÚNG

Vì $[-1; 0] \subset D$ và hàm số liên tục trên $[-1; 0]$ nên luôn tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn này.

c) ĐÚNG

$$f(x) = \log_2(x^2 - 3x + 2) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 2)\ln 2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \notin [-1; 0].$$

$$f(-1) = \log_2 6$$

$$f(0) = 1 < \log_2 6$$

$$\text{Vậy } \min_{[-1; 0]} f(x) = 1.$$

d) SAI

TXĐ $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ chứa $[3; 4]$.

$$g(x) = 2^{f(x)} + m = 2^{\log_2(x^2 - 3x + 2)} + m = x^2 - 3x + 2 + m.$$

Có $g'(x) = 2x - 3$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin [3; 4]$. Mà hàm số đồng biến trên $[3; 4]$ nên

$$\min_{[0; 1]} g(x) = g(3) = 2 + m.$$

Theo đề ta có $2 + m = -3 \Leftrightarrow m = -5$

Vậy $m_0 = -5 \in (-5; 0)$ là sai.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + m^2 - 2$.

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng -4 khi $m = 0$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(2x)$ trên đoạn $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ bằng -4 khi $m = 0$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x+1)$ trên đoạn $[-3; 0]$ bằng 1 khi $m = 1$.

d) Có 2024 giá trị của nguyên của $m \in (-2023; 2024)$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(1-3x)$ trên đoạn $[-2; 0]$ nhỏ hơn 2.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Sai

Khi $m = 0$ ta có $y = f(x) = x^3 - 3x - 2$ có $y' = 3x^2 - 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
f'		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			0		-4	

Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0 .

b) Đúng

$$\text{Ta có } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow 2x \in [-1;1]$$

$$\text{Đặt } t = 2x, t \in [-1;1], f(t) = t^3 - 3t - 2$$

Theo câu a có giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -4 .

c) Đúng

$$x \in [-3;0] \Leftrightarrow x + 1 \in [-2;1]$$

$$\text{Đặt } t = x + 1, t \in [-2;1]; f(t) = t^3 - 3t - 1$$

$$f'(t) = 3t^2 - 3; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Ta có $f(-2) = -3; f(-1) = 1; f(1) = -3$ nên $\max_{[-3;0]} f(x+1) = 1$.

d) Sai

$$\text{Đặt } t = 1 - 3x, x \in [-2;0] \Rightarrow t \in [1;7]$$

$$f(t) = t^3 - 3t + m^2 - 2, f'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [1;7] \\ t = -1 \notin [1;7] \end{cases}$$

$$f(1) = m^2 - 4; f(7) = m^2 + 320$$

$$\min_{[-2;0]} h(x) < 2 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$$

Do $m \in (-2023; 2024), m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Vậy có 5 giá trị thỏa mãn nên câu d sai

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Người ta muốn sản xuất một bể nước theo dạng khối lăng trụ tứ giác đều, không có nắp trên, làm bằng kính và có thể tích là $16m^3$. Biết giá của mỗi mét vuông kính là 500 000 đồng. Tìm số tiền tối thiểu phải trả để làm bể nước trên (triệu đồng).

Lời giải

Trả lời: 15

Gọi cạnh đáy của bể nước có độ dài là $x(m)$ và chiều cao của bể nước là $h(m)$. Điều kiện $x, h > 0$.

$$\text{Khi đó thể tích của bể nước là } 16m^3 \text{ nên } x^2 h = 16 \Leftrightarrow h = \frac{16}{x^2}.$$

Diện tích cần để xây bể nước (bao gồm diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy) là

$$S = 4xh + x^2 = 4x \cdot \frac{16}{x^2} + x^2 = \frac{64}{x} + x^2.$$

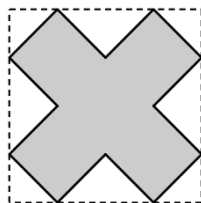
Để tìm số tiền tối thiểu, ta tìm giá trị nhỏ nhất của hàm $y = S(x)$ với $x > 0$.

Ta có $S'(x) = -\frac{64}{x^2} + 2x$. Cho $S'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 64 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{32}$.

Lập bảng biến thiên, ta dễ thấy $\min_{(0;+\infty)} S(x) = S(\sqrt[3]{32})$.

Vậy số tiền tối thiểu phải trả là $500\,000 \cdot S(\sqrt[3]{32}) \approx 15$ (triệu đồng).

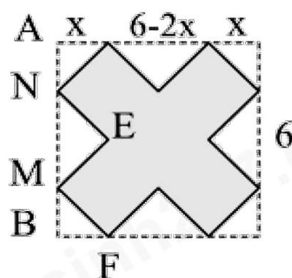
Câu 2: Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gấp thành hình hộp chữ nhật không nắp. Thể tích lớn nhất của khối hộp bằng



Lời giải

Trả lời: 11,3

Gọi cạnh hình tam giác cân bị cắt bỏ có độ dài x ($0 < x < 3$)



$$\Rightarrow AN = BM = x \Rightarrow MN = 6 - 2x$$

$$\Rightarrow EM = EN = \frac{6 - 2x}{\sqrt{2}}$$

Hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh $MF = x\sqrt{2}$,

$$\text{Có chiều cao } EN = \frac{6 - 2x}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow V = MF^2 \cdot EN = 2x^2 \cdot \frac{6 - 2x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}x^2(6 - 2x) = -2\sqrt{2}x^3 + 6\sqrt{2}x^2$$

$$\Rightarrow V' = -6\sqrt{2}x^2 + 12\sqrt{2}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\max} = V(2) = -2\sqrt{2} \cdot 2^3 + 6\sqrt{2} \cdot 2^2 = 8\sqrt{2}$$

Câu 3: Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $200\,m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là 350 nghìn đồng/ m^2 . Hãy xác định chi phí thấp nhất để xây bể (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).

Lời giải

Trả lời: 59.

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy bể là $x(m)$ suy ra chiều dài của hình chữ nhật là $2x$.

$$\text{Gọi } h \text{ là chiều cao của bể ta có } V = Sh = 2x^2 \cdot h = 200 \Rightarrow h = \frac{100}{x^2}.$$

Diện tích của bể là $S = 2h.x + 2.2hx + 2x^2 = 2x^2 + 6hx = 2x^2 + 6 \cdot \frac{100}{x^2} \cdot x = 2x^2 + \frac{600}{x}$

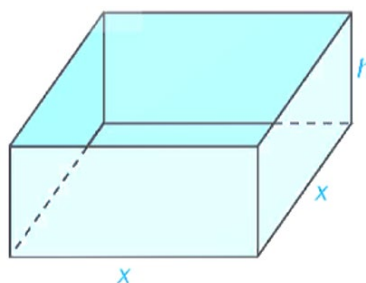
$$S' = 4x - \frac{600}{x^2}$$

$$S' = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{600}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{150}.$$

x	0	$\sqrt[3]{150}$	$+\infty$	
S'		-	0	+
S			$S(\sqrt[3]{150})$	

Suy ra chi phí thấp nhất để xây bể là $S(\sqrt[3]{150}) \cdot 350000 \approx 59$ triệu đồng.

Câu 4: Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông cạnh $x(cm)$, chiều cao $h(cm)$ và diện tích bề mặt bằng $108cm^2$ như hình dưới đây. Tìm chiều cao $h(cm)$ sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



Lời giải

Trả lời: 3.

Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là $x(cm, x > 0)$ và chiều cao là $h(cm, h > 0)$.

Diện tích bề mặt của hình hộp là $108cm^2$ nên $x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \frac{108 - x^2}{4x}$.

Thể tích của hình hộp là $V = x^2 \cdot h = x^2 \cdot \frac{108 - x^2}{4x} = \frac{108x - x^3}{4}$

$$V' = \frac{-3x^2 + 108}{4}$$

$V' = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (do $x > 0$).

x	0	6	$+\infty$	
V'		+	0	-
V	0		108	$-\infty$

Do đó, thể tích của hình hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x = 6(cm)$.

Khi đó, chiều cao của hình hộp là $h = \frac{108 - 6^2}{4 \cdot 6} = 3(cm)$.

Câu 5: Ông A muốn mua một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích bằng $100m^2$ để làm khu vườn. Để chi phí xây dựng bờ rào xung quanh khu vườn là ít tốn kém nhất thì ông A đã mua mảnh đất có kích

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

thước $a(m) \times b(m)$ (với a là chiều dài, b là chiều rộng của khu vườn). Khi đó kết quả của $a + 2b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 30.

Để chi phí xây dựng bờ rào là ít tốn kém nhất thì chu vi mảnh đất phải bé nhất.

Gọi x là chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật ($x > 0$)

Suy ra chiều rộng là $\frac{100}{x}$

Chu vi của mảnh đất hình chữ nhật là $C(x) = 2x + \frac{200}{x}$

Ta có: $C'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$

$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 200 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ (vì $x > 0$)

Bảng biến thiên

x	0	10	$+\infty$		
$C'(x)$		-	0	+	
$C(x)$	$+\infty$		\searrow	\nearrow	$+\infty$
			40		

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min_{(0;+\infty)} C(x) = C(10) = 40$

Suy ra chu vi mảnh đất hình chữ nhật bé nhất khi chiều dài bằng $10m$, chiều rộng bằng $10m$

Vậy $a + 2b = 30$.

Câu 6: Một doanh nghiệp tư nhân chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 30 triệu đồng và bán ra với giá 35 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 400 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe X đang bán, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 100 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

Lời giải

Trả lời: 34,5.

Gọi giá bán mới là x (triệu đồng) với $x \in [30; 35]$.

Khi đó số xe bán ra là $400 + (35 - x)100$.

Lợi nhuận thu được là

$$\begin{aligned} f(x) &= [400 + (35 - x)100] \cdot (x - 30) \\ &= -100x^2 + 6900x - 117000 \\ &= -100 \left(x - \frac{69}{2} \right)^2 + 2025 \leq 2025 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{69}{2}$.

Vậy giá bán mới là 34,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được cao nhất.

----- **HẾT** -----

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

ĐỀ TEST 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 3$ và $x = -3$.
- B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- D. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 3$ và $y = -3$.

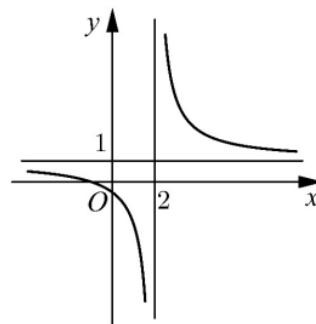
Câu 2: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{5x-16}$?

- A. $y = \frac{1}{5}$.
- B. $x = \frac{1}{5}$.
- C. $y = \frac{16}{5}$.
- D. $x = \frac{16}{5}$.

Câu 3: Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây

Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là:

- A. $y = 2$.
- B. $x = 2$.
- C. $y = 1$.
- D. $x = 1$.



Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $R \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		-	-	-	-
y	-2	$+\infty$	-1	$+\infty$	2
	$-\infty$		$-\infty$		

Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu tiệm cận ngang?

- A. 0
- B. 1.
- C. 2
- D. 4.

- Câu 5:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[2;9)$ và có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = -\infty$. Tìm khẳng định đúng.
- A.** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 9$.
- B.** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
- C.** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận.
- D.** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 9$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là:

- A.** $y = -\frac{1}{2}$. **B.** $x = -\frac{1}{2}$. **C.** $y = \frac{1}{2}$. **D.** $x = \frac{1}{2}$.

Câu 7: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 2}$ là

- A.** $x = -2$. **B.** $x = 2$. **C.** $y = 2$. **D.** $y = -\frac{1}{2}$.

Câu 8: Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng:

- A.** $y = x$. **B.** $y = x - 1$. **C.** $y = 2x - 1$ **D.** $y = x + 1$.

Câu 9: Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng

- A.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax + b) = a$.
- B.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax + b) = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x) - ax + b) = 0$
- C.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax + b) = b$.
- D.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x) - ax + b) = 0$.

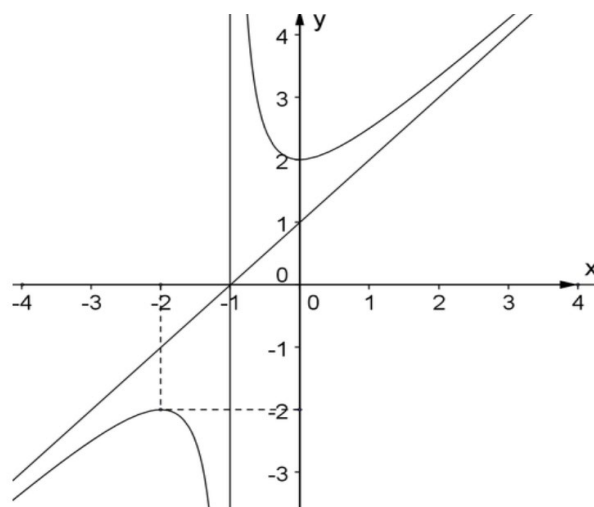
Câu 10: Cho hàm số $y = 2x - 1 + \frac{1}{x - 2}$. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là

- A.** $x = 2$. **B.** $y = x - 2$. **C.** $y = x - 1$. **D.** $y = 2x - 1$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là

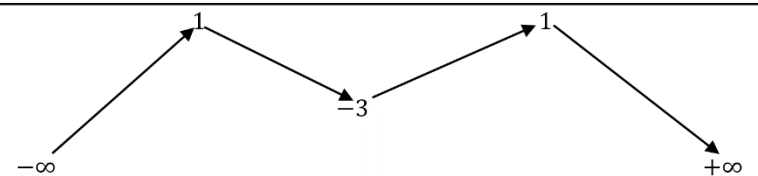
- A.** $x = 2$.
- B.** $y = x - 2$.
- C.** $y = x - 1$.
- D.** $y = x + 1$



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Gọi A, B lần lượt là giao điểm của tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ với trục Ox, Oy . Diện tích tam giác OAB bằng

Câu 2: Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$					

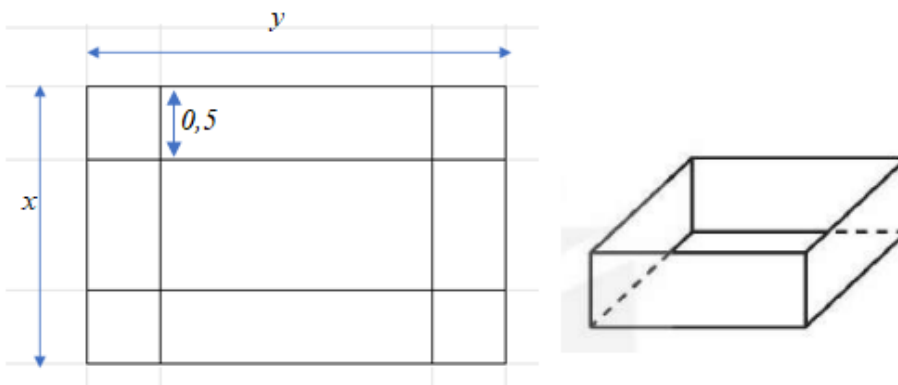
Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 4)(x - 2)}{f(x) - 1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

Câu 3: Số lượng sản phẩm bán được của một cửa hàng quần áo trong t (tháng) được cho bởi công thức:

$$S(t) = 200 \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{2+t} \right) \text{ với } t \geq 1. \text{ Xem } y = S(t) \text{ là một hàm số xác định trên nửa khoảng } [1; +\infty)$$

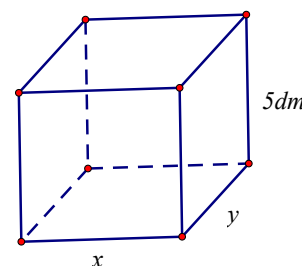
, biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có dạng $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}^*, (a, b) = 1$. Tính $P = a - 2b$

Câu 4: Từ một tấm tôn hình chữ nhật có các kích thước là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 1$ và $y > 1$ và diện tích bằng $4m^2$, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập thành một cái thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có chiều cao bằng $0,5m$. Thể tích của thùng là hàm số $V(x)$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Câu 5: Cho hàm số $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 - 3x}$. Tìm số đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Câu 6: Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng $1m^3$. Chiều cao của bể là $5dm$, các kích thước khác là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 0$ và $y > 0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.



----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 3$ và $x = -3$.
- B.** Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- C.** Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- D.** Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 3$ và $y = -3$.

Lời giải

Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chọn đáp án **D**.

Câu 2: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{5x-16}$?

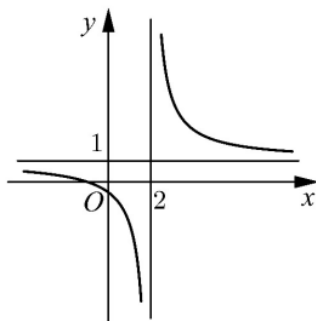
- A.** $y = \frac{1}{5}$.
- B.** $x = \frac{1}{5}$.
- C.** $y = \frac{16}{5}$.
- D.** $x = \frac{16}{5}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{16}{5} \right\}$. Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-3}{5x-16} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{5-\frac{16}{x}} = \frac{1}{5}$.

Vậy đường thẳng $y = \frac{1}{5}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 3: Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là:

- A.** $y = 2$.
- B.** $x = 2$.
- C.** $y = 1$.
- D.** $x = 1$.

Lời giải

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		-	-	-	-
y	-2	$+\infty$	-1	$+\infty$	2

Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu tiệm cận ngang?

Câu 9: Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax + b) = a$.
B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax + b) = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax + b) = 0$
 C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax + b) = b$.
 D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x) - ax + b) = 0$.

Lời giải

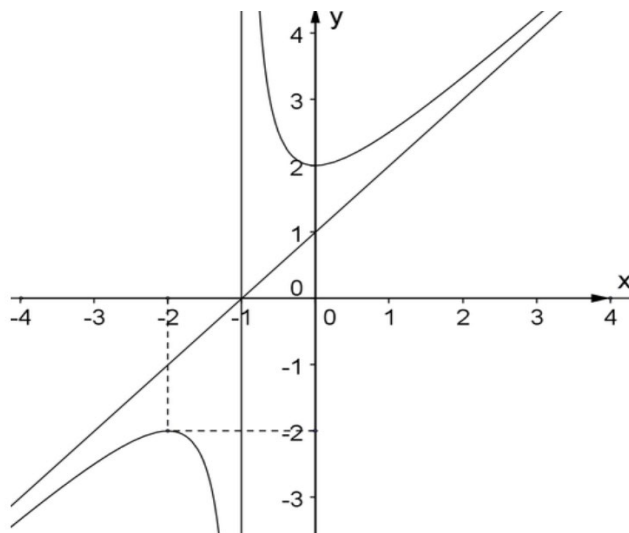
Câu 10: Cho hàm số $y = 2x - 1 + \frac{1}{x-2}$. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là

- A. $x = 2$. B. $y = x - 2$. C. $y = x - 1$. **D. $y = 2x - 1$**

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2x - 1 + \frac{1}{2x-1} - (2x-1) \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x-1} = 0$ nên đường thẳng $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là

- A. $x = 2$. B. $y = x - 2$. C. $y = x - 1$. **D. $y = x + 1$**

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 12: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$ là

- A. 0. **B. 2.** C. 1. D. 0.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-2).(2x+1)}{(x-2).(x+2)} = \frac{2x+1}{x+2}$

Do $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-2).(2x+1)}{(x-2).(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{x+2} = 2$ nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = 2$.

Do $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-2) \cdot (2x+1)}{(x-2) \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x+1}{x+2} = -\infty$ và

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-2) \cdot (2x+1)}{(x-2) \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x+1}{x+2} = -\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm

số là đường thẳng $x = -2$. Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.		
b)	Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$.		
c)	Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x - 1$.		
d)	Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cắt các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

b) Do $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

c) Ta có: $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} = x - 1 + \frac{2}{x - 1}$.

Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0 \end{cases}$ nên $\Delta: y = x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

d) Gọi $\begin{cases} \Delta \cap Ox = A(1; 0) \\ \Delta \cap Oy = B(0; -1) \end{cases}$. Lúc đó: $S_{OAB} = \frac{1}{2} |1| |-1| = \frac{1}{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng $x = 2$.

b) Đồ thị (C) nhận điểm $I(1; 1)$ làm tâm đối xứng.

c) Đường thẳng đường thẳng $d: y = x - 1$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có độ dài bằng $4\sqrt{5}$.

d) Gọi M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C). Khi đó tổng khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng $x = 2$. Vậy câu a) đúng.

b) Đồ thị (C) nhận giao điểm 2 đường tiệm cận là $x = 2$ và $y = 1$ là tâm đối xứng. Dẫn đến $I(2;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị (C). Vậy câu b) sai.

c) Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+2}{x-2} = x-1$ ($x \neq 2$) $\Leftrightarrow x+2 = (x-1)(x-2)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 4 \Rightarrow y = 3 \end{cases}. \text{ Từ đó, } A(0;-1), B(4;3). \text{ Dẫn đến } AB = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}.$$

Vậy câu c) sai.

d) Ta có $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; 1 + \frac{4}{x_0 - 2}\right)$

Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng: $d_1 = |x_0 - 2|$.

Khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang: $d_2 = |y_0 - 1| = \left|1 + \frac{4}{x_0 - 2} - 1\right| = \frac{4}{|x_0 - 2|}$.

$$d_1 + d_2 = |x_0 - 2| + \frac{4}{|x_0 - 2|} \geq 2\sqrt{|x_0 - 2| \cdot \frac{4}{|x_0 - 2|}}$$

$$\Rightarrow \min(d_1 + d_2) = 4 \Leftrightarrow |x_0 - 2| = \frac{4}{|x_0 - 2|} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 3 \\ x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1 \end{cases}. \text{ Vậy câu d) đúng.}$$

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

b) Đồ thị (C) có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.

c) Trên đồ thị (C) tồn tại đúng 4 điểm có tọa độ nguyên.

d) Giả sử đường thẳng (d_m): $y = mx - m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B đồng thời tam giác ABC vuông tại đỉnh C(-2;0). Khi đó, tổng tất cả các giá trị của tham số m tìm được bằng 9.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là $x = 1$. Vậy câu a) đúng.

b) Ta có $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} \Leftrightarrow y = x + 3 + \frac{2}{x - 1}$. Suy ra

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(x + 3 + \frac{2}{x - 1}\right) - (x + 3) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x - 1} = 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x + 3 + \frac{2}{x - 1}\right) - (x + 3) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x - 1} = 0.$$

Dẫn đến $y = x + 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C). Vậy câu b) sai.

c) $M(x; y) \in (C): y = x + 3 + \frac{2}{x - 1}$ có tọa độ nguyên khi $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 2 : (x - 1) \end{cases}$. Từ đó

$$\begin{cases} x-1=2 \\ x-1=-2 \\ x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3; y=7 \\ x=-1; y=1 \\ x=2; y=7 \\ x=0; y=1 \end{cases} . \text{ Dẫn đến đồ thị } (C) \text{ có đúng 4 điểm có tọa độ nguyên. Vậy câu c)}$$

đúng.

d) Phương trình hoành độ $mx - m = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} \ (x \neq 1) \Leftrightarrow (m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m + 1 = 0$ có

hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta' = (m + 1)^2 - (m - 1)(m + 1) > 0 \\ m - 1 - 2(m + 1) + 1 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -1 \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -1 \end{cases} . \text{ Gọi}$$

$$A(x_1; mx_1 - m), B(x_2; mx_2 - m)$$

Ta có $\overline{CA} = (x_1 + 2; mx_1 - m)$, $\overline{CB} = (x_2 + 2; mx_2 - m)$. Do tam giác ABC vuông tại C nên

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0 \Leftrightarrow (x_1 + 2) \cdot (x_2 + 2) + (mx_1 - m) \cdot (mx_2 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 + m^2 [x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m + 1}{m - 1} + 4 \cdot \frac{m + 1}{m - 1} + 4 + m^2 \left(\frac{m + 1}{m - 1} - 2 \cdot \frac{m + 1}{m - 1} + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2m^2 + 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{9 + \sqrt{89}}{4} (n) \\ m_2 = \frac{9 - \sqrt{89}}{4} (n) \end{cases} . \text{ Suy ra } m_1 + m_2 = \frac{9}{2} . \text{ Vậy câu d) sai.}$$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 6}$ có đồ thị (C) .

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$

b) Hàm số đạt cực đại tại $x = -4$.

c) Với $m = \frac{3}{8}$ thì đường thẳng (Δ) đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) vuông góc với

đường thẳng $d: (2m + 3)x + my + 2 = 0$.

d) Có 2024 giá trị nguyên của tham số $m \in [-2; 2028]$ để giá trị lớn nhất của hàm số

$h(x) = f(\cos x - \sqrt{3} \sin x + 1) + m^2$ lớn hơn 5.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) $y = \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 6}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = \frac{x^2 - 2x + 6 - (2x - 2)(x + 1)}{(x^2 - 2x + 6)^2} \Leftrightarrow y' = \frac{-x^2 - 2x + 8}{(x^2 - 2x + 6)^2}$$

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-4		2	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	0	$-\frac{1}{10}$		$\frac{1}{2}$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; 2)$. Vậy câu a) đúng.

b) Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 2$. Vậy câu b) sai.

$$c) y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4; y = -\frac{1}{10} \\ x = 2; y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị $A\left(-4; -\frac{1}{10}\right)$ và $B\left(2; \frac{1}{2}\right)$ là

$(\Delta): x - 10y + 3 = 0$. Theo giả thiết, do $d \perp \Delta$ nên $1 \cdot (2m + 3) - 10 \cdot m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{8}$. Vậy câu c) đúng.

$$d) \text{Đặt } t = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1 \Leftrightarrow t = 2\left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) + 1 \Leftrightarrow t = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1;$$

$t \in [-1; 3]$. Ta có

$$g(t) = f(t) + m^2 = \frac{t+1}{t^2 - 2t + 6} + m^2, \quad t \in [-1; 3] \Rightarrow g'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 8}{(t^2 - 2t + 6)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4(l) \\ t = 2(n) \end{cases}$$

tính được $g(-1) = m^2$, $g(2) = \frac{1}{2} + m^2$, $f(3) = \frac{4}{9} + m^2$. Do đó $\max_{[-1; 3]} f(t) = m^2 + \frac{1}{2}$. Theo giả

thiết, $m^2 + \frac{1}{2} > 5 \Leftrightarrow m^2 > \frac{9}{2} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$. Kết hợp với m là số nguyên và

$m \in [-2; 2028]$ ta suy ra có 2026 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy câu d) sai.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Gọi A, B lần lượt là giao điểm của tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ với trục Ox, Oy . Diện tích tam giác OAB bằng

Lời giải

Trả lời: 0,5

$$\text{Ta có: } y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = x + 1 + \frac{1}{x + 1}$$

Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = 0 \end{cases} \longrightarrow y = x+1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Lúc đó: $A(-1;0), B(0;1) \longrightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}|x_A| \cdot |y_B| = \frac{1}{2}$.

Câu 2: Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	↗ 1		↘ -3		↗ 1		↘ $+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 4)(x - 2)}{f(x) - 1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

Lời giải

Trả lời: 1

Xét phương trình $f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(b2) \\ x = -2(b2) \end{cases}$.

Do $f(x)$ là hàm số bậc bốn có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ nên $f(x) - 1 = a(x+2)^2(x-2)^2$ ($a < 0$).

Khi đó, $g(x) = \frac{(x^2 - 4)(x - 2)}{a(x+2)^2(x-2)^2} = \frac{1}{a(x+2)}$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a(x+2)} = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{a(x+2)} = 0$, nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 đường tiệm cận ngang.

Câu 3: Số lượng sản phẩm bán được của một cửa hàng quần áo trong t (tháng) được cho bởi công thức:

$S(t) = 200\left(\frac{2}{3} - \frac{8}{2+t}\right)$ với $t \geq 1$. Xem $y = S(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$

, biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có dạng $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}^*, (a, b) = 1$. Tính $P = a - 2b$

Lời giải

Trả lời: 394

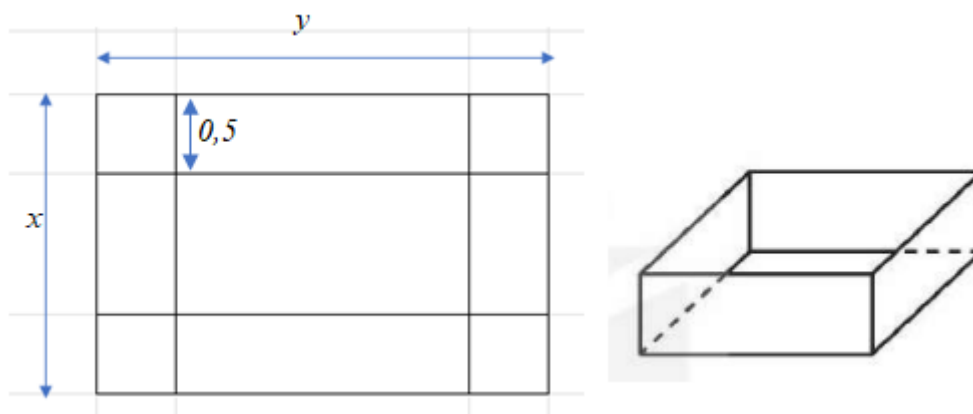
Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 200\left(\frac{2}{3} - \frac{8}{2+t}\right) = 200 \cdot \frac{2}{3} = \frac{400}{3} \Rightarrow a = 400; b = 3$

Vậy $P = a - 2b = 400 - 6 = 394$

Câu 4: Từ một tấm tôn hình chữ nhật có các kích thước là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 1$ và $y > 1$ và diện tích bằng $4m^2$, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập thành một cái thùng dạng

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có chiều cao bằng $0,5m$. Thể tích của thùng là hàm số $V(x)$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Lời giải

Trả lời: 2

Do tấm tôn có diện tích bằng $4m^2$ nên $xy = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}$

Thùng có chiều cao là $0,5m$ và các kích thước còn lại của thùng là: $x-1$ và $y-1$

Thể tích của thùng là $V(x) = 0,5 \cdot (x-1)(y-1) = \frac{1}{2}(x-1)\left(\frac{4}{x}-1\right) = \frac{1}{2} \frac{(x-1)(4-x)}{x}$

Suy ra: $y = \frac{1}{V(x)} = \frac{2x}{(x-1)(4-x)}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = -\infty \Rightarrow$ đường

thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = +\infty \Rightarrow$ đường thẳng

$x=4$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 - 3x}$. Tìm số đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Lời giải

Trả lời: 2

Hàm số xác định và liên tục trên $D = (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$

Ta có: $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 - 3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \sqrt{1 - \frac{3}{x}} \right) = 1$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x + \sqrt{x^2 - 3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow y = x + \frac{3}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$

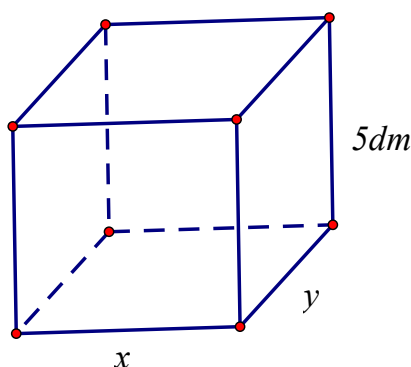
$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 - 3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \sqrt{1 - \frac{3}{x}} \right) = 3$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 3x}) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x - \sqrt{x^2 - 3x}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = -\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow y = 3x - \frac{3}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow -\infty$

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận xiên.

Câu 6: Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng $1m^3$. Chiều cao của bể là $5dm$, các kích thước khác là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 0$ và $y > 0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.



Lời giải

Trả lời: 5

Do thể tích của bể là $1m^3$ nên $0,5xy = 1 \Leftrightarrow xy = 2$

Diện tích toàn phần của bể là $S(x) = xy + 2.0,5x + 2.0,5.y = 2 + x + \frac{2}{x}$, ($x > 0$)

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (S(x) - (x + 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$

Suy ra đồ thị hàm số $S(x)$ có đường tiệm cận xiên là $y = x + 2 \Rightarrow a = 1; b = 2$

$$P = a^2 + b^2 = 5$$

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ ĐỀ TEST 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

- A. $y = 3$. B. $x = 2$. C. $x = 3$. D. $y = 2$.

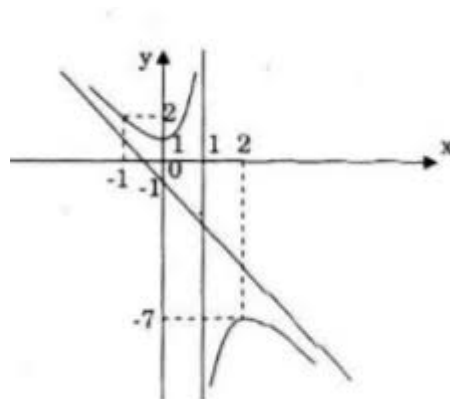
Câu 2: Tiệm cận đứng của đồ thị số hàm số $y = \frac{4x^2 - x + 1}{3x + 2}$ là đường thẳng

- A. $x = \frac{2}{3}$. B. $x = \frac{4}{3}$. C. $x = -\frac{2}{3}$. D. $x = -\frac{3}{2}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 4. B. 2
C. 1. D. 3.



Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		-	-
y	2		$+\infty$

\swarrow $-\infty$ \searrow 2

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$
 B. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
 C. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.
 D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 2$

Câu 5: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3-2x}{x+1}$ là

- A. $x = -2$. B. $y = -2$. C. $y = -1$. D. $x = -1$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	$+$
y	0	2	$-\infty$	3	5

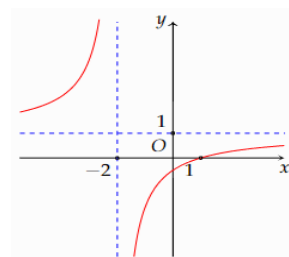
Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

- A. $x = 1$. B. $y = -2$.
C. $x = -2$. D. $y = 1$.



Câu 8: Đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau có đường tiệm cận ngang?

- A. $y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$. B. $y = x^3 - 3x$. C. $y = \log_2 x$. D. $y = x + \sqrt{x^2 + 4}$.

Câu 9: Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây có tiệm cận xiên?

- A. $y = x^2$. B. $y = x^3 - 3x + 4$. C. $y = \frac{2x+1}{x-1}$. D. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$.

Câu 10: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 3}{x-1}$ là:

- A. $y = 2x - 1$. B. $y = x + 2$. C. $y = 2 - x$. D. $y = x - 1$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x-2}$. Tọa độ giao điểm của các đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

- A. $(-2; 3)$. B. $(2; 1)$. C. $(2; -1)$. D. $(3; 2)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	$+$
y	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	$-\infty$	-1

Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

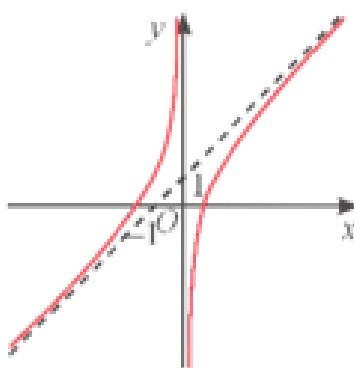
PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
y'	-	-	0	+
y	1	2	-3	3

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = 3$.
- b) Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
- c) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.
- d) Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = 2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



- a) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- b) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang là $y = 0$.
- c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 1$.
- d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x + m + 1}{x - 1}$ với m là tham số. Xét tính đúng hoặc sai của các khẳng định sau:

- a) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- b) Với $m = -3$ thì đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng.
- c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = -x + 4$.
- d) Với $m = 3$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{2x+m}{mx-3}$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số. Các mệnh đề dưới đây đúng hay sai?

- a) Với $m = -1$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.
- b) Với $m = 3$ thì điểm $A(1;2)$ thuộc tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- c) Với $m = 1$ thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 9.
- d) Với $m = 1$, tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên đồ thị đến các đường tiệm cận bằng 7.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Giả sử dân số của một huyện sau t năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số $f(t) = \frac{20t+5}{t+2}, t \geq 0$ (nghìn người). Dân số của huyện đó luôn tăng nhưng không vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Câu 2: Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước lượng chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{400x+10}{100-x}$ (triệu đồng), $0 < x < 100$. Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(x)$.

Câu 3: Một công ty sản xuất đồ chơi ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x^2 + x + 25$ (nghìn đồng). Gọi $f(x)$ là chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm. Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$ có dạng $y = ax + b$, coi $x \in [0; +\infty)$. Tính $T = a + 2b$

Câu 4: Một bể chứa 6000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử sau t phút, tỉ số giữa khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể (đơn vị gam/lít) là một hàm $f(t)$. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$, coi $t \in [0; +\infty)$.

Câu 5: Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S = 24(m^2)$. Gọi $x(m)$ là độ dài đáy nhỏ và $P(x)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P(x)$.

Câu 6: Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

$M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường có phương trình dạng $y = ax + b$. Tính $T = 25a + b$

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

- A. $y = 3$. B. $x = 2$. C. $x = 3$. D. $y = 2$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty$.

Suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = 2$.

Câu 2: Tiệm cận đứng của đồ thị số hàm số $y = \frac{4x^2 - x + 1}{3x + 2}$ là đường thẳng

- A. $x = \frac{2}{3}$. B. $x = \frac{4}{3}$. C. $x = -\frac{2}{3}$. D. $x = -\frac{3}{2}$.

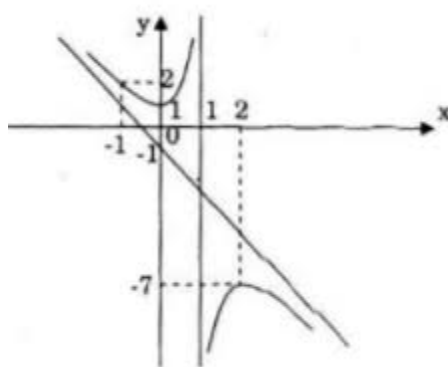
Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^-} y = -\infty$.

Suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = -\frac{2}{3}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận đứng và 1 tiệm cận xiên.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		-	-
y	2		$+\infty$
		$-\infty$	2

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$
- B.** Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
- C.** Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.
- D.** Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1-\infty} y = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = 2$.

Câu 5: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3-2x}{x+1}$ là

- A.** $x = -2$.
- B.** $y = -2$.
- C.** $y = -1$.
- D.** $x = -1$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} - 2}{1 + \frac{1}{x}} = -2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x} - 2}{1 + \frac{1}{x}} = -2$.

Nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		+	0	-
				+
y	0		2	
		$-\infty$		5
			3	

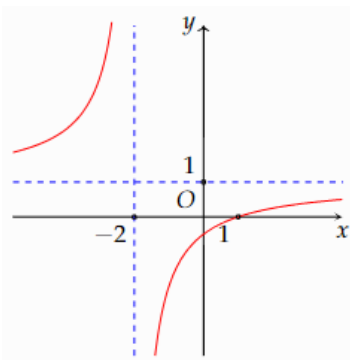
Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A.** 3.
- B.** 1.
- C.** 2.
- D.** 4.

Lời giải

Dựa vào BBT ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ suy ra đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang và 1 tiệm cận đứng nên tổng số có 3 đường tiệm cận.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

- A. $x = 1$. B. $y = -2$. C. $x = -2$. **D. $y = 1$.**

Lời giải

Nhìn vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$.

Câu 8: Đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau có đường tiệm cận ngang?

- A. $y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$. B. $y = x^3 - 3x$. C. $y = \log_2 x$. **D. $y = x + \sqrt{x^2 + 4}$.**

Lời giải

Đáp án A: Xét hàm số $y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$ có tập xác định $D = [0; +\infty)$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + \sqrt{x}} = +\infty$. Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$ không có tiệm cận ngang.

Đáp án B: Xét hàm số $y = x^3 - 3x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x) = -\infty$. Do đó đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ không có tiệm cận ngang.

Đáp án C: Xét hàm số $y = \log_2 x$ có tập xác định $D = (0; +\infty)$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 x = +\infty$. Do đó đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ không có tiệm cận ngang.

Đáp án D: Xét hàm số $y = x + \sqrt{x^2 + 4}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 4}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x - \sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{4}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = 0$.

Do đó đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{x^2 + 4}$ có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Câu 9: Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây có tiệm cận xiên?

- A. $y = x^2$. B. $y = x^3 - 3x + 4$. C. $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$. **D. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.**

Lời giải

Hàm số đa thức bậc hai và ba không có tiệm cận nên loại phương án A và **B.**

Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ chỉ có tiệm cận đứng và ngang nên loại phương án **C.**

Ta có: $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x - 1} \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x - 1} \right) = 0.$$

Vậy hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có tiệm cận xiên $y = x$.

Câu 10: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}$ là:

- A.** $y = 2x - 1$. **B.** $y = x + 2$. **C.** $y = 2 - x$. **D.** $y = x - 1$.

Lời giải

Ta có $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1} = x + 2 - \frac{1}{x - 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x - 1} \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x - 1} \right) = 0.$$

Vậy tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là: $y = x + 2$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 2}$. Tọa độ giao điểm của các đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

- A.** $(-2; 3)$. **B.** $(2; 1)$. **C.** $(2; -1)$. **D.** $(3; 2)$.

Lời giải

Ta có $y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 2} = -x + 1 + \frac{1}{x - 2}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (-x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x - 2} \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (-x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x - 2} \right) = 0.$$

Vậy tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = -x + 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 2} = -\infty.$$

Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 2$.

Vậy tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là $(2; -1)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	-1

Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

- A. 1. B. 4. C. 2. **D. 3.**

Lời giải

Do $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty \Rightarrow$ TCD: $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là $y = \pm 1$

Vậy, đồ thị hàm số đã cho có tổng số TCD và TCN là 3.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
y'		$-$	$-$	0	$+$
y	1	$-\infty$	2	-3	3

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = 3$.
 b) Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
 c) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.
 d) Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
----------------	---------------	---------------	---------------

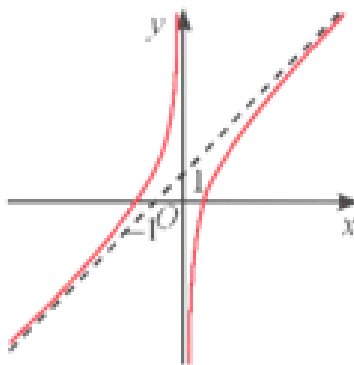
a) Đúng. Vì ta thấy $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$. Nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = 3$.

b) Sai. Vì ta thấy $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = 0$.

c) Sai. Vì đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận, hai đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận đứng.

d) Sai.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



- a) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- b) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang là $y = 0$.
- c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 1$.
- d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------------	---------------	----------------	---------------

- a) Sai. Vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = 0$.
- b) Sai. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- c) Đúng. Vì tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;1)$ và $(-1;0)$ nên tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = x + 1$.
- d) Sai.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x + m + 1}{x - 1}$ với m là tham số. Xét tính đúng hoặc sai của các khẳng định sau:

- a) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- b) Với $m = -3$ thì đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng.
- c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = -x + 4$.
- d) Với $m = 3$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

- a) Đúng vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 - 3x + m + 1}{x - 1} = \mp\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

b) Đúng vì với $m = -3$ thì $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 - 3x - 2}{x - 1} = \mp\infty \Rightarrow x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

c) Sai vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - (-x - 4)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-x^2 - 3x + m + 1}{x - 1} + x + 4 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{m - 3}{x - 1} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = -x - 4$.

d) Đúng vì đồ thị hàm số luôn không có tiệm cận ngang với mọi tham số m .

Với $m = 3$ thì $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x - 1)(x + 4)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 4) = 3 \Rightarrow x = 1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{2x + m}{mx - 3}$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số. Các mệnh đề dưới đây đúng hay sai?

a) Với $m = -1$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

b) Với $m = 3$ thì điểm $A(1; 2)$ thuộc tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

c) Với $m = 1$ thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 9.

d) Với $m = 1$, tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên đồ thị đến các đường tiệm cận bằng 7.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

Đồ thị hàm số (C_m) $y = \frac{2x + m}{mx - 3}$ có điều kiện $x \neq \frac{3}{m}$. Với $m \neq 0$ thì hàm số số TCD $x = \frac{3}{m}$ và TCN $y = \frac{2}{m}$.

a) Với $m = -1$ thì hàm số có TCD $x = -3$ và TCN $y = -2$. Vậy mệnh đề a) sai.

b) Với $m = 3$ thì hàm số có dạng $y = \frac{2x + 3}{3x - 3}$ và có TCD $x = 1$ nên điểm $A(1; 2)$ thuộc tiệm cận đứng.

c) Với $m = 1$ thì hàm số có dạng $y = \frac{2x + 1}{x - 3}$. Khi đó đồ thị có TCD $x = 3$ và TCN $y = 2$; cùng với hai trục tọa độ là $x = 0, y = 0$ tạo thành hình chữ nhật có độ dài cạnh 2 và 3.

Suy ra diện tích hình chữ nhật là 6.

d) Với $m = 1$ thì hàm số có dạng $y = \frac{2x + 1}{x - 3}$, điểm $M \left(x_0; \frac{2x_0 + 1}{x_0 - 3} \right)$ thuộc đồ thị hàm số.

Đồ thị có TCD là $x = 3$ và TCN là $y = 2$; Khoảng cách từ M đến hai tiệm cận lần lượt là:

$$d_1(M; TCD) = |x_0 - 3| \text{ và } d_2(M; TCN) = \left| \frac{2x_0 + 1}{x_0 - 3} - 2 \right|. \text{ Khi đó:}$$

$$T = d_1(M; TCN) \cdot d_2(M; TCN)$$

$$= |x_0 - 3| \left| \frac{2x_0 + 1}{x_0 - 3} - 2 \right|$$

$$= |2x_0 + 1 - 2x_0 + 6| = 7$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Giả sử dân số của một huyện sau t năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số $f(t) = \frac{20t + 5}{t + 2}, t \geq 0$ (nghìn người). Dân số của huyện đó luôn tăng nhưng không vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Lời giải

Trả lời: 20

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20t + 5}{t + 2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20 + \frac{5}{t}}{1 + \frac{2}{t}} = 20.$

Vậy dân số của huyện đó không vượt quá 20 (nghìn người).

Câu 2: Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước lượng chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{400x + 10}{100 - x}$ (triệu đồng), $0 < x < 100$. Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(x)$.

Lời giải

Trả lời: 100

Ta có $\lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{400x + 10}{100 - x} = +\infty.$

Vậy đường thẳng $x = 100$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(x)$.

Câu 3: Một công ty sản xuất đồ chơi ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x^2 + x + 25$ (nghìn đồng). Gọi $f(x)$ là chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm. Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$ có dạng $y = ax + b$, coi $x \in [0; +\infty)$. Tính $T = a + 2b$

Lời giải

Trả lời: 4

Chi phí để sản xuất trung bình một sản phẩm là $f(x) = \frac{2x^2 + x + 25}{x} = 2x + 1 + \frac{25}{x}$ (nghìn đồng).

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25}{x} = 0.$

Vậy đường thẳng $y = 2x + 1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Câu 4: Một bể chứa 6000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử sau t phút, tỉ số giữa khối lượng muối trong

bể và thể tích nước trong bể (đơn vị gam/lít) là một hàm $f(t)$. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$, coi $t \in [0; +\infty)$.

Lời giải

Trả lời: 25

Sau t phút khối lượng muối trong bể là $25 \cdot 20 \cdot t = 500t$ (gam).

Thể tích của bể sau t phút là $6000 + 20 \cdot t$ (lít).

Khi đó $f(t) = \frac{500t}{6000 + 20t} = \frac{25t}{3000 + t}$ (gam/lít).

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25t}{3000 + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{3000}{t} + 1} = 25.$$

Vậy đường thẳng $y = 25$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$.

Câu 5: Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S = 24(m^2)$. Gọi $x(m)$ là độ dài đáy nhỏ và $P(x)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P(x)$.

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi x là độ dài đáy nhỏ của hình thang ($x > 0$). Ta có :

Đáy lớn là $2x$.

Chiều cao của hình thang là $h = \frac{2S}{x + 2x} = \frac{16}{x}$.

Độ dài cạnh còn lại của hình thang là $\sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}$.

Khi đó $P(x) = x + \frac{16}{x} + 2x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} = 3x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + \frac{16}{x}$ (tập xác định $D = (0; +\infty)$).

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[3x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + \frac{16}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[3 + \sqrt{1 + \frac{256}{x^4}} + \frac{16}{x^2} \right] = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

+ $\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left[3x^2 + \sqrt{x^4 + 256} + 16 \right] = +\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là trục Oy

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x) - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} - x + \frac{16}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{256}{x^2 \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + x} + \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Khi đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận xiên $y = 4x$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 6: Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

$M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường có phương trình dạng $y = ax + b$. Tính $T = 25a + b$

Lời giải

Trả lời: 2025

Theo giả thiết, ta có:

$$T(x) = C(x) + 4000x = x^2 + 2000x + 10^8.$$

$$M(x) = \frac{T(x)}{x} = x + \frac{10^8}{x} + 2000.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (M(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \frac{10^8}{x} + 2000 - (x + 2000) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{10^8}{x} \right] = 0$$

Khi đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận xiên $y = x + 2000$. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường $y = x + 2000$.

CHƯƠNG

I

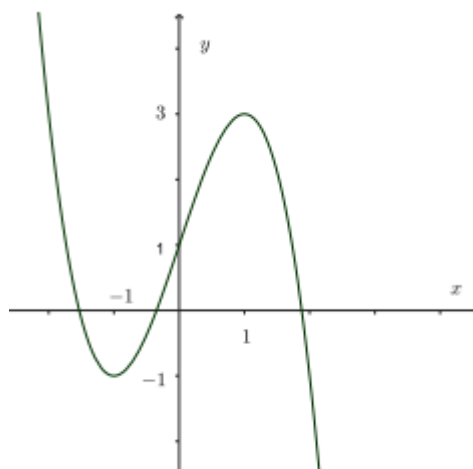
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

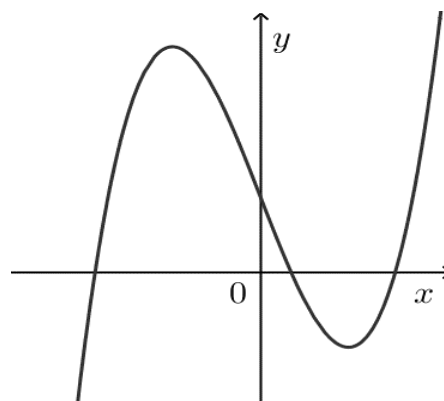
Câu 1: Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong dưới đây?

- A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$. B. $y = \frac{x^2+2x-2}{x-1}$.
 C. $y = -x^3+3x+1$. D. $y = x^3-3x+1$.

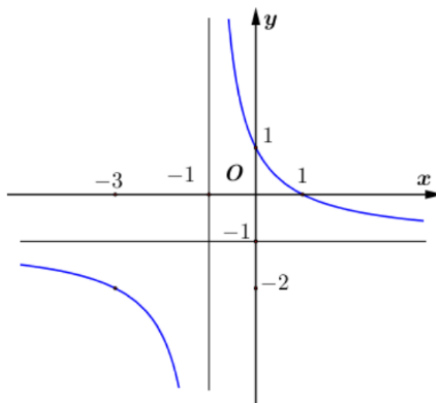


Câu 2: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^3 - 3x + 1$ B. $y = -x^3 + 3x + 1$
 C. $y = x^4 - x^2 + 1$ D. $y = -x^2 + x - 1$



Câu 3: Đồ thị hình dưới đây là của hàm số nào?



- A. $y = \frac{-x}{x+1}$. B. $y = \frac{-x+1}{x+1}$. C. $y = \frac{-2x+1}{2x+1}$. D. $y = \frac{-x+2}{x+1}$.

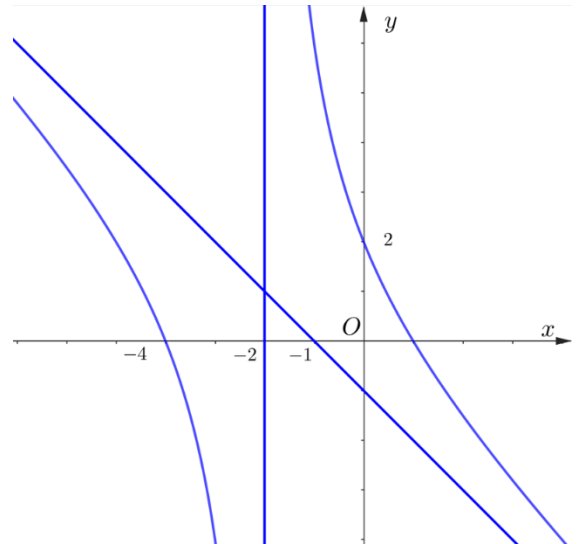
Câu 4: Đồ thị dưới đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $y = \frac{-x+4}{x+2}$.

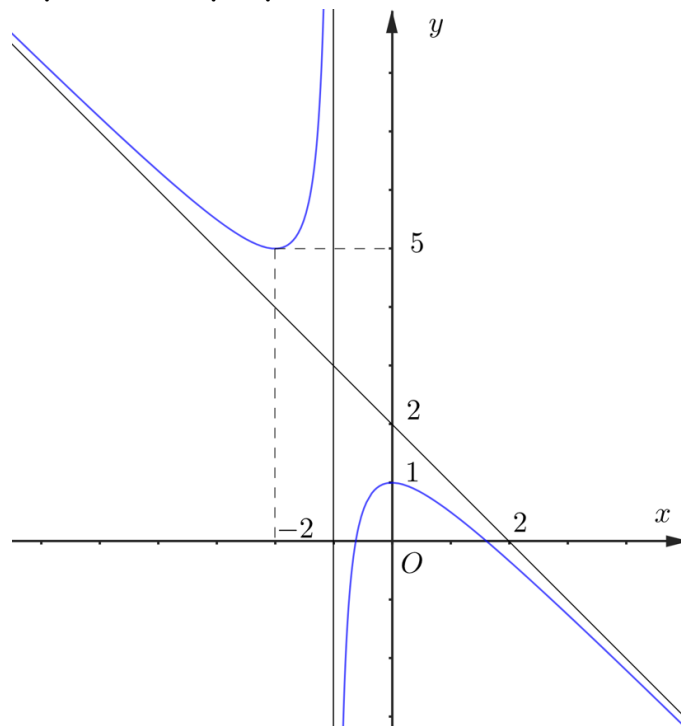
B. $y = \frac{-x^2-3x+4}{x+2}$.

C. $y = \frac{-x^2-3x+2}{x+1}$.

D. $y = \frac{-x+2}{x+1}$.



Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có tọa độ là



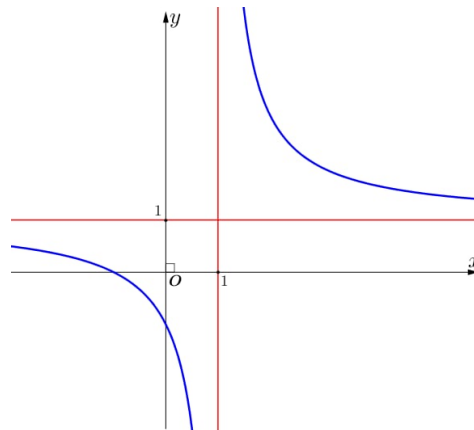
A. $(-2;5)$.

B. $(-1;3)$.

C. $(0;1)$.

D. $(-2;3)$.

Câu 6: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



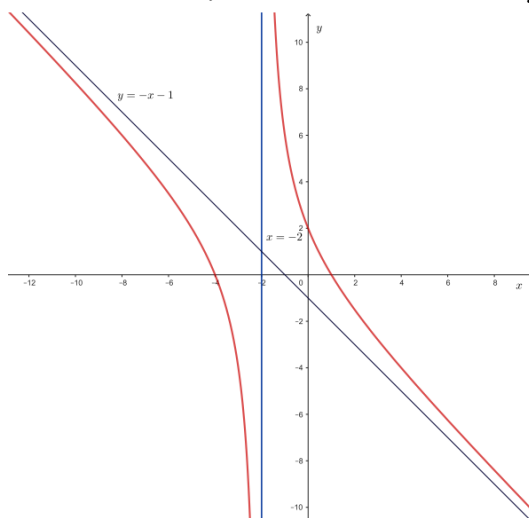
A. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

B. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

C. $y = \frac{-2x+1}{x-1}$.

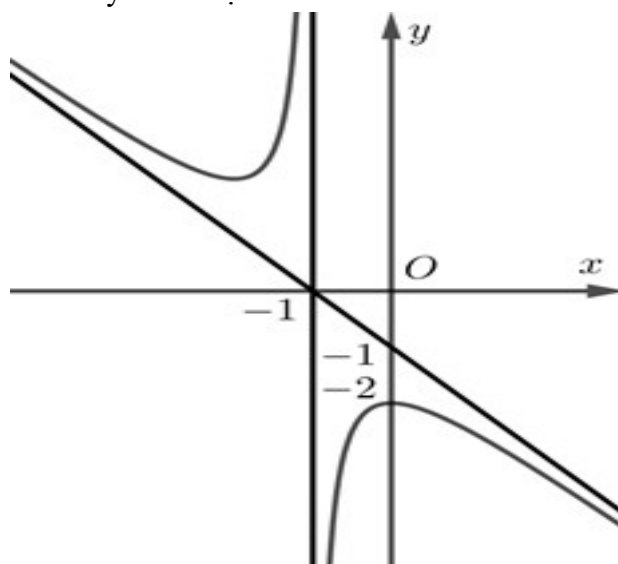
D. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Câu 7: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$. B. $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x - 2}$. C. $y = \frac{x - 4}{x + 2}$. D. $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 8: Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số:



- A. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{-x - 1}$. B. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$. C. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$. D. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 1}$.

Câu 9: Giả sử hàm nhu cầu đối với một loại hàng hóa được cho bởi công thức $p = \frac{60}{1 + 0,2x}$, $12 > x \geq 0$, trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán. Để bán được 10 đơn vị sản phẩm thì giá bán là bao nhiêu?

- A. 15 (nghìn đồng). B. 18 (nghìn đồng). C. 19 (nghìn đồng). D. 20 (nghìn đồng).

Câu 10: Giả sử chi phí (tính bằng trăm ngàn đồng) để sản xuất x chiếc bánh kem là:

$C(x) = 10000 + 20x - \frac{1}{4}x^2 + 0,001x^3$. Chi phí sản xuất chiếc bánh thứ 501 xấp xỉ chi phí biên là bao nhiêu?

- A. 250 (nghìn đồng). B. 450 (nghìn đồng). C. 520 (nghìn đồng). D. 300 (nghìn đồng).

Câu 11: Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 6}{x - 1}$ đi qua điểm nào trong các điểm cho dưới đây?

- A. $M(2; 2)$. B. $N(2; -2)$. C. $P(-1; 3)$. D. $Q(4; 1)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$. Toạ độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

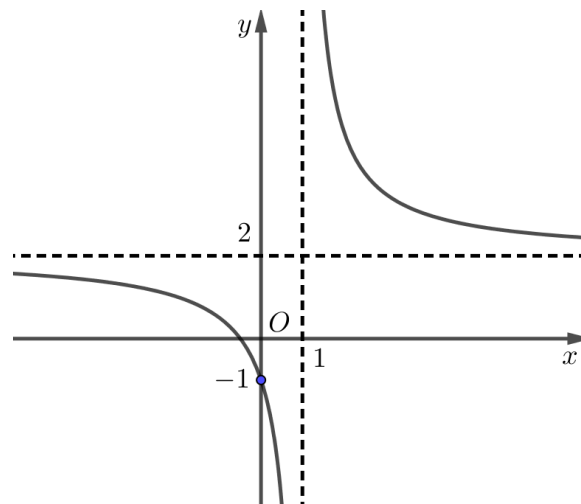
- A. $(-3; -8)$. B. $(-3; 8)$. C. $(1; 0)$. D. $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là (C) . Biết (C) có một điểm cực trị là $A(1; -1)$ và tâm đối xứng là $I\left(\frac{2}{3}; -\frac{29}{27}\right)$.

Mệnh đề	Đúng	Sai
a) (C) có một điểm cực trị là $B\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{27}\right)$.		
b) $a + b + c + d = -1$.		
c) Tiếp tuyến của (C) tại A song song với trục hoành.		
d) $a + 2b + 3c + 4d = 4$.		

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + 1}$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Mệnh đề	Đúng	Sai
a) Tâm đối xứng của đồ thị có tọa độ là $(2; 1)$		
b) $a - 2b + c = -5$.		
c) Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x = 2$ có phương trình là $y = -3x + 11$.		
d) Có đúng 4 điểm $M(m; n)$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ thuộc đồ thị.		

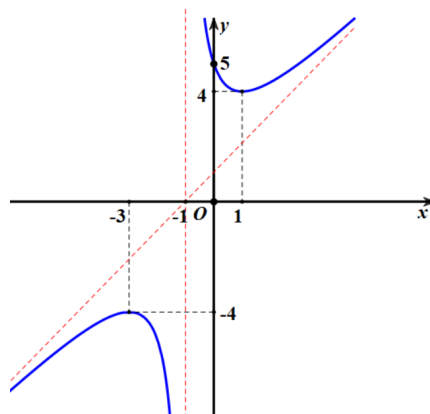
Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$

a) $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$

b) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số là $y = 2x - 2$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.

d) Đồ thị của hàm số có hình vẽ như sau



Câu 4: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B . Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Cho phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

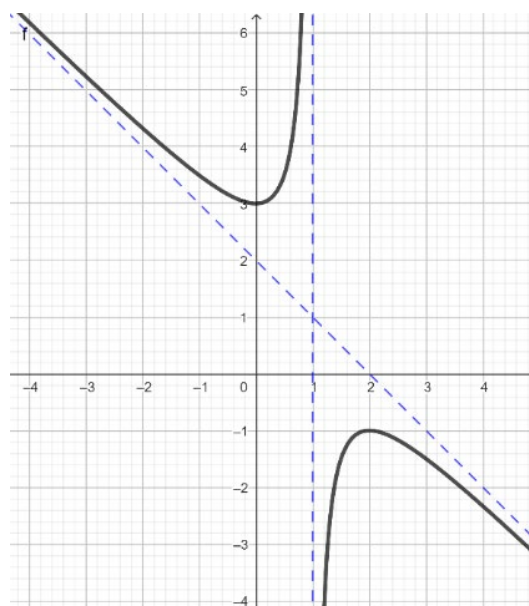
b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.

c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B là $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$.

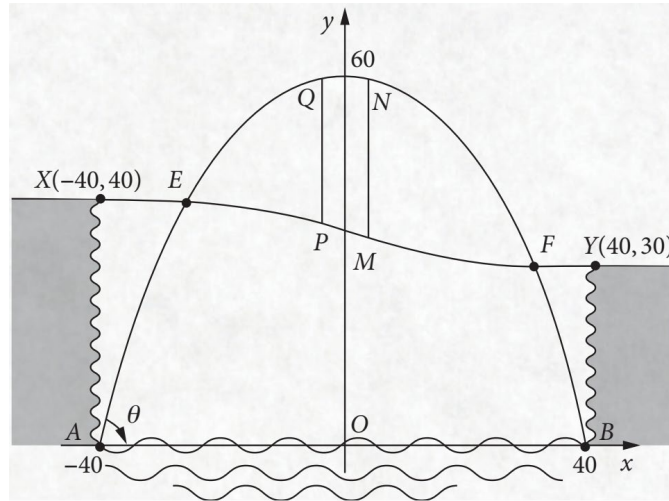
d) A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số hữu tỉ $y = ax + 2 + \frac{b}{x + c}$ có đồ thị như hình bên dưới. Tính $P = a + b + c$.



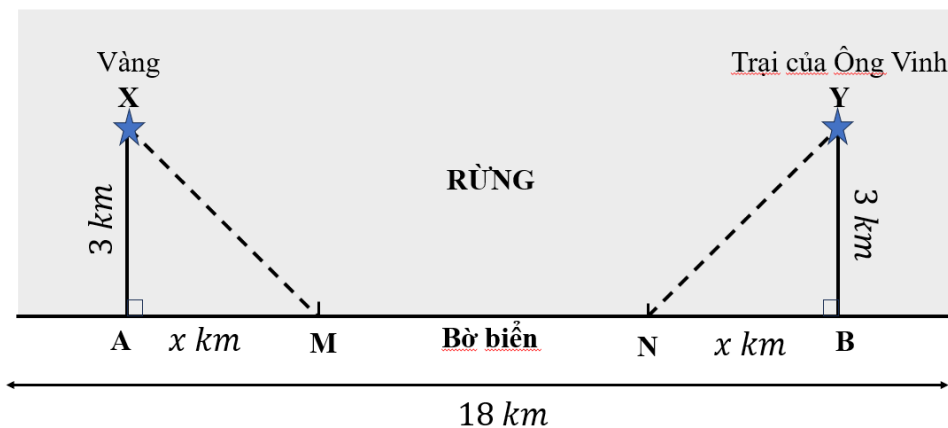
- Câu 2:** Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,..) được cho bởi công thức: $C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000$, trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng (1 vạn đồng = 10000 đồng). Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỷ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn và tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí. Tìm chi phí trung bình thấp nhất cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu vạn đồng, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30000 cuốn?
- Câu 3:** Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây.



Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y = \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35$

Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường XY . Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy ; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

- Câu 4:** Ông Vinh đang ở trong rừng để đào vàng. Anh ta tìm thấy vàng ở X , cách điểm A : 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của Ông Vinh nằm ở Y , cách điểm B : 3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 3$ km, $AM = NB = x$ km và $AX = BY = 3$ km. (Như hình vẽ sau)

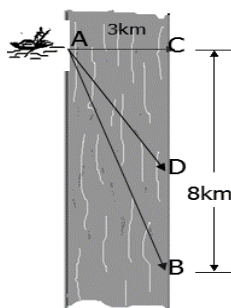


Khi đang đào vàng, Ông Vinh bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50 \log(t + 2)$. Trong đó, y là nồng

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông Vinh cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng và trên bãi biển với vận tốc lần lượt là 5 km/h và 13 km/h. Để về đến trại Ông Vinh cần chạy từ trong rừng qua điểm M, N trên bãi biển. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông Vinh về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).

Câu 5: Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: phút) để người đàn ông đến B .



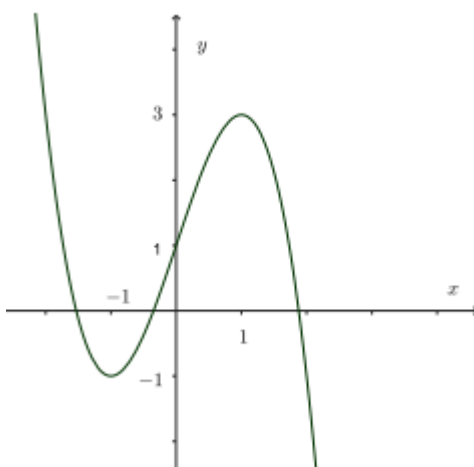
Câu 6: Cho hàm số $y = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Điểm M là điểm bất kỳ trên đồ thị (C) , tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong dưới đây?

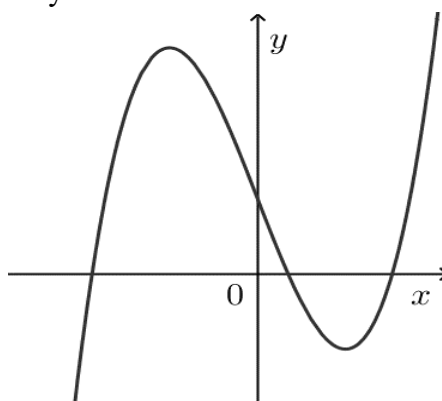


- A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$. B. $y = \frac{x^2+2x-2}{x-1}$. **C. $y = -x^3+3x+1$.** D. $y = x^3-3x+1$.

Lời giải

Đồ thị trên là đồ thị hàm bậc 3 có $a < 0$. Suy ra chọn đáp án **C**.

Câu 2: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

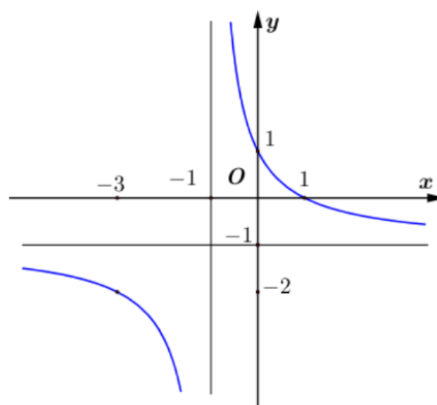


- A. $y = x^3-3x+1$** B. $y = -x^3+3x+1$ C. $y = x^4-x^2+1$ D. $y = -x^2+x-1$

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy: đây là dạng đồ thị hàm bậc ba và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$, ta **chọn A**

Câu 3: Đồ thị hình dưới đây là của hàm số nào?



A. $y = \frac{-x}{x+1}$.

B. $y = \frac{-x+1}{x+1}$.

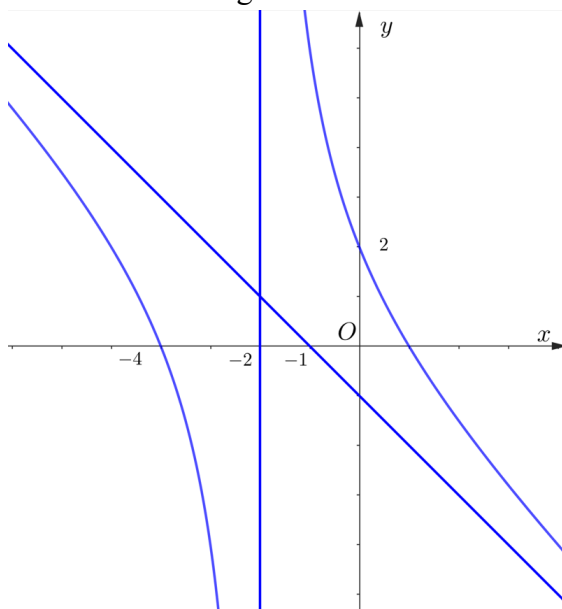
C. $y = \frac{-2x+1}{2x+1}$.

D. $y = \frac{-x+2}{x+1}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;0)$; có đồ thị hàm số $y = \frac{-x+1}{x+1}$ đi qua điểm $(1;0)$

Câu 4: Đồ thị dưới đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



A. $y = \frac{-x+4}{x+2}$.

B. $y = \frac{-x^2-3x+4}{x+2}$.

C. $y = \frac{-x^2-3x+2}{x+1}$.

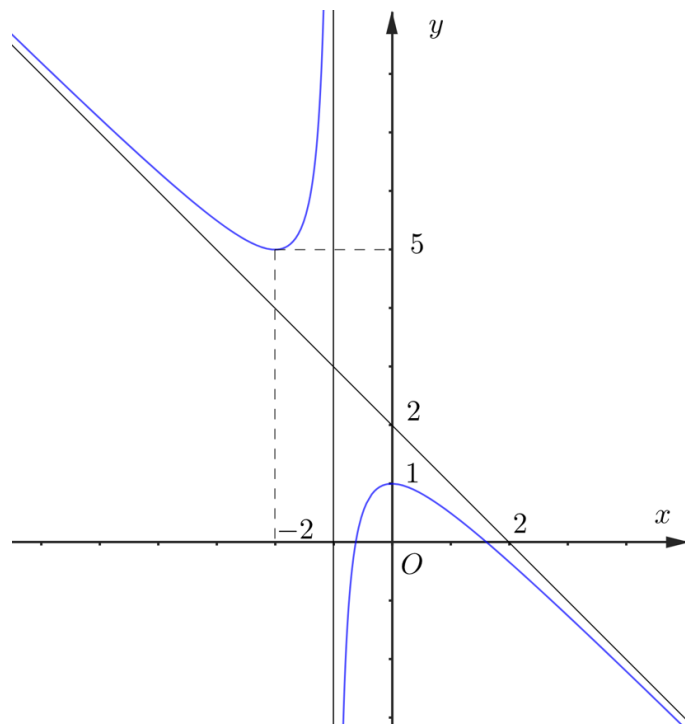
D. $y = \frac{-x+2}{x+1}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4;0)$.

Trong các hàm số, chỉ có đồ thị của hàm số $y = \frac{-x^2-3x+4}{x+2}$ đi qua điểm $(-4;0)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có tọa độ là



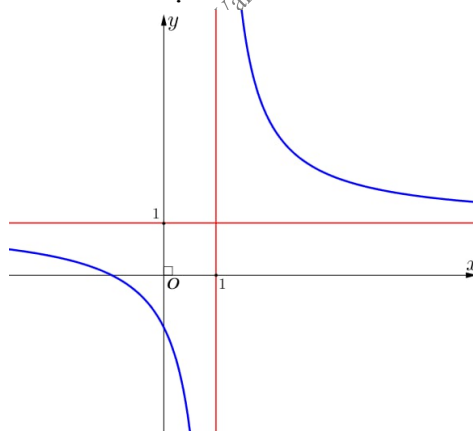
- A. $(-2;5)$. B. $(-1;3)$. C. $(0;1)$. D. $(-2;3)$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta có: đường tiệm cận đứng là $x = -1$ và đường tiệm cận xiên là $y = -x + 2$.

Do đó tâm đối xứng của đồ thị là giao điểm của hai đường tiệm cận nên có tọa độ là $(-1;3)$.

Câu 6: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = \frac{x+2}{x+1}$. B. $y = \frac{x-1}{x+1}$. C. $y = \frac{-2x+1}{x-1}$. D. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

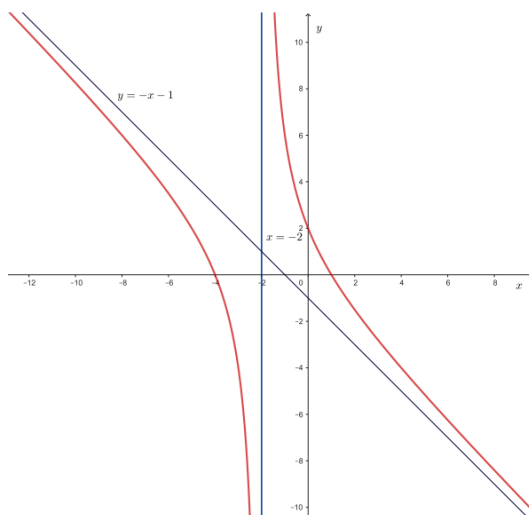
Lời giải

Ta có đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$, nên loại A, B.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$ nên **Chọn D**

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = +\infty$.

Câu 7: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A.** $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$ **B.** $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x - 2}$ **C.** $y = \frac{x - 4}{x + 2}$ **D.** $y = x^3 - 3x + 1$.

Lời giải

Ta có đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -2$, nên loại B; D là hàm số bậc 3 nên loại D; đồ thị của C có tiệm cận đứng, không có tiệm cận xiên nên loại C.

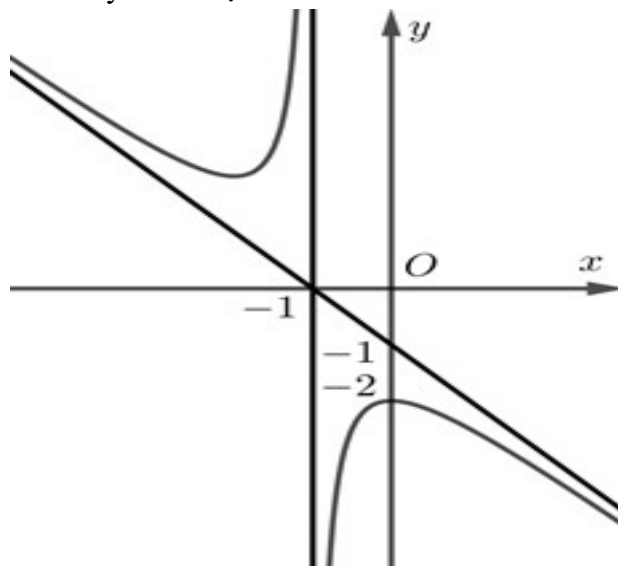
Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = -x - 1$ nên chọn **A**.

$$\text{Vì } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x^2 + 2x} = -1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-1)x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} - (-1)x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 4}{x + 2} = -1$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -x - 1$.

Câu 8: Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số:



- A.** $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{-x - 1}$ **B.** $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ **C.** $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ **D.** $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 1}$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận xiên $y = -x - 1$ loại B, C, **D**.

- Câu 9:** Giả sử hàm nhu cầu đối với một loại hàng hóa được cho bởi công thức $p = \frac{60}{1+0,2x}, 12 > x \geq 0$, trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán. Để bán được 10 đơn vị sản phẩm thì giá bán là bao nhiêu?
A. 15 (nghìn đồng). **B.** 18 (nghìn đồng). **C.** 19 (nghìn đồng). **D.** 20 (nghìn đồng).

Lời giải

$$\text{Với } x = 10 \Rightarrow p = \frac{60}{1+0,2 \cdot 10} = 20 \text{ (nghìn đồng).}$$

- Câu 10:** Giả sử chi phí (tính bằng trăm ngàn đồng) để sản xuất x chiếc bánh kem là:
 $C(x) = 10000 + 20x - \frac{1}{4}x^2 + 0,001x^3$. Chi phí sản xuất chiếc bánh thứ 501 xấp xỉ chi phí biên là bao nhiêu?
A. 250 (nghìn đồng). **B.** 450 (nghìn đồng). **C.** 520 (nghìn đồng). **D.** 300 (nghìn đồng).

Lời giải

$$\text{Ta có } C'(500) = 20 - \frac{1}{2} \cdot 500 + 0,003 \cdot 500^2 = 5,2 \text{ (trăm ngàn đồng).}$$

$C'(50)$ dự báo cho ta biết chi phí để sản xuất chiếc bánh kem thứ 51 là 520000.

- Câu 11:** Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 6}{x - 1}$ đi qua điểm nào trong các điểm cho dưới đây?
A. $M(2; 2)$. **B.** $N(2; -2)$. **C.** $P(-1; 3)$. **D.** $Q(4; 1)$.

Lời giải

$$\text{Với } x = 2 \text{ ta có } y = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 - 6}{2 - 1} = 2. \text{ Vậy đồ thị hàm số } y = \frac{x^2 + 2x - 6}{x - 1} \text{ đi qua điểm } M(2; 2).$$

- Câu 12:** Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$. Toạ độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

- A.** $(-3; -8)$. **B.** $(-3; 8)$. **C.** $(1; 0)$. **D.** $(1; \frac{1}{2})$.

Lời giải

Điều kiện: $x \neq -1$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu y' :

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
y'		+	0	-		-	0	+

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y_{CT} = 0$. Vậy toạ độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là $(1; 0)$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là (C) . Biết (C) có một điểm cực trị là $A(1; -1)$ và tâm đối xứng là $I\left(\frac{2}{3}; -\frac{29}{27}\right)$.

Mệnh đề	Đúng	Sai
a) (C) có một điểm cực trị là $B\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{27}\right)$.		
b) $a + b + c + d = -1$.		
c) Tiếp tuyến của (C) tại A song song với trục hoành.		
d) $a + 2b + 3c + 4d = 4$.		

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

+ Theo tính chất của đồ thị hàm số bậc ba, ta có:

A, B là hai điểm cực trị và I là tâm đối xứng của $(C) \Rightarrow I$ là trung điểm của AB

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_I - x_A = \frac{1}{3} \\ y_B = 2y_I - y_A = -\frac{31}{27} \end{cases}$$

\Rightarrow Câu a sai.

+ Vì A là điểm cực trị của (C) nên $A \in (C) \Rightarrow a + b + c + d = -1$.

\Rightarrow Câu b đúng.

+ Vì A là điểm cực trị của (C) nên $f'(x_A) = 0$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là:

$$y = f'(x_A)(x - x_A) + y_A \Leftrightarrow y = -1$$

\Rightarrow Tiếp tuyến của (C) tại A song song với trục hoành.

\Rightarrow Câu c đúng.

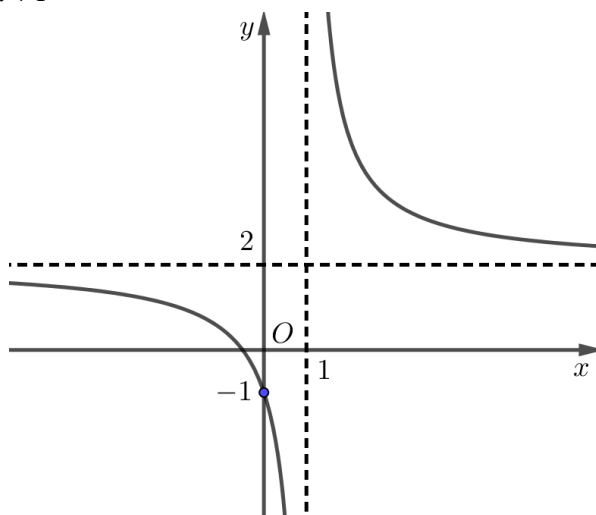
+ Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ và $f''(x) = 6ax + 2b$

$$GT \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_A) = 0 \\ f''(x_I) = 0 \\ A \in (C) \\ I \in (C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 4a + 2b = 0 \\ a + b + c + d = -1 \\ \frac{8}{27}a + \frac{4}{9}b + \frac{2}{3}c + d = -\frac{29}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -1 \\ d = -1 \end{cases}$$

Do đó: $a + 2b + 3c + 4d = -4$

\Rightarrow Câu d sai.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+1}$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Mệnh đề	Đúng	Sai
a) Tâm đối xứng của đồ thị có tọa độ là (2;1)		
b) $a - 2b + c = -5$.		
c) Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x = 2$ có phương trình là $y = -3x + 11$.		
d) Có đúng 4 điểm $M(m;n)$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ thuộc đồ thị.		

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

+ Từ đồ thị, ta có:

Tiệm cận đứng: $x = 1$

Tiệm cận ngang: $y = 2$

\Rightarrow Tâm đối xứng của đồ thị có tọa độ là (1;2)

\Rightarrow Câu a sai.

+ Từ đồ thị, ta có:

Tiệm cận đứng: $x = 1 \Rightarrow -\frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow c = -1$

Tiệm cận ngang: $y = 2 \Rightarrow \frac{a}{c} = 2 \Leftrightarrow a = 2c$

$\Rightarrow a = -2$

Điểm $A(0; -1)$ thuộc đồ thị $\Rightarrow -1 = b$.

Do đó: $a - 2b + c = -1$.

\Rightarrow Câu b sai.

+ Với $a = -2; b = -1; c = -1$ suy ra: $y = \frac{-2x-1}{-x+1}$

$\Rightarrow y' = \frac{-3}{(-x+1)^2}$

Ta có: $x = 2 \Rightarrow \begin{cases} y(2) = 5 \\ y'(2) = -3 \end{cases}$

Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x = 2$ có phương trình là

$$y = y'(2)(x - 2) + y(2)$$

$$\Leftrightarrow y = -3x + 11$$

\Rightarrow Câu c đúng.

+ Ta có: $y = \frac{-2x - 1}{-x + 1}$

Vì $M(m; n)$ thuộc đồ thị nên $n = \frac{-2m - 1}{-m + 1} \Leftrightarrow n = 2 - \frac{3}{-m + 1}$

Do $m, n \in \mathbb{Z}$ nên $(-m + 1) \in U(3) \Leftrightarrow -m + 1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$

$$\Leftrightarrow m \in \{4; 2; 0; -2\}$$

Suy ra: có đúng 4 điểm $M(m; n)$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ thuộc đồ thị.

\Rightarrow Câu d đúng.

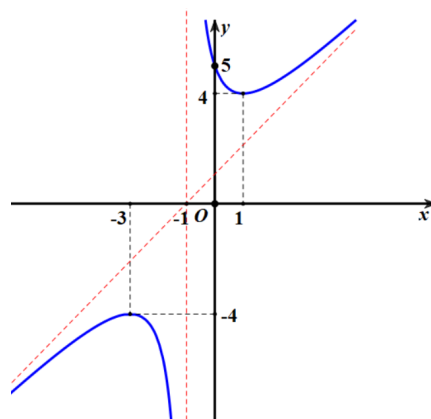
Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$

a) $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$

b) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số là $y = 2x - 2$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.

d) Đồ thị của hàm số có hình vẽ như sau



Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) ĐÚNG

$$y' = \frac{(x^2 + 2x + 5)'(x + 1) - (x + 1)'(x^2 + 2x + 5)}{(x + 1)^2} = \frac{(2x + 2)(x + 1) - (x^2 + 2x + 5)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$$

b) SAI

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{hàm số có hai điểm cực trị là } A(1; 4), B(-3; -4).$$

Gọi phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị có dạng $y = ax + b$. Khi đó ta có hệ phương

$$\text{trình } \begin{cases} a + b = 4 \\ -3a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}.$$

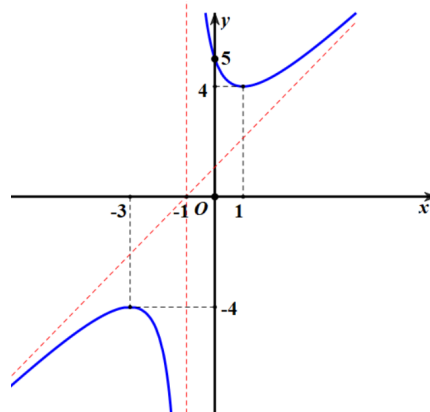
Phương trình đường thẳng AB là $y = 2x + 2$.

c) ĐÚNG

$$y = x + 1 + \frac{4}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - (x + 1)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x + 1} = 0 \Rightarrow y = x + 1 \text{ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.}$$

d) ĐÚNG



Câu 4: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B . Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

- Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.
- Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.
- Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B là $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$.
- A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là $C(10) = 100 + 30 \cdot 10 = 400$ triệu đồng. Do đó a) đúng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là

$$R(10) = 10 \cdot P(10) = 10 \cdot (45 - 0,001 \cdot 10^2) = 449 \text{ triệu đồng. Do đó b) sai.}$$

c) Lợi nhuận mà A thu được là:

$$H(x) = R(x) - C(x) = xP(x) - C(x) = P(x) = 45x - 0,001x^3 - (100 + 30x) = -0,001x^3 + 15x - 100$$

. Do đó c) đúng.

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

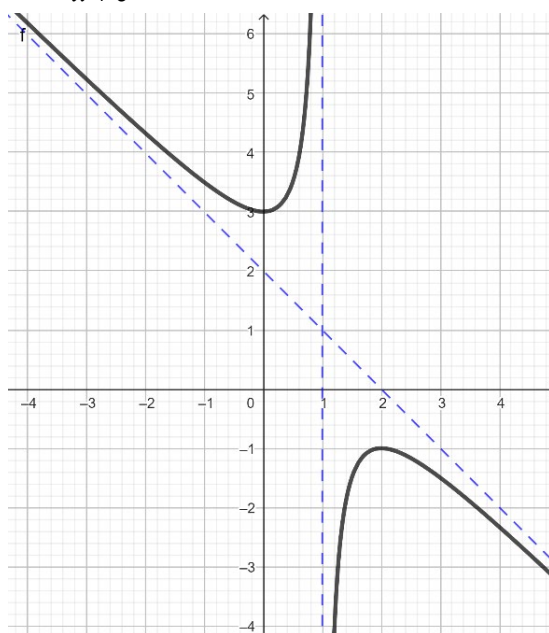
d) Xét hàm số $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$, ($0 \leq x \leq 100$) ta có $H'(x) = -0,003x^2 + 15$,
 $H'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2}$ (chọn).

Ta có $H(0) = -100$; $H(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100$; $H(100) = 400$.

Vậy A bán cho B khoảng $50\sqrt{2} \approx 70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất bằng $H(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100$. Do đó d) đúng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số hữu tỉ $y = ax + 2 + \frac{b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới. Tính $P = a + b + c$.



Lời giải

Trả lời: -3

Ta có: $y = ax + 2 + \frac{b}{x+c}$.

- Nên đồ thị của hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = ax + 2$, mà như hình vẽ đường tiệm cận xiên đi qua điểm $(1;1)$ suy ra $1 = a \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow a = -1$.

- Đồ thị của hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ nên $1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$.

Khi đó hàm số đã cho có dạng $y = -x + 2 + \frac{b}{x-1}$.

- Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;3)$ nên $-0 + 2 + \frac{b}{0-1} = 3 \Leftrightarrow 2 - b = 3 \Leftrightarrow b = -1$.

Vậy $P = a + b + c = -1 + (-1) + (-1) = -3$.

Câu 2: Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,..) được cho bởi công thức: $C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000$, trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng (1 vạn đồng = 10000 đồng). Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Ti số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn và tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí. Tìm chi phí trung bình thấp nhất cho

một cuốn tạp chí là bao nhiêu vạn đồng, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30000 cuốn?

Lời giải

Trả lời: 2,2

Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng, tức là 0,4 vạn đồng.

Suy ra chi phí phát hành cho x cuốn là $0,4x$ (vạn đồng).

Theo đề bài, ta có tổng chi phí xuất bản và phát hành cho x cuốn tạp chí là:

$$T(x) = C(x) + 0,4x = 0,0001x^2 + 0,2x + 10000, \text{ với } x > 0.$$

$$\text{Ta có } f(x) = M(x) = \frac{T(x)}{x} = 0,0001x + 0,2 + \frac{10000}{x}.$$

Xét hàm số $f(x) = 0,0001x + 0,2 + \frac{10000}{x}$, với $0 < x \leq 30000$.

$$f'(x) = 0,0001 - \frac{10000}{x^2} = \frac{0,0001x^2 - 10000}{x^2};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10000 \text{ (do } x > 0).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

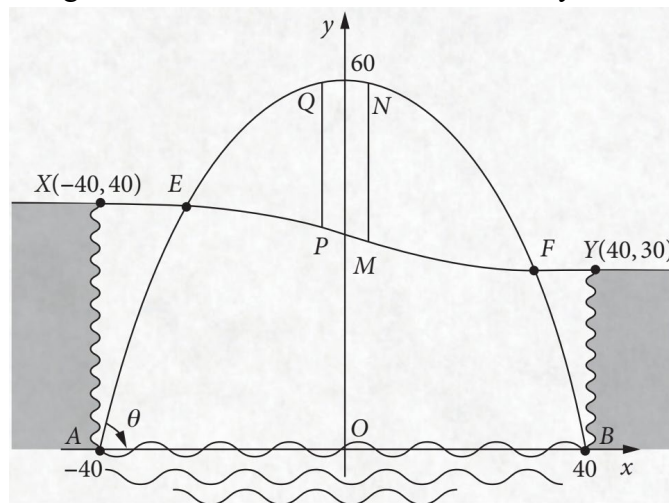
x	0	10000	30000	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$			

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $M(x)$ nhỏ nhất khi $x = 10000$.

Do đó, số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình thấp nhất là $x = 10000$ (cuốn).

Vậy chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản 10000 cuốn là: $M(10000) = 2,2$ (vạn đồng).

Câu 3: Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây.



CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y = \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35$

Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường XY . Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy ; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 49,5

Theo bài ra ta có: phương trình của Parabol là $y = 60 - \frac{3}{80}x^2$.

Khoảng cách giữa khung Parabol và đường xuyên núi là:

$$D = 60 - \frac{3}{80}x^2 - \left(\frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35 \right) \text{ với } x \in (-23,71; 27,99)$$

$$\text{Xét } D' = -\frac{3}{40}x - \frac{3x^2}{25600} + \frac{3}{16} = 0 \Leftrightarrow x = 2,49$$

Bảng biến thiên:

x	-23,71	2,49	27,99
D'(x)	+	0	-
D(x)			

Dựa vào bảng biến thiên, MN là đoạn có độ dài lớn nhất khi $x = 2,49$

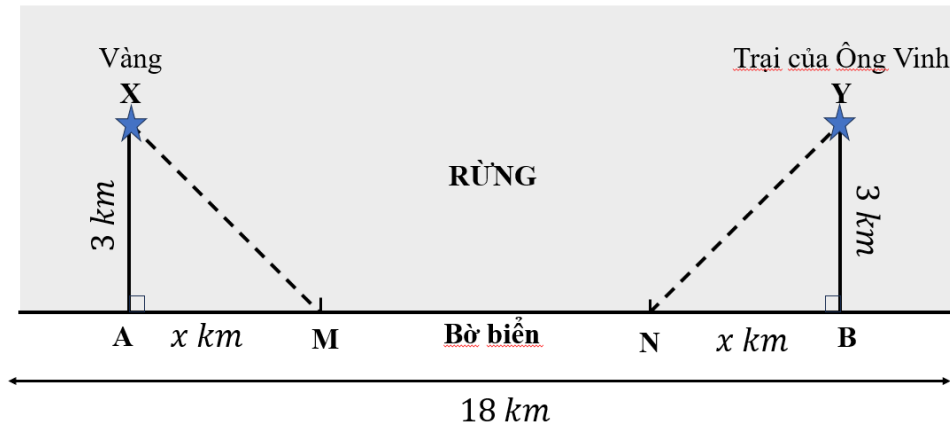
$$\Rightarrow MN = D_{MN} = 60 - \frac{3}{80} \cdot 2,49^2 - \left(\frac{2,49^3}{25600} - \frac{3 \cdot 2,49}{16} + 35 \right) \approx 25,23$$

Vì N và Q là hai điểm đối xứng qua $Oy \Rightarrow x_{PQ} \approx -2,49$

$$\Rightarrow PQ = D_{PQ} = 60 - \frac{3}{80} \cdot 2,49^2 - \left(\frac{-2,49^3}{25600} - \frac{3 \cdot -2,49}{16} + 35 \right) \approx 24,3$$

Tổng độ dài $MN + PQ = 49,5$.

Câu 4: Ông Vinh đang ở trong rừng để đào vàng. Anh ta tìm thấy vàng ở X , cách điểm A : 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của Ông Vinh nằm ở Y , cách điểm B : 3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 3$ km, $AM = NB = x$ km và $AX = BY = 3$ km. (Như hình vẽ sau)



Khi đang đào vàng, Ông Vinh bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50 \log(t + 2)$. Trong đó, y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông Vinh cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng và trên bãi biển với vận tốc lần lượt là 5 km/h và 13 km/h. Để về đến trại Ông Vinh cần chạy từ trong rừng qua điểm M, N trên bãi biển. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông Vinh về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 32,6

Để nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi thời gian di chuyển về đến trại thấp nhất.

Vậy nên Quỹ đường ông Vinh di chuyển về đến trại phải thấp nhất.

Quỹ đường của Ông Vinh

Theo bài ra ta có: ông Vinh sẽ đi qua các quỹ đường $XM + MN + NY$.

Ta có: $XM = NY = \sqrt{9 + x^2}$; $MN = 18 - 2x$

Thời gian Ông Vinh chạy đến Trại nghỉ là: $T(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{9 + x^2}}{5} + \frac{9 - x}{13} \right)$ với $x \in (0; 9)$

Xét $T'(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{9 + x^2}}{5} + \frac{9 - x}{13} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$ (thỏa mãn)

Bảng biến thiên:

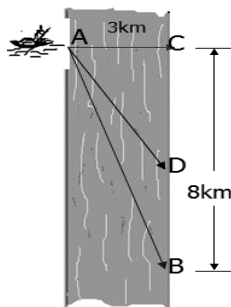
x	0	$\frac{5}{4}$	9
$T'(x)$	-	0	+
$T(x)$	$\frac{168}{65}$	$\frac{162}{65}$	$\frac{6\sqrt{10}}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $T(x)$ nhỏ nhất khi $x = \frac{5}{4}$.

$$\Rightarrow \min_{x \in (0,9)} T(x) = T\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{162}{65}$$

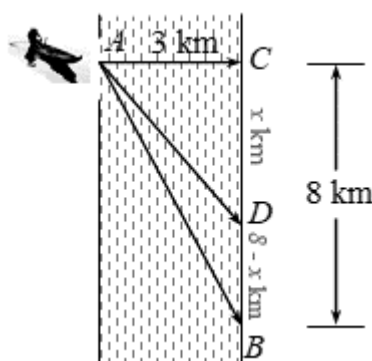
Vậy, nồng độ chất độc trong máu thấp nhất là $\min_{(0,+\infty)} y = 50 \log \left(\frac{162}{65} + 2 \right) \approx 32,6$

Câu 5: Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: phút) để người đàn ông đến B .



Lời giải

Trả lời: 80



Gọi x (km) là độ dài quãng đường CD , ($0 \leq x \leq 8$); $8 - x$ (km) là độ dài quãng đường DB .

Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AD = \sqrt{x^2 + 9}$ là: $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6}$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\frac{8 - x}{8}$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$ trên khoảng $[0; 8]$.

Ta có $f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 9} = 4x \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{9}{\sqrt{7}}$	8
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 80'$.

Câu 6: Cho hàm số $y = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Điểm M là điểm bất kỳ trên đồ thị (C) , tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = x_0 + 1 + \frac{1}{x_0 - 1}$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình là: $y = \left[1 - \frac{1}{(x_0 - 1)^2} \right] (x - x_0) + x_0 + 1 + \frac{1}{x_0 - 1}$ (*)

Gọi I là giao hai tiệm cận, tọa độ của $I(1; 2)$

Tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng $x = 1$ tại điểm $B \Rightarrow y_B = 2 \left(1 + \frac{1}{x_0 - 1} \right) \Leftrightarrow B \left(1; 2 + \frac{2}{x_0 - 1} \right)$

Tiếp tuyến cắt tiệm cận xiên $y = x + 1$ tại điểm A .

$\Rightarrow \left[1 - \frac{1}{(x_0 - 1)^2} \right] (x_A - x_0) + x_0 + 1 + \frac{1}{x_0 - 1} = x_A + 1 \Leftrightarrow x_A = 2x_0 - 1 \Rightarrow A(2x_0 - 1; 2x_0)$

□ Diện tích tam giác AIB là $S \Rightarrow S = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{2} \cdot IA \cdot IB$ (1)

Ta có: $\overline{IA} = (2x_0 - 2; 2x_0 - 2) \Rightarrow IA^2 = 8(x_0 - 1)^2 \Leftrightarrow IA = |x_0 - 1| 2\sqrt{2}$

$\overline{IB} = \left(0; \frac{2}{x_0 - 1} \right) \Rightarrow IB = \frac{2}{|x_0 - 1|} \Leftrightarrow IA \cdot IB = |x_0 - 1| \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{|x_0 - 1|} = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow S = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2$.

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

ĐỀ TEST 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

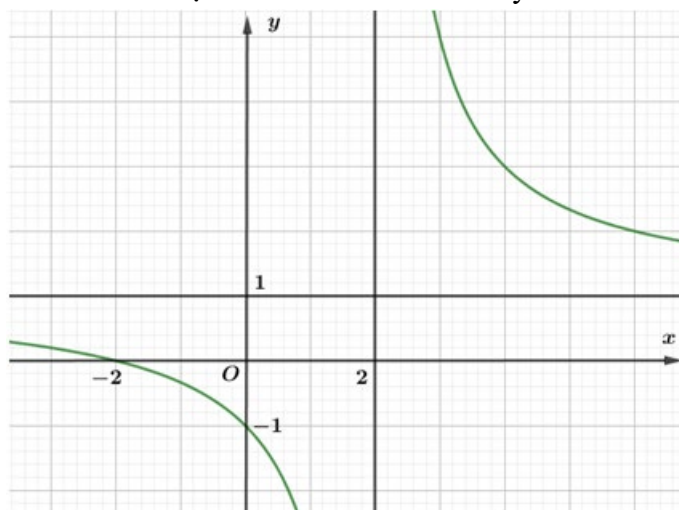
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	2	-4	$+\infty$

Bảng biến thiên trên là hàm số nào sau đây

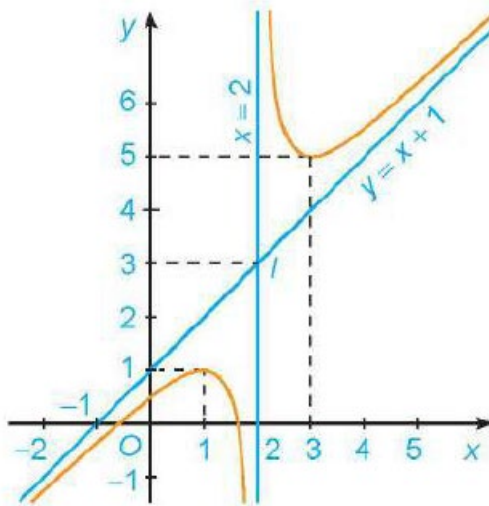
- A.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 2$. **C.** $y = x^4 + 3x^2 + 2$. **D.** $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Câu 2: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A.** $y = \frac{x-2}{x+2}$. **B.** $y = \frac{2x+4}{x-2}$. **C.** $y = \frac{x+1}{x-2}$. **D.** $y = \frac{x+2}{x-2}$.

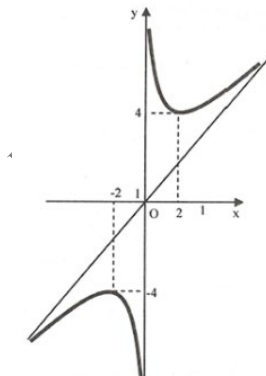
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau



Khẳng định nào sau đây SAI?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$.
- B. Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x + 1$.
- C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.
- D. Tọa độ giao điểm của đồ thị và trục Ox là $A(0;1)$.

Câu 4: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



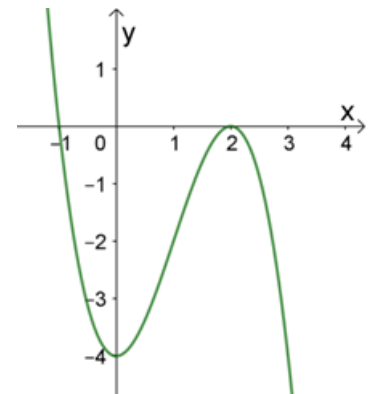
- A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.
- B. $y = x^4 - 2x^2$.
- C. $y = \frac{x^2 + 4}{x}$.
- D. $y = x^3 - 3x^2$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x-1}$. Tọa độ giao điểm của đồ thị và trục Oy là

- A. (2;0).
- B. (0;2).
- C. (4;0).
- D. (0;4).

Câu 6: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = \frac{x-1}{x}$.
- B. $y = x^3 + 3x^2 - 4$.
- C. $y = -x^3 + 3x - 4$.
- D. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.



Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$ và $y = 2x - 7$. Hai đồ thị cắt nhau tại

hai điểm thì tổng hoành độ hai giao điểm bằng

- A. 7.
- B. 5.
- C. 8.
- D. 11.

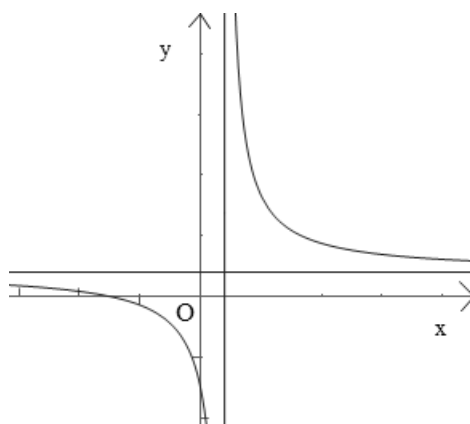
Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		2	$+\infty$		-4	$+\infty$

Số giao điểm của đường thẳng $y = 1$ và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d < 0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



- A. $a > 1, b > 0, c < 1$. B. $a > 1, b < 0, c > 1$. C. $a < 1, b > 0, c < 1$. D. $a > 1, b > 0, c > 1$.

Câu 10: Một công ty chuyên sản xuất thùng phi nhận được đơn đặt hàng với yêu cầu là thùng phi phải có dạng hình trụ và chứa được $16\pi(m^3)$ mỗi chiếc. Hỏi chiếc thùng phải có chiều cao h và bán kính đáy R bằng bao nhiêu để sản xuất ít tốn vật liệu nhất?

- A. $R = 4(m), h = 2(m)$. B. $R = 2(m), h = 4(m)$.
 C. $R = 2(m), h = 2(m)$. D. $R = 4(m), h = 4(m)$.

Câu 11: Gọi S là tập hợp các giá trị m để tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 + x - 3}{x - 1}$ tạo với hai trục hệ tọa độ Oxy một tam giác có diện tích bằng 2. Khi đó tổng các giá trị của S bằng

- A. $\frac{7}{2}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $-\frac{11}{2}$.

Câu 12: Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Đặt $f(t)$ gam/lít là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p (kết quả thể hiện dưới dạng số thập phân).

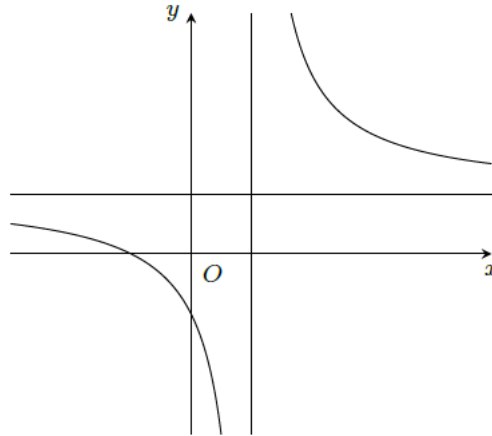
- A. $p = 0,4$. B. $p = 0,3$. C. $p = 0,2$. D. $p = 0,1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Khi đó

- a) Tập xác định của hàm số đã cho là $(0; +\infty)$.
- b) Đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $(0; 2)$.
- c) Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$.
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$ bằng 4.

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $y = \frac{bx - c}{x - a}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



- a) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- b) Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ âm.
- c) Giao điểm với trục hoành là điểm có hoành độ âm.
- d) Trong các số a, b, c có hai số âm.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ có đồ thị (C) . Khi đó

- a) Tập xác định của hàm số đã cho là \mathbb{R} .
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$ và có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.
- c) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng 4.
- d) Cho đường thẳng $y = mx - 2$. Khi đó có đúng 8 giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 10 để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = mx - 2$ tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía so với tiệm cận đứng của đồ thị (C) .

Câu 4: Cho hàm số $y = x - \frac{1}{x+1}$ có đồ thị là (C) .

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm điểm có hoành độ $M(0; -1)$ là $y = 2x - 1$.
- c) Tồn tại tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau.
- d) Để đường thẳng $y = k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA \perp OB$ thì k là nghiệm của phương trình $k^2 - k - 1 = 0$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

- Câu 1:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng bao nhiêu?
- Câu 2:** Cho hàm số $y = \frac{5x-3}{2x+6}$. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng và ngang lần lượt là các đường thẳng $x = a$ và $y = b$. Tính $a + 4b$?
- Câu 3:** Cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{5x^2 - 6x + 9}{x-1}$ có tâm đối xứng là $I(a;b)$. Giá trị của biểu thức $C = a + 3b$ là bao nhiêu?
- Câu 4:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) và $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (T) . Số giao điểm của (C) với (T) là?
- Câu 5:** Cho hàm số $y = f(x) = 2024^x - 2024^{-x} + x + \sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x+3) + f(x^3 - 4x + m) = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt?
- Câu 6:** Một cốc chứa 25 ml dung dịch $NaOH$ với nồng độ 100 mg/ml. Một bình chứa dung dịch $NaOH$ khác với nồng độ 9 mg/ml được trộn vào cốc. Gọi $C(x)$ là nồng độ của $NaOH$ sau khi trộn x (ml) từ bình chứa, ta thấy nồng độ của $NaOH$ trong cốc sẽ luôn giảm theo x nhưng luôn lớn hơn một số a . Tính a ?

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		↗ 2		↘ -4		↗ $+\infty$

Bảng biến thiên trên là hàm số nào sau đây

- A.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 2$. **C.** $y = x^4 + 3x^2 + 2$. **D.** $y = \frac{x+1}{x-2}$.

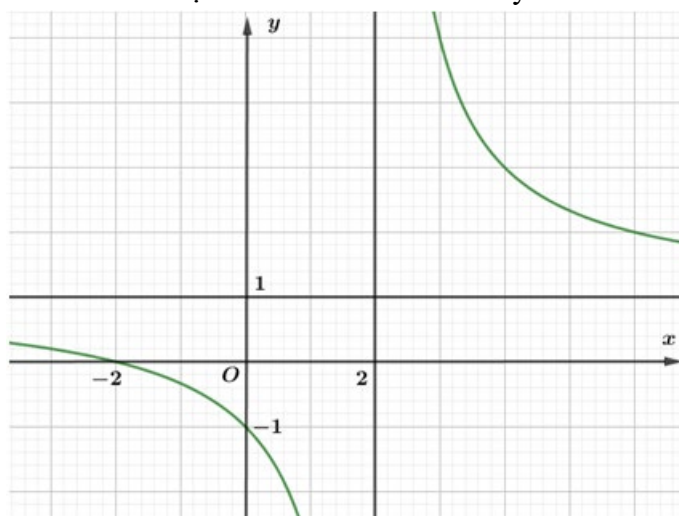
Lời giải

Đây là dáng điệu của hàm số bậc 3 nên ta loại $y = x^4 + 3x^2 + 2$ và $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Từ bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) = -\infty$ nên đáp án $y = x^3 - 3x^2 + 2$ thỏa mãn.

Câu 2: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A.** $y = \frac{x-2}{x+2}$. **B.** $y = \frac{2x+4}{x-2}$. **C.** $y = \frac{x+1}{x-2}$. **D.** $y = \frac{x+2}{x-2}$.

Lời giải

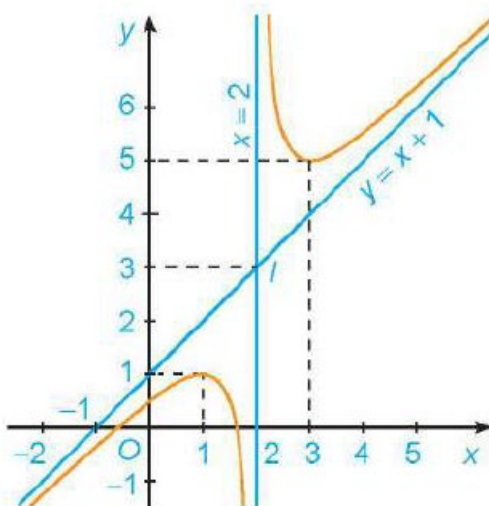
+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ có tiệm cận đứng là $x = -2$. Loại A

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x-2}$ có tiệm cận ngang là $y = 2$. Loại B

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-\frac{1}{2}$. Loại **C**.

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có tiệm cận ngang là $y = 1$, tiệm cận đứng $x = 2$, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 .

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau



Khẳng định nào sau đây SAI?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$.
- B. Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x + 1$.
- C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.
- D. Tọa độ giao điểm của đồ thị và trục Ox là $A(0;1)$.**

Lời giải

Căn cứ vào đồ thị ta có:

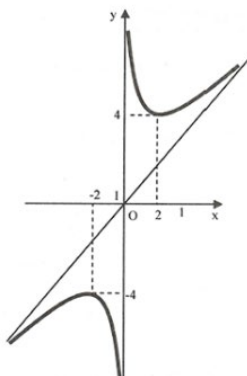
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x + 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.

Tọa độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và trục Ox là $A(x_0; 0)$ với $0 < x_0 < 1$.

Câu 4: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = x^4 - 2x^2$.

C. $y = \frac{x^2 + 4}{x}$.

D. $y = x^3 - 3x^2$.

Lời giải

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ không có tiệm cận xiên. Loại A

+) Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ không có tiệm cận xiên. Loại B

+) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ không có tiệm cận xiên. Loại D

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 4}{x}$ có tiệm cận xiên là $y = x$, tiệm cận đứng $x = 0$.

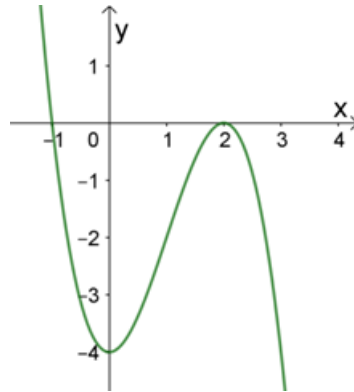
Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x-1}$. Tọa độ giao điểm của đồ thị và trục Oy là

- A. (2;0). B. (0;2). C. (4;0). **D. (0;4).**

Lời giải

Cho $x = 0$, ta được $y = \frac{2 \cdot 0 - 4}{0 - 1} = 4$. Tọa độ giao điểm với trục Oy là (0;4).

Câu 6: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = \frac{x-1}{x}$. B. $y = x^3 + 3x^2 - 4$. C. $y = -x^3 + 3x - 4$. **D. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.**

Lời giải

+) Hàm số $y = \frac{x-1}{x}$ không xác định tại $x = 0$. Loại A

+) Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ có hệ số $a = 1 > 0$. Loại B

+) Ta có $y = -x^3 + 3x - 4 \Rightarrow y' = -3x^2 + 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Hàm số có hai điểm cực trị $x = \pm 1$. Loại C

+) Ta có $y = -x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow y' = -3x^2 + 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Hàm số có hai điểm cực trị $x = 0, x = 2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$ và $y = 2x - 7$. Hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm thì tổng hoành độ hai giao điểm bằng

- A. 7. B. 5. C. 8. **D. 11.**

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $\frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} = 2x - 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 11x + 8 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{11 - \sqrt{89}}{2} \\ x_2 = \frac{11 + \sqrt{89}}{2} \end{cases}$$

suy ra, tổng hoành độ của hai giao điểm là: $x_1 + x_2 = \frac{11 - \sqrt{89}}{2} + \frac{11 + \sqrt{89}}{2} = 11$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau

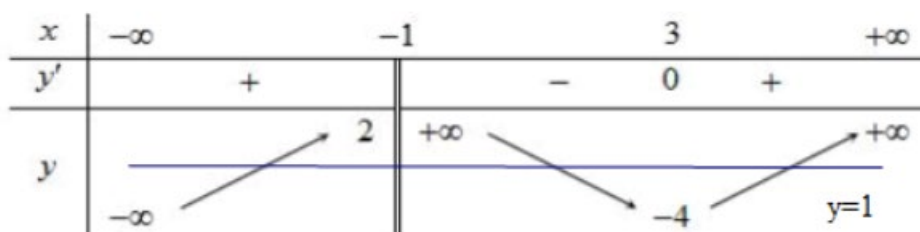
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	+		- 0 +	
y	$-\infty$	2	$+\infty$	$+\infty$

$-\infty \nearrow$ \searrow \nearrow
 $-\infty$ 2 $+\infty$ -4 $+\infty$

Số giao điểm của đường thẳng $y = 1$ và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là

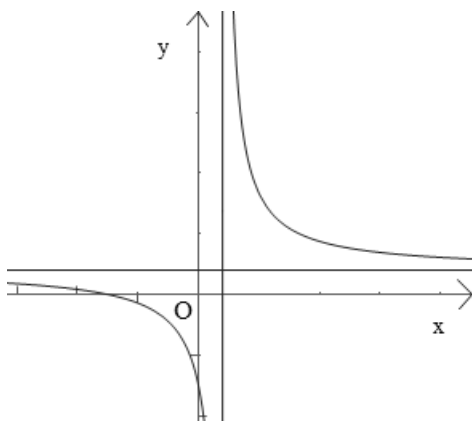
- A. 3.** **B. 2.** **C. 1.** **D. 0.**

Lời giải



Số giao điểm của đường thẳng $y = 1$ và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là 3.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d < 0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



- A.** $a > 1, b > 0, c < 1$. **B.** $a > 1, b < 0, c > 1$. **C.** $a < 1, b > 0, c < 1$. **D.** $a > 1, b > 0, c > 1$.

Lời giải

Theo bài ra, đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -\frac{d}{c-1}$.

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là: $y = \frac{a-1}{c-1}$.

Nhìn đồ thị ta thấy: $x = -\frac{d}{c-1} > 0$ mà $d < 0 \Rightarrow c-1 > 0 \Rightarrow c > 1$.

$y = \frac{a-1}{c-1} > 0 \Rightarrow a-1 > 0 \Rightarrow a > 1$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{b}{d} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 10: Một công ty chuyên sản xuất thùng phi nhận được đơn đặt hàng với yêu cầu là thùng phi phải có dạng hình trụ và chứa được $16\pi(m^3)$ mỗi chiếc. Hỏi chiếc thùng phải có chiều cao h và bán kính đáy R bằng bao nhiêu để sản xuất ít tốn vật liệu nhất?

- A. $R = 4(m), h = 2(m)$. B. $R = 2(m), h = 4(m)$.
 C. $R = 2(m), h = 2(m)$. D. $R = 4(m), h = 4(m)$.

Lời giải

Do thùng phi có dạng hình trụ nên:

$$V_{tru} = \pi R^2 h = 16\pi \Leftrightarrow h = \frac{16}{R^2} \quad (1)$$

Diện tích toàn phần của thùng phi là:

$$S_{Tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R(h + R) \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$S_{Tp} = 2\pi \left(\frac{16}{R} + R^2 \right) \Rightarrow S'_{Tp} = 2\pi \left(-\frac{16}{R^2} + 2R \right) = \frac{4\pi}{R^2} (R^3 - 8) \Rightarrow S'_{Tp} = 0 \Leftrightarrow R = 2$$

Bảng biến thiên

R	0	2	$+\infty$
S'(R)		-	+
S(R)			

Vậy để sản xuất thùng phi ít tốn vật liệu nhất thì $R = 2(m)$ và chiều cao là $h = 4(m)$.

Câu 11: Gọi S là tập hợp các giá trị m để tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 + x - 3}{x - 1}$ tạo với hai trục hệ tọa độ Oxy một tam giác có diện tích bằng 2. Khi đó tổng các giá trị của S bằng

- A. $\frac{7}{2}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

với $m = 0$ ta có $y = \frac{x-3}{x-1}$. Khi đó đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

với $m = 2$ ta có $y = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = 2x + 3$. Khi đó đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

với $m \neq 0; m \neq 2$ ta có $y = mx + m + 1 + \frac{m-2}{x-1}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - mx - m - 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{m-2}{x-1} = 0$ nên đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là

$$y = mx + m + 1.$$

Giao điểm của tiệm cận xiên với trục Ox là $\left(\frac{-m-1}{m}; 0 \right)$;

Giao điểm của tiệm cận xiên với trục Oy là $(0; m+1)$.

Đường tiệm cận xiên tạo thành một tam giác thì diện tích của tam giác:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |m+1| \cdot \left| \frac{-m-1}{m} \right| = 2 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 4|m| \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 1 = 4m; & \text{khi } m \geq 0 \\ m^2 + 2m + 1 = -4m; & \text{khi } m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 = 0; & \text{khi } m \geq 0 \\ m^2 + 6m + 1 = 0; & \text{khi } m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -3 + 2\sqrt{2} \\ m = -3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy tổng giá trị của S bằng $\frac{-11}{2}$.

Câu 12: Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Đặt $f(t)$ gam/lít là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p (kết quả thể hiện dưới dạng số thập phân).

- A.** $p = 0,4$. **B.** $p = 0,3$. **C.** $p = 0,2$. **D.** $p = 0,1$.

Lời giải

Sau t phút, trong bể chứa $(50t + 150)$ lít nước và $20t$ gam chất khử trùng.

Suy ra nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút là $f(t) = \frac{20t}{50t + 150}$ gam/lít.

Khảo sát sự biến thiên hàm số $f(t) = \frac{20t}{50t + 150}$, $t \geq 0$.

Ta có: $f'(t) = \frac{3000}{(50t + 150)^2} > 0, \forall t \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20t}{50t + 150} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20}{50 + \frac{150}{t}} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Bảng biến thiên

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	0	0,4

Dựa vào BBT ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng 0,4 gam/lít.

Vậy $p = 0,4$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Khi đó

- a) Tập xác định của hàm số đã cho là $(0; +\infty)$.
 b) Đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $(0; 2)$.

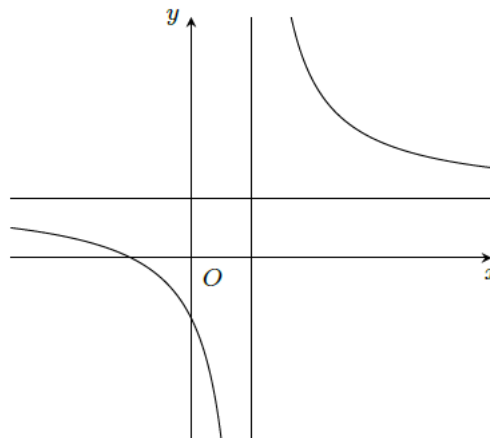
- c) Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$.
 d) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$ bằng 4.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

- a) **SAI** vì Tập xác định của hàm số đã cho là \mathbb{R} .
 b) **ĐÚNG**. Thay $x = 0$ ta được $y = 2$.
 c) **SAI**. Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Ta thấy $y'(0) = -3 \neq 0$. Suy ra hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 0$.
 d) **ĐÚNG**. Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1(TM); x = -1(KTM)$.
 $y(0) = 2; y(2) = 4; y(1) = 0$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$ bằng 4.

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $y = \frac{bx - c}{x - a}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



- a) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
 b) Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ âm.
 c) Giao điểm với trục hoành là điểm có hoành độ âm.
 d) Trong các số a, b, c có hai số âm.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

- a) **Đúng**.
 Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
 b) **Đúng**.
 Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ âm.
 c) **Đúng**.
 Giao điểm với trục hoành là điểm có hoành độ âm.
 d) **Sai**.
 Tiệm cận đứng $x = a > 0$.
 Tiệm cận ngang $y = b > 0$.
 Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ $\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c < 0$ (vì $a > 0$).

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ có đồ thị (C). Khi đó

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

- a) Tập xác định của hàm số đã cho là \mathbb{R} .
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$ và có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.
- c) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng 4.
- d) Cho đường thẳng $y = mx - 2$. Khi đó có đúng 8 giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 10 để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = mx - 2$ tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía so với tiệm cận đứng của đồ thị (C).

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) **SAI** vì Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) **ĐÚNG**. Dễ thấy tiệm cận đứng là $x = 2$. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x - 2} \right) = 0$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x - 2} \right) = 0$. Vậy phương trình tiệm cận xiên là $y = x$.

c) **ĐÚNG**. Ta có $y' = 1 - \frac{4}{(x-2)^2}$. Ta thấy $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 4$. $y(0) = -2; y(4) = 6$. Vậy tổng

các giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là $-2 + 6 = 4$.

d) **SAI**. Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = mx - 2$$

Dễ thấy phương trình không có nghiệm $x = 2$ nên phương trình tương đương

$$(m-1)x^2 - 2mx = 0.$$

Nếu $m = 1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$ (KTM).

Nếu $m \neq 1$, phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0; x = \frac{2m}{m-1}$.

Yêu cầu bài toán tương đương $\frac{2m}{m-1} > 2 \Leftrightarrow \frac{2}{m-1} > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn là 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.

Câu 4: Cho hàm số $y = x - \frac{1}{x+1}$ có đồ thị là (C).

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm điểm có hoành độ $M(0; -1)$ là $y = 2x - 1$.
- c) Tồn tại tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau.
- d) Để đường thẳng $y = k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA \perp OB$ thì k là nghiệm của phương trình $k^2 - k - 1 = 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) **Sai**.

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $x = -1$.

b) **Đúng**.

Đồ thị (C) cắt trục Oy tại $M(0; -1)$.

Ta có $y' = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(0) = 2$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = 2x - 1$.

c) Sai.

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại tiếp điểm $M_1(x_1; y_1)$ có hệ số góc $k_1 = y'(x_1) = 1 + \frac{1}{(x_1+1)^2} > 0$.

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại tiếp điểm $M_2(x_2; y_2)$ có hệ số góc $k_2 = y'(x_2) = 1 + \frac{1}{(x_2+1)^2} > 0$.

Khi đó $k_1 k_2 > 0$ nên không tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau.

d) Đúng.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị (C) và đường thẳng $y = k$ là

$$x - \frac{1}{x+1} = k \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + x - 1 = k(x+1). \end{cases} \quad (I)$$

Nhận thấy $x = -1$ không thỏa mãn (1) nên (I) $\Leftrightarrow x^2 + (1-k)x - 1 - k = 0$. (2)

Phương trình (2) có $\Delta = (1-k)^2 + 4(1+k) = k^2 + 2k + 5 = (k+1)^2 + 4 > 0, \forall k$.

Do đó, đường thẳng $y = k$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; k), B(x_B; k)$ với x_A, x_B là nghiệm của phương trình (2).

Theo Vi-et thì $x_A x_B = -1 - k$.

Ta có $OA \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A x_B + k^2 = 0 \Leftrightarrow -1 - k + k^2 = 0$.

Vậy $OA \perp OB$ thì k là nghiệm của phương trình $k^2 - k - 1 = 0$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -2

Ta có BBT:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Vậy $y_{CT} = -2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{5x-3}{2x+6}$. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng và ngang lần lượt là các đường thẳng $x = a$ và $y = b$. Tính $a + 4b$?

Lời giải

Trả lời: 7

Ta có $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{5x-3}{2x+6} = -\infty; \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{5x-3}{2x+6} = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-3}{2x+6} = \frac{5}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-3}{2x+6} = \frac{5}{2}.$$

Do đó đồ thị hàm số nhận các đường thẳng $x = -3$ và $y = \frac{5}{2}$ là các tiệm cận đứng và ngang

Như vậy, $a = -3; b = \frac{5}{2} \Rightarrow a + 4b = -3 + 4 \cdot \frac{5}{2} = 7$

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{5x^2 - 6x + 9}{x-1}$ có tâm đối xứng là $I(a;b)$. Giá trị của biểu thức $C = a + 3b$ là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 13

Ta có $f(x) = 5x - 1 + \frac{8}{x-1}$ nên đồ thị hàm số nhận hai đường thẳng $x = 1$ và $y = 5x - 1$ tương ứng là TCD và TCX. Suy ra $a = 1, b = 4 \Rightarrow C = 1 + 3 \cdot 4 = 13$.

Câu 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) và $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (T). Số giao điểm của (C) với (T) là?

Lời giải

Trả lời: 2

Xét phương trình hoành độ giao điểm: (ĐK $x \neq 1$)

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow (x+2)(x-1)^2 - \frac{x+2}{x-1} = 0 \\ \Leftrightarrow (x+2) \cdot \left((x-1)^2 - \frac{1}{x-1} \right) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ (x-1)^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2(TM) \\ x=2(TM) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy số giao điểm của (C) với (T) là 2.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = 2024^x - 2024^{-x} + x + \sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x+3) + f(x^3 - 4x + m) = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt?

Lời giải

Trả lời: 3

Hàm số $y = f(x) = 2024^x - 2024^{-x} + x + \sin x$ xác định trên \mathbb{R} và

$$f(-x) = 2024^{-x} - 2024^x - x - \sin x = -f(x)$$

, suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

Mặt khác, $y' = f'(x) = 2024^x \cdot \ln 2024 + 2024^{-x} \cdot \ln 2024 + 1 + \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $f(x)$ đồng biến trên \mathbb{R} .

Khi đó, phương trình

$$f(x+3) + f(x^3 - 4x + m) = 0 \Leftrightarrow f(x+3) = -f(x^3 - 4x + m)$$

$$\Leftrightarrow f(x+3) = f(-x^3 + 4x - m) \Leftrightarrow x+3 = -x^3 + 4x - m$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 3 = -m$$

Đặt $g(x) = x^3 - 3x + 3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 3$.

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+			
y	$-\infty$			↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 3$ tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow 1 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < -1$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa đề.

Câu 6: Một cốc chứa 25 ml dung dịch $NaOH$ với nồng độ 100 mg/ml. Một bình chứa dung dịch $NaOH$ khác với nồng độ 9 mg/ml được trộn vào cốc. Gọi $C(x)$ là nồng độ của $NaOH$ sau khi trộn x (ml) từ bình chứa, ta thấy nồng độ của $NaOH$ trong cốc sẽ luôn giảm theo x nhưng luôn lớn hơn một số a . Tính a ?

Lời giải

Trả lời: 9

Tổng khối lượng của $NaOH$ sau khi trộn x (ml) là: $25 \cdot 100 + 9x = 2500 + 9x$ (mg)

Tổng thể tích của dung dịch sau khi trộn là: $25 + x$.

Ta có $C(x) = \frac{2500 + 9x}{25 + x}; x \geq 0$.

Ta có TXĐ của hàm số là $D = [0; +\infty)$

Có $C'(x) = \frac{9 \cdot (25 + x) - (2500 + 9x)}{(25 + x)^2} = \frac{-2275}{(25 + x)^2} < 0, \forall x \in D$

Lại có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2500 + 9x}{25 + x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2500}{x} + 9}{\frac{25}{x} + 1} = 9$

Do đó nồng độ $NaOH$ luôn giảm nhưng luôn lớn hơn 9 mg/ml.

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 5. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

ĐỀ TEST 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Thể tích V (đơn vị: cm^3) của 1kg nước tại nhiệt độ T (đơn vị: $^{\circ}C$) được tính bởi hàm số $V(T)$, $T \in [0;30]$. Biết hàm số $V(T)$ có bảng biến thiên như sau

T	0	T_1	30
$V'(T)$	-	0	+
$V(T)$	$V(0)$	$V(T_1)$	$V(30)$

Với $T_1 \approx 3,97^{\circ}C$. Hỏi thể tích $V(T)$ giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

- A. $(0;3,97)$. B. $(0;5)$ C. $(0;10)$. D. $(0;30)$.

Câu 2: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi hàm số $y = G(x)$. Trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng nào để độ giảm huyết áp của bệnh nhân tăng biết hàm số $y = G(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0	20	$+\infty$
$G'(x)$	+	0	-
$G(x)$		100	

- A. $(0;30)$. B. $(20;30)$. C. $(0;25)$. D. $(0;20)$.

Câu 3: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế nhận thấy tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t là $f(t) = -3t^2 + 90t$, $t = 0,1,2,\dots,25$. Xác định khoảng thời gian mà tốc độ truyền bệnh giảm?

- A. $(15;25)$. B. $(0;10)$ C. $(10;15)$. D. $(0;15)$.

Câu 4: Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần). Hỏi số người bị nhiễm bệnh tăng trong khoảng thời gian nào?

- A. $(0;10)$ B. $(0;8)$. C. $(8;10)$. D. $(8;12)$.

Câu 5: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$ với $t \geq 0$ (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, khoảng thời gian nào vận tốc của vật tăng?

- A. (0;5). B. (0;4). C. (4;10). D. (3;10).

Câu 6: Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin 12V được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Hỏi công suất P tăng trong khoảng cường độ dòng điện nào?

- A. (0;20). B. (4;20). C. (12; +∞). D. (0;12).

Câu 7: Để giảm nhiệt độ trong phòng từ $28^{\circ}C$, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị $^{\circ}C$) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$. Trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động, nhiệt độ trong phòng tăng hay giảm?

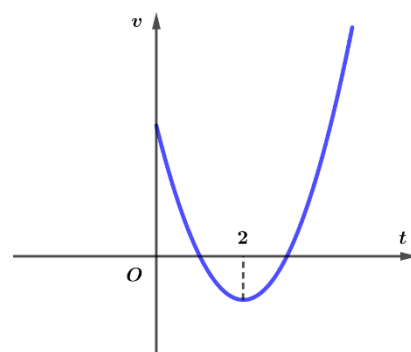
- A. Tăng. B. Giảm. C. Tăng rồi giảm. D. Giảm rồi tăng

Câu 8: Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả cá trong khoảng nào trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để số gam tăng?

- A. (0;20). B. (0;30). C. (12; +∞). D. (0;12).

Câu 9: Cho một chất điểm có đồ thị biểu diễn vận tốc theo thời gian như hình minh họa. Hỏi vận tốc của chất điểm giảm trong khoảng thời gian nào sau đây?

- A. $t \in (0;2)$. B. $t \in (0; +\infty)$
C. $t \in (2; +\infty)$. D. $t \in \mathbb{R}$.



Câu 10: Một doanh nghiệp sản xuất với số lượng là x sản phẩm và thu được lợi nhuận $f(x)$ được biểu thị bởi bảng xét dấu như sau. Hỏi doanh nghiệp sản xuất bao nhiêu sản phẩm trở đi thì lợi nhuận bắt đầu giảm?

x	0	20	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-

- A. 20. B. 0 C. 750. D. 15850.

Câu 11: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12(cm). Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau cạnh x (cm), rồi gập tấm nhôm lại thành một hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích là $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như hình sau. Thể tích của hình hộp chữ nhật giảm xuống khi nào ?

x	0	2	6	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	128		0

- A. 128. B. 2 C. 6. D. 0.

Câu 12: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục. Hỏi vận tốc của chất điểm tăng khi t thuộc khoảng nào dưới đây, biết rằng vận tốc của chất điểm được xác định theo bảng biến thiên sau :

t	0	2	$+\infty$
$v'(t)$	-	0	+
$v(t)$	9	-3	$+\infty$

- A. $(2; +\infty)$. B. $(0; 2)$ C. $(0; +\infty)$. D. $(-3; +\infty)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu hỏi, học sinh chọn Đúng hoặc Sai.

Câu 1: Tại một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nhân viên phụ trách sản xuất cho biết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất x (m^3) nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 5 triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; 0,0005 x^2 chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất x (m^3) sản phẩm mỗi ngày và $\bar{c}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó

- a) $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$.
 b) Chi phí sản xuất $100m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.
 c) $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$.
 d) Chi phí trung bình giảm xuống khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày không vượt quá $100m^3$.

Câu 2: Khi nuôi tôm thẻ trong ao, một kỹ sư thủy sản đã thống kê được nếu mỗi mét vuông mặt ao thả x con tôm giống thì cuối mỗi vụ con tôm có cân nặng trung bình là $108 - x^2$ (gam).

- a) Sau mỗi vụ khối lượng tôm trung bình trong mỗi mét vuông mặt ao là $(108 - x^2)x$.
 b) Khi thả 10 con tôm giống / m^2 thì lượng tôm thu được là $0,8 \text{ kg} / m^2$.
 c) Để sản lượng tôm lớn nhất thì nên thả 6 con tôm / m^2 .
 d) Để lượng tôm thu được tăng lên thì mật độ tôm giống thả vào ao là từ 6 đến 10 con / m^2 .

Câu 3: Một vật chuyển động theo hàm số $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t$ (m), với $t \geq 0$ và t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và $s(t)$ là vị trí của vật tại thời điểm $t(s)$.

- a) Quãng đường mà vật chuyển động được tại thời điểm $t = 3(s)$ là $27(m)$.
 b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 1(s)$ là $6(m/s)$.
 c) Tại thời điểm vật đạt vận tốc $v(t) = 18(m/s)$ thì quãng đường đi được từ khi bắt đầu chuyển động là $6(m)$.
 d) Vận tốc của vật tăng trong thời gian từ $t = 0(s)$ đến $t = 1(s)$.

Câu 4: Nhân ngày quốc tế Phụ nữ 8 – 3 năm 2024. Ông M đã mua tặng vợ một món quà và đặt nó trong một chiếc hộp chữ nhật có thể tích là 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Để món quà trở nên đặc biệt và xứng tầm với giá trị của nó, ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, biết rằng độ dày của lớp mạ trên mọi điểm của chiếc hộp là không đổi và như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là h và x .

a) Công thức tính thể tích chiếc hộp là $V = x^2 h$.

b) Diện tích các mặt ngoài của chiếc hộp là $S = 2x^2 + 4xh$.

c) Diện tích tất cả các mặt được mạ vàng là $S_{MV} = 2x^2 + 4xh$.

d) Khi cạnh đáy của chiếc hộp x lớn hơn 4 thì x càng lớn, lượng vàng được mạ càng tăng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Một nhóm các nhà nghiên cứu vi sinh vật học đã tiến hành khảo nghiệm tại một làng quê địa phương với đối tượng là vi khuẩn Ecoli gây dịch tả ở người. Các nhà nghiên cứu đã tính toán được mô hình lây lan của chúng được biểu diễn theo hàm số $P(t) = -2t^3 + 24t^2 + 5, 0 \leq t \leq 14$, trong đó P là số người bị nhiễm bệnh (đơn vị: chục người) và t là thời gian (tuần). Biết đạo hàm $P'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của vi khuẩn (còn được gọi là tốc độ truyền bệnh). Kể từ tuần thứ bao nhiêu thì tốc độ lây lan của vi khuẩn bắt đầu giảm.

Câu 2: Biết khối lượng $q(kg)$ của quả vải thiều Lục Ngạn mà cửa tiệm hoa quả bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 56 - \frac{1}{3}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng này ở cửa tiệm được tính theo công thức $D = p.q$. Chủ cửa hàng thấy rằng, ở giai đoạn đầu nếu giảm giá thì doanh thu sẽ tăng, nhưng đến mức giá lớn hơn p_0 thì doanh thu bắt đầu giảm. Tìm giá trị p_0 .

Câu 3: Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Cứ sau mỗi vụ, người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá cân nặng $P(n) = 540 - 18n$ (gam). Vậy thả cá từ bao nhiêu con trở đi trên một đơn vị diện tích của mặt hồ thì sản lượng cá giảm?

Câu 4: Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng mỗi tháng thì mỗi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Thu nhập của công ty bắt đầu giảm từ lần tăng giá thứ mấy?

Câu 5: Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải từ một nhà máy. Người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{x^2 - mx + 9}{9x - 9m}$ (tỉ đồng). Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m để chi phí cần bỏ ra giảm liên tục mà vẫn loại bỏ được chất gây ô nhiễm lớn 50% và nhỏ hơn 53%.

Câu 6: Giá sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = 500(t^2 + me^{-t})$, với $t \geq 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, $m \leq 0$ là tham số. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm, khi đó giá trị nhỏ nhất của m bằng bao nhiêu?

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Thể tích V (đơn vị: cm^3) của 1kg nước tại nhiệt độ T (đơn vị: $^{\circ}C$) được tính bởi hàm số $V(T)$, $T \in [0;30]$. Biết hàm số $V(T)$ có bảng biến thiên như sau

T	0	T_1	30
$V'(T)$	-	0	+
$V(T)$	$V(0)$	$V(T_1)$	$V(30)$

Với $T_1 \approx 3,97^{\circ}C$. Hỏi thể tích $V(T)$ giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

- A. $(0; 3,97)$. B. $(0; 5)$ C. $(0; 10)$. D. $(0; 30)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra, thể tích $V(T)$ giảm trong khoảng nhiệt độ từ $0^{\circ}C$ đến $3,97^{\circ}C$.

Câu 2: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi hàm số $y = G(x)$. Trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng nào để độ giảm huyết áp của bệnh nhân tăng biết hàm số $y = G(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0	20	$+\infty$
$G'(x)$	+	0	-
$G(x)$		100	

- A. $(0; 30)$. B. $(20; 30)$. C. $(0; 25)$. D. $(0; 20)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(0; 20)$ thì độ giảm huyết áp của bệnh nhân tăng.

Câu 3: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế nhận thấy tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t là $f(t) = -3t^2 + 90t$, $t = 0, 1, 2, \dots, 25$. Xác định khoảng thời gian mà tốc độ truyền bệnh giảm?

- A. $(15; 25)$. B. $(0; 10)$ C. $(10; 15)$. D. $(0; 15)$.

Lời giải

Ta có $f'(t) = -6t + 90 = 0 \Leftrightarrow t = 15$.

Bảng biến thiên

t	0	15	25
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	675	375

Từ bảng biến thiên ta thấy tốc độ truyền bệnh giảm trong khoảng thời gian $(15; 25)$.

- Câu 4:** Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần). Hỏi số người bị nhiễm bệnh tăng trong khoảng thời gian nào?
A. (0;10) **B.** (0;8). **C.** (8;10). **D.** (8;12).

Lời giải

Ta có $N'(t) = -3t^2 + 24t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 8 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

	0		8		12
$N'(t)$	0	+	0	-	
$N(t)$		256			
	0				0

Từ bảng biến thiên ta thấy số người bị nhiễm bệnh tăng trong khoảng thời gian (0;8).

- Câu 5:** Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$ với $t \geq 0$ (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, khoảng thời gian nào vận tốc của vật tăng?
A. (0;5). **B.** (0;4). **C.** (4;10). **D.** (3;10).

Lời giải

Ta có vận tốc của vật $v(t) = S'(t) = -t^2 + 8t + 9$, $t \in (0;10)$

$v'(t) = -2t + 8$. Xét $v'(t) = 0 \Rightarrow t = 4 \in (0;10)$

Bảng biến thiên:

	0		4		10
v'		+	0	-	
v		25			
	$v(0)$				$v(10)$

Từ bảng biến thiên ta có trong khoảng thời gian (0;4) thì vận tốc của vật tăng.

- Câu 6:** Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin 12V được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Hỏi công suất P tăng trong khoảng cường độ dòng điện nào?
A. (0;20). **B.** (4;20). **C.** (12; $+\infty$). **D.** (0;12).

Lời giải

Xét hàm số $P = 12I - 0,5I^2$ với $I \geq 0$.

Ta có $P' = 12 - I \Rightarrow P' = 0 \Leftrightarrow I = 12$.

Bảng biến thiên:

I	0	12	$+\infty$
P		↗ 72 ↘	

Từ bảng biến thiên ta có công suất P tăng trong khoảng cường độ dòng điện $(0;12)$.

Câu 7: Để giảm nhiệt độ trong phòng từ $28^{\circ}C$, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị $^{\circ}C$) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$. Trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động, nhiệt độ trong phòng tăng hay giảm?

- A. Tăng. B. Giảm. C. Tăng rồi giảm. D. Giảm rồi tăng.

Lời giải

Xét hàm số $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$.

$$T' = -0,024t^2 - 0,16 < 0, \forall t \in [1;10].$$

Suy ra hàm số T nghịch biến trên đoạn $[1;10]$ nhiệt độ trong phòng giảm.

Câu 8: Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả cá trong khoảng nào trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để số gam tăng?

- A. $(0;20)$. B. $(0;30)$. C. $(12;+\infty)$. D. $(0;12)$.

Lời giải

Sau một vụ, trung bình số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ cân nặng:

$$f(n) = nP(n) = 480n - 20n^2 \text{ (gam)}.$$

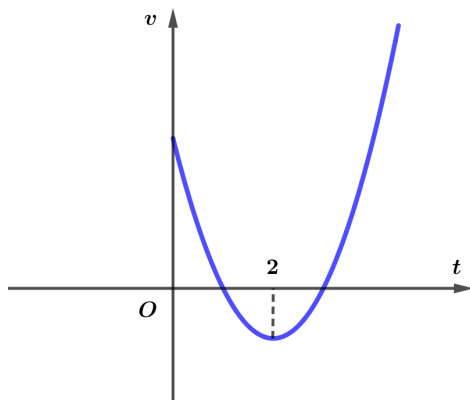
$$f'(n) = 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$$

Bảng biến thiên:

n	0	12	$+\infty$
$f'(n)$		+ 0 -	
$f(n)$		↗ $f(12)$ ↘	

Từ bảng biến thiên ta có: trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ, thả cá trong khoảng $(0;12)$ thì số gam tăng

Câu 9: Cho một chất điểm có đồ thị biểu diễn vận tốc theo thời gian như hình minh họa. Hỏi vận tốc của chất điểm giảm trong khoảng thời gian nào sau đây?



- A. $t \in (0; 2)$. B. $t \in (0; +\infty)$ C. $t \in (2; +\infty)$. D. $t \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có vận tốc của chất điểm giảm khi $t \in (0; 2)$.

Câu 10: Một doanh nghiệp sản xuất với số lượng là x sản phẩm và thu được lợi nhuận $f(x)$ được biểu thị bởi bảng xét dấu như sau. Hỏi doanh nghiệp sản xuất bao nhiêu sản phẩm trở đi thì lợi nhuận bắt đầu giảm?

x	0	20	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-

- A. 20. B. 0 C. 750. D. 15850.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, khi $x = 20$ thì lợi nhuận của doanh nghiệp đạt giá trị lớn nhất, và từ sản phẩm thứ 21 thì lợi nhuận của doanh nghiệp sẽ giảm.

Câu 11: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 (cm). Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau cạnh x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại thành một hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích là $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như hình sau. Thể tích của hình hộp chữ nhật giảm xuống khi nào ?

x	0	2	6	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	128	0	

- A. 128. B. 2 C. 6. D. 0.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, khi $x \in (2; 6)$ (cm) thì thể tích hình hộp chữ nhật giảm đi.

Câu 12: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục. Hỏi vận tốc của chất điểm tăng khi t thuộc khoảng nào dưới đây, biết rằng vận tốc của chất điểm được xác định theo bảng biến thiên sau :

t	0	2	$+\infty$
$v'(t)$	-	0	+
$v(t)$	9	-3	$+\infty$

A. $(2; +\infty)$.

B. $(0; 2)$

C. $(0; +\infty)$.

D. $(-3; +\infty)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có vận tốc chất điểm tăng khi $t \in (2; +\infty)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu hỏi, học sinh chọn Đúng hoặc Sai.

Câu 1: Tại một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nhân viên phụ trách sản xuất cho biết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất x (m^3) nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 5 triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0005x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất x (m^3) sản phẩm mỗi ngày và $\bar{c}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó

a) $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$.

b) Chi phí sản xuất $100m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.

c) $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$.

d) Chi phí trung bình giảm xuống khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày không vượt quá $100m^3$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Chi phí mỗi ngày là tổng các chi phí nên $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$ (triệu đồng).

b) Khi $x = 100$, ta có $C(100) = 0,0005 \times 100^2 + 0,15 \times 100 + 5 = 25$.

c) Chi phí trung bình trên mỗi khối sản phẩm là

$$\bar{c}(x) = \frac{0,0005x^2 + 0,15x + 5}{x} = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$$

d) Xét hàm số $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$, $0 < x \leq 200$.

$$\text{Ta có } \bar{c}'(x) = \frac{5}{10^4} - \frac{5}{x^2}, \bar{c}'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10^4 \Rightarrow x = 100 \text{ (do } x \in (0; 200])$$

BBT

x	0	100	200
$\bar{c}'(x)$		- 0 +	
$\bar{c}(x)$	$+\infty$	0,25	0,275

Vậy chi phí trung bình giảm khi hàm số $\bar{c}(x)$ nghịch biến, tức là $x \in (0;100)$.

Câu 2: Khi nuôi tôm thẻ trong ao, một kỹ sư thủy sản đã thống kê được nếu mỗi mét vuông mặt ao thả x con tôm giống thì cuối mỗi vụ con tôm có cân nặng trung bình là $108 - x^2$ (gam).

a) Sau mỗi vụ khối lượng tôm trung bình trong mỗi mét vuông mặt ao là $(108 - x^2)x$.

b) Khi thả 10 con tôm giống / m^2 thì lượng tôm thu được là $0,8 \text{ kg} / m^2$.

c) Để sản lượng tôm lớn nhất thì nên thả 6 con tôm / m^2 .

d) Để lượng tôm thu được tăng lên thì mật độ tôm giống thả vào ao là từ 6 đến 10 con / m^2 .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) Khối lượng tôm trung bình trong mỗi mét vuông ao nuôi là $M(x) = (108 - x^2)x$.

b) Khi $x = 10$, $M(10) = 10 \cdot 8 = 80 \text{ (gam)} = 0,08 \text{ kg}$.

c) Để tôm phát triển được, $x > 0$; $x^2 \leq 108$ nên $0 < x \leq 10,39$.

Xét hàm số $M(x) = (108 - x^2)x = -x^3 + 108x$.

Có $M'(x) = -3x^2 + 108 = -3(x^2 - 36)$; $M'(x) = 0 \Rightarrow x = 6$.

Ta có BBT

x	0	6	10,39
$M'(x)$		+ 0 -	
$M(x)$	0	432	0

Để sản lượng tôm lớn nhất thì nên thả 6 con tôm / m^2 .

d) Lượng tôm thu được tăng lên khi hàm số $M(x)$ đồng biến. Dựa vào bảng biến thiên ta có $x \in (0;6)$, hay mật độ tôm không quá 6 con / m^2 .

Câu 3: Một vật chuyển động theo hàm số $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t$ (m), với $t \geq 0$ và t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và $s(t)$ là vị trí của vật tại thời điểm t (s).

a) Quãng đường mà vật chuyển động được tại thời điểm $t = 3$ (s) là 27 (m).

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 1$ (s) là 6 (m/s).

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

c) Tại thời điểm vật đạt vận tốc $v(t) = 18(m/s)$ thì quãng đường đi được từ khi bắt đầu chuyển động là $6(m)$.

d) Vận tốc của vật tăng trong thời gian từ $t = 0(s)$ đến $t = 1(s)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Tại thời điểm $t = 3(s)$ thì quãng đường $s(3) = 3^3 - 3.3^2 + 9.3 = 27(m)$. Mệnh đề đúng.

b) Ta có: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9$. Tại thời điểm $t = 1(s)$ thì $v(1) = 3.1^2 - 6.1 + 9 = 6(m/s)$. Mệnh đề đúng.

c) Khi $v(t) = 3t^2 - 6t + 9 = 18 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow t = 3$.

Tại thời điểm $t = 3(s)$ thì quãng đường $s(3) = 3^3 - 3.3^2 + 9.3 = 27(m)$. Mệnh đề sai.

d) Ta có: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9$.

Xét hàm số $y = v(t) = 3t^2 - 6t + 9$ có $y' = 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

BBT

x	0	1	$+\infty$	
y'		-	0	+
y	9		6	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có vận tốc $v(t)$ giảm trong khoảng thời gian từ $t = 0(s)$ đến $t = 1(s)$. Mệnh đề sai.

Câu 4: Nhân ngày quốc tế Phụ nữ 8 – 3 năm 2024. Ông M đã mua tặng vợ một món quà và đặt nó trong một chiếc hộp chữ nhật có thể tích là 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Để món quà trở nên đặc biệt và xứng tầm với giá trị của nó, ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, biết rằng độ dày của lớp mạ trên mọi điểm của chiếc hộp là không đổi và như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là h và x .

a) Công thức tính thể tích chiếc hộp là $V = x^2h$.

b) Diện tích các mặt ngoài của chiếc hộp là $S = 2x^2 + 4xh$.

c) Diện tích tất cả các mặt được mạ vàng là $S_{Mv} = 2x^2 + 4xh$.

d) Khi cạnh đáy của chiếc hộp x lớn hơn 4 thì x càng lớn, lượng vàng được mạ càng tăng.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Thể tích khối hộp chữ nhật $V = x.x.h = x^2h$. Mệnh đề đúng.

b) Chiếc hộp có 1 mặt đáy là hình vuông cạnh x và có 4 mặt bên là hình chữ nhật kích thước x và h . Vậy diện tích các mặt ngoài của chiếc hộp là: $S_{xq} = x^2 + 4xh$. Mệnh đề sai.

c) Vì mạ vàng trên mọi điểm của chiếc hộp nên mạ cả mặt trong và mặt ngoài.

Vậy $S_{MV} = 2S = 2(x^2 + 4xh) = 2x^2 + 8xh$. Mệnh đề sai.

d) Ta có thể tích chiếc hộp: $V = x^2h = 32$ (đvtt), với $x, h > 0$. Suy ra $h = \frac{32}{x^2}$.

Phần mạ vàng của chiếc hộp: $S = 2x^2 + 8xh = 2x^2 + 8x \cdot \frac{32}{x^2} = 2x^2 + \frac{256}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 + \frac{256}{x}$ với $x > 0$.

Ta có $f'(x) = 4x - \frac{256}{x^2} = \frac{4x^3 - 256}{x^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 256 \Leftrightarrow x = 4$; $f(4) = 96$.

BBT

x		0	4	$+\infty$	
$f'(x)$			-	0	+
$f(x)$		$+\infty$		96	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy khi $x > 4$ hàm số $f(x)$ tăng. Vậy lượng vàng được mạ tăng.
Mệnh đề đúng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Một nhóm các nhà nghiên cứu vi sinh vật học đã tiến hành khảo nghiệm tại một làng quê địa phương với đối tượng là vi khuẩn Ecoli gây dịch tả ở người. Các nhà nghiên cứu đã tính toán được mô hình lây lan của chúng được biểu diễn theo hàm số $P(t) = -2t^3 + 24t^2 + 5$, $0 \leq t \leq 14$, trong đó P là số người bị nhiễm bệnh (đơn vị: chục người) và t là thời gian (tuần). Biết đạo hàm $P'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của vi khuẩn (còn được gọi là tốc độ truyền bệnh). Kể từ tuần thứ bao nhiêu thì tốc độ lây lan của vi khuẩn bắt đầu giảm.

Lời giải

$$P'(t) = -6t^2 + 48t$$

$$P''(t) = -12t + 48 = 0 \Leftrightarrow t = 4.$$

$$P'(0) = 0; P'(4) = 96; P'(14) = -504.$$

t	0	4	14
$P''(t)$	+	0	-
$P'(t)$	0	96	-504

Vậy kể từ tuần thứ 5 trở đi, tốc độ lây lan của vi khuẩn bắt đầu giảm.

Câu 2: Biết khối lượng q (kg) của quả vải thiều Lục Ngạn mà cửa tiệm hoa quả bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 56 - \frac{1}{3}q$. Doanh thu từ việc

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

bán mặt hàng này ở cửa tiệm được tính theo công thức $D = p.q$. Chủ cửa hàng thấy rằng, ở giai đoạn đầu nếu giảm giá thì doanh thu sẽ tăng, nhưng đến mức giá lớn hơn p_0 thì doanh thu bắt đầu giảm. Tìm giá trị p_0 .

Lời giải

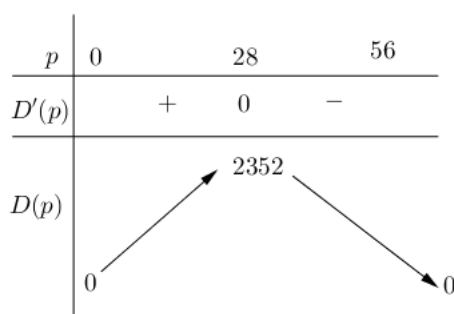
$$p = 56 - \frac{1}{3}q \Leftrightarrow q = 168 - 3p.$$

$$D = p.q = p.(168 - 3p) = -3p^2 + 168p.$$

$$D = -3p^2 + 168p$$

$$D' = -6p + 168 = 0 \Leftrightarrow p = 28.$$

$$D(28) = 2352$$



Vậy $p_0 = 28$.

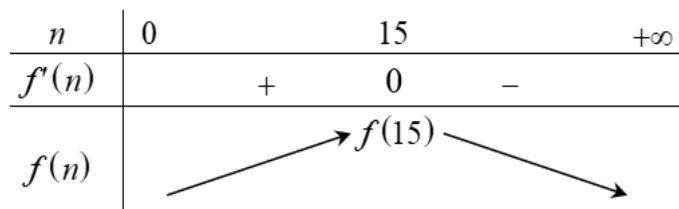
Câu 3: Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Cứ sau mỗi vụ, người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá cân nặng $P(n) = 540 - 18n$ (gam). Vậy thả cá từ bao nhiêu con trở đi trên một đơn vị diện tích của mặt hồ thì sản lượng cá giảm?

Lời giải

Sau mỗi vụ, trung bình sản lượng cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ là $f(n) = nP(n) = 540n - 18n^2$ (gam)

$$\text{Ta có } f'(n) = 540 - 36n = 0 \Leftrightarrow n = 15$$

BBT



Thả cá từ 16 con trở đi trên một đơn vị diện tích của mặt hồ thì sản lượng cá giảm.

Câu 4: Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng mỗi tháng thì mỗi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Thu nhập của công ty bắt đầu giảm từ lần tăng giá thứ mấy?

Lời giải

Gọi số lần tăng giá tiền cho thuê mỗi căn hộ một tháng để công ty thu được thu nhập cao nhất là x (lần) ($0 \leq x \leq 30$; x là số nguyên).

Số tiền cho thuê mỗi căn hộ là $2 + 0,1x$ (triệu đồng)

Số căn hộ mỗi tháng được thuê là $150 - 5x$ (căn hộ)

Thu nhập của công ty đạt được là $(2+0,1x)(150-5x)$

Đặt $f(x) = (2+0,1x)(150-5x)$ là thu nhập của công ty.

$$f'(x) = 0,1 \cdot (150-5x) - 5(2+0,1x) = 15 - 0,5x - 10 - 0,5x = 5 - x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

x	0	5	30
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$f(5)$	

$f(0)$ $f(5)$ $f(30)$

Do hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;5)$, nên thu nhập của công ty sẽ bắt đầu giảm từ lần tăng giá thứ 6.

Câu 5: Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải từ một nhà máy. Người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{x^2 - mx + 9}{9x - 9m}$ (tỉ đồng). Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m để chi phí cần bỏ ra giảm liên tục mà vẫn loại bỏ được chất gây ô nhiễm lớn 50% và nhỏ hơn 53%.

Lời giải

Xét hàm số $y = C(x) = \frac{x^2 - mx + 9}{9x - 9m}$; $50 < x < 53$.

$$\Rightarrow y' = \frac{9x^2 - 18mx + 9m^2 - 81}{(9x - 9m)^2}$$

Để chi phí cần bỏ ra giảm liên tục mà vẫn loại bỏ được chất gây ô nhiễm lớn 50% và nhỏ hơn 53%, thì $y' \leq 0, \forall x \in (50;53)$. Suy ra $\begin{cases} 9x^2 - 18mx + 9m^2 - 81 \leq 0, \forall x \in (50;53) & (1) \\ 9x - 9m \neq 0, \forall x \in (50;53) & (2) \end{cases}$

Từ (1): gọi $g(x) = 9x^2 - 18mx + 9m^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 3 \\ x = m + 3 \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$m-3$	$m+3$	$+\infty$
$g(x)$		+	0 -	0 +

Từ bảng xét dấu $9x^2 - 18mx + 9m^2 - 81 \leq 0, \forall x \in (50;53) \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 \leq 50 \\ m+3 \geq 53 \end{cases} \Leftrightarrow 50 \leq m \leq 53 \quad (3)$.

Từ (2): $9x - 9m \neq 0, \forall x \in (50;53) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 50 \\ m \geq 53 \end{cases} \quad (4)$.

Từ (3) và (4) ta có được $m = 50; m = 53$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Tổng các giá trị của m là 103.

Câu 6: Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = 500(t^2 + me^{-t})$, với $t \geq 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, $m \leq 0$ là tham số. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm, khi đó giá trị nhỏ nhất của m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f'(t) = 500(2t - me^{-t})$.

$$f''(t) = 500(2 + me^{-t})$$

Tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm. $\Leftrightarrow f'(t)$ là hàm số đồng biến trên $[0;10] \Leftrightarrow f''(t) \geq 0, \forall t \in [0;10]$

$$\Leftrightarrow 500(2 + me^{-t}) \geq 0, \forall t \in [0;10]$$

$$\Leftrightarrow 2 + me^{-t} \geq 0, \forall t \in [0;10]$$

$$\Leftrightarrow me^{-t} \geq -2, \forall t \in [0;10]$$

$$\Leftrightarrow m \geq -2e^t, \forall t \in [0;10]$$

$$\Leftrightarrow m \geq -2e^0 = -2 \text{ (do hàm số } y = -2e^t \text{ nghịch biến trên } [0;10]).$$

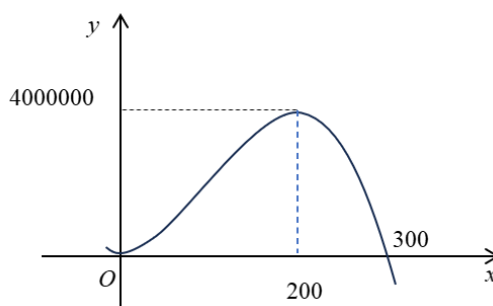
Vậy giá trị nhỏ nhất của m là -2 .

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 5. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ ĐỀ TEST 02

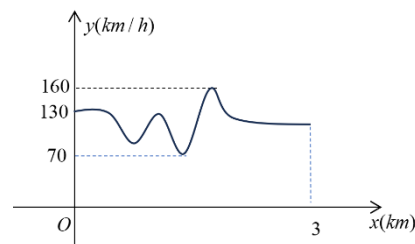
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một doanh nghiệp dự kiến lợi nhuận khi sản xuất x sản phẩm ($0 \leq x \leq 300$) được cho bởi hàm số $y = -x^3 + 300x^2$ (đơn vị: đồng) và được minh họa bằng đồ thị ở hình bên dưới. Cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để doanh nghiệp thu được lợi nhuận cao nhất?



- A. 4000000. B. 300
C. 200. D. 150.

Câu 2: Đồ thị bên dưới là tốc độ của một chiếc xe đua trên đoạn đường đua bằng phẳng dài 3 km. Tốc độ nhỏ nhất của xe đua trên đoạn đường này bằng



- A. 3 km / h. B. 160 km / h
C. 130 km / h. D. 70 km / h.

Câu 3: Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hóa nào đó là $C(x) = 27900 + 100x - 1,5x^2 + 0,025x^3$. Khi đó hàm chi phí biên tương ứng là

- A. $C'(x) = 28000 - 3x + 0,075x^2$. B. $C'(x) = 100 - 3x + 0,075x^2$.
C. $C'(x) = 100 + 3x + 0,075x^2$. D. $C'(x) = 28000 + 3x + 0,075x^2$.

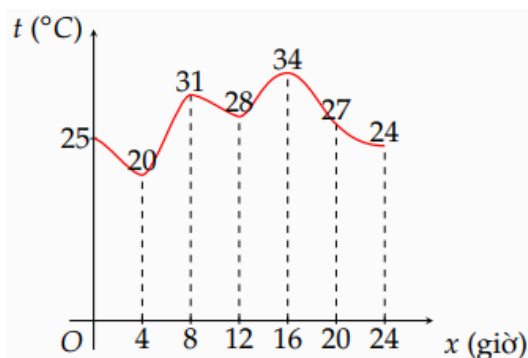
Câu 4: Một cửa hàng bán dầu muốn đóng những thùng đựng dầu có thể tích không đổi bằng $V = 30\text{dm}^3$, thùng có dạng hình hộp chữ nhật có nắp; đáy là hình vuông cạnh x dm ($x > 0$). Trên thị trường, giá nguyên vật liệu làm đáy và nắp thùng là 120 000 đồng/ m^2 , giá nguyên vật liệu làm mặt xung quanh của thùng là 100 000 đồng/ m^2 . Chi phí để cửa hàng làm một thùng đựng dầu được cho bởi công thức (đơn vị nghìn đồng)?

- A. $f(x) = \frac{12}{5}x^2 + \frac{120}{x}$. B. $f(x) = 24x^2 + \frac{120}{x}$. C. $f(x) = 2x^2 + \frac{120}{x}$. D. $f(x) = 24x^2 + \frac{1200}{x}$.

Câu 5: Một công ty sản xuất một sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán là $p(x) = 1000 - 25x$, trong đó $p(x)$ (triệu đồng) là giá bán của mỗi sản phẩm mà tại giá bán này có x sản phẩm được bán ra. Khi đó hàm doanh thu của công ty là

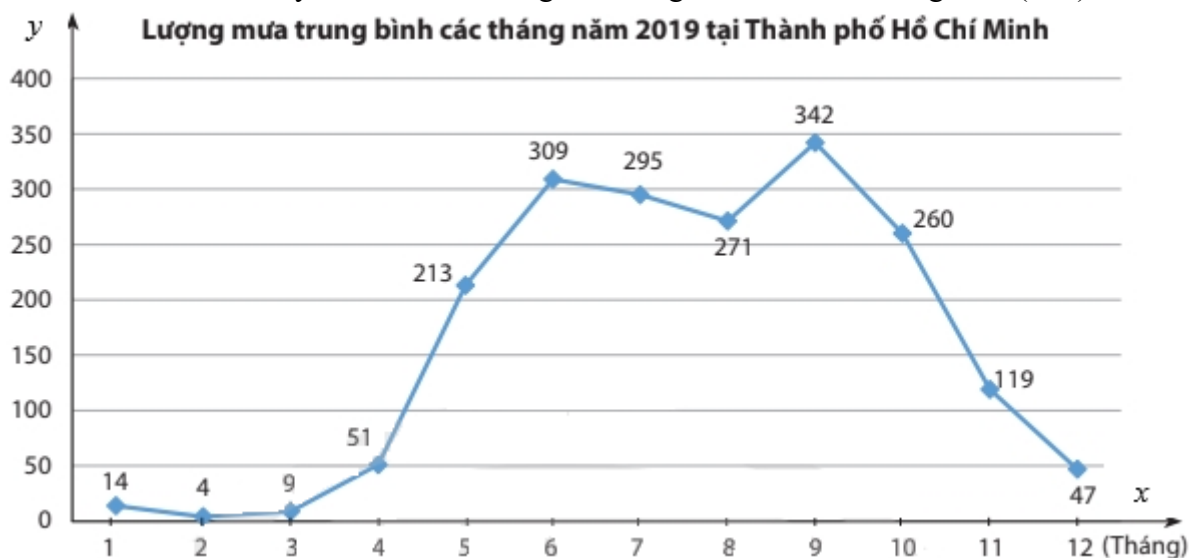
- A. $f(x) = 1000x - 25x^2$. B. $f(x) = 1000x + 25x^2$. C. $f(x) = 25x^2 - 1000x$. D. $f(x) = 1000 - 25x^2$.

Câu 10: Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày. Thời điểm nào trong ngày có nhiệt độ thấp nhất ?



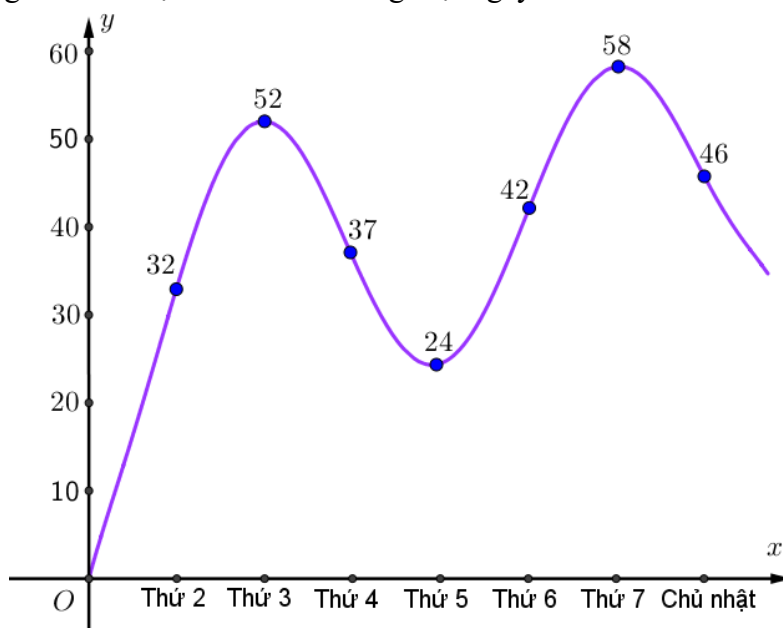
- A. 4 h. B. 0 h.
C. 2 h. D. 6 h.

Câu 11: Hình bên cho biết lượng mưa trung bình các tháng năm 2019 tại Thành phố Hồ Chí Minh đo theo đơn vị milimet. Hãy cho biết vào tháng nào trong năm 2019 thì lượng mưa (mm) là cao nhất ?



- A. Tháng 6. B. Tháng 8. C. Tháng 9. D. Tháng 10.

Câu 12: Một cửa hàng trà sữa có đồ thị biểu diễn số ly trà sữa bán được trong một tuần như sau. Số ly trà sữa cửa hàng đó bán được nhiều nhất trong một ngày là bao nhiêu



- A. 62 ly. B. 52 ly. C. 68 ly. D. 58 ly.

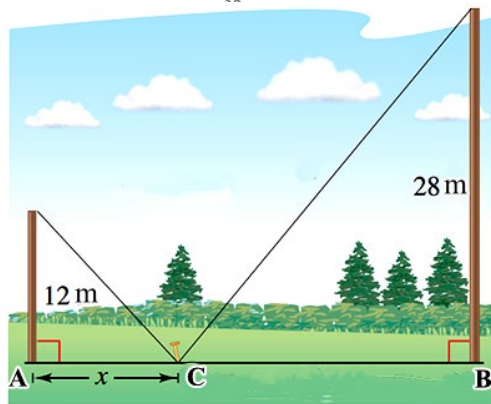
PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu hỏi, học sinh chỉ chọn Đúng hoặc Sai.

Câu 1: Để làm một cửa sổ có dạng một hình bán nguyệt và một hình chữ nhật ghép lại như hình vẽ bên dưới, người ta dùng 8 m dây thép để làm các đường viền. Gọi x, y là độ dài cạnh của khung hình chữ nhật.



- a) Chiều dài dây để uốn ra bán nguyệt là $\frac{\pi x}{2}$.
- b) Giá trị của y tính theo x là $4 - \frac{x(4 + \pi)}{4}$.
- c) Diện tích của cửa sổ là $S = 4x - x^2$.
- d) Khi diện tích của cửa sổ lớn nhất thì $y = \frac{16}{8 + \pi}$.

Câu 2: Có hai cây cột, một cây cao 12 m và một cây cao 28 m đứng cách nhau 30 m. Chúng được giữ bằng hai sợi dây, gắn vào một cọc duy nhất nổi từ mặt đất đến đỉnh mỗi cột. Gọi x là khoảng cách từ cột cao 12 m đến cọc.

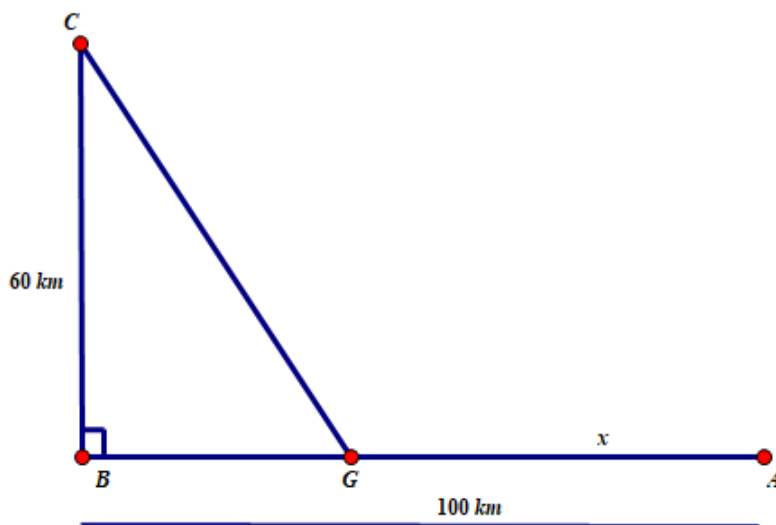


- a) Để tổng chiều dài của dây ngắn nhất thì $x \in (0; 30)$.
- b) Chiều dài sợi dây nối từ cọc đến đỉnh cột cao 28 m là $\sqrt{1684 + x^2}$.
- c) Tổng chiều dài của dây là $\sqrt{144 + x^2} + \sqrt{1684 - 60x + x^2}$.
- d) Tổng chiều dài ngắn nhất của dây là 48,5 m.

Câu 3: Dân số của một quốc gia sau t (năm) bắt đầu từ năm 2023 được tính theo công thức $N(t) = 100e^{0,012t}$ (trong đó $N(t)$ được tính bằng triệu người, $0 \leq t \leq 50$)

- a) Dân số của quốc gia này ở năm 2030 vượt mức 110 triệu người.
- b) Dân số của quốc gia này ở năm 2035 vượt mức 115 triệu người.
- c) Vào năm 2030 thì tốc độ tăng dân số là 1,6 triệu người/năm.
- d) Vào năm 2026 thì tốc độ tăng dân số là 1,6 triệu người/năm.

Câu 4: Đường dây điện 110KV kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết $BC = 60\text{km}$, $AB = 100\text{km}$, góc $\widehat{ABC} = 90^\circ$, như hình vẽ. Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là 5000USD, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là 3000USD. Đặt $x = AG$.



- Khi $x = 20\text{ km}$ thì đường dây điện nối từ C về G dài 100 km .
- Khi $x = 20\text{ km}$ thì tổng chi phí mắc điện là 560.000USD.
- Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x = 50\text{ km}$.
- Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất là 540.000USD.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Từ một miếng tôn dạng nửa hình tròn có bán kính $R = 4\text{ dm}$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là bao nhiêu?

Câu 2: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

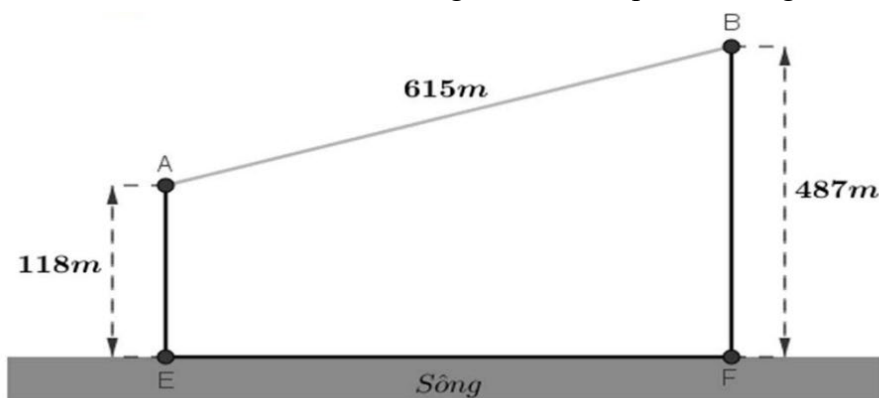
$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét.

Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

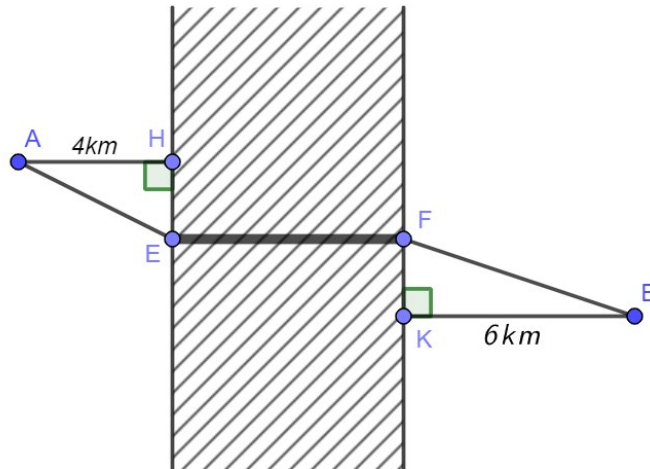
Hỏi lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm trong một ngày?

Câu 3: Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.

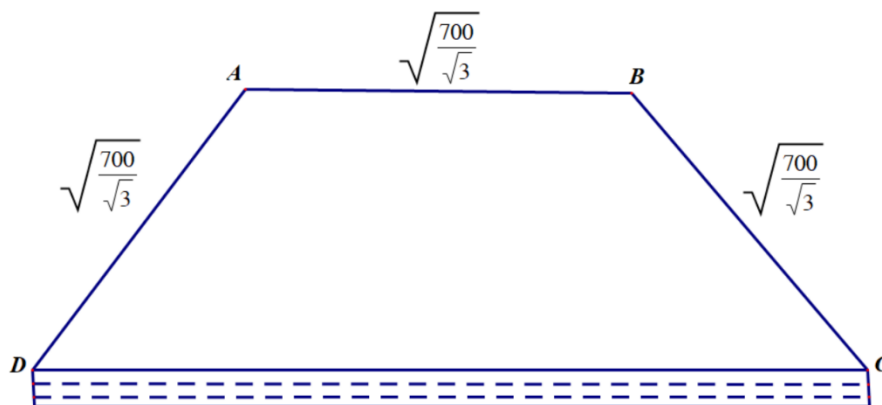


Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất là số nguyên dương mà người đó có thể đi là bao nhiêu?

Câu 4: Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là $4km$ và thành phố B cách con sông một khoảng là $6km$ (hình vẽ), biết $HE + KF = 20km$ và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố A là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? (kết quả làm tròn đến phần chục)



Câu 5: Bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $\sqrt{\frac{700}{\sqrt{3}}}$ (m) và muốn rào một khu vườn có dạng hình thang cân $ABCD$ như trong hình vẽ. Khu vườn có 3 mặt rào, mặt còn lại tiếp giáp với bờ sông nên không cần rào. Hỏi diện tích lớn nhất mà bác nông dân có thể rào được là bao nhiêu mét vuông?



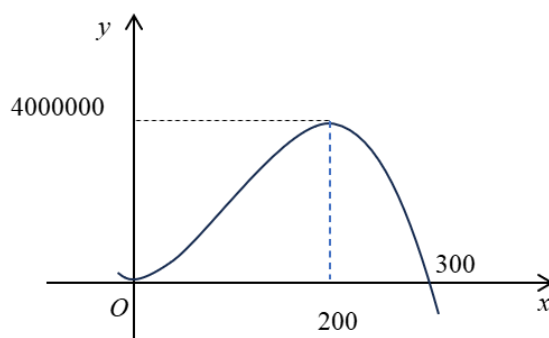
Câu 6: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có lợi nhuận cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu (đơn vị tính bằng triệu đồng và làm tròn kết quả tới hàng phần trăm)?

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một doanh nghiệp dự kiến lợi nhuận khi sản xuất x sản phẩm ($0 \leq x \leq 300$) được cho bởi hàm số $y = -x^3 + 300x^2$ (đơn vị: đồng) và được minh họa bằng đồ thị ở hình bên dưới.



Cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để doanh nghiệp thu được lợi nhuận cao nhất?

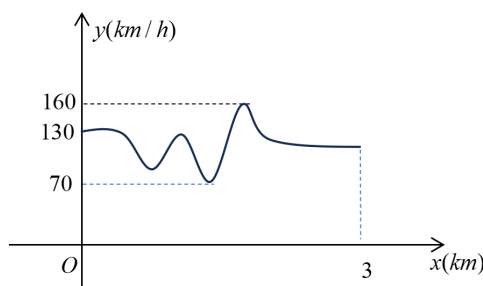
- A. 4000000. B. 300 C. 200. D. 150.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có giá trị lớn nhất bằng 4000000 khi $x = 200$.

Do đó cần sản xuất 200 sản phẩm thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận cao nhất.

Câu 2: Đồ thị bên dưới là tốc độ của một chiếc xe đua trên đoạn đường đua bằng phẳng dài 3 km.



Tốc độ nhỏ nhất của xe đua trên đoạn đường này bằng

- A. 3 km/h. B. 160 km/h C. 130 km/h. D. 70 km/h.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy tốc độ nhỏ nhất bằng 70 km/h.

Câu 3: Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hóa nào đó là $C(x) = 27900 + 100x - 1,5x^2 + 0,025x^3$. Khi đó hàm chi phí biên tương ứng là

- A. $C'(x) = 28000 - 3x + 0,075x^2$. B. $C'(x) = 100 - 3x + 0,075x^2$.
 C. $C'(x) = 100 + 3x + 0,075x^2$. D. $C'(x) = 28000 + 3x + 0,075x^2$.

Lời giải

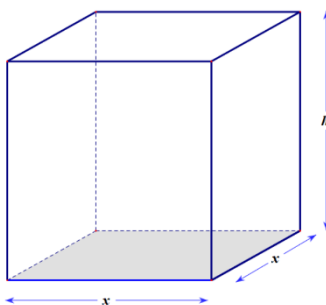
Hàm chi phí biên tương ứng là: $C'(x) = 100 - 3x + 0,075x^2$.

Câu 4: Một cửa hàng bán dầu muốn đóng những thùng đựng dầu có thể tích không đổi bằng $V = 30\text{dm}^3$, thùng có dạng hình hộp chữ nhật có nắp; đáy là hình vuông cạnh x dm ($x > 0$). Trên thị trường, giá nguyên vật liệu làm đáy và nắp thùng là 120 000 đồng/ m^2 , giá nguyên vật liệu làm mặt xung quanh của thùng là 100 000 đồng/ m^2 . Chi phí để cửa hàng làm một thùng đựng dầu được cho bởi công thức (đơn vị nghìn đồng)?

- A. $f(x) = \frac{12}{5}x^2 + \frac{120}{x}$. B. $f(x) = 24x^2 + \frac{120}{x}$.

C. $f(x) = 2x^2 + \frac{120}{x}$. D. $f(x) = 24x^2 + \frac{1200}{x}$.

Lời giải



Thể tích của thùng $V = 30 \text{ dm}^3$, vì x ($x > 0$, đơn vị dm) là cạnh đáy của thùng (hình vuông) nên chiều cao của thùng là: $h = \frac{V}{x^2} = \frac{30}{x^2}$.

Giá nguyên vật liệu làm đáy và nắp thùng là 1 200 đồng/ dm^2 , giá nguyên vật liệu làm mặt xung quanh của thùng là 1 000 đồng/ dm^2 .

Diện tích mặt đáy, nắp thùng và diện tích xung quanh lần lượt là: $x^2; x^2; 4xh$. Chi phí làm một thùng đựng dầu là:

$$f(x) = 2.1.200.x^2 + 1.4xh = 2.4x^2 + \frac{120}{x} = \frac{12}{5}x^2 + \frac{120}{x} \text{ (đơn vị nghìn)}.$$

Câu 5: Một công ty sản xuất một sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán là $p(x) = 1000 - 25x$, trong đó $p(x)$ (triệu đồng) là giá bán của mỗi sản phẩm mà tại giá bán này có x sản phẩm được bán ra. Khi đó hàm doanh thu của công ty là

A. $f(x) = 1000x - 25x^2$.

B. $f(x) = 1000x + 25x^2$.

C. $f(x) = 25x^2 - 1000x$.

D. $f(x) = 1000 - 25x^2$.

Lời giải

Ta có khi có x sản phẩm được bán ra thì giá bán là $p(x) = 1000 - 25x$, do đó doanh thu của cửa hàng khi bán ra x sản phẩm là $f(x) = x.p(x) = 1000x - 25x^2$.

Câu 6: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $1 \leq x \leq 18$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 20x + 500$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 320 nghìn đồng/mét. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hãy viết biểu thức tính $L(x)$ theo x

A. $L(x) = 320x$.

B. $L(x) = -x^3 + 6x^2 + 300x - 500$.

C. $L(x) = x^3 - 6x^2 - 300x + 500$.

D. $L(x) = x^3 - 6x^2 + 340x + 500$.

Lời giải

Khi bán x mét vải lụa:

Số tiền thu được là: $B(x) = 320x$ (nghìn đồng).

Lợi nhuận thu được là: $L(x) = B(x) - C(x) = -x^3 + 6x^2 + 300x - 500$ (nghìn đồng).

Câu 7: Giả sử một công ty du lịch bán tour với giá là x (triệu đồng)/khách thì doanh thu sẽ được biểu diễn qua hàm số $f(x) = -200x^2 + 550x$. Công ty phải bán giá tour cho một khách là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất (làm tròn tới hàng phần trăm).

- A.** 1,38 triệu. **B.** 1,37 triệu. **C.** 1,3 triệu. **D.** 1,2 triệu.

Lời giải

Doanh thu là $f(x) = -200x^2 + 550x$.

Ta có $f'(x) = -400x + 550$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{8}$.

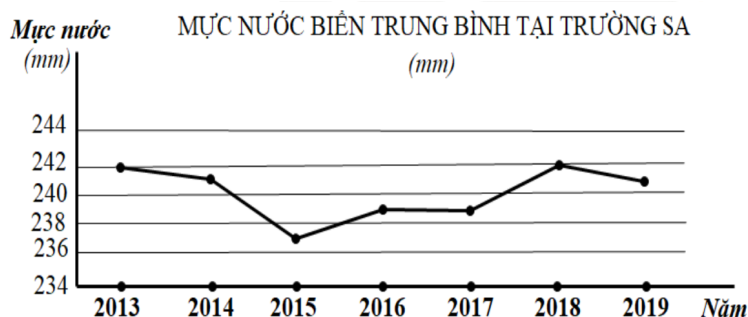
Bảng biến thiên

x	0	$\frac{11}{8}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$			$\frac{3025}{8}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{11}{8} = 1,375$.

Vậy công ty cần bán tour với giá 1,38 triệu đồng/khách thì doanh thu sẽ cao nhất.

Câu 8: Mức nước biển trung bình tại trường sa từ năm 2013 đến năm 2019 được cho bởi biểu đồ trong hình bên dưới.



Trong khoảng thời gian từ năm 2016 đến năm 2019, năm nào mực nước biển trung bình tại trường sa cao nhất ?

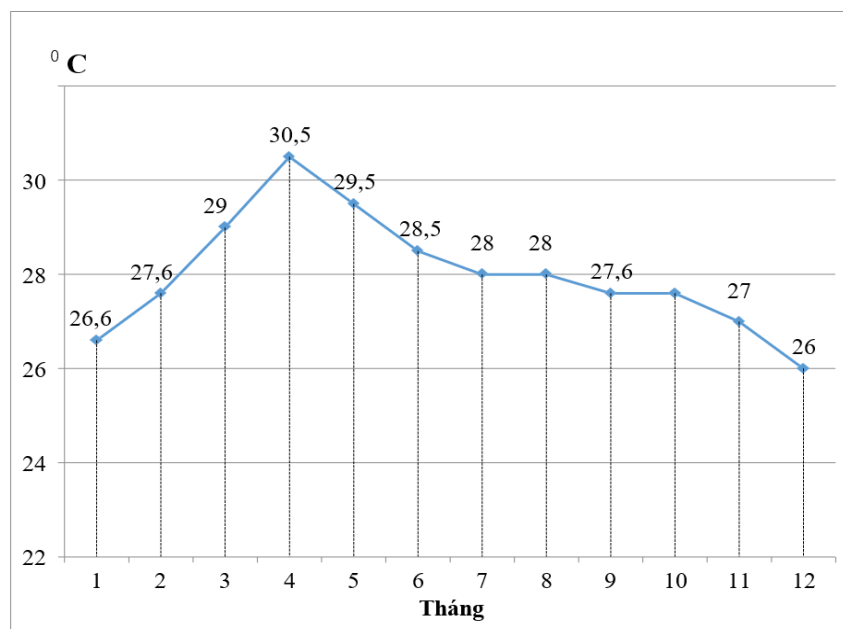
- A.** 2013. **B.** 2018. **C.** 2015. **D.** 2019.

Lời giải

Nhìn vào biểu đồ ta thấy, tại năm 2018 mực nước biển trung bình tại trường sa cao nhất bằng 242 mm.

Câu 9: Hình vẽ cho biết nhiệt độ trung bình các tháng năm 2020 tại Thành phố Hồ Chí Minh đo bằng đơn vị $^{\circ}C$. Hãy cho biết trong năm 2020 tại Thành phố Hồ Chí Minh thì nhiệt độ trung bình của tháng nào cao nhất, nhiệt độ trung bình của tháng nào thấp nhất?

Nhiệt độ trung bình các tháng năm 2020 tại TPHCM ($^{\circ}C$)

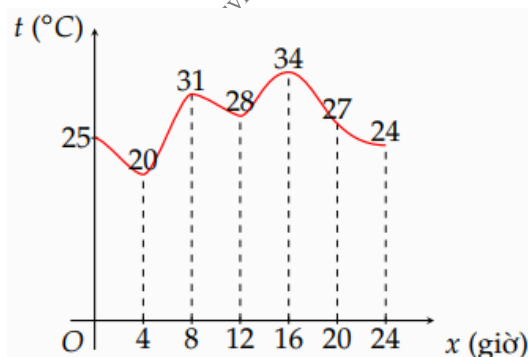


- A. Nhiệt độ trung bình của tháng 6 cao nhất và tháng 12 thấp nhất.
- B. Nhiệt độ trung bình của tháng 4 cao nhất và tháng 2 thấp nhất.
- C. Nhiệt độ trung bình của tháng 4 cao nhất và tháng 12 thấp nhất.
- D. Nhiệt độ trung bình của tháng 5 cao nhất và tháng 12 thấp nhất.

Lời giải

Từ hình vẽ ta thấy nhiệt độ trung bình của tháng cao nhất là tháng 4. Nhiệt độ trung bình của tháng thấp nhất là tháng 12.

Câu 10: Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày. Thời điểm nào trong ngày có nhiệt độ thấp nhất ?

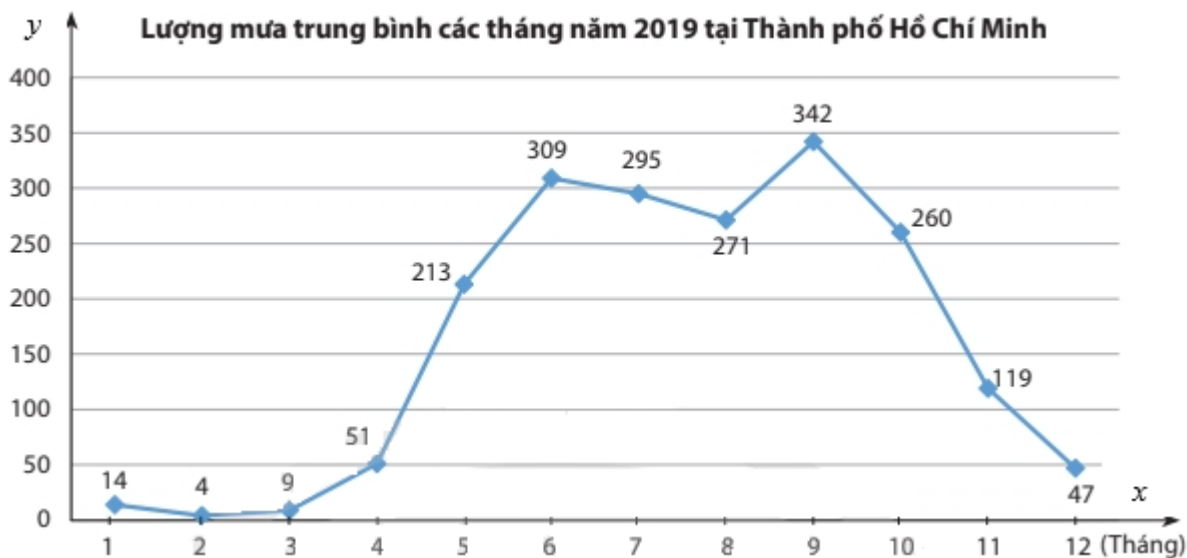


- A. 4 h.
- B. 0 h.
- C. 2 h.
- D. 6 h.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy thời điểm có nhiệt độ thấp nhất trong ngày là vào 4h sáng.

Câu 11: Hình bên cho biết lượng mưa trung bình các tháng năm 2019 tại Thành phố Hồ Chí Minh đo theo đơn vị milimet. Hãy cho biết vào tháng nào trong năm 2019 thì lượng mưa (mm) là cao nhất ?

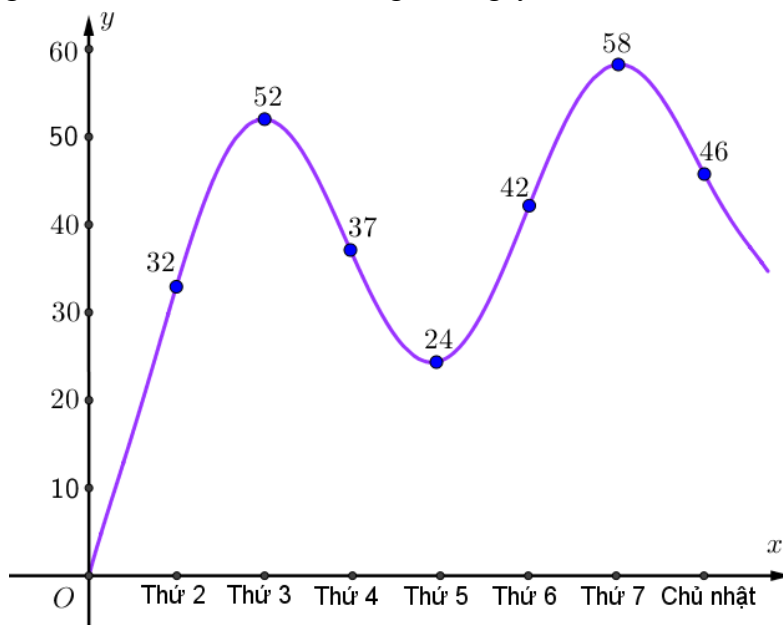


- A. Tháng 6. B. Tháng 8. C. Tháng 9. D. Tháng 10.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy vào Tháng 9 thì lượng mưa ở Thành phố Hồ Chí Minh cao nhất trong năm 2019

Câu 12: Một cửa hàng trà sữa có đồ thị biểu diễn số ly trà sữa bán được trong một tuần như sau. Số ly trà sữa cửa hàng đó bán được nhiều nhất trong một ngày là bao nhiêu



- A. 62 ly. B. 52 ly. C. 68 ly. D. 58 ly.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy vào thứ 7 cửa hàng bán được nhiều nhất là 58 ly trà sữa.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu hỏi, học sinh chọn Đúng hoặc Sai.

Câu 1: Để làm một cửa sổ có dạng một hình bán nguyệt và một hình chữ nhật ghép lại như hình vẽ bên dưới, người ta dùng 8 m dây thép để làm các đường viền. Gọi x, y là độ dài cạnh của khung hình chữ nhật.



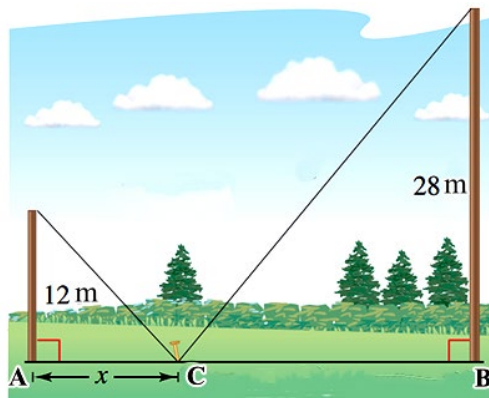
- a) Chiều dài dây để uốn ra bán nguyệt là $\frac{\pi x}{2}$.
- b) Giá trị của y tính theo x là $4 - \frac{x(4 + \pi)}{4}$.
- c) Diện tích của cửa sổ là $S = 4x - x^2$.
- d) Khi diện tích của cửa sổ lớn nhất thì $y = \frac{16}{8 + \pi}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

- a) Bán kính của hình bán nguyệt là $\frac{x}{2}$ nên nửa chu vi bán nguyệt là $\frac{\pi x}{2}$.
- b) Ta có $2(x + y) + \frac{\pi x}{2} = 8 \Leftrightarrow y = 4 - \frac{x(4 + \pi)}{4}$.
- c) Diện tích của cửa sổ: $S = xy + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = x\left(4 - x - \frac{\pi x}{4}\right) + \frac{\pi x^2}{8} = 4x - x^2 - \frac{\pi x^2}{8}$.
- d) S đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{4}{2 + \frac{\pi}{4}} = \frac{16}{8 + \pi}$ nên $y = 4 - x - \frac{\pi x}{4} = \frac{16}{8 + \pi}$.

Câu 2: Có hai cây cột, một cây cao 12 m và một cây cao 28 m đứng cách nhau 30 m. Chúng được giữ bằng hai sợi dây, gắn vào một cọc duy nhất nối từ mặt đất đến đỉnh mỗi cột. Gọi x là khoảng cách từ cột cao 12 m đến cọc.



- a) Để tổng chiều dài của dây ngắn nhất thì $x \in (0; 30)$.
- b) Chiều dài sợi dây nối từ cọc đến đỉnh cột cao 28 m là $\sqrt{1684 + x^2}$.
- c) Tổng chiều dài của dây là $\sqrt{144 + x^2} + \sqrt{1684 - 60x + x^2}$.
- d) Tổng chiều dài ngắn nhất của dây là 48,5 m.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) Rõ ràng để tổng chiều dài dây ngắn nhất thì cọc phải nằm trong khoảng giữa hai cây cột nên $x \in (0; 30)$.

b) $AC = x \Rightarrow BC = 30 - x$ nên chiều dài sợi dây nối từ cọc đến đỉnh cột cao 28 m là $\sqrt{28^2 + (30 - x)^2} = \sqrt{1684 - 60x + x^2}$.

c) Chiều dài sợi dây nối từ cọc đến đỉnh cột cao 12 m là $\sqrt{12^2 + x^2} = \sqrt{144 + x^2}$ suy ra tổng chiều dài của sợi dây là $\sqrt{144 + x^2} + \sqrt{1684 - 60x + x^2}$.

d) Xét hàm số $f(x) = \sqrt{144 + x^2} + \sqrt{1684 - 60x + x^2}$ với $x \in [0; 30]$

Ta có $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{144 + x^2}} + \frac{x - 30}{\sqrt{1684 - 60x + x^2}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{1684 - 60x + x^2} = (30 - x)\sqrt{144 + x^2}$$

$$\Rightarrow x^2(1684 - 60x + x^2) = (30 - x)^2(144 + x^2)$$

$$\Leftrightarrow 640x^2 + 8540x - 129600 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 9; x = -\frac{45}{2}$$

Do $x \in [0; 30]$ nên ta nhận $x = 9$

Ta có $f(0) \approx 53,04$; $f(9) = 50$; $f(30) = 60,31$

Vậy chiều dài ngắn nhất của dây là 50 m.

Câu 3: Dân số của một quốc gia sau t (năm) bắt đầu từ năm 2023 được tính theo công thức $N(t) = 100e^{0,012t}$ (trong đó $N(t)$ được tính bằng triệu người, $0 \leq t \leq 50$)

a) Dân số của quốc gia này ở năm 2030 vượt mức 110 triệu người.

b) Dân số của quốc gia này ở năm 2035 vượt mức 115 triệu người.

c) Vào năm 2030 thì tốc độ tăng dân số là 1,6 triệu người/năm.

d) Vào năm 2026 thì tốc độ tăng dân số là 1,6 triệu người/năm.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Dân số của quốc gia này ở năm 2030 là $N(7) = 100e^{0,012 \cdot 7} \approx 108,8$ triệu người.

b) Dân số của quốc gia này ở năm 2035 là $N(12) = 100e^{0,012 \cdot 12} \approx 115,5$ triệu người.

c) Hàm tốc độ tăng dân số là $N'(t) = 1,2e^{0,012t}$. Ta có:

$$1,2e^{0,012t} = 1,6 \Leftrightarrow t \approx 2,34.$$

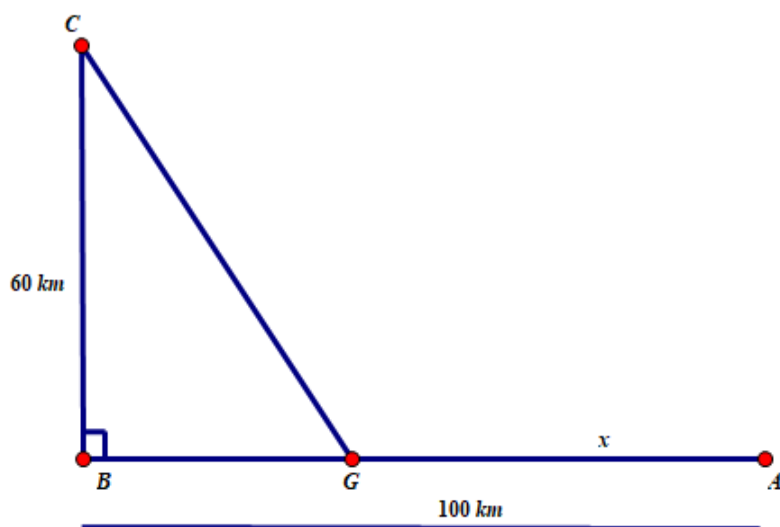
Vậy thời vào năm 2026, tốc độ tăng dân số là 1,6 triệu người/năm

d) Hàm tốc độ tăng dân số là $N'(t) = 1,2e^{0,012t}$. Ta có:

$$1,2e^{0,012t} = 1,6 \Leftrightarrow t \approx 2,34.$$

Vậy thời vào năm 2026, tốc độ tăng dân số là 1,6 triệu người/năm.

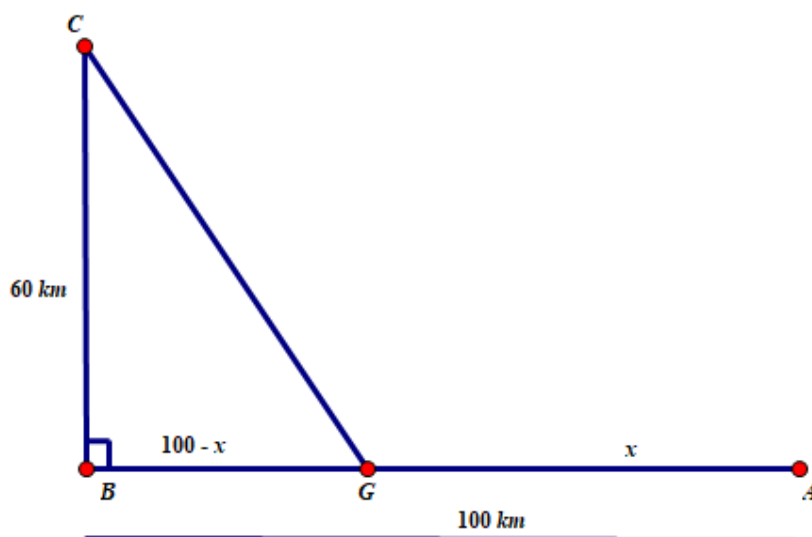
Câu 4: Đường dây điện 110KV kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết $BC = 60\text{km}$, $AB = 100\text{km}$, góc $\widehat{ABC} = 90^\circ$, như hình vẽ. Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là 5000USD, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là 3000USD. Đặt $x = AG$.



- Khi $x = 20\text{km}$ thì đường dây điện nối từ C về G dài 100km .
- Khi $x = 20\text{km}$ thì tổng chi phí mắc điện là 560.000USD.
- Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x = 50\text{km}$.
- Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất là 540.000USD.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



a) Có $AG = x \Rightarrow BG = 100 - x$ với $0 \leq x \leq 100$.

Xét tam giác CBG vuông tại B có $CG = \sqrt{CB^2 + BG^2} = \sqrt{3600 + (100 - x)^2}$.

Khi $x = 20\text{km} \Rightarrow CG = 100\text{km}$.

b) Chi phí tiền mắc điện là $f(x) = 3000x + 5000 \cdot \sqrt{3600 + (100 - x)^2}$

Khi $x = 20\text{km} \Rightarrow CG = 100\text{km}$ và tổng chi phí mắc điện là $T = f(20) = 560.000\text{USD}$.

c) Để chi phí mắc điện ít nhất thì $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3000 - 5000 \frac{(100-x)}{\sqrt{3600+(100-x)^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3000 = 5000 \frac{(100-x)}{\sqrt{3600+(100-x)^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 55 \\ x = 145(l) \end{cases}$$

Ta có

$$f(0) = 583095,1895 \text{USD}$$

$$f(55) = 540.000 \text{USD}$$

$$f(100) = 600.000 \text{USD}$$

Vậy chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x = 55 \text{km}$.

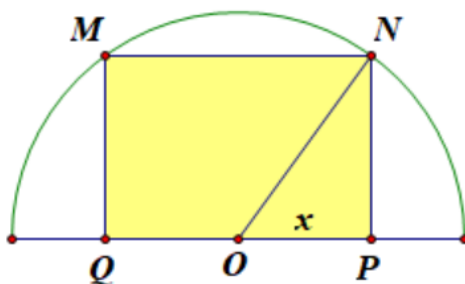
d) chi phí mắc điện nhỏ nhất là 540.000USD

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Từ một miếng tôn dạng nửa hình tròn có bán kính $R = 4 \text{dm}$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 16



Gọi hình chữ nhật cần tính diện tích là $MNPQ$ có $OP = x$ ($0 < x < 4$), $ON = 4$.

Khi đó diện tích của hình chữ nhật $MNPQ$ là: $S = MN \cdot NP = 2x\sqrt{16-x^2}$.

Xét hàm số : $f(x) = 2x\sqrt{16-x^2}$ trên $(0;4)$.

$$\text{Ta có : } f'(x) = 2\sqrt{16-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{-4x^2+32}{\sqrt{16-x^2}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \in (0;4) \\ x = -2\sqrt{2} \notin (0;4) \end{cases}$$

BBT:

x	0		$2\sqrt{2}$		4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0		16		0

Ta có: $\max_{(0;4)} f(x) = f(2\sqrt{2}) = 16$.

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là $16(\text{dm}^2)$.

Câu 2: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

CHUYÊN ĐỀ 1 – GIẢI TÍCH 12 - ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hỏi lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm trong một ngày? (đơn vị triệu đồng)

Lời giải

Trả lời: 1,2

Số tiền thu về khi bán x mét vải lụa là: $220x$.

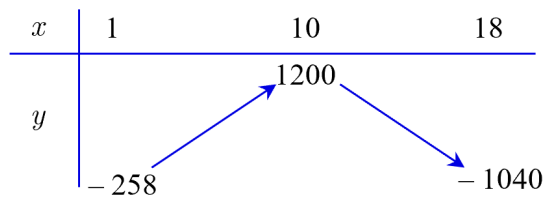
Lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa là:

$$L(x) = 220x - (x^3 - 3x^2 - 20x + 500) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$$

Xét hàm số $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ với $x \in [1; 18]$

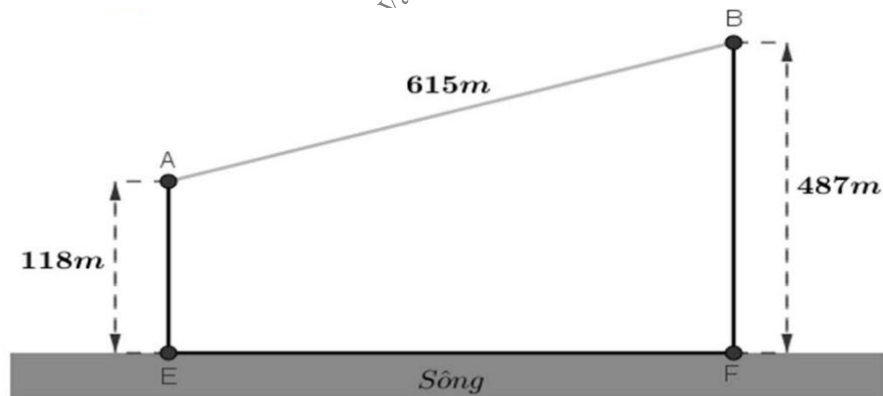
$$L'(x) = -3x^2 + 6x + 240; L'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \in [1; 18] \\ x = -8 \notin [1; 18] \end{cases}$$

Bảng biến thiên



Vậy hộ làm nghề dệt này thu được lợi nhuận tối đa trong một ngày là 1,2 triệu đồng khi sản xuất 10 mét vải lụa trong một ngày.

Câu 3: Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.

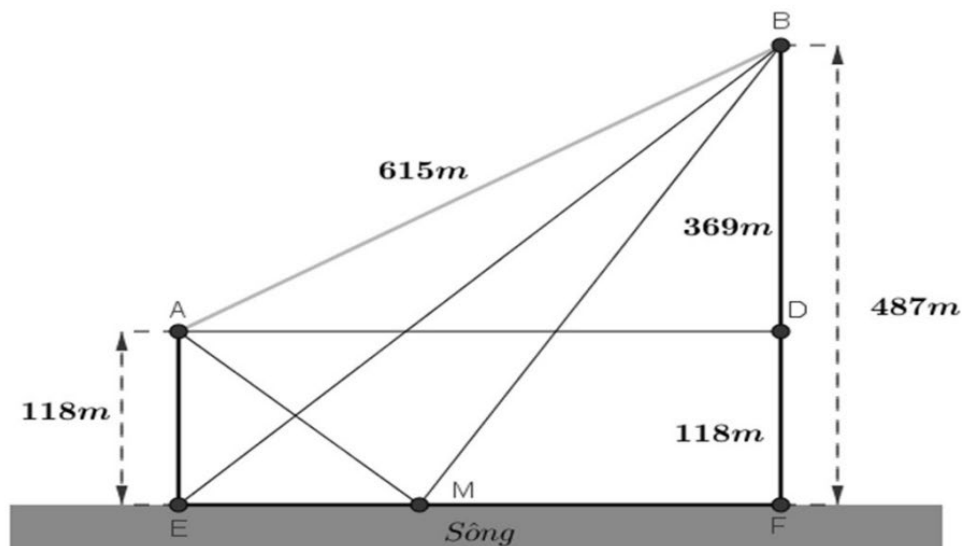


Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất là số nguyên dương mà người đó có thể đi là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 780

Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B để dàng tính được $BD = 369, EF = 492$.



Ta đặt $EM = x$, khi đó ta được:

$$MF = 492 - x, AM = \sqrt{x^2 + 118^2}, BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}.$$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} \quad \text{với } x \in [0; 492]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M .

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} \Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 [(492 - x)^2 + 487^2] = (492 - x)^2 (x^2 + 118^2) \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2 = (58056 - 118x)^2 \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

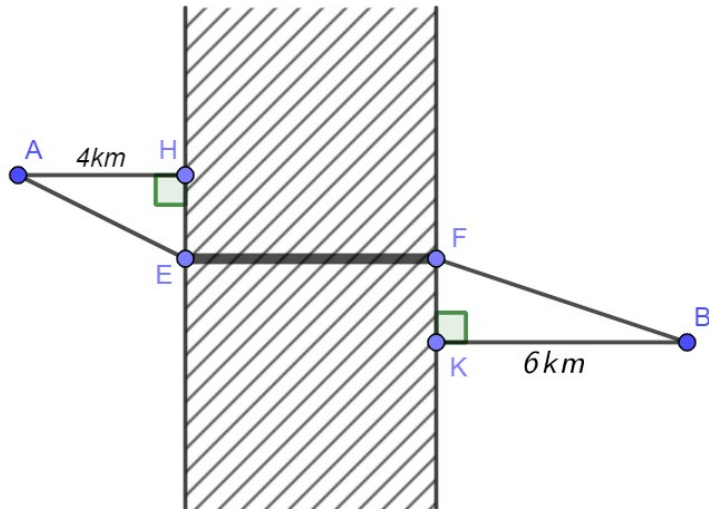
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58056}{605} \text{ hay } x = -\frac{58056}{369} \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 492]$. So sánh các giá trị của $f(0)$, $f\left(\frac{58056}{605}\right)$, $f(492)$ ta

có giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 780$ m

Khi đó quãng đường đi ngắn nhất là xấp xỉ 780 m.

Câu 4: Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 4km và thành phố B cách con sông một khoảng là 6km (hình vẽ), biết $HE + KF = 20\text{km}$ và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố A là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? (kết quả làm tròn đến phần chục)



Lời giải

Trả lời: 8,94

Đặt $HE = x$, $FK = y$, với $x, y > 0$

Ta có: $HE + KF = 20 \Rightarrow x + y = 20$,
$$\begin{cases} AE = \sqrt{16 + x^2} \\ BF = \sqrt{36 + y^2} = \sqrt{36 + (20 - x)^2} \end{cases}$$

Nhận xét: Vì EF không đổi nên AB ngắn nhất khi $AE + BF$ nhỏ nhất.

Ta có $AE + BF = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(20 - x)^2 + 36} = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 40x + 436} = f(x)$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 20}{\sqrt{x^2 - 40x + 436}}, \forall x \in (0; 20).$$

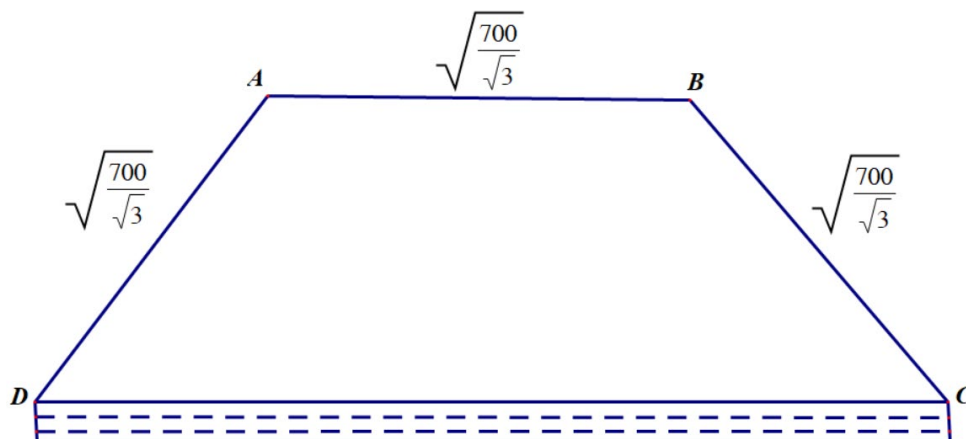
Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 8$

Bảng biến thiên

x	0	8	20
$f'(x)$		-	0
			+
$f(x)$			$10\sqrt{5}$

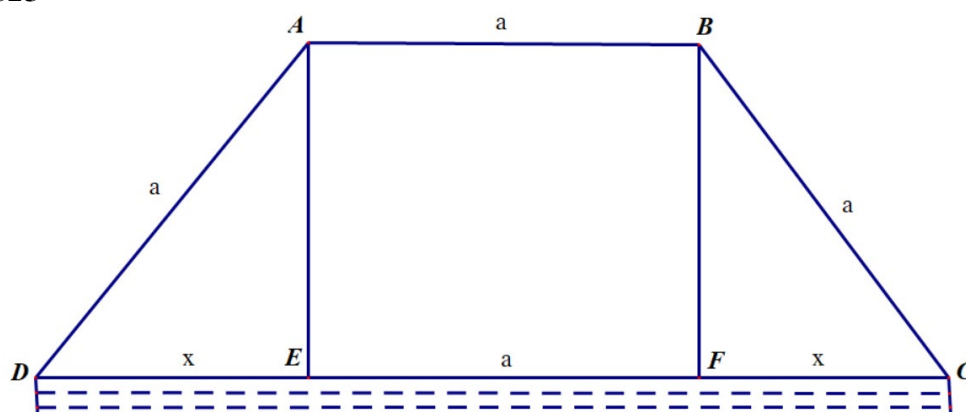
Vậy $AE = \sqrt{8^2 + 16} \approx 8,94 \text{ km}$

- Câu 5:** Bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $\sqrt{\frac{700}{\sqrt{3}}}$ (m) và muốn rào một khu vườn có dạng hình thang cân $ABCD$ như trong hình vẽ. Khu vườn có 3 mặt rào, mặt còn lại tiếp giáp với bờ sông nên không cần rào. Hỏi diện tích lớn nhất mà bác nông dân có thể rào được là bao nhiêu mét vuông?



Lời giải

Trả lời: 525



Gọi $a = \sqrt{\frac{700}{\sqrt{3}}}$ (m). Dựng các đường cao AE và BF của hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ trên.

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $DE = FC$ và $EF = AB = a$.

Đặt $DE = FC = x$ ($x > 0$). Ta có $DC = DE + EF + FC = x + a + x = 2x + a$

Ta có $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$

Ta thấy, x phải thỏa mãn điều kiện $0 < x < a$.

Diện tích của hình thang cân $ABCD$ là

$$S = \frac{1}{2}(AB + CD)AE = \frac{1}{2}(a + 2x + a)\sqrt{a^2 - x^2} = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$$

Xét hàm số $S(x) = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ với $x \in (0; a)$. $\Rightarrow S'(x) = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$\Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - ax + a^2 = 0 \Leftrightarrow (x+a)(a-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \text{ (l)} \\ x = \frac{a}{2} \text{ (n)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	$\frac{a}{2}$	a	$+\infty$
$S'(x)$			+	0	-
$S(x)$				$\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$	

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ tại $x = \frac{a}{2}$.

Thay $a = \sqrt{\frac{700}{\sqrt{3}}}$ vào biểu thức $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot \left(\sqrt{\frac{700}{\sqrt{3}}}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 525$

Vậy bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là $525 m^2$.

Câu 6: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có lợi nhuận cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu (đơn vị tính bằng triệu đồng và làm tròn kết quả tới hàng phần trăm)?

Lời giải

Trả lời: 2,25

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x : đồng; $x \geq 2\,000\,000$ đồng)

+) Khi tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x - 2.000.000$ đồng, ta có số căn hộ bị bỏ trống là $\frac{2(x - 2.000.000)}{100.000} = \frac{x - 2.000.000}{50.000}$

Khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là: $50 - \frac{x - 2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x) = \left(-\frac{x}{50.000} + 90\right)x = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$

Ta tìm GTLN của $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x, x \geq 2.000.000$

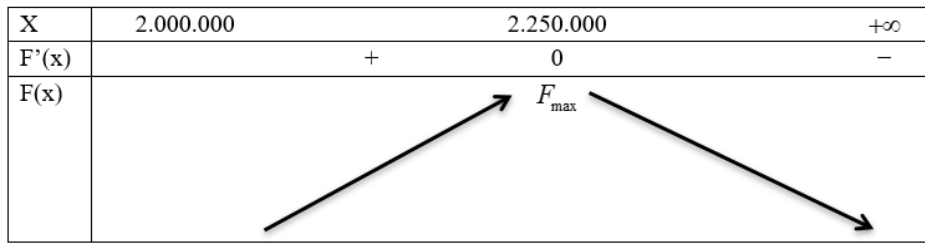
$F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bảng biến thiên:

X	2.000.000	2.250.000	$+\infty$
F'(x)	+	0	-
F(x)		F_{\max}	



Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2,25 triệu đồng mỗi căn hộ thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG I ĐỀ TEST 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 - 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-2	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. -1 . B. 2 . C. -2 . D. 1 .
- Câu 3:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau.

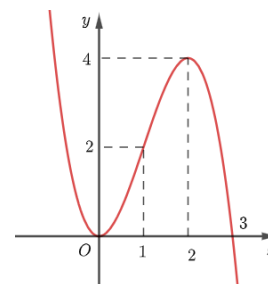
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	2	4	-5	2	

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên \mathbb{R} bằng

- A. 6 . B. 9 . C. -3 . D. -1 .
- Câu 4:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ bằng

- A. 4 . B. 2 .
C. 3 . D. 0 .



Câu 5: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2024x + 2025}{x - 5}$ là

- A. $y = 2025$. B. $y = 2024$. C. $y = 1$. D. $y = -5$.

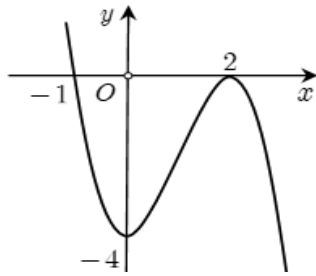
Câu 6: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{15x - 6}{10x + 5}$ là

- A. $x = \frac{3}{2}$. B. $x = -\frac{6}{5}$. C. $x = -\frac{1}{2}$. D. $x = \frac{2}{5}$.

Câu 7: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$ là đường thẳng có phương trình?

- A. $y = -x - 1$. B. $y = x - 1$. C. $y = -x + 1$. D. $y = x + 1$.

Câu 8: Đường cong ở hình sau là đồ thị của hàm số nào?



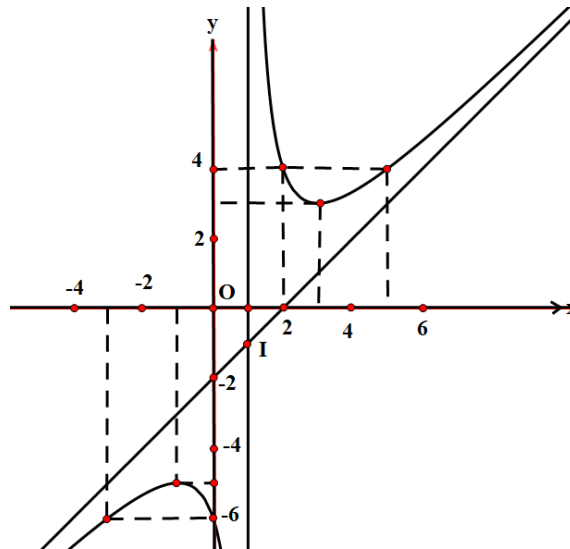
- A. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. B. $y = x^3 - 4$. C. $y = x^2 - 4$. D. $y = -x^2 - 4$.

Câu 9: Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		-	-
y	2	$+\infty$	2

- A. $y = \frac{2x + 1}{x - 2}$. B. $y = \frac{2x - 5}{x - 2}$. C. $y = \frac{2x + 1}{x + 2}$. D. $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$.

Câu 10: Đường cong dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



- A. $y = -x^3 + x^2 - 2x + 1$. B. $y = \frac{x^2 - x + 3}{x - 1}$. C. $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$. D. $y = \frac{2x + 3}{x - 1}$.

Câu 11: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 800 - 20n$ (g). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 19. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

Câu 12: Hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ đạt cực đại tại điểm

A. $x = -1$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = -3$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$,
 b) Đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C).
 c) Đồ thị (C) đi qua điểm $M(0; 2)$.
 d) Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi $-1 < m < 7$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 b) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị
 c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$ và $(2; +\infty)$
 d) Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(2; 5)$.

Câu 3: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18000.

a) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần tăng thêm 10000 đồng.
 b) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39000 đồng.
 c) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì sau khi tăng giá mỗi chiếc khăn lãi 21000 đồng.
 d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc.

Câu 4: Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng mỗi tháng thì mỗi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Mệnh đề nào sau đây đúng

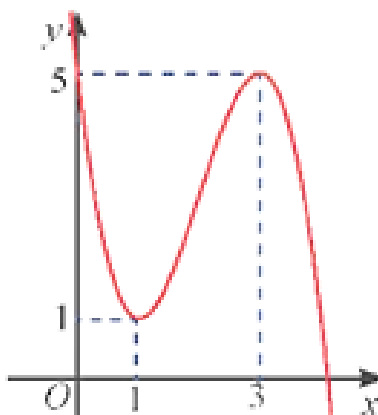
a) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.200.000 đồng thì có 10 căn hộ bị trống
 b) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.700.000 đồng thì thu nhập của công ty cao nhất.
 c) Thu nhập cao nhất của công ty đạt được là 312.500.000 đồng.
 d) Khi thu nhập công ty cao nhất thì số căn hộ có người thuê là 125 căn hộ.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Gọi m, n lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$. Tính giá trị biểu thức $P = m^3 + n^3$.

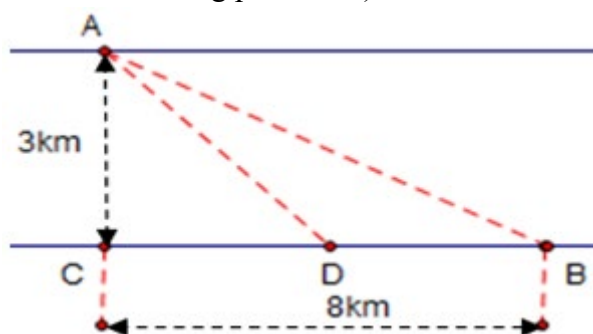
Câu 2: Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = 4x - 3 + \frac{1}{x-2}$ có tâm đối xứng $I(a;b)$. Giá trị của biểu thức $a - 3b$ là bao nhiêu?

Câu 3: Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Giá trị của $a + 2b + 3c$ là:



Câu 4: Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8h sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức $h(t) = 24t + 5t^2 - \frac{t^3}{3}$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

Câu 5: Anh An muốn di chuyển từ vị trí A đến điểm B càng nhanh càng tốt (như hình vẽ). Để di chuyển từ vị trí A đến điểm B anh An có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo thuyền trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D nằm giữa B và C sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền với vận tốc 6km/h , chạy với vận tốc 8km/h , $AC = 3\text{km}$, $BC = 8\text{km}$ và vận tốc dòng nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An. Tìm khoảng thời gian nhanh nhất (đơn vị: giờ) để anh An đến B (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).



Câu 6: Một hãng điện thoại đưa ra quy luật bán buôn cho từng đại lí, đó là đại lí càng nhập nhiều chiếc điện thoại của hãng thì giá bán buôn một chiếc điện thoại càng giảm. Cụ thể, nếu đại lí mua x điện thoại thì giá tiền của mỗi điện thoại là $6000 - 3x$ (nghìn đồng), $x \in \mathbb{N}^*$, $x < 2000$. Đại lí nhập cùng một lúc bao nhiêu chiếc điện thoại thì hãng có thể thu về nhiều tiền nhất từ đại lí đó?

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 - 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.
 C. **Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.** D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 - 4 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- Câu 2:** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	↗ 1	↘ -2	↗ $+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. -1. B. 2. C. **-2.** D. 1.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -2.

- Câu 3:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	↗ 2	↘ 4	↘ -5	↗ 2	

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên \mathbb{R} bằng

- A. 6. B. 9. C. -3. D. **-1.**

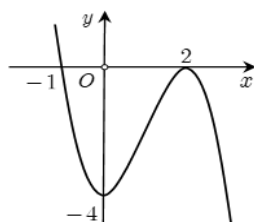
Lời giải

Trên \mathbb{R} , ta có giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ bằng 4 tại $x = 0$ và giá trị nhỏ nhất bằng -5 tại $x = 2$.

Khi đó tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên \mathbb{R} bằng -1.

- Câu 4:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Câu 8: Đường cong ở hình sau là đồ thị của hàm số nào?



- A.** $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. **B.** $y = x^3 - 4$. **C.** $y = x^2 - 4$. **D.** $y = -x^2 - 4$.

Lời giải

Xét dáng hình của đồ thị, ta loại được hàm số $y = x^2 - 4$ và $y = -x^2 - 4$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ nên ta loại hàm số $y = x^3 - 4$ và nhận hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Câu 9: Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$+\infty$	2

- A.** $y = \frac{2x+1}{x-2}$. **B.** $y = \frac{2x-5}{x-2}$. **C.** $y = \frac{2x+1}{x+2}$. **D.** $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

Lời giải

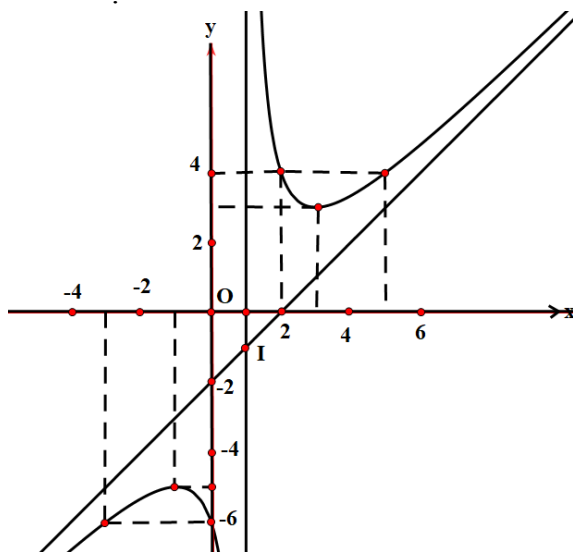
Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2$ là nên loại hàm số

$$y = \frac{2x+1}{x+2} \text{ và } y = \frac{2x-1}{x+2}.$$

Ta nhận thấy hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định nên loại hàm số $y = \frac{2x-5}{x-2}$ và

$$\text{nhận hàm số } y = \frac{2x+1}{x-2}.$$

Câu 10: Đường cong dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



- A.** $y = -x^3 + x^2 - 2x + 1$. **B.** $y = \frac{x^2 - x + 3}{x - 1}$. **C.** $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$. **D.** $y = \frac{2x + 3}{x - 1}$.

Lời giải

➤ Xét hàm số $y = -x^3 + x^2 - 2x + 1$. Vì đồ thị hàm số $y = -x^3 + x^2 - 2x + 1$ không có đường tiệm cận. Suy ra phương án $y = -x^3 + x^2 - 2x + 1$ sai.

➤ Xét hàm số $y = \frac{x^2 - x + 3}{x - 1}$.

$$y = \frac{x^2 - x + 3}{x - 1} = x + \frac{3}{x - 1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x - 1} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x - 1} = 0.$$

Do đó đường thẳng $y = x$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. Suy ra phương án

$$y = \frac{x^2 - x + 3}{x - 1} \text{ sai.}$$

➤ Xét hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.

$$y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = x - 2 + \frac{4}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty.$$

Do đó đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 1} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x - 1} = 0.$$

Do đó đường thẳng $y = x - 2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Suy ra phương án $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ đúng.

➤ Xét hàm số $y = \frac{2x + 3}{x - 1}$. Vì đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 3}{x - 1}$ không có đường tiệm cận xiên nên

$$\text{phương án } y = \frac{2x + 3}{x - 1} \text{ sai.}$$

Câu 11: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 800 - 20n$ (g). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 19.

B. 20.

C. 21.

D. 22.

Lời giải

Gọi $F(n)$ là hàm cân nặng của n con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích.

$$\text{Ta có: } F(n) = (800 - 20n).n = 800n - 20n^2.$$

Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của n con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ là lớn nhất.

Bài toán trở thành tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $F(n)$ đạt GTLN.

$$F'(n) = 800 - 40n$$

$$F'(n) = 0 \Leftrightarrow 800 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 20$$

Ta có bảng biến thiên:

n	$-\infty$	20	$+\infty$
$F'(n)$	+	0	-
$F(n)$	$-\infty$	8000	$-\infty$

Vậy phải thả 20 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

Câu 12: Hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ đạt cực đại tại điểm

A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = 3$.

D. $x = -3$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	6	-26	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$,

b) Đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C).

c) Đồ thị (C) đi qua điểm $M(0; 2)$.

d) Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi $-1 < m < 7$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Đúng.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x + 2}{x - 2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - x + 2}{x - 2} = -\infty$$

\Rightarrow Tiệm cận đứng của (C) là đường thẳng $x = 2$.

b) Đúng.

$$\text{Ta có } y = f(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x-2} \right) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x-2} \right) = 0$$

⇒ Tiệm cận xiên của (C) là đường thẳng $y = x + 1$.

c) Sai.

Thay tọa độ điểm $M(0;2)$ vào phương trình hàm số $y = f(x)$ ta được:

$$2 = \frac{0^2 - 0 + 2}{0 - 2} \Leftrightarrow 2 = -1: \text{ Sai} \Rightarrow M(0;2) \notin (C)$$

d) Sai.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = m$ là:

$$\frac{x^2 - x + 2}{x - 2} = m \quad (x \neq 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + 2m + 2 = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai

$$\text{nghiệm phân biệt khác } 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} = m^2 - 6m + 7 > 0 \\ 2^2 - (m+1) \cdot 2 + 2m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 7 \end{cases}.$$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

- Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Hàm số đã cho có hai điểm cực trị
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(0;1)$ và $(2;+\infty)$
- Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(2;5)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\text{Ta có: } y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		1		5	$+\infty$

a) ĐÚNG

b) Dựa vào bảng biến thiên thì hàm số đã cho có hai điểm cực trị là $x = 0$ và $x = 2$

ĐÚNG

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0), (2;+\infty)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(0;1), (1;2)$.

SAI

d) Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(0;1)$.

SAI

Câu 3: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18000.

- a) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần tăng thêm 10000 đồng
- b) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39000 đồng
- c) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì sau khi tăng giá mỗi chiếc khăn lãi 21000 đồng
- d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm $100x$ chiếc.

Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000 - 100x$ chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12 + x$ (nghìn đồng).

Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:

$$f(x) = (3000 - 100x)(12 + x) \text{ (nghìn đồng).}$$

Xét hàm số $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.

$$f'(x) = -200x + 1800$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -200x + 1800 = 0 \Leftrightarrow x = 9$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x = 9$

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39000 đồng.

Câu 4: Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng mỗi tháng thì mỗi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Mệnh đề nào sau đây đúng

- a) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.200.000 đồng thì có 10 căn hộ bị trống
- b) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.700.000 đồng thì thu nhập của công ty cao nhất.
- c) Thu nhập cao nhất của công ty đạt được là 312.500.000 đồng.
- d) Khi thu nhập công ty cao nhất thì số căn hộ có người thuê là 125 căn hộ.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

Gọi số lần tăng giá tiền cho thuê mỗi căn hộ một tháng để công ty thu được thu nhập cao nhất là x (lần) ($0 \leq x \leq 30$)

Số tiền cho thuê mỗi căn hộ là $2 + 0,1x$ (triệu đồng)

CHUYÊN ĐỀ I – GIẢI TÍCH 12 - ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Số căn hộ mỗi tháng được thuê là $150 - 5x$ (căn hộ)

Thu nhập của công ty đạt được là $(2 + 0,1x)(150 - 5x)$

Đặt $f(x) = (2 + 0,1x)(150 - 5x)$

$$f'(x) = 0,1 \cdot (150 - 5x) - 5(2 + 0,1x) = 15 - 0,5x - 10 - 0,5x = 5 - x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$f(0) = 300; f(5) = 312,5; f(30) = 0 \Rightarrow \underset{x \in [0;30]}{\text{Max}} f(x) = f(5) = 312,5 \text{ khi } x = 5$$

Vậy để có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê với giá $2 + 0,1 \cdot 5 = 2,5$ (triệu đồng).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Gọi m, n lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$. Tính giá trị biểu thức $P = m^3 + n^3$.

Lời giải

Trả lời: -98

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$ với $x \neq -1$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số như sau Ảnh

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow -5$	\searrow	$\nearrow 3$	\searrow	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số bằng -5 , giá trị cực tiểu của hàm số bằng 3 .

$$\text{Vậy } P = m^3 + n^3 = (-5)^3 + 3^3 = -98.$$

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = 4x - 3 + \frac{1}{x-2}$ có tâm đối xứng $I(a; b)$. Giá trị của biểu thức $a - 3b$ là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 13

$$\text{+) Ta có } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x(x-2)} \right] = 4.$$

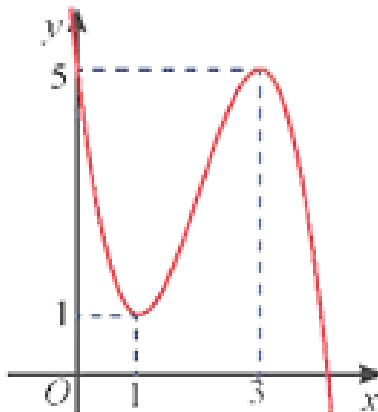
$$\text{+) Ta có } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4x - 3 + \frac{1}{x-2} - 4x \right) = -3.$$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = 4x - 3$.

+) Mặt khác, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(4x - 3 + \frac{1}{x-2} \right) = +\infty$ do đó $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có tâm đối xứng của đồ thị hàm số trên là giao điểm của $y = 4x - 3$ và $x = 2$; vậy ta được $I(2; 5)$. Suy ra $a - 3b = 2 - 3.5 = -13$.

Câu 3: Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Giá trị của $a + 2b + 3c$ là:



Lời giải

Trả lời: -16

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; 5), (1; 1)$ nên ta có $d = 5; a + b + c + d = 1$. (1)

Ta thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(1; 1)$ và $(3; 5)$, tức là phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 3$. Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Với $x = 1$ thì $y' = 0$ nên ta có $3a + 2b + c = 0$ (2).

Với $x = 3$ thì $y' = 0$ nên ta có $27a + 6b + c = 0$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $a = -1; b = 6; c = -9$

Vậy $a + 2b + 3c = -1 + 12 - 27 = -16$

Câu 4: Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8h sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức $h(t) = 24t + 5t^2 - \frac{t^3}{3}$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

Lời giải

Trả lời: 15

Ta có:

$$h'(t) = 24 + 10t - t^2$$

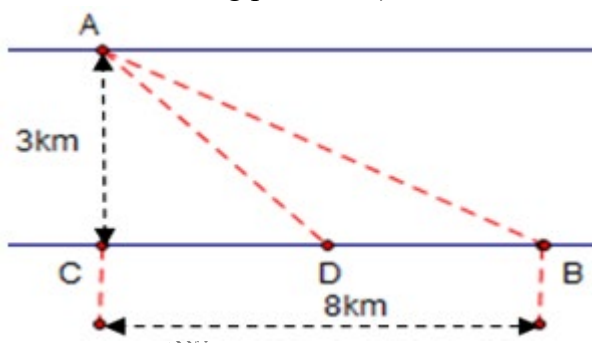
$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 24 + 10t - t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \text{ (loại)} \\ t = 12 \text{ (t/m)} \end{cases}$$

BBT:

t	8	12	24	$+\infty$
$h'(t)$		+	0	-
$h(t)$				

Vậy để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày.

Câu 5: Anh An muốn đi chuyển từ vị trí A đến điểm B càng nhanh càng tốt (như hình vẽ). Để đi chuyển từ vị trí A đến điểm B anh An có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo thuyền trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D nằm giữa B và C sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền với vận tốc 6km/h, chạy với vận tốc 8km/h, $AC = 3\text{km}$, $BC = 8\text{km}$ và vận tốc dòng nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An. Tìm khoảng thời gian nhanh nhất (đơn vị: giờ) để anh An đến B (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Trả lời: 1,33

Đặt $CD = x$ (km) ($0 \leq x \leq 8$), $AD = \sqrt{9 + x^2}$

Giả sử để đi từ A đến B anh An bơi thuyền từ A tới D sau đó chạy đến B .

Thời gian bơi thuyền từ A tới D là: $\frac{\sqrt{9 + x^2}}{6}$, thời gian đi từ D tới B là: $\frac{8 - x}{8}$.

Tổng thời gian là: $f(x) = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{6} + \frac{8 - x}{8}$;

$f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{9 + x^2}} - \frac{1}{8}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}} \in [0; 8]$.

x	0	$\frac{9}{\sqrt{7}}$	8
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Từ bảng biến thiên, ta có $\min_{[0;8]} f(x) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$.

Vậy thời gian nhanh nhất để anh An đi từ A đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1,33$.

Câu 6: Một hãng điện thoại đưa ra quy luật bán buôn cho từng đại lí, đó là đại lí càng nhập nhiều chiếc điện thoại của hãng thì giá bán buôn một chiếc điện thoại càng giảm. Cụ thể, nếu đại lí mua x điện thoại thì giá tiền của mỗi điện thoại là $6000 - 3x$ (nghìn đồng), $x \in N^*$, $x < 2000$. Đại lí nhập cùng một lúc bao nhiêu chiếc điện thoại thì hãng có thể thu về nhiều tiền nhất từ đại lí đó?

Lời giải

Trả lời: 1000

Số tiền hãng thu được khi đại lí nhập x chiếc điện thoại là $f(x) = x(6000 - 3x)$.

Ta có: $f'(x) = -6x + 6000$. Khi đó, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1000$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ là:

x	0	1000	2000
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	3000000	0

Vậy đại lí nhập cùng lúc 1000 chiếc điện thoại thì hãng có thể thu nhiều tiền nhất từ đại lí đó với 3 000 000 000 (đồng).

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG I ĐỀ TEST 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-1	4	-1	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-1; 0)$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	3	-2	$+\infty$

Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại

- A. $x = -2$. B. $x = 3$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

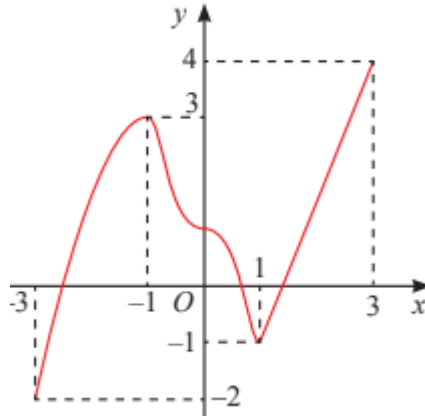
Câu 3: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 5 B. 4 C. 6 D. 7

Câu 4: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên $(-4; 0)$ là

- A. -4 . B. 4 . C. -5 . D. 5 .

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị trên $[-3;3]$ như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $[-3;3]$ lần lượt là

- A.** $M = 3; m = -1$. **B.** $M = 4; m = -2$. **C.** $M = 3; m = -3$. **D.** $M = -1; m = 1$.

Câu 6: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+x-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

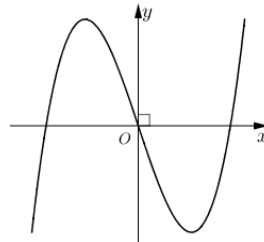
Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{6x^2+7x-2023}{2x^2+3x+2024}$ tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

- A.** $y = 3$. **B.** $y = 0$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = 2$.

Câu 8: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3+x^2-2x-1}{x^2-2}$ là đường thẳng có phương trình

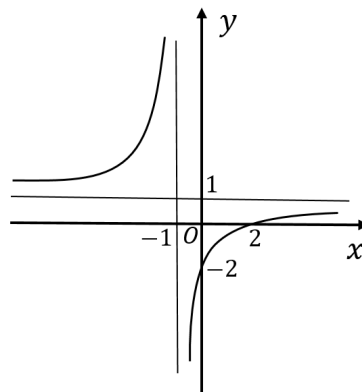
- A.** $y = 2x+1$. **B.** $y = x+1$. **C.** $y = -x+1$. **D.** $y = x$.

Câu 9: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



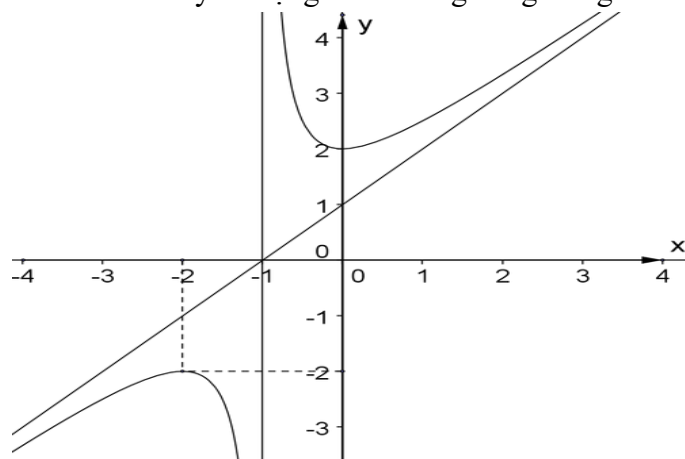
- A.** $y = x^3 - 2024x$. **B.** $y = -x^3 + 3x$. **C.** $y = x^3 - 3x^2 + 2024$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục tung là



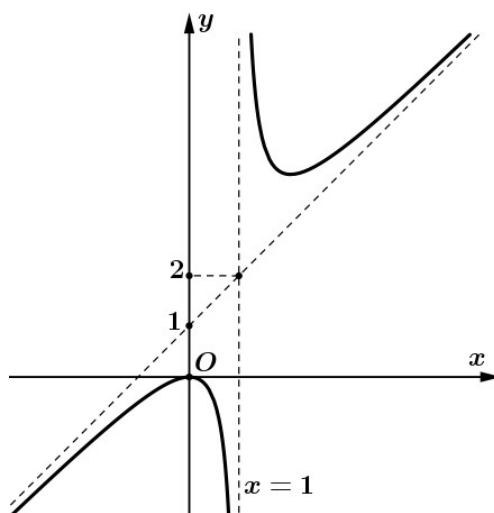
- A.** $(0; -2)$. **B.** $(2; 0)$. **C.** $(-2; 0)$. **D.** $(0; 2)$.

Câu 11: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên dưới?



- A. $y = \frac{x+2}{x+1}$. B. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x+1}$. C. $y = x^2 - 2x + 2$. D. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + a}{x + b}$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Giá trị của $T = a + b$ bằng



- A. $T = 0$. B. $T = -2$. C. $T = -1$. D. $T = 2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

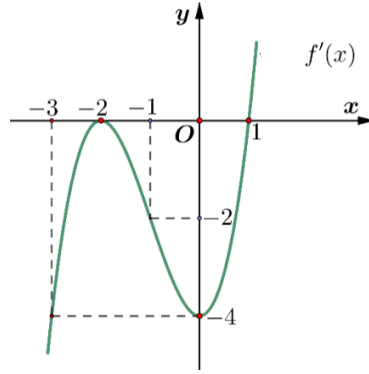
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$. Các khẳng định sau là đúng hay sai ?

- a) Hàm số có 3 điểm cực trị.
 b) Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$
 c) Điểm $M(0; 1)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
 d) Hàm số $y = f(x)$ và $y = f(2x)$ có cùng điểm cực đại.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
 b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.
 c) Đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.
 d) Đồ thị hàm số có giao điểm I của hai đường tiệm cận nằm trên đường thẳng $(\Delta): x + 2y - 3 = 0$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và $f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
- $f'(2) = 4$.
- Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 + x + 2024$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

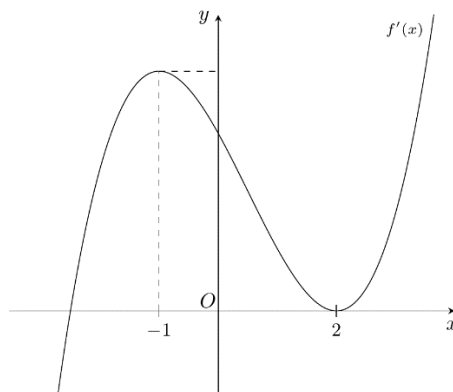
- Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 1$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- Giả sử hàm số đã cho có hai điểm cực trị là $x_1; x_2$. Khi đó giá trị $x_1 \cdot x_2 = -1$.
- Gọi A, B lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số. Khi đó, diện tích tam giác ABC là 12 với $C(-1; 2)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày phát hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = -t^3 + 45t^2 + 600t$, $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 30$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 30]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Trong 30 ngày đầu tiên, có bao nhiêu ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200?

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$. Độ dài của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bằng.
(làm tròn đến hàng phần mười)

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là



CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Câu 4: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có dạng $y = ax + b$, ($a, b \in \mathbb{Z}$). Tính giá trị biểu thức $P = 5a + 2024b$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	-	0	+	

Tìm m để hàm số $y = f(x^3 + 4x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?

Câu 6: Một hộp sữa dung tích 1 lít có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh bằng x (cm) và chiều cao h (cm). Tìm giá trị của x để diện tích toàn phần của hình hộp là nhỏ nhất.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	4	-1	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-1; 0)$

Lời giải

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	3	-2	$+\infty$

Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại

- A. $x = -2$. B. $x = 3$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ xác định tại $x = 1$, $f'(1) = 0$ và đạo hàm đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 5 B. 4 C. 6 D. 7

Lời giải

Ta có:

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi $y' \leq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 3(4m + 9) \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in [-9; -3] \Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 4: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên $(-4; 0)$ là

- A. -4 . B. 4. C. -5 . D. 5.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$;

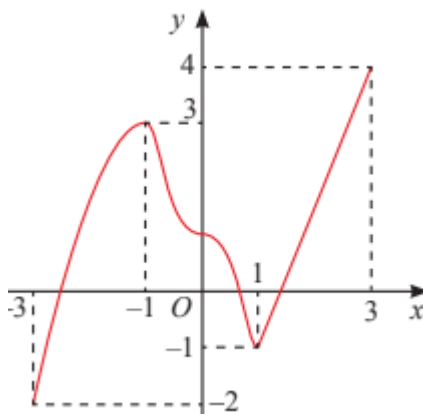
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -2.$$

Bảng biến thiên của hàm số đã cho trên khoảng $(-4; 0)$:

x	$-\infty$	-2	0
y'	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	-4	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_{(-4;0)} f(x) = f(-2) = -4$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị trên $[-3; 3]$ như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $[-3; 3]$ lần lượt là

- A.** $M = 3; m = -1$. **B.** $M = 4; m = -2$. **C.** $M = 3; m = -3$. **D.** $M = -1; m = 1$.

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $f(x)$, ta thấy $M = \max_{[-3;3]} f(x) = f(3) = 4; m = \min_{[-3;3]} f(x) = f(-3) = -2$.

Câu 6: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+x-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x^2+x-2} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x^2+x-2} = -\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+1}{x^2+x-2} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x+1}{x^2+x-2} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{6x^2+7x-2023}{2x^2+3x+2024}$ tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

- A.** $y = 3$. **B.** $y = 0$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = 2$.

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + 7x - 2023}{2x^2 + 3x + 2024} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{7}{x} - \frac{2023}{x^2}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{2024}{x^2}} = 3;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 + 7x - 2023}{2x^2 + 3x + 2024} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6 + \frac{7}{x} - \frac{2023}{x^2}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{2024}{x^2}} = 3.$$

Nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

Câu 8: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2}$ là đường thẳng có phương trình

- A. $y = 2x + 1$. B. $y = x + 1$. C. $y = -x + 1$. D. $y = x$.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2} = x + 1 + \frac{1}{x^2 - 2}$.

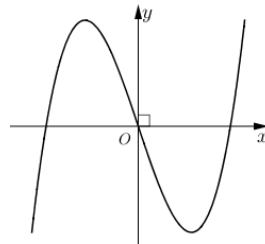
Mà

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 2} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 2} = 0.$$

nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 1$.

Câu 9: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

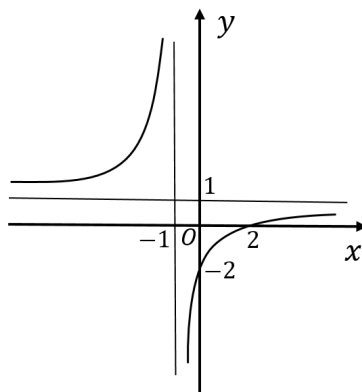


- A. $y = x^3 - 2024x$. B. $y = -x^3 + 3x$. C. $y = x^3 - 3x^2 + 2024$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

Lời giải

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a > 0$ và đi qua gốc tọa độ O nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 2024x$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục tung là



A. $(0; -2)$.

B. $(2; 0)$.

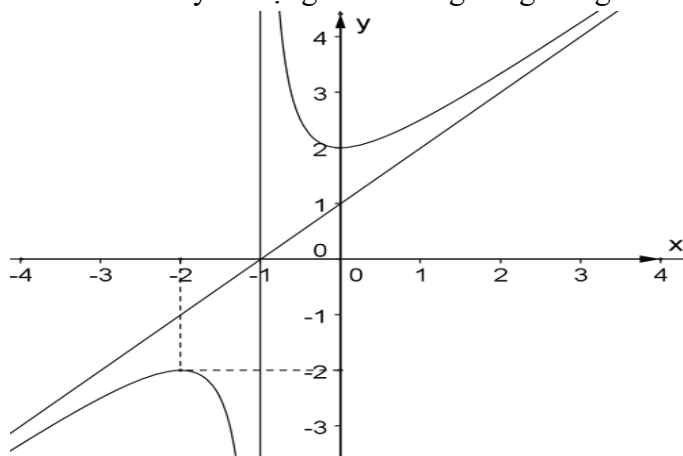
C. $(-2; 0)$.

D. $(0; 2)$.

Lời giải

Từ đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0; -2)$.

Câu 11: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên dưới?



A. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

B. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x+1}$.

C. $y = x^2 - 2x + 2$.

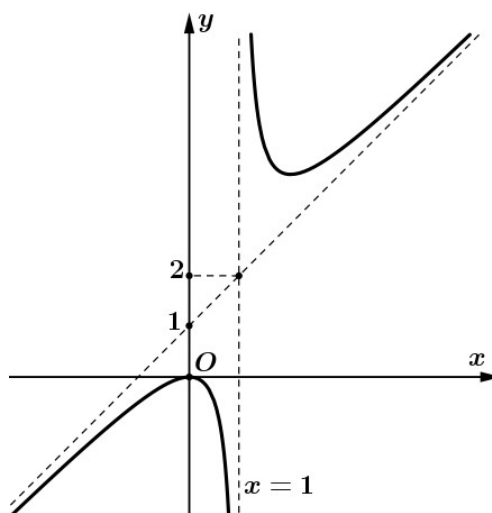
D. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$.

Lời giải

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc hai / bậc nhất nên ta loại được phương án A và C. Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$

Thử câu D ta có: $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} = x + 1 + \frac{1}{x+1}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = x + 1$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + a}{x+b}$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Giá trị của $T = a + b$ bằng



A. $T = 0$.

B. $T = -2$.

C. $T = -1$.

D. $T = 2$.

Lời giải

Từ đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Vì đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$ nên ta có $b = -1$.

Đồ thị đi qua gốc tọa độ nên ta có: $a = 0$

Vậy $T = a + b = -1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$. Các khẳng định sau là đúng hay sai ?

- Hàm số có 3 điểm cực trị.
- Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$
- Điểm $M(0;1)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- Hàm số $y = f(x)$ và $y = f(2x)$ có cùng điểm cực đại.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = f'(x) = 4x^3 - 4x.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		-5		$+\infty$	
		-6		-6		

Từ bảng biến thiên ta thấy

- Đúng.
- Sai.
- Sai.
- Đúng. Ta có

$$f(2x) = 16x^4 - 8x^2 - 5$$

$$\Rightarrow f'(2x) = 64x^3 - 16x$$

$$\text{Cho } f'(2x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2} \vee x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$				$+\infty$	

Ta thấy hàm $y = f(x)$ và $y = f(2x)$ đều đạt cực đại tại $x = 0$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

- Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
- Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.
- Đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.
- Đồ thị hàm số có giao điểm I của hai đường tiệm cận nằm trên đường thẳng $(\Delta): x + 2y - 3 = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Đúng.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x+1} = 2$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

b) Sai.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{2 \cdot 1 - 3}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{2 \cdot 1 - 3}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$.

Do đó, đường thẳng $x = 1$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

c) Đúng.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x+1} = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{x+1} = 2$ nên đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

Lại có: $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-3}{x+1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-3}{x+1} = +\infty$, hơn nữa chỉ khi x dần đến -1 thì y mới dần đến vô cực nên đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận đứng là $x = -1$.

Do đó, đồ thị hàm số chỉ có đúng hai đường tiệm cận.

d) Đúng.

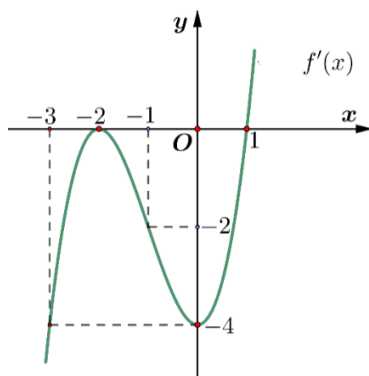
Ta có tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $I(-1; 2)$.

Thế $x = -1$ và $y = 2$ vào phương trình đường thẳng $(\Delta): x + 2y - 3 = 0$, ta được:

$$-1 + 2 \cdot 2 - 3 = 0 \text{ (Đúng)}$$

Vậy điểm $I(-1; 2)$ nằm trên đường thẳng $(\Delta): x + 2y - 3 = 0$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và $f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) $f'(2) = 4$.

d) Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 + x + 2024$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------------	---------------	---------------	----------------

a) Sai. Vì từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) \geq 0$ với $\forall x \geq 1$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

b) Sai. Vì từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ chỉ đổi dấu một lần qua $x = 1$ nên hàm số có một điểm cực trị.

c) Sai. Vì:

Từ đồ thị ta có hàm số $f'(x)$ có dạng: $f'(x) = a(x+2)^2(x-1)$.

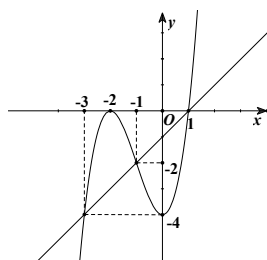
Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua $(0; -4)$ nên: $-4 = a(0+2)^2(0-1) \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy $f'(x) = (x+2)^2(x-1) \Rightarrow f'(2) = (2+2)^2(2-1) = 16$.

d) Đúng. Vì:

Ta có: $g'(x) = f'(x) - x + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1$.

Vẽ đường thẳng $y = x - 1$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y = f'(x)$.



Khi đó: $f'(x) = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$		$g(-3)$	$g(-1)$	$g(1)$	$+\infty$

Ta có hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$ nên $g(x)$ đồng biến trên khoảng

$\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

a) Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 1$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

c) Giả sử hàm số đã cho có hai điểm cực trị là $x_1; x_2$. Khi đó giá trị $x_1 \cdot x_2 = -1$.

d) Gọi A, B lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số. Khi đó, diện tích tam giác ABC là 12 với $C(-1; 2)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng vì: $y' = 3x^2 - 3$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(-1) = 3 \\ y(1) = -1 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Từ BBT ta có:

Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 1$.

b) Sai vì từ BBT ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

c) Đúng vì $x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot (-1) = -1$.

d) Sai vì $A(-1; 3), B(1; -1), C(-1; 2)$.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1.$$

$$\cos \widehat{BAC} = \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{2 \cdot 0 + (-4)(-1)}{\sqrt{2^2 + (-4)^2} \sqrt{0^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\sin \widehat{BAC} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{BAC}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = 1.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày phát hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = -t^3 + 45t^2 + 600t$, $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 30$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 30]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Trong 30 ngày đầu tiên, có bao nhiêu ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200?

Lời giải

Trả lời: 1200

$$\text{Ta có } f(t) = -t^3 + 45t^2 + 600t \Rightarrow f'(t) = -3t^2 + 90t + 600.$$

Tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200 nên

$$f'(t) > 1200 \Leftrightarrow -3t^2 + 90t + 600 > 1200 \Leftrightarrow -3t^2 + 90t - 600 > 0 \Leftrightarrow 10 < t < 20.$$

Vậy có 9 ngày tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$. Độ dài của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bằng.
(làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải:

Trả lời: 8,2

Xét hàm số $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$

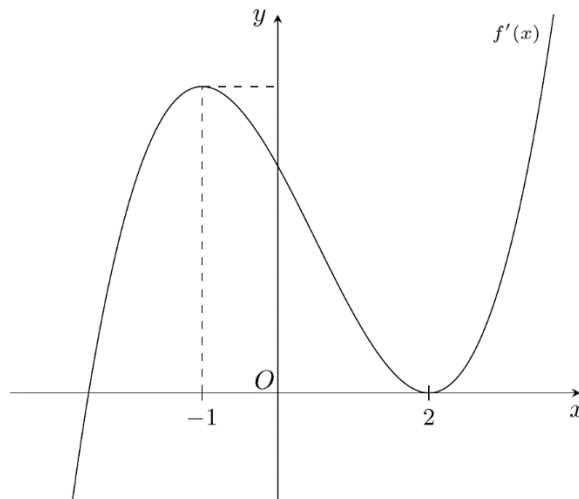
Điều kiện: $x \neq -2$

Ta có: $y' = \frac{2x^2 + 8x + 6}{(x + 2)^2} \quad (x \neq -2)$

Cho $y' = 0 \Rightarrow 2x^2 + 8x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -3 \Rightarrow y = -7 \end{cases}$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $A(-1; 1)$ và $B(-3; -7) \Rightarrow AB = 2\sqrt{17}$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là



Lời giải

Trả lời: 1

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 1. Vì dựa vào đồ thị của $f'(x)$, đạo hàm đổi dấu một lần từ âm sang dương nên hàm số đã cho có một cực trị (một cực tiểu).

Câu 4: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có dạng $y = ax + b$, $(a, b \in \mathbb{Z})$. Tính giá trị biểu thức $P = 5a + 2024b$.

Lời giải

Trả lời: 5

Giả sử hàm số có đồ thị là (C). Ta có:

+) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1}$.

$$+) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow (C) \text{ có tiệm cận xiên là}$$

đường thẳng $y = x$.

$$\text{Suy ra: } a = 1; b = 0 \Rightarrow P = 5a + 2024b = 5.1 + 2024.0 = 5.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Tìm m để hàm số $y = f(x^3 + 4x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?

Lời giải

Trả lời: 3

Đặt $t = x^3 + 4x + m \Rightarrow t' = 3x^2 + 4$ nên t đồng biến trên $(-1; 1)$ và $t \in (m - 5; m + 5)$

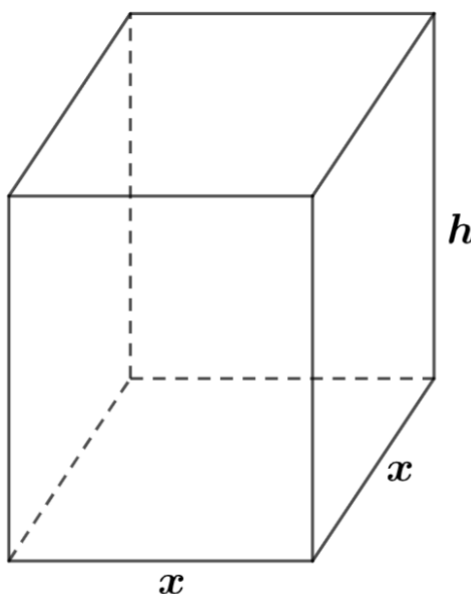
Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(m - 5; m + 5)$.

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta được } \begin{cases} m - 5 \geq -2 \\ m + 5 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

Câu 6: Một hộp sữa dung tích 1 lít có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh bằng x (cm) và chiều cao h (cm). Tìm giá trị của x để diện tích toàn phần của hình hộp là nhỏ nhất.

Lời giải

Trả lời: 10



Thể tích của hộp sữa là: $V = x^2 h$ (cm³).

$$\text{Theo bài ra, ta có: } V = 1(l) = 1000 \text{ (cm}^3) \Rightarrow x^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{x^2}.$$

Ta có diện tích toàn phần của hộp sữa là:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = 4hx + 2x^2 = 4 \cdot \frac{1000}{x^2} \cdot x + 2x^2 = 2x^2 + \frac{4000}{x}$$

CHUYÊN ĐỀ 1 – GIẢI TÍCH 12 - ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Đặt $y = 2x^2 + \frac{4000}{x} \Rightarrow y' = 4x - \frac{4000}{x^2}$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 4x - \frac{4000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4000 = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0	10	$+\infty$
y'		- 0 +	
y		$+\infty$	$+\infty$
		600	

Vậy để hộp sữa có diện tích toàn phần nhỏ nhất thì $x = 10$.