Bí Kíp Võ Công Trường

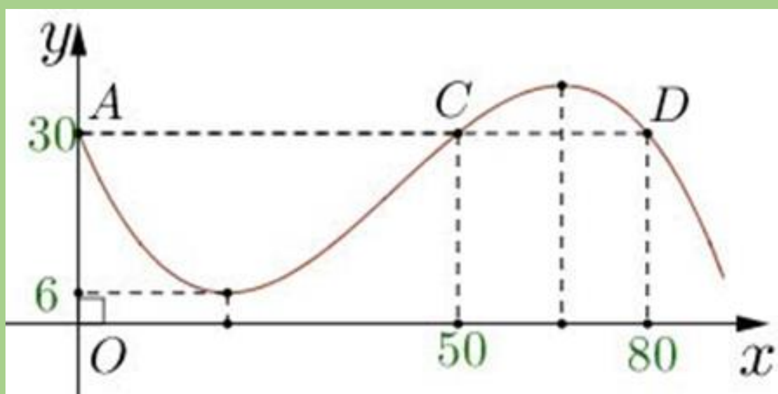
VÕ CÔNG TRƯỜNG

0983 900 570
0916 624 952

TOÁN 12

BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ HÀM SỐ

- Phương pháp giải các dạng toán thường gặp
- Ví dụ minh họa
- Bài tập tham khảo



2025-2026

MỤC LỤC

◈ QUY TẮC GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ

☑ Bước 1: Đọc hiểu và phân tích đề bài

- Xác định ***vấn đề thực tế*** đang được đề cập (liên quan đến kinh tế, vật lý, địa lý, giao thông, dân số, hình học,...).
- Tìm hiểu các ***đại lượng đã biết*** và ***đại lượng cần tìm***.
- Chú ý đến ***đơn vị đo lường*** và ***điều kiện thực tế*** (giới hạn, mốc thời gian, phạm vi,...).

☑ Bước 2: Xây dựng mô hình toán học

- Gán ***ẩn số/tham số*** cho các đại lượng chưa biết.
- Thiết lập các ***biểu thức, phương trình, bất phương trình*** hoặc ***hàm số*** biểu diễn mối quan hệ giữa các đại lượng.
- Có thể sử dụng công thức toán học phù hợp: ***hàm số bậc hai, bậc ba, lượng giác, mũ – log, hình học không gian,...***

☑ Bước 3: Giải mô hình toán học

- Giải phương trình, hệ phương trình, tìm giá trị lớn nhất/nhỏ nhất, đạo hàm để khảo sát hàm số,...
- Kiểm tra điều kiện xác định, loại nghiệm không phù hợp với thực tế (ví dụ: không nhận nghiệm âm nếu đó là chiều dài, thời gian,...).

☑ Bước 4: Trả lời đáp án và diễn giải kết quả

- Diễn đạt kết quả dưới dạng ***ngôn ngữ thực tế***: Đáp án đúng câu hỏi ban đầu của đề.
- Nêu ***kết luận rõ ràng***: "Vậy chi phí tối thiểu là...", "Vậy thời gian nhanh nhất là...".
- ***Kiểm tra tính hợp lý*** của kết quả (có phù hợp với bối cảnh không?).

Lưu ý khi giải bài toán thực tế

- **Vẽ hình minh họa** (nếu có thể) để dễ hình dung.
- Đơn vị: luôn **giữ nguyên đơn vị**, đừng quên chuyển đổi khi cần.
- Các bài toán thực tế thường yêu cầu **giải thích rõ ràng**, không chỉ đưa ra kết quả.

☞ Tóm lại:

Mỗi dạng đều quy về **quy tắc chung** mà mình nói ở trên:

Hiểu đề → Đặt ẩn, biến → Lập phương trình hoặc hàm số → Giải → Kiểm tra thực tế → Kết luận.

Các dạng bài toán thực tế thường gặp

Dạng bài	Mô tả	Kiến thức sử dụng
Chuyển động	Tốc độ, quãng đường, thời gian, gia tốc.	Chuyển động đều, đều biến, đạo hàm,..
Tối ưu lợi nhuận	Sản phẩm, giá thành, thuế	Hàm số, đạo hàm
Thiết kế tối ưu	Hình học: Độ dài, khoảng cách, diện tích, thể tích,..	Cực trị hình học, hàm số, đạo hàm,..
Mô hình tăng trưởng	Dân số, tài khoản ngân hàng,...	Hàm mũ, logarit, đạo hàm,..
Vật lý, công nghệ,…	Điện trở, dòng điện, dòng nước, nhiệt độ,..	Công thức vật lý và toán học

Ý NGHĨA THỰC TIỄN CỦA ĐẠO HÀM

(1) Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quảng đường chuyển động của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0

☞ Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quảng đường chuyển động của vật theo thời gian t thì $v = s' = f'(t)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động và $a = v' = s'' = f''(t)$ biểu thị gia tốc của chuyển động.

(2) Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0.

(3) Nếu hàm số $Q = f(t)$ biểu thị điện lượng Q truyền trong dây dẫn theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0.

◈ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

☞ BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Dạng ☞ *DÙNG Ý NGHĨA VẬT LÝ CỦA ĐẠO HÀM*

➢ Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quảng đường chuyển động của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0

➢ Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quảng đường chuyển động của vật theo thời gian t thì $v = s' = f'(t)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động và $a = v' = s'' = f''(t)$ biểu thị gia tốc của chuyển động.

Ví dụ 1. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có tốc độ tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Lời giải

Đáp án: 13

Ta có: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1$.

Nhận xét: $v(t)$ có đồ thị là một parabol nên trong $5s$ đầu tiên tốc độ tức thời cúa chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng 13 tại $t = 2s$.

Ví dụ 2. Tốc độ của một tàu con thoi từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0\ (s)$ cho đến thời điểm $t = 126\ (s)$ được cho bởi công thức $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 83$ (tốc độ được tính bằng đơn vị ft/s). Hỏi tại thời điểm tàu con thoi đạt gia tốc nhỏ nhất thì tốc độ tàu con thoi gần bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

Đáp án: 20,8

Ta có: $a(t) = v'(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t$

Ta có BBT hàm $a(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t$.

t	$-\infty$		$23,1157$		$+\infty$
$a(t)$	$+\infty$	↘	$-2,087$	↗	$+\infty$

Thời điểm tàu con thoi đạt gia tốc nhỏ nhất là $t \approx 23,1157$

$v(23,1157) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 83 \approx 20,8$ ft/s

Ví dụ 3. Trên một trục số thẳng đứng có chiều dương hướng lên trên, một chất điểm bắt đầu chuyển động dọc theo trục số. Giả sử, tại thời điểm t giây $(t \geq 0)$ tính từ lúc bắt đầu chuyển động thì vị trí $s(t)$ của chất điểm trên trục số thẳng đứng được xác định bởi công thức $s(t)=t^3-18t^2+81t$ (mét). Trong 15 giây chuyển động đầu tiên thì chất điểm di chuyển được quãng đường bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

Đáp án: 756

Ta có $s'(t)=3t^2-36t+81$.

$s'(t)=0 \Leftrightarrow 3t^2-36t+81=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=9 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	0		3		9		15
$s'(t)$		+	0	−		+	
$s(t)$	0	↗	108	↘	0	↗	540

Trong 3 giây đầu, chất điểm di chuyển hướng lên $108m$.

Trong khoảng $(3;9)$ giây tiếp theo chất điểm di chuyển hướng xuống $108m$.

Trong khoảng $(9;15)$ giây cuối chất điểm di chuyển hướng lên $540m$.

Vậy trong 15 giây chuyển động đầu tiên thì chất điểm di chuyển được quãng đường là $108+108+540=756$ (mét).

BAI TẬP THAM KHẢO

Câu 1. Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)(km)$ là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân the1o b8iểu thức sau: $s(t)=e^{t^2+3}+2te^{3t+1}(km)$. Tốc độ của tên lửa sau 1 giây là bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị (biết hàm biểu thị tốc độ là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?

Lời giải

Đáp án: 546

$v(t)=s'(t)=2te^{t^2+3}+2e^{3t+1}+6te^{3t+1}$

Tốc độ của tên lửa sau 1 giây là $v(1)=2e^4+2e^4+6e^4=10e^4(km/s)\approx 546(km/s)$

Câu 2. Một chất điểm chuyển động thẳng trên một trục số nằm ngang có chiều dương hướng sang phải theo quy luật $s(t)=-2t^3+24t^2+42t-3$, với t (giây) $(0 \leq t \leq 10)$ là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và $s(t)(m)$ là vị trí của chất điểm tại thời điểm t. Hỏi kể từ lúc bắt đầu chuyển động, chất điểm chuyển động sang phải trong khoảng thời gian bao nhiêu giây?

Lời giải

Đáp án: 6

Tốc độ chuyển động của chất điểm được xác định bởi $v(t)=s'(t)=-6t^2+48t-42(m/s)$.

Chất điểm chuyển động sang phải (tức là theo chiều dương) khi

$v(t)>0 \Leftrightarrow -6t^2+48t-42>0 \Leftrightarrow t^2-8t+7<0 \Leftrightarrow 1<t<7.$

Vậy, từ thời điểm $t=1$ giây đến thời điểm $t=7$ giây, chất điểm chuyển động sang phải.

Câu 3. Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử vị trí $s(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức $s(t)=t^3-9t^2+15t, t\ge 0$. Hỏi chất điểm chuyển động sang trái trong khoảng thời gian bao nhiêu giây?

Lời giải

Đáp án: 4.

Ta có: $v(t)=s'(t)=\left(t^3-9t^2+15t\right)'=3t^2-18t+15$.

$v(t)<0 \Leftrightarrow 3t^2-18t+15<0 \Leftrightarrow (t-1)(t-5)<0 \Leftrightarrow 1<t<5$.

Chất điểm chuyển động theo chiều âm (từ phải sang trái) khi $v(t)<0$, tức là $1<t<5$. Hay trong khoảng thời gian 4 (giây) thì điểm chuyển động sang trái.

Câu 4. Tốc độ dòng xe trên một đoạn đường một quốc lộ từ 6 giờ sáng đến 10 giờ sáng trong ngày thường được xấp xỉ bởi $f(t)=20t-40\sqrt{t}+52,\quad 0\le t\le 4$ trong đó $f(t)$ đo bằng km/giờ và t đo bằng giờ, với $t=0$ ứng với 6 giờ sáng. Qua đó người ta tìm được vào buổi sáng, tốc độ dòng xe giảm từ a giờ đến b giờ. Tìm b

Lời giải

Đáp án: 7

Đạo hàm: $f'(t)=20-40\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t}}=20-\dfrac{20}{\sqrt{t}}$

Giải $f'(t)=0: 20=\dfrac{20}{\sqrt{t}} \Rightarrow \sqrt{t}=1 \Rightarrow t=1$

Xét dấu

Với $0<t<1: \sqrt{t}<1$ nên $20-\dfrac{20}{\sqrt{t}}<0 \Rightarrow f$ nghịch biến trên $(0,1)$.

Với $1<t\le 4: \sqrt{t}>1$ nên $20-\dfrac{20}{\sqrt{t}}>0 \Rightarrow f$ đồng biến trên $(1,4)$.

- Buổi sáng, tốc độ dòng xe giảm từ 6 giờ sáng đến khoảng 7 gió sáng
- Sau đó tăng cho đến 10 giờ.

Câu 5. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s(\mathrm{m})$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bào nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 24

Vận tốc của vật chuyển động là $v=s'=-\frac{3}{2}t^2+12t=f(t)$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;6]$

Ta có $f'(t)=-3t+12 \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t=4\in[0;6]$

$f(0)=0;\ f(4)=24;\ f(6)=18$

Vậy vận tốc lớn nhất là $24(\mathrm{m/s})$.

Câu 6. Một vật chuyển động với tốc độ (m/s) được xác định bởi hàm số $f(t)=-t^3+3t^2$ với $t\geq 0$. Khi đó $f'(t)$ là gia tốc của vật tại thời điểm t (giây). Tốc độ của vật đạt được cao nhất trong khoảng thời gian 3 giây đầu là bao nhiêu m/s?

Lời giải

Đáp án: 4

$f'(t)=-3t^2+6t;\quad f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=0 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	0		2		3
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

Tốc độ của vật đạt được cao nhất là $4\ m/s$

Câu 7. Một vật chuyển động theo quy luật $v(t)=\frac{-1}{3}t^3+4t^2+9t\ \ (m/s)$, với t được đo bằng đơn vị giây là khoảng thời gian từ lúc bắt đầu chuyển động. Hỏi trong 12 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu chuyển động vật đạt được tốc độ lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 90

Xét hàm số $v(t)=\frac{-1}{3}t^3+4t^2+9t$ trên $[0;12]$.

Ta có: $v'(t)=-t^2+8t+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1(L) \\ t=9 \end{array}\right.$.

Lại có: $v(0)=0; v(9)=90; v(12)=9$.

Vậy trong 12 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu chuyển động vật đạt được tốc độ lớn nhất là 90 (m/s).

Câu 8. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-2t^3+24t^2+9t-3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, tốc độ lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 105.

Ta có $v(t)=s'(t)=-6t^2+48t+9 \Rightarrow v'(t)=-12t+48$

Khi đó $v'(t)=0 \Leftrightarrow -12t+48=0 \Leftrightarrow t=4$.

t	0		4		10
$v'(t)$		+	0	-	
$v(t)$		$\nearrow$	105	$\searrow$	

Do đó tốc độ lớn nhất của vật đạt được bằng $v(4)=105$.

Câu 9. Một vật chuyển động theo quy luật $S=-t^3+18t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, tốc độ lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu (m/s)?

Lời giải

Đáp án: 108.

Ta có: $v(t)=s'(t)=-3t^2+36t$ với $t\in[0;10]$.

$v'(t)=-6t+36$; $v'(t)=0 \Leftrightarrow t=6$

$v(0)=0$; $v(10)=60$; $v(6)=108$.

Vậy tốc độ lớn nhất của vật trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động là $108(\text{ m/s})$.

Dạng ☞ *BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN*

Quy tắc giải bài toán thực tế về chuyển động

Bước 1: Đọc hiểu và phân tích đề bài

- ***Quãng đường (s):*** thường được cho trực tiếp hoặc tính từ nhiều đoạn đường.
- ***Tốc độ (v):*** có thể là hằng số hoặc biến thiên.
- ***Thời gian (t):*** có thể cần tính hoặc cho trước.
- Xác định dạng chuyển động: ***chuyển động đều*** hay ***không đều***, có ***hai vật chuyển động cùng lúc*** hay ***liên tiếp***,...

Bước 2: Xây dựng mô hình toán học

- ***Công thức chuyển động cơ bản:*** $s=v.t$
- ***Nếu có hai chuyển động:***
    - ***Cùng chiều:*** khoảng cách giảm dần.
    - ***Ngược chiều:*** khoảng cách tăng nhanh hơn.
    - ***Gặp nhau:*** tổng quãng đường = quãng đường giữa 2 vật.
    - ***Đuổi kịp nhau:*** hiệu quãng đường = 0 khi bắt kịp.
- Gọi ẩn số (thường là ***thời gian, vận tốc hoặc quãng đường***) và ***lập phương trình*** biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.
- Nếu bài toán yêu cầu ***tối ưu hóa*** theo đại lượng nào thì lập hàm biểu thị đại lượng đó theo một đại lượng khác
    - Ví dụ: Cần tìm thời gian ngắn nhất thì Lập hàm cần tối ưu biểu thị thời gian $t=t(x)$.

Bước 3: Giải mô hình toán học

- Giải phương trình, bất phương trình hoặc tìm cực trị, max – min.
- ***Kiểm tra điều kiện của ẩn, biến*** (tốc độ dương, thời gian dương, quãng đường hợp lý).

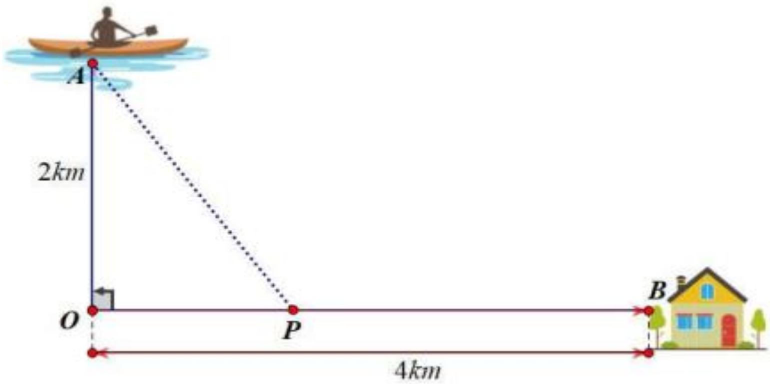
Bước 4: Đáp án và diễn giải kết quả

- ***Kết luận bằng lời***, kèm ***đơn vị***.

Một số mẹo quan trọng

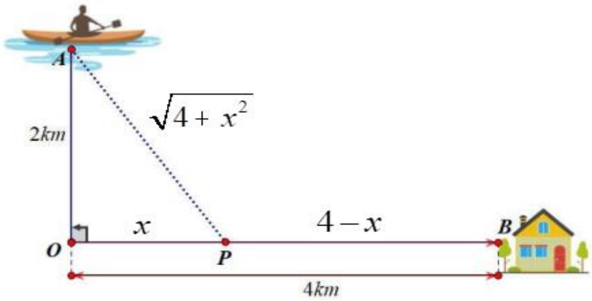
- Tốc độ phải dương, thời gian không âm.
- Nếu có ***dòng nước, chiều gió,...*** thì ***tốc độ thực tế***:
  - **Đi xuôi dòng**: ***Tốc độ thực tế = Tốc độ của vật + Tốc độ của dòng***
  - **Đi ngược dòng: *Tốc độ thực tế = Tốc độ của vật – Tốc độ của dòng***

Ví dụ 4. Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông $2km$, anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là $4km$ (hình vẽ). Biết rằng anh Ba chèo thuyền với tốc độ 6 km/h và chạy bộ trên bờ với tốc độ 10 km/h. Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là bao nhiêu phút?



Lời giải

Đáp án: 40



Đặt $OP = x \ (0 < x < 4) \Rightarrow BP = 4 - x$; $AP = \sqrt{4+x^2}$.

Khoảng thời gian để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$$t_{(x)} = t_{AP} + t_{PB} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{6} + \frac{4-x}{10} \ (h). \quad \Rightarrow t'_{(x)} = \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10}.$$

$$t'_{(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{4+x^2} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ 4x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

BBT:

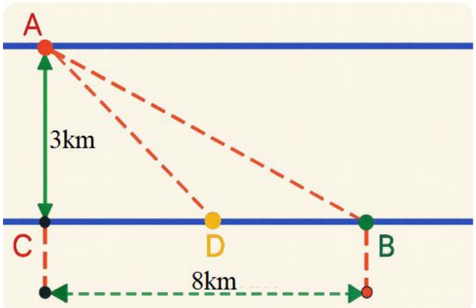
x	0		$\frac{3}{2}$		4
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$		$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	

Từ BBT suy ra khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$t_{\min}=\frac{2}{3}(h)=\frac{2}{3}.60=40$ (phút).

BAI TẬP THAM KHẢO

Câu 10. Anh An muốn di chuyển từ vị trí A đến điểm B càng nhanh càng tốt *(như hình vẽ)*. Để di chuyển từ vị trí A đến điểm B anh An có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo thuyền trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D nằm giữa B và C sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền với tốc độ 6km/h, chạy với tốc độ 8km/h, $AC=3\text{km}$, $BC=8\text{km}$ và tốc độ dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của anh An. Tìm khoảng thời gian nhanh nhất *(đơn vị: giờ)* để anh An đến B (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 1,33

Đặt $CD=x\ (km)$ $(0\le x\le 8)$, $AD=\sqrt{9+x^2}$

Giả sử để đi từ A đến B anh An bơi thuyền từ A tới D sau đó chạy đến B.

Thời gian bơi thuyền từ A tới D là: $\frac{\sqrt{9+x^2}}{6}$, thời gian đi từ D tới B là: $\frac{8-x}{8}$.

Tổng thời gian là: $f(x)=\frac{\sqrt{9+x^2}}{6}+\frac{8-x}{8}$;

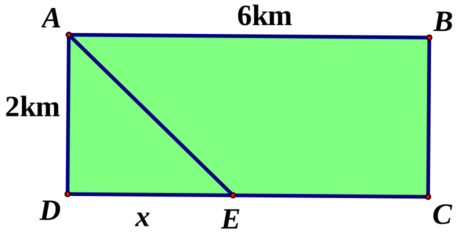
$f'(x)=\frac{x}{6\sqrt{9+x^2}}-\frac{1}{8}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{9}{\sqrt{7}}\in[0;8]$.

x	0		$\frac{9}{\sqrt{7}}$		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$1+\frac{\sqrt{7}}{8}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[0;8]} f(x)=1+\frac{\sqrt{7}}{8}$.

Vậy thời gian nhanh nhất để anh An đi từ A đến B là $1+\frac{\sqrt{7}}{8}\approx 1,33$.

Câu 11. Một người nông dân đang đứng ở góc A của một cánh đồng hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng $AD=2$ km và chiều dài $AB=6$ km. Người đó muốn đi đến góc đối diện C. Người nông dân có thể đi bộ trên cánh đồng cỏ với tốc độ 4 km/h và đi bộ trên đường dọc theo cạnh CD với tốc độ 8 km/h. Để đến C nhanh nhất, người đó nên đi theo đường thẳng từ A đến một điểm E nào đó trên cạnh CD, sau đó đi bộ dọc theo đường từ E đến C. Hỏi điểm E phải cách điểm D bao xa để tổng thời gian di chuyển là ít nhất?(kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

Đáp án: 1,16

Gọi E là điểm trên cạnh CD mà người nông dân đi tới từ A.

Gọi x là khoảng cách DE ($0 \le x \le 6$).

Khoảng cách đi bộ trên đường là $EC = DC - DE = 6 - x$.

Ta có $AE^2 = AD^2 + DE^2 = 2^2 + x^2 = 4 + x^2$

Suy ra $AE = \sqrt{4 + x^2}$ (km)

Lại có $EC = 6 - x$ (km)

Thời gian người nông dân đi từ A tới E là $t_{AE} = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{4}$ (giờ)

Thời gian người nông dân đi từ E tới C là $t_{EC} = \dfrac{6-x}{8}$ (giờ)

Tổng thời gian người nông dân đi từ A đến C là tổng của hai khoảng thời gian trên:

$$T(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{4} + \frac{6-x}{8}$$

Ta có $T'(x) = \dfrac{x}{4\sqrt{4+x^2}} - \dfrac{1}{8}$.

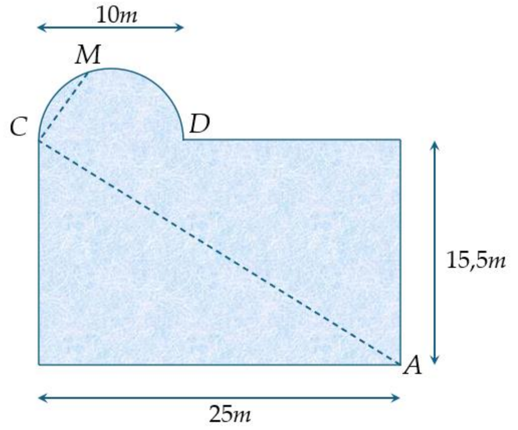
$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{4\sqrt{4+x^2}} - \dfrac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Vì $0 \le x \le 6$ nên suy ra $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		6
$T'(x)$		-	0	+	
$T(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy để tổng thời gian di chuyển ít nhất thì điểm E phải cách điểm D một khoảng là $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ km $\approx 1{,}16$ km.

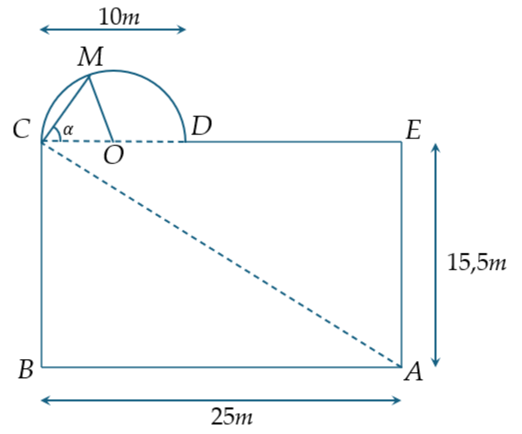
Câu 12. Bạn Hoa thường đi bơi ở hồ Sky Garden cạnh nhà, hồ bơi có thiết kế là một hình chữ nhật với chiều dài 25 m, chiều rộng $15{,}5$ m và bên cạnh đó là một hình bán nguyệt đường kính 10 m. Trong một lần bể bơi vắng người nên Hoa đã thực hiện một chu trình là bơi theo đoạn thẳng AC rồi bơi tiếp đoạn thẳng CM, với M là một vị trí bất kỳ trên hình bán nguyệt. Ngay sau đó bạn đi bộ theo một hướng qua điểm D dọc bờ của hồ bơi để quay lại vị trí A và kết thúc chu trình. (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng tốc độ bơi của Hoa là $2,4$ km/h, tốc độ đi bộ là $4,8$ km/h và tốc độ bơi, tốc độ đi bộ không thay đổi trong một chu trình. Hỏi thời gian chậm nhất để Hoa thực hiện xong chu trình trên là bao nhiêu phút? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Đáp án: 1,4 phút.



Đổi $2,4$ km/h $=\dfrac{2}{3}$ m/s; $4,8$ km/h $=\dfrac{4}{3}$ m/s.

Quãng đường Hoa đi hết một chu trình là $AC+CM+MD+DE+EA$.

Tổng thời gian Hoa thực hiện một chu trình là $T=\dfrac{AC+CM}{\frac{2}{3}}+\dfrac{MD+DE+EA}{\frac{4}{3}}$.

Do $AC,\ DE,\ EA$ không đổi nên $T_{\max}$ khi $\dfrac{CM}{\frac{2}{3}}+\dfrac{MD}{\frac{4}{3}}=\dfrac{3}{2}CM+\dfrac{3}{4}MD$ đạt giá trị lớn nhất.

Đặt $\widehat{MCD}=\alpha,\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \widehat{MOD}=2\alpha$.

Suy ra $CM=10\cos\alpha,\ MD=10\alpha\Rightarrow \dfrac{3}{2}CM+\dfrac{3}{4}MD=15\cos\alpha+\dfrac{15}{2}\alpha$.

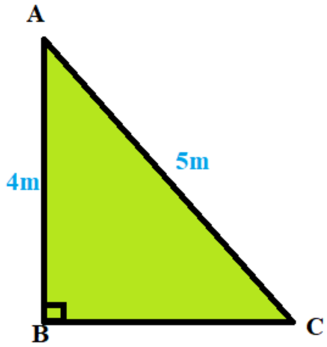
Xét hàm số $f\left(\alpha\right)=15\cos\alpha+\dfrac{15}{2}\alpha,\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ta có $f'\left(\alpha\right)=-15\sin\alpha+\dfrac{15}{2},\ f'\left(\alpha\right)=0\Leftrightarrow -15\sin\alpha+\dfrac{15}{2}=0\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{6}\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f\left(\alpha\right)$ trên khoảng $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, ta có $\max\limits_{\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} f\left(\alpha\right)=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

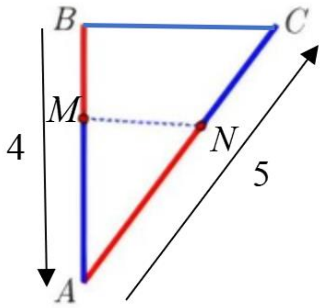
Vậy $T_{\max}=\dfrac{3\sqrt{25^2+15,5^2}}{2}+\dfrac{15}{2}\left(\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{3(15+15,5)}{4}\approx 83,9$ giây $\approx 1,4$ phút.

Câu 13. Chào đón năm mới 2025, Thành phố trang trí đèn led biểu tượng hình chữ V được ghép từ các thanh $AB=4m$, $AC=5m$ sao cho tam giác ABC vuông tại B. Để tăng hiệu ứng, các kỹ sư đã thiết kế một chuỗi led chạy từ B xuống A với tốc độ 4 m/ phút và một chuỗi led chạy từ A lên C với tốc độ 10 m/ phút. Sau khi đóng nguồn điện thì cả hai chuỗi led đồng thời xuất phát. Hỏi sau bao nhiêu giây từ thời điểm đóng nguồn thì khoảng cách giữa hai điểm sáng đầu tiên của hai chuỗi led là nhỏ nhất ?



Lời giải

Đáp án: 16



Gọi x (phút) là khoảng thời gian cả hai chuỗi led đồng thời xuất phát đến M và N là hai điểm sáng đầu tiên

$$\Rightarrow \begin{cases} BM=4x \\ AN=10x \end{cases} \Rightarrow AM=4-4x \text{ với } 0\le x\le 4$$

Xét tam giác ABC vuông tại B $\Rightarrow \cos\widehat{MAN}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{4}{5}$

Xét tam giác AMN ta có : $MN^2=AM^2+AN^2-2AM.AN.\cos\widehat{MAN}$

$$MN^2=(4-4x)^2+(10x)^2-2.(4-4x).10x.\frac{4}{5}=180x^2-96x+16=f(x)$$

Để khoảng cách giữa hai điểm sáng đầu tiên của hai chuỗi led nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN_{\min}\Leftrightarrow {MN^2}_{\min}$

Xét $f(x)=180x^2-96x+16$ với $x\in[0;4]$

$f'(x)=360x-96=0\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{15}$ $\Rightarrow MN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{15}$ (phút) $=16$ (giây)

Vậy sau 16 giây thì hai điểm sáng đầu tiên của chuỗi led có khoảng cách nhỏ nhất.

BÀI TOÁN TỐI ƯU LỢI NHUẬN

Quy tắc giải bài toán tối ưu lợi nhuận

Bước 1: Đọc hiểu và phân tích đề bài

1. ***Xác định hàm doanh thu:***

Doanh thu (R) là tổng tiền thu được từ việc bán sản phẩm, thường có dạng:

$$R(x) = p.x$$

Trong đó:

x là số lượng sản phẩm bán ra,

p là giá bán một sản phẩm.

2. ***Xác định hàm chi phí:***

Chi phí (C) là tổng chi phí sản xuất của doanh nghiệp, có thể bao gồm chi phí cố định và chi phí thay đổi theo số lượng sản phẩm.

$$C(x) = C_f + C_v(x)$$

Trong đó:

C_f là chi phí cố định,

$C_v(x)$ là chi phí thay đổi (tính theo số lượng sản phẩm x).

3. ***Hàm lợi nhuận (L):***

Lợi nhuận là chênh lệch giữa doanh thu và chi phí:

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

Bước 2: Xây dựng mô hình toán học

Dựa vào các công thức đã xác định ở bước 1, xây dựng **hàm lợi nhuận** $L(x)$:

$$L(x) = p.x - \left(C_f + C_v(x)\right)$$

Bước 3: Giải mô hình toán học

1. ***Tìm cực trị, max – min của hàm*** $L(x)$

Lập bảng biến thiên, tìm cực trị. Suy ra đại lượng tối ưu theo đề bài

2. ***Kiểm tra cực trị***:

Đảm bảo giá trị tìm được là cực đại

Bước 4: Trả lời đáp án và diễn giải kết quả

Số lượng sản phẩm tối ưu là số lượng mà doanh nghiệp cần sản xuất và bán để ***đạt được lợi nhuận tối đa***.

Tính được ***lợi nhuận tối đa*** bằng cách thay giá trị x tối ưu vào hàm lợi nhuận $L(x)$

Lưu ý khi giải bài toán tối ưu lợi nhuận

- **Đơn vị**: Cần chú ý đến đơn vị của các đại lượng trong bài toán (nghìn đồng, triệu đồng, chiếc, sản phẩm,...).
- **Điều kiện thực tế**: Kiểm tra xem giá trị xxx tối ưu có phù hợp với thực tế hay không (ví dụ: số lượng sản phẩm phải là số nguyên dương).
- **Chi phí cố định và chi phí thay đổi**: Đảm bảo phân biệt giữa chi phí cố định và chi phí thay đổi khi lập phương trình chi phí.

Ví dụ 5. Một gia đình đan lưới đánh cá, mỗi ngày đan được x mét lưới $(1 \le x \le 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét lưới, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí: $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử gia đình làm nghề đan lưới bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét lưới. Hỏi lợi nhuận tối đa của gia đình đan lưới trong một ngày (đơn vị tính nghìn đồng)?

Lời giải

Đáp án: 1200.

➢ Số tiền thu về (doanh thu) khi bán x mét lưới là: $R(x) = 220x$.

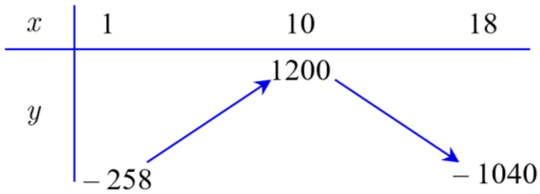
➢ Lợi nhuận thu được khi bán x mét lưới là:

$$L(x) = R(x) - C(x) = 220x - (x^3 - 3x^2 - 20x + 500) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$$

➢ Xét hàm số $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ với $x \in [1;18]$

$$L'(x) = -3x^2 + 6x + 240\,;\ L'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \in [1;18] \\ x = -8 \notin [1;18] \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



Vậy gia đình đan lưới trong một ngày thu được lợi nhuận tối đa là 1200 nghìn đồng khi đan 10 mét lưới trong một ngày.

Ví dụ 6. Một doanh nghiệp dự định sản xuất 200 máy tính bảng dành cho học sinh. Nếu doanh nghiệp đó bán x máy tính bảng $(1 \le x \le 200, x \in \mathbb{N})$ thì giá bán cho mỗi máy tính bảng là $p(x) = 4000 - 10x$ (nghìn đồng), trong đó chi phí để sản xuất mỗi máy tính bảng là $c(x) = x^2 - 70x + 400 + \dfrac{1000}{x}$ (nghìn đồng). Hỏi doanh nghiệp đó sẽ bán bao nhiêu máy tính bảng để lợi nhuận cao nhất?.

Lời giải

Đáp án: 60.

Ta có doanh thu của doanh nghiệp khi bán x máy tính bảng là

$$D(x) = x.p(x) = x(4000 - 10x) = 4000x - 10x^2.$$

Chi phí của doanh nghiệp để sản xuất x máy tính bảng là

$$C(x) = x.c(x) = x\left(x^2 - 70x + 400 + \frac{1000}{x}\right) = x^3 - 70x^2 + 400x + 1000.$$

Lợi nhuận của doanh nghiệp khi bán x máy tính bảng là

$$L(x) = D(x) - C(x) = 4000x - 10x^2 - \left(x^3 - 70x^2 + 400x + 1000\right) = -x^3 + 60x^2 + 3600x - 1000.$$

Xét hàm $L(x) = -x^3 + 60x^2 + 3600x - 1000\left(1 \le x \le 200; x \in \mathbb{N}\right)$.

Có $y' = -3x^2 + 120x + 3600$. $\quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 60 & (N) \\ x = -20 & (L) \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		60		200
y'		+	0	-	
y	0	$\nearrow$	215000	$\searrow$	-4881000

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy doanh nghiệp đó sẽ bán 60 máy tính bảng để lợi nhuận cao nhất.

Ví dụ 7. Một nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B, nhà máy A chỉ bán sản phẩm cho nhà máy B và nhà máy B cam kết thu mua hết số sản phẩm mà nhà máy A sản xuất được. Nhà máy A có khả năng sản xuất được tối đa là 200 tấn sản phẩm trong 1 tháng. Nếu bán ra x tấn sản phẩm cho nhà máy B thì giá bán mỗi tấn sản phẩm là $50-0,0002x^2$ triệu đồng. Trong một tháng nhà máy A phải chi phí cho nhân công và chi cho khấu hao máy móc một lượng cố định là 150 triệu đồng, ngoài ra khi sản xuất mỗi tấn sản phẩm thì nhà máy phải chi phí thêm cho mua nguyên liệu là 35 triệu đồng. Biết rằng nhà máy A phải nộp 5% doanh thu cho cơ quan thuế. Tính lợi nhuận sau thuế (lợi nhuận sau khi đã trừ tiền thuế) lớn nhất thu được trong 1 tháng của nhà máy A (*đơn vị tính là tỉ đồng và kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Lời giải

Đáp án: 1,08.

Doanh thu của nhà máy A khi bán x $\left(0<x\le 200\right)$ tấn sản phẩm trong 1 tháng là: $D\left(x\right)=x.\left(50-0,0002x^2\right)$.

Chi phí cho x tấn sản phẩm là: $C\left(x\right)=150+35x$.

Tiền thuế phải nộp của nhà máy A khi bán x tấn sản phẩm là $T\left(x\right)=x.\left(50-0,0002x^2\right).5\%$.

Suy ra lợi nhuận sau thuế của nhà máy A là:

$L\left(x\right)=D\left(x\right)-C\left(x\right)-T\left(x\right)=x.\left(50-0,0002x^2\right)-\left(150+35x\right)-x.\left(50-0,0002x^2\right).5\%$.

$\Rightarrow L\left(x\right)=-0,00019x^3+12,5x-150$.

$L'\left(x\right)=-0,00057x^2+12,5$.

$L'\left(x\right)=0\Leftrightarrow -0,00057x^2+12,5=0\Leftrightarrow x\approx 148,09$ (Vì $x>0$).

$L\left(0\right)=-150; L\left(148,09\right)\approx 1084,06; L\left(200\right)=830$.

Vậy lợi nhuận sau thuế lớn nhất thu được trong 1 tháng của nhà máy A là $1084,06$ triệu đồng hay $\approx 1,08$ tỉ đồng.

BAI TẬP THAM KHẢO

Câu 15. Một cửa hàng cà phê bán cà phê espresso, nhận thấy rằng lợi nhuận của cửa hàng y (tính theo đơn vị triệu đồng/ngày) phụ thuộc vào giá bán x (chục nghìn đồng) mỗi ly espresso. Qua khảo sát, cửa hàng mô tả lợi nhuận theo hàm số sau: $y=-2x^4+36x^2-90$. Hỏi cửa hàng nên chọn mức giá mỗi ly là bao nhiêu nghìn đồng để lợi nhuận tối ưu nhất?

Lời giải

Đáp án: 30

Ta có $y'=-8x^3+72x$ Giải $y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 3\end{array}\right.$

Với đồ thị hàm bậc 4 trùng phương hệ số $a<0$, ta chọn $x=3$ để hàm số đạt cực đại.

Vậy giá bán để tối ưu lợi nhuận là 30 nghìn đồng/ly.

Câu 16. Một cửa hàng quần áo đã thống kê số lượng quần áo bán ra trong ngày thứ $x(1 \le x \le 30)$ của một tháng xác định tuân theo quy luật được mô hình hoá bởi hàm số $f(x) = 3x^2 - 54x + 256$. Hỏi trong tháng đó, có bao nhiêu ngày có số lượng quần áo bán ra nhiều hơn ngày hôm trước?

Lời giải

Đáp án: 21

Ta có: $f'(x) = 6x - 54$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 9$

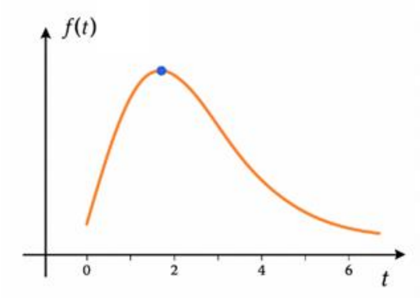
Ta có bảng biến thiên:

x	1		9		30
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	205	$\searrow$	13	$\nearrow$	1336

Vậy, các ngày trong tháng có số lượng quần áo bán ra nhiều hơn ngày hôm trước là từ ngày 10 đến ngày 30.

Khi đó có $30 - 10 + 1 = 21$ ngày thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17. Doanh số bán hàng của một loại sản phẩm (chục triệu đồng) trong một phiên livestream bán hàng kéo dài sáu giờ theo quy luật hàm số $f(t) = \dfrac{3t}{e^{\frac{t}{2}}}, 0 \le t \le 6$ trong đó thời gian t được tính bằng giờ kể từ khi bắt đầu livestream.



Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ khi bắt đầu phiên livestream thì doanh số bán hàng là lớn nhất?

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $f'(t) = \dfrac{6 - 3t}{2e^{\frac{t}{2}}}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 6 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Ta có bảng biến thiên với $t \in [0;6]$:

t	0		2		6
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	2,21	$\searrow$	

Vậy sau 2 giờ kể từ khi bắt đầu phiên livestream thì doanh số bán hàng là lớn nhất.

Câu 18. Giả sử lợi nhuận của một cửa hàng tạp hoá nhỏ trong ngày thứ x của một tháng nào đó được cho bơi công thức $h(x) = -2x^2 + 40x + 700$ (đơn vị: nghìn đồng). Giả sử tháng đó có 30 ngày, hỏi có bao nhiêu ngày trong tháng đó cửa hàng có lợi nhuận tăng so với lợi nhuận ngày liền trước đó?

Lời giải

Đáp án: 9

Ta có: $h'(x) = -4x + 40$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Bảng biến thiên của $h(x)$ trên đoạn $[1;30]$:

x	1		10		30
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	738	$\nearrow$	900	$\searrow$	100

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm lợi nhuận $h(x)$ có giá trị tăng trên đoạn $[1;10]$. Do đó các ngày có lợi nhuận tăng so với ngày liền trước đó là từ ngày 2 đến ngày 10.

Vậy có $10 - 2 + 1 = 9$ ngày.

Câu 19. Một khách sạn có 50 phòng cho thuê. Giả sử doanh thu (tức là tổng số tiền thu được) là $T(x) = -\frac{1}{38}x^2 + 2x$ (triệu đồng) với x là số phòng cho thuê được. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của x nằm trong miền doanh thu $T(x)$ tăng?

Lời giải

Đáp án: 38.

Ta có: $T'(x) = -\frac{1}{19}x + 2; T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 38$.

x	0		38		50
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	38	$\searrow$	$\frac{650}{19}$

Khi đó, với $x \in (0;38]$ thì $T(x)$ tăng.

Vậy có 38 giá trị nguyên dương x thoả mãn.

Câu 20. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1+5e^{-t}}, t \geq 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Đáp án: 1,6

Ta có: $f'(t) = \frac{-5000\left(1+5e^{-t}\right)'}{\left(1+5e^{-t}\right)^2} = \frac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$

Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

Đặt $h(t)=\dfrac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$.

$$h'(t)=\frac{-25000e^{-t}\left(1+5e^{-t}\right)^2-2\cdot\left(-5e^{-t}\right)\cdot\left(1+5e^{-t}\right)\cdot 25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^4}$$

$$=\frac{-25000e^{-t}\left(1+5e^{-t}\right)\left(1+5e^{-t}-10e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^4}=\frac{-25000e^{-t}\left(1-5e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^3}$$

$$h'(t)=0\Leftrightarrow\frac{-25000e^{-t}\left(1-5e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^3}=0\ \Leftrightarrow 1-5e^{-t}=0\Leftrightarrow e^{-t}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow t=\ln 5(\text{tm})$$

Ta có bảng biến thiên với $t\in[0;+\infty)$:

t	0		$\ln 5$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		$\nearrow$	1250	$\searrow$	

Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5\approx 1,6$ năm thì thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

Câu 21. Một xưởng sản xuất nón bảo hiểm có hàm chi phí sản xuất cho x chiếc nón là $C(x)=0,01x^2+20x+1000$ (nghìn đồng). Giá bán mỗi chiếc nón là 50 nghìn đồng. Hãy xác định số lượng nón cần sản xuất để xưởng đạt lợi nhuận tối đa.

Lời giải

Đáp án: 1500

* Doanh thu từ việc bán x chiếc nón là: $R(x)=50x$ (nghìn đồng)

* Lợi nhuận là hiệu số giữa doanh thu và chi phí nên

$P(x)=C(x)-R(x)=50x-\left(0,01x^2+20x+1000\right)=-0,01x^2+30x-1000$.

* $P'(x)=-0,02x+30$

* $P'(x)=0\Leftrightarrow x=1500$.

* $P''(x)=-0,02<0$ với mọi x nên $x=1500$ là điểm cực đại.

* Kết luận: Xưởng cần sản xuất 1500 chiếc nón bảo hiểm để đạt lợi nhuận tối đa.

Câu 22. Giả sử tổng chi phí sản xuất x $(0\le x\le 50)$ đơn vị sản phẩm A mỗi ngày tại một nhà máy được cho bởi công thức $C(x)=\dfrac{x^2}{4}+3x+400$ (nghìn đồng) và toàn bộ chúng được bán hết với giá $(900-6x)$ nghìn đồng một sản phẩm. Tìm mức sản lượng (đó là số lượng sản phẩm được sản xuất) để chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm là đạt cực tiểu.

Lời giải

Đáp án: 40.

Kí hiệu $\bar{C}(x)$ là chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm.

Ta có $\bar{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}=\dfrac{x}{4}+3+\dfrac{400}{x}$.

Đạo hàm: $\bar{C}'(x)=\dfrac{x^2-1600}{4x^2}=0\Leftrightarrow x=40$ (vì $0\le x\le 50$).

Bảng biến thiên như sau

x	0		40		50
$\overline{C}'$		$-$	0	$+$	
$\overline{C}$	$+\infty$	$\searrow$	23	$\nearrow$	$23,5$

Vậy mức sản lượng $x = 40$.

Câu 23. Lợi nhuận tổng hàng ngày (tính theo đô la) mà TKK Corporation thu được từ việc sản xuất và bán x đĩa DVD có thể ghi lại được cho bởi hàm lợi nhuận

$P(x) = -0,000001x^3 + 0,001x^2 + 5x - 500; \quad 0 \le x \le 2000$

Tìm mức sản xuất x để lợi nhuận hàng ngày đạt cực đại. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Đáp án: 1667

Tính đạo hàm $P'(x)$: $P'(x) = \left(-10^{-6}x^3 + 10^{-3}x^2 + 5x - 500\right)' = -3\cdot 10^{-6}x^2 + 2\cdot 10^{-3}x + 5$

Xét $P'(x) = 0$: $-3.10^{-6}x^2 + 0,002x + 5 = 0 \Rightarrow 3.10^{-6}x^2 - 0,002x - 5 = 0.$

Chia cả hai vế cho 10^{-6}: $3x^2 - 2000x - 5000000 = 0$

Giải phương trình bậc hai: $x = \dfrac{2000 \pm \sqrt{2000^2 + 4\cdot 3\cdot 5000000}}{2\cdot 3} = \dfrac{2000 \pm \sqrt{4000000 + 60000000}}{6}$
$= \dfrac{2000 \pm \sqrt{64000000}}{6} = \dfrac{2000 \pm 8000}{6}.$

Kết quả: $x_1 = \dfrac{2000+8000}{6} = \dfrac{10000}{6} \approx 1666,67$, $\quad x_2 = \dfrac{2000-8000}{6} = -1000$ (loại)

Chọn $x = 1666,67$ (nằm trong đoạn $[0;2000]$).

Lập bảng biến thiên ta suy ra được P đạt cực đại tại $x \approx 1666,67$.

Để lợi nhuận hàng ngày lớn nhất, TKK Corporation nên sản xuất khoảng 1667 DVD

Câu 24. Định mức cầu mỗi tháng của đồng hồ đeo tay Peget phụ thuộc vào giá đơn vị p theo phương trình cầu $p = \dfrac{50}{0.01x^2 + 1}$, $\quad 0 \le x \le 20$ trong đó p tính bằng đô la và x tính bằng nghìn chiếc. Hỏi nhà sản xuất phải bán bao nhiêu nghìn chiếc để doanh thu $R = px$ đạt cực đại?

Lời giải

Đáp án: 10

Doanh thu $R(x)$ là $R(x) = p(x)x = \dfrac{50x}{0,01x^2 + 1}$

Tính đạo hàm $R'(x)$

$$R'(x) = \frac{\left(0,01x^2+1\right)\cdot 50 - 50x\cdot(0,02x)}{\left(0,01x^2+1\right)^2} = \frac{50\left(0,01x^2 + 1 - 0,02x^2\right)}{\left(0,01x^2+1\right)^2} = \frac{50\left(1 - 0,01x^2\right)}{\left(0,01x^2+1\right)^2}; 0 \le x \le 20$$

Giải $R'(x) = 0$: $1 - 0,01x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$

Có bảng xét dấu:

x	0		10		20
$R'(x)$		$+$	0	$-$	

Suy ra được hàm số đạt cực đại tại $x = 10$

Giá trị cực đại là $R(10) = 250$.

Câu 25. Sau khi kinh tế suy giảm, giá thuê văn phòng cao ngất ngưởng cuối thập niên 1990 bắt đầu hạ nhiệt. Hàm $R(t)$ cho giá thuê (USD/ ft^2) của văn phòng hạng A ở khu Back Bay và Financial District (Boston) từ đầu 1997 $(t=0)$ đến đầu $2002(t=5)$ là

$$R(t)=-0,711t^3+3,76t^2+0,2t+36,5;\quad 0\le t\le 5.$$

Hỏi giá thuê cao nhất trong giai đoạn này là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Đáp án: 52,8

Tính đạo hàm $R'(t)=\left(-0,711t^3+3,76t^2+0,2t+36,5\right)'=-2,133t^2+7,52t+0,2.$

Giải $R'(t)=0$: $-2,133t^2+7,52t+0,2=0$

Áp dụng công thức nghiệm:

$$t=\frac{-7,52\pm\sqrt{7,52^2-4(-2,133)(0,2)}}{2(-2,133)}\approx\frac{-7,52\pm\sqrt{56,5504+1,7064}}{-4,266}=\frac{-7,52\pm 7,632}{-4,266}.$$

Hai nghiệm thu được: $t_1\approx\dfrac{-7,52+7,632}{-4,266}\approx-0,03$ (loai), $\quad t_2\approx\dfrac{-7,52-7,632}{-4,266}\approx 3,55.$

Lập bảng biến thiên ta suy ra được hàm số đạt cực đại tại $t\approx 3,55$

Hay giá thuê cao nhất là $R(3,55)\approx 52,8\,USD/\,ft^2$

Câu 26. Trận bóng đá giao hữu giữa đội tuyển Việt Nam và Thái Lan ở sân vận động Mỹ Đình có sức chứa 55 000 khán giả. Ban tổ chức bán vé với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình đến sân xem bóng đá là 27 000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3 000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất với đơn vị tính giá vé là nghìn đồng?

Lời giải

Đáp án: 95

Gọi x $(x>0)$ nghìn là số tiền giá vé giảm.

Khi đó giá vé sau khi giảm là $100-x$ (nghìn đồng).

Sau mỗi lần giảm giá thì có thêm $300x$ khán giả.

Do đó tổng số khán giả đến xem là $27000 + 300x$.

Vì sân vận động có sức chứa 55 000 khán giả nên $27000+300x\le 55000\Leftrightarrow x\le\dfrac{280}{3}$

Doanh thu từ tiền bán vé là: $y=(27000+300x)(100-x)=-300x^2+3000x+2700000$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-300x^2+3000x+2700000$

Tập xác định $D=\left(0;\dfrac{280}{3}\right]$

$y'=-600x+3000.$ $y'=0\Leftrightarrow x=5$

Bảng biến thiên:

x	0		5		$\frac{280}{3}$
y'		$+$	0	$-$	
y	2700000	$\nearrow$	2707500	$\searrow$	2700000

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy ban tổ chức nên đặt giá vé là **95** nghìn đồng thì doanh thu tiền bán vé là lớn nhất.

Câu 27. Một hộ gia đình chuyên làm thịt trâu sấy khô để bán, mỗi ngày hộ đó sản suất được x kg thịt, $(1 \le x \le 20)$. Tổng chi phí sản xuất x kg thịt trâu khô, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí: $C(x) = x^3 - 9x^2 + 345x + 450$. Giả sử hộ gia đình này bán hết số thịt làm ra mỗi ngày với giá 750 nghìn đồng/kg. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x kg thịt trâu sấy khô. Hỏi lợi nhuận tối đa mà hộ gia đình này thu được trong một ngày?

Lời giải

Đáp án: 4275

Số tiền thu về khi bán x kg thịt là: $750x$.

Lợi nhuận thu được khi bán x kg thịt là: $L(x) = 750x - \left(x^3 - 9x^2 + 345x + 450\right) = -x^3 + 9x^2 + 405x - 450$

Xét hàm số $L(x) = -x^3 + 9x^2 + 405x - 450$ với $x \in [1; 20]$

$L'(x) = -3x^2 + 18x + 405$; $L'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15 \in [1; 20] \\ x = -9 \notin [1; 20] \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	1		15		20
$L'(x)$		+	0	−	
$L(x)$	-37	↗	4275	↘	3250

Vậy hộ gia đình sản xuất thịt khô này thu được lợi nhuận tối đa trong một ngày là 4275 nghìn đồng khi sản xuất 15 kg thịt trâu khô trong một ngày.

Câu 28. Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = 1000\left(t^2 + me^{-t}\right)$ với $t \ge 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, m là tham số. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Tính tổng các giá trị nguyên âm của m biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm.

Lời giải

Đáp án: –3

Ta có $f'(t) = 1000\left(2t - me^{-t}\right)$, $f''(t) = 1000\left(2 + me^{-t}\right)$

Tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm khi và chỉ khi hàm số $f'(t)$ đồng biến trên $[0;10]$ $\Leftrightarrow$ $f''(t) \ge 0\ \forall t \in [0;10]$

$\Leftrightarrow 2 + me^{-t} \ge 0\ \forall t \in [0;10] \Leftrightarrow m \ge -2e^t\ \forall t \in [0;10]$ (1)

Xét hàm $g(t) = -2e^t$ luôn nghịch biến trên $[0;10] \Rightarrow \max\limits_{[0;10]} g(t) = g(0) = -2$

Do đó $(1) \Leftrightarrow m \ge -2$

Suy ra tổng các giá trị nguyên âm của m bằng -3.

Câu 29. Một gia đình đan lưới đánh cá, mỗi ngày đan được x mét lưới $(1 \le x \le 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét lưới, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$.

Giả sử gia đình làm nghề đan lưới bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét.

Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét lưới.

Hỏi lợi nhuận tối đa của gia đình đan lưới trong một ngày (đơn vị tính nghìn đồng)?

Lời giải

Đáp án: 1200.

Số tiền thu về khi bán x mét lưới là: $220x$.

Lợi nhuận thu được khi bán x mét lưới là:

$$L(x)=220x-(x^3-3x^2-20x+500)=-x^3+3x^2+240x-500$$

Xét hàm số $L(x)=-x^3+3x^2+240x-500$ với $x\in[1;18]$

$$L'(x)=-3x^2+6x+240\,;\ L'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10\in[1;18]\\x=-8\notin[1;18]\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	1		10		18
y	-258	↗	1200	↘	-1040

Vậy gia đình đan lưới trong một ngày thu được lợi nhuận tối đa là 1200 nghìn đồng khi đan 10 mét lưới trong một ngày.

Câu 30. Một khu vui chơi giải trí giành cho trẻ em đang có kế hoạch điều chỉnh giá vé để tăng lợi nhuận. Sau khi khảo sát thị trường, người ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 50000/người thì trung bình có 500 người đến. Nhưng nếu tăng thêm 1000/người thì sẽ mất 10 khách hàng hoặc giảm đi 1000/người thì sẽ có thêm 10 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 5000 lợi nhuận trong các dịch vụ đi kèm. Hỏi giá vé vào cửa là bao nhiêu nghìn đồng để thu nhập là lớn nhất?

Lời giải

Đáp án: 47,5 (nghìn đồng).

Gọi giá vé vào cửa sau khi điều chỉnh là $50+x$ (nghìn đồng); điều kiện: $50+x>0\Leftrightarrow x>-50$.

Số khách hàng đến sau khi điều chỉnh giá vé là $500-10x$ (người).

Khi đó tổng thu nhập là:

$$f(x)=(50+x)(500-10x)+5.(500-10x)$$
$$=-10x^2-50x+27500$$

Xét hàm số: $f(x)=-10x^2-50x+27500$

Bảng biến thiên:

x	-50		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	5000	↗	$\frac{55125}{2}$	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=-\dfrac{5}{2}$.

Vậy để thu nhập lớn nhất thì giá vé vào cửa là $50-\frac{5}{2}=47,5$ (nghìn đồng).

Câu 31. Một cửa hàng có bán loại sản phẩm A. .Khi cửa hàn bán sản phẩm A với giá 400 ngàn đồng thì mỗi tuần cửa hàng bán được 200 sản phẩm. Cửa hàng dự định có đợt giảm giá bán để kích cầu trong dịp lễ sắp tới. Theo khảo sát thị trường, mỗi lần giảm giá 20 ngàn đồng 1 sản phẩm thì cửa hàng bán thêm được 20 sản phẩm mỗi tuần. Hỏi cửa hàng cần bán một sản phẩm với giá bao nhiêu ngàn đồng thì doanh thu trong 1 tuần lớn nhất.

Lời giải

Đáp án: 300.

Gọi x là số lần giảm giá ($0\le x\le 20$).

Suy giá bán một sản phẩm là: $\left(400-20x\right)$.

Số sản phẩm bán ra trong tuần là: $200+20x$

Doanh thu trong tuần là $f(x)=(200+20x).(400-20x)$, $0<x<20$

$f(x)=(200+20x).(400-20x)=20.20.\left(10+x\right)\left(20-x\right)=400.(-x^2+10x+200)$.

Ta có $f'(x)=400.(-2x+10)=0\Leftrightarrow x=5$.

$f\left(x\right)$ đạt GTLN trên $(0;20)$ khi $x=5$.

Vậy giá bán sản phẩm của cửa hàng để doanh thu trong 1 tuần lớn nhất là $400-20.5=300$ (ngàn đồng)

Câu 32. Một trang trại rau sạch ở Đà Lạt mỗi ngày thu hoạch được 1 tấn rau. Nếu giá bán rau là 30000 đồng/kg thì 1 tấn rau thu hoạch được bán hết. Nếu giá bán rau cao hơn 30000 đồng/kg thì không bán hết 1 tấn rau. Cứ bán tăng thêm 1000 đồng cho 1 kg rau, số rau thừa lại tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được một cơ sở chăn nuôi thu mua hết để làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi để mỗi ngày thu được số tiền bán rau lớn nhất thì trang trại đó nên bán rau với giá bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

Đáp án: 41.

Gọi x (nghìn đồng) là số tiền cần tăng giá bán của mỗi kg rau.

Suy ra giá bán mỗi kg rau là $30+x$ (nghìn đồng)

Khi đó mỗi ngày trang trại bán được $1000-20x$ kg rau.

Điều kiện $0<x<50$ và x là số tự nhiên.

Mỗi ngày trang trại thu được số tiền bán rau là:

$L\left(x\right)=\left(1000+20x\right)\left(30+x\right)+20\cdot x\cdot 2$ (nghìn đồng)

Hay $L\left(x\right)=-20x^2+440x+30000$

$L\left(x\right)$ là hàm bậc hai có hệ số $a=-20<0$ và đỉnh là $I\left(11;32420\right)$ nên $L\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=11$

Vậy giá bán mỗi kg rau là 41 (nghìn đồng) thì số tiền bán rau của trang trại trong mỗi ngày là lớn nhất

Câu 33. Tại một nhà máy, khi sản xuất và bán ra x sản phẩm A $\left(0\le x\le 250\right)$ trong một tháng thì tổng chi phí mà nhà máy phải trả là $C\left(x\right)=0,00024x^3-0,03x^2+5x+30$ (triệu đồng) và doanh thu tương ứng là

$D(x)=-0,01x^2+16x-25$ (triệu đồng). Hỏi trong một tháng, lợi nhuận lớn nhất mà nhà máy đó có thể thu được nhờ vào sản xuất và bán sản phẩm A bằng bao nhiêu triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp án: 1237.

Lợi nhuận trong một tháng của doanh nghiệp khi sản xuất và bán ra x sản phẩm A là

$$R(x)=D(x)-C(x)$$
$$=\left(-0,01x^2+16x-25\right)-\left(0,00024x^3-0,03x^2+5x+30\right)$$
$$=-0,00024x^3+0,02x^2+11x-55$$

Xét hàm số $R(x)=-0,00024x^3+0,02x^2+11x-55$ với $x\in[0;250]$, ta có

$R'(x)=-0,00072x^2+0,04x+11$;

$$R'(x)=0\Leftrightarrow -0,00072x^2+0,04x+11=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{100\sqrt{130}+250}{9}\\ x=\dfrac{-100\sqrt{130}+250}{9}\end{array}\right.$$

Với $x\in[0;250]$ ta được $x=\dfrac{100\sqrt{130}+250}{9}=154,463...$

Hàm $R(x)$ liên tục trên $[0;250]$ và ta có

$$R(0)=-55;\ R\left(\dfrac{100\sqrt{130}+250}{9}\right)=1236,796...\approx 1237\approx R(154)\approx R(155);\ R(250)=195.$$

Suy ra lợi nhuận lớn nhất mà nhà máy thu được vào khoảng 1237 (triệu đồng) khi $x=154$ hoặc $x=155$.

Câu 34. Doanh thu (Revenue) của một công ty bất động sản khi bán căn hộ thứ n (n nguyên dương, nhỏ hơn 200) được cho bởi hàm số $R(n)=\dfrac{(n-4)(n-30)^2}{100}+36$ (triệu đồng). Trong 100 căn hộ đầu tiên được bán ra, căn hộ thứ bao nhiêu cho doanh thu thấp nhất?

Lời giải

Đáp án: 1.

$$R(n)=\frac{1}{100}(n-4)\left(n^2-60n+900\right)+36=\frac{1}{100}\left(n^3-64n^2+1140n-3600\right)+36$$

Có $R'(n)=\dfrac{1}{100}\left(3n^2-128n+1140\right)\Leftrightarrow n=\dfrac{38}{3};n=30$

n	1		$\frac{38}{3}$		30		100
$R'(n)$		$+$	0	$-$	0		
$R(n)$	$10,77$	$\nearrow$	$\frac{41876}{675}$	$\searrow$	36	$\nearrow$	4740

Dựa vào bảng biến thiên ta có $n=1$

Câu 35. Giả sử giá của một cổ phiếu nào đó (tính bằng euro) trong một ngày nhất định (có 8 giờ giao dịch) được mô tả bởi hàm số: $f(x)=35,7\dfrac{x+2}{x^2+21};x\in[0;8]$, trong đó x là thời gian (tính bằng giờ) kể từ khi phiên giao dịch mở cửa. Nếu một người mua 100 cổ phiếu và bán chúng ngay trong ngày này thì người đó có lợi nhuận tối đa là bao nhiêu euro?

Lời giải

Đáp án: 255

Ta có $f'(x)=35,7.\dfrac{x^2+21-2x(x+2)}{(x^2+21)^2}=35,7.\dfrac{-x^2-4x+21}{(x^2+21)^2}$

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-7 \end{array}\right.$

Kết hợp với $x\in[0;8]$ thì $x=-7$ (loại)

x	0		3		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$3,4$	$\nearrow$	$5,95$	$\searrow$	$4,2$

Giá thấp nhất để mua 1 cổ phiếu là 3,4 và giá cao nhất để bán 1 cổ phiếu là 5,95.

Vậy lợi nhuận tối đa của 1 cổ phiếu là 5,95 – 3,4 = 2,55.

Vì người đó mua 100 cổ phiếu nên người đó có lợi nhuận tối đa là 255 euro

Câu 36. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x)=45-0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm. Nhà máy A cần bán cho nhà máy B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng để lợi nhuận thu được là lớn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

Đáp án: 70,7.

Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+30x$ (triệu đồng).

Doanh thu khi nhà máy A bán hết x tấn sản phẩm cho nhà máy B là: $x.P(x)=x(45-0,001x^2)=45x-0,001x^3$.

Lợi nhuận thu được là: $L(x)=45x-0,001x^3-(100+30x)=-0,001x^3+15x-100$.

Ta có: $L'(x)=-0,003x^2+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\approx 70,7 \\ x\approx -70,7 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$70,7$		$+\infty$
$L'(x)$		$+$	0	$-$	
$L(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Như vậy, nhà máy A cần bán cho nhà máy B $70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Câu 37. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B; Hai nhà máy thảo thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của nhà máy B (tối đa 90 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $p(x)=90-0,01x^2$ (đơn vị triệu đồng). Chi phí để nhà máy A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=\dfrac{1}{2}(200+27x)$ (đơn vị triệu đồng), thuế giá trị gia tăng mà nhà máy A phải đóng cho nhà nước là 10% tổng doanh thu mỗi tháng. Hỏi mỗi tháng nhà máy A thu được lợi nhuận cao nhất là bao nhiêu triệu đồng (sau khi đã trừ thuế giá trị gia tăng)?

Lời giải

Đáp án: 2150

Gọi x là số tấn sản phẩm nhà máy B đặt hàng nhà máy A hàng tháng ($0 \le x \le 90$)

Tổng doanh thu hàng tháng của nhà máy A là $xp(x) = 90x - 0,01x^3$ (triệu đồng)

Thuế giá trị gia tăng mà nhà máy A phải đóng cho nhà nước là $9x - 0,001x^3$ (triệu đồng)

Tổng chi phí mà nhà máy A phải chi trả hàng tháng là $\frac{1}{2}(200+27x)+(9x-0,001x^3)$ (triệu đồng)

Khi đó, lợi nhuận hàng tháng của nhà máy A là

$(90x-0,01x^3)-\frac{1}{2}(200+27x)-(9x-0,001x^3) = -0,009x^3+67,5x-100$ (triệu đồng)

Xét hàm số $f(x) = -0,009x^3+67,5x-100$, $x \in [0;90]$

Ta có: $f'(x) = -0,027x^2+67,5$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=50 \\ x=-50\ (l) \end{array}\right.$ và $f(0)=-100,\ f(50)=2150,\ f(90)=-586$.

Vậy mỗi tháng nhà máy A thu được lợi nhuận cao nhất là 2150 triệu đồng.

Câu 38. Một hộ kinh doanh sản xuất mỗi ngày được x sản phẩm, $(1 \le x \le 20)$. Chi phí sản xuất x sản phẩm được cho bởi $C(x) = x^3 - 3x^2 + 80x + 500$ (nghìn đồng). Giả sử hộ kinh doanh này bán mỗi sản phẩm với giá 320 nghìn đồng. Lợi nhuận lớn nhất mà hộ kinh doanh có được là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Đáp án: 1,2.

Doanh thu tối đa mà hộ kinh doanh có thể thu được là $320x$ (nghìn đồng).

Lợi nhuận hộ kinh doanh thu được là $L(x) = 320x - (x^3-3x^2+80x+500) = -x^3+3x^2+240x-500$.

Ta có $L'(x) = -3x^2+6x+240 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=-8. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		10		$+\infty$
$L'(x)$		$+$	0	$-$	
$L(x)$		$\nearrow$	1200	$\searrow$	

Vậy lợi nhuận lớn nhất mà hộ kinh doanh có được là 1200 nghìn đồng $= 1,2$ triệu đồng.

Câu 39. Từ năm 2004 đến năm 2019 doanh thu $R(t)$ (tính bằng triệu đô la) của McDonald's có thể được mô hình hóa bởi $R(t) = -130,769t^3 + 2\,296,47t^2 - 11493,5t + 35\,493$ $(4 \le t \le 19)$, trong đó t là đại diện cho năm, với $t=4$ tương ứng với năm 2004. Biết rằng $R'(t)$ là hàm tốc độ doanh thu theo thời gian. Tốc độ thay đổi doanh thu của McDonald's lớn nhất vào năm nào? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, tính theo triệu đô la mỗi năm).

Lời giải

Đáp án: 2006.

Ta có hàm tốc độ doanh thu là $R'(t) = -392,307t^2 + 4592,94t - 11493,5$.

$R''(t) = -784,614t + 4592,94 = 0 \Leftrightarrow t \approx 6$ (nhận).

Ta có bảng biến thiên của hàm số

t	4		6		19
$R''(t)$		+	0	−	
$R'(t)$	601	↗	1941	↘	−65851

Dựa bào bảng biến thiên ta thấy rằng tốc độ thay đổi doanh thu của McDonald's lớn nhất vào năm 2006 (tương ứng với $t = 6$).

Câu 40. Một nhà máy sản xuất x sản phẩm trong mỗi tháng. Chi phí sản xuất x sản phẩm được cho bởi hàm chi phí $C(x) = 16000 + 500x - 1,6x^2 + 0,004x^3$ (nghìn đồng). Biết giá bán của mỗi sản phẩm là một hàm số phụ thuộc vào số lượng sản phẩm x và được cho bởi công thức $p(x) = 1700 - 7x$ (nghìn đồng). Hỏi mỗi tháng nhà máy nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất? Biết rằng kết quả khảo sát thị trường cho thấy sản phẩm sản xuất ra sẽ tiêu thụ hết.

Lời giải

Đáp án: 100.

+) Số tiền nhà máy thu được khi bán hết x sản phẩm là: $x.p(x) = 1700x - 7x^2$ (nghìn đồng)

Lợi nhuận nhà máy thu được khi sản xuất và bán hết x sản phẩm là: $x.p(x) - C(x) = -0,004x^3 - 5,4x^2 + 1200x - 16000$ (với $x > 0$).

+) Xét hàm số $f(x) = -0,004x^3 - 5,4x^2 + 1200x - 16000$ trên $(0;+\infty)$

Ta có $f'(x) = -0,012x^2 - 10,8x + 1200$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 100 \\ x = -1000 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		100		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	-16000	↗	46000	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(100) = 46000$ (nghìn đồng).

Vậy mỗi tháng nhà máy nên sản xuất 100 sản phẩm thì lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Câu 41. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1+5e^{-t}}, t \geq 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành thì tốc độ bán hàng đạt lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 1250

Ta có $f(t) = \frac{5000}{1+5e^{-t}} = \frac{5000e^t}{e^t + 5}$

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{5000e^t\left(e^t+5\right)-5000e^{2t}}{\left(e^t+5\right)^2}=\frac{25000.e^t}{\left(e^t+5\right)^2}>0,\forall t\ge 0$$

$$\Rightarrow f''(t)=\frac{25000.e^t.\left(e^t+5\right)^2-50000.e^t.\left(e^t+5\right).e^t}{\left(e^t+5\right)^4}$$

$$=\frac{25000.e^t.\left(e^t+5\right).\left(e^t+5-2e^t\right)}{\left(e^t+5\right)^4}=\frac{25000.e^t.\left(5-e^t\right)}{\left(e^t+5\right)^3}$$

Có $f''(t)=0\Leftrightarrow 5-e^t=0\Leftrightarrow t=\ln 5$.

Ta có bảng biến thiên

t	0		$\ln 5$		$+\infty$
$f''(t)$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$	$\frac{6250}{9}$	$\nearrow$	1250	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có tốc độ bán hàng lớn nhất là 1250.

Câu 42. Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1\le x\le 500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x)=x^3-1999x^2+1001000x+250000$ (đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x)=x+1000+\dfrac{250000}{x}$ (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Lời giải

Đáp án: 333.

Ta xét hàm lợi nhuận nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1\le x\le 500$) là:

$$f(x)=F(x)-x.G(x)=x^3-1999x^2+1001000x+250000-x\left(x+1000+\frac{250000}{x}\right)$$

$$=x^3-2000x^2+1000000x;$$

$$f'(x)=3x^2-4000x+1000000;$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1000}{3}\approx 333,33\in[1;500]\\ x=1000\notin[1;500]\end{array}\right..$$

Ta lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[1;500]$

x	$-\infty$	1		$\frac{1000}{3}$		500	1000	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$		0	
$f(x)$			$\nearrow$		$\searrow$			

Từ bảng biến thiên, ta có: $\max\limits_{[1;500]} f(x)=f\left(\dfrac{1000}{3}\right)\approx 148148148$.

Vì x là số tự nhiên, nên ta tính thêm hai giá trị của x liền kề $\frac{1000}{3}$:

$f(333) \approx 148148037$; $f(334) \approx 148147704$.

Do đó doanh nghiệp lợi nhuận thu được là lớn nhất khi sản xuất 333 sản phẩm.

Câu 43. Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 300 sản phầm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm $(1 \le x \le 300)$ thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -2x^2 + 1312x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = x^2 - 77x + 1000 + \frac{40000}{x}$ (nghìn đồng). Lợi nhuận thu được của doanh nghiệp (tính theo đơn vị triệu đồng) đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp án: 38.

Chi phí sản xuất cho x sản phẩm là $xG(x) = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$ (nghìn đồng).

Lợi nhuận thu được của doanh nghiệp:

$h(x) = -2x^2 + 1312x - (x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000) = -x^3 + 75x^2 + 312x - 40000$ (nghìn đồng).

Ta có: $h'(x) = -3x^2 + 150x + 312$.

Xét $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 52 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	1		52		300
$h'(x)$		+	0	−	
$h(x)$		$\nearrow$	38416	$\searrow$	

Vậy lợi nhuận lớn nhất của doanh nghiệp khoảng 38 triệu đồng.

Câu 44. Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 400 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm $(1 \le x \le 400)$ thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng).Trong đó, chi phí vận hành máy móc cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \frac{100000x}{\frac{3}{2}x + 1}$ đồng. Tổng chi phí mua nguyên vật liệu là $H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$ (đồng) nhưng do doanh nghiệp mua với số lượng lớn nên được giảm 1% cho 200 sản phẩm đầu tiên doanh nghiệp sản xuất và giảm 2% cho sản phẩm tiếp theo. Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất ?

Lời giải

Đáp án: 253

Ta có chi phí

$H(200) = 35950000$

$H(x-200) = 2(x-200)^3 + 100000(x-200) - 50000$, với $400 \ge x > 200$

Ta có lợi nhuận thu được tính như sau:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-1999x^2+1001000x+250000-\dfrac{100000x^2}{\dfrac{3}{2}x+1}-\dfrac{99}{100}(2x^3+100000x-50000), \text{khi } 0\le x\le 200 \\ x^3-1999x^2+1001000x+250000-\dfrac{100000x^2}{\dfrac{3}{2}x+1}-\dfrac{99}{100}H(200)-\dfrac{98}{100}H(x-200), \text{khi } 200< x\le 400 \end{cases}$$

*. Xét trường hợp khi $0\le x\le 200$

$$f(x)=-0,98x^3-1999x^2+902000x+299500-\frac{200000x^2}{3x+2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-26,46x^4-36017,28x^3+8070912,24x^2+10080008x+3608000}{(3x+2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x\approx 196,98$$

BBT:

x	0		$196,98$		200
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$79,834.10^6$	$\searrow$	

*. Xét trường hợp khi $200<x\le 400$

$$f(x)=-0,96x^3-823x^2+667800x-11500-\frac{200000x^2}{3x+2}, 200<x\le 400$$

$$\Rightarrow f'(x)=-2,88x^2-1646x+667800-\frac{600000x^2+800000x}{(3x+2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x\approx 253,11$$

BBT:

x	200		$253,11$		400
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$83,894.10^6$	$\searrow$	

Vì số sản phẩm sản xuất được là số tự nhiên, từ BBT trên ta so sánh $f(253)$ và $f(254)$

Ta có: $f(253)\approx 83893648,05$ và $f(254)\approx 83892445,32$

Vậy doanh nghiệp cần sản xuất 253 sản phẩm thì lợi nhuận là lớn nhất

Câu 45. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in…) được cho bởi $C(x)=x^2-2000x+10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. $M(x)=\dfrac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường thẳng có phương trình dạng $y=ax+b$. Tính $P=68a+3b+800$.

Lời giải

Đáp án: 6868.

Theo giả thiết, ta có:

$T(x) = C(x) + 4000x = x^2 + 2000x + 10^8$ (đồng).

$M(x) = \dfrac{T(x)}{x} = x + \dfrac{10^8}{x} + 2000$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[M(x) - (x+2000)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x + \dfrac{10^8}{x} + 2000 - (x+2000)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{10^8}{x}\right] = 0$.

Khi đó đồ thị hàm số $M(x) = x + \dfrac{10^8}{x} + 2000$ có 1 tiệm cận xiên là $y = x + 2000$.

Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường thẳng $y = x + 2000$.

Suy ra $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2000 \end{cases}$.

Vậy $P = 68a + 3b + 800 = 68\cdot 1 + 3\cdot 2000 + 800 = 6868$.

Câu 46. Một công ty chuyên sản xuất dụng cụ thể thao nhận được đơn đặt hàng sản xuất 9000 quả bóng rổ. Công ty có một số máy móc, mỗi máy có khả năng sản xuất 36 quả bóng rổ trong một giờ. Chi phí thiết lập mỗi máy là 250 nghìn đồng. Sau khi thiết lập, quá trình sản xuất sẽ diễn ra hoàn toàn tự động và chỉ cần có người giám sát. Chi phí trả cho người giám sát là 225 nghìn đồng mỗi giờ. Số máy móc công ty cần sử dụng để chi phí hoạt động đạt mức thấp nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 15

Gọi số máy móc công ty cần sử dụng để sản xuất 9000 quả bóng rổ là: x $(x \geq 1; x \in \mathbb{Z})$.

Chi phí thiết lập mỗi máy là 250 nghìn đồng nên chi phí thiết lập x máy là $250x$ nghìn đồng.

Do mỗi máy sản xuất trong 1h được 36 quả bóng rổ nên x máy trong 1h sẽ sản xuất được $36x$ quả.

Để sản xuất 9000 quả bóng thì cần $\dfrac{9000}{36x} = \dfrac{250}{x}$ (h).

Chi phí trả cho người giám sát là 225 nghìn đồng 1h nên chi phí cần trả cho người giám sát là: $225.\dfrac{250}{x}$ nghìn đồng.

Tổng chi phí phải trả để sản xuất 9000 quả bóng là: $f(x) = 250x + \dfrac{225.250}{x}$

Ta có: $f'(x) = 250 - \dfrac{225.250}{x^2} = \dfrac{250x^2 - 225.250}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -15 \\ x = 15 \end{array}\right.$

BBT:

x	1		15		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ BBT ta có $f(x)$ đạt giá trị bé nhất tại $x = 15$.

Vậy số máy móc công ty cần sử dụng để chi phí hoạt động đạt mức thấp nhất là 15.

Câu 47. Một nhà xuất bản nhận in 4000 ấn phẩm. Nhà xuất bản có tất cả 14 máy in được cài đặt, hoạt động tự động và giám sát bởi 1 kĩ sư. Mỗi máy in có thể in được 30 ấn phẩm trong một giờ. Chi phí cài đặt máy in là 12 USD cho một máy, chi phí giám sát là 9USD một giờ. Tính số máy in nhà xuất bản nên sử dụng để chi phí in là nhỏ nhất ?

Lời giải

Đáp án: 10

Gọi $x\left(0<x\le 14\right)$ là số máy in cần sử dụng để in lô hàng.

Chi phí cài đặt là $12x$.

Số giờ in hết số ấn phẩm là $\frac{4000}{30x}$ (giờ), chi phí giám sát là $\frac{4000}{30x}.9=\frac{1200}{x}$ (USD)

Tổng chi phí in là $P\left(x\right)=12x+\frac{1200}{x}$.

$P'\left(x\right)=12-\frac{1200}{x^2}$

$P'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^2=100\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10\\x=-10\ \left(L\right)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		10		14
P'(x)		-	0	+	
P(x)		↘	P(10)	↗	

Vậy để chi phí in nhỏ nhất thì số máy phải sử dụng là 10 máy.

Câu 48. Giả sử chi phí đặt hàng và vận chuyển C (đơn vị: triệu đồng) của một linh kiện được sử dụng trong sản xuất một sản phẩm được xác định theo công thức $C=\frac{19200000}{x^2}+\frac{27x}{x+3000},x\ge 1$. Trong đó x là số linh kiện được đặt hàng và vận chuyển. Tìm x để chi phí đặt hàng và vận chuyển cho mỗi linh kiện trên là nhỏ nhất.

Lời giải

Đáp án: 2400.

Xét hàm số $C\left(x\right)=\frac{19200000}{x^2}+\frac{27x}{x+3000},x\ge 1$

Ta có $C'\left(x\right)=-\frac{38400000}{x^3}+\frac{81000}{\left(x+3000\right)^2}$

$C'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\frac{38400000}{x^3}=\frac{81000}{\left(x+3000\right)^2}$

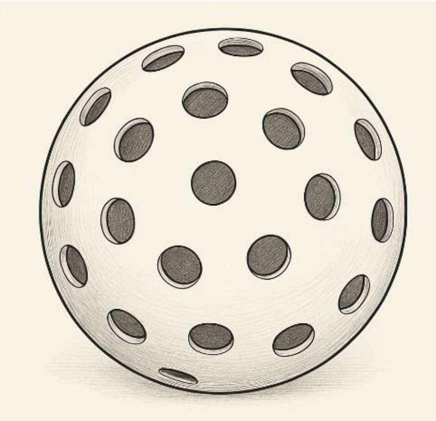
$\Leftrightarrow 12800\left(x+3000\right)^2=27x^3\Leftrightarrow x=2400$.

Ta có bảng biến thiên

x	1		2400		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		↘		↗	

Vậy chi phí đặt hàng và vận chuyển cho mỗi linh kiện trên là nhỏ nhất khi $x = 2400$.

Câu 49. Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 300.000 quả bóng Pickleball. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất được 60 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập máy này là 125 ngàn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 90 ngàn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?



Lời giải

Đáp án: 60.

Gọi $x\left(x\in\mathbb{N}, x>0\right)$ là số máy móc công ty sử dụng để sản xuất.

Thời gian cần để sản xuất được 300.000 quả bóng là $\dfrac{300.000}{60x}$

Tổng chi phí cho sản xuất là: $T\left(x\right)=\dfrac{300.000}{60x}.90+125x=\dfrac{450.000}{x}+125x$

Ta có $T'\left(x\right)=-\dfrac{450.000}{x^2}+125 \Rightarrow T'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=60$

x	0		60		$+\infty$
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$		$\searrow$	15.000	$\nearrow$	

Vậy nhà máy phải sử dụng 60 máy để chi phí hoạt động là thấp nhất

Câu 50. Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x\in$ ¥*; $1\le x\le 4500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F\left(x\right)=-0,01x^2+300x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G\left(x\right)=\dfrac{30000}{x}+200$ (nghìn đồng). Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn được bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?

Lời giải

Đáp án: 1536

Tổng chi phí sản xuất x sản phẩm là: $C\left(x\right)=x.G\left(x\right)=x.\left(\dfrac{30000}{x}+200\right)=30000+200x$.

Lợi nhuận $P(x)$ thu được khi bán x sản phẩm là:

$P(x)=F(x)-C(x)=-0,01x^2+100x-30000$.

Để lợi nhuận lớn hơn 100 triệu đồng thì $P(x)>100000 \Leftrightarrow -0,01x^2+100x-130000>0$

$\Leftrightarrow 1535,9<x<8464,1$.

Kết hợp với điều kiện $x\in ¥^*$; $1\le x\le 4500$.

Suy ra $1536\le x\le 4500$.

Vậy doanh nghiệp cần sản xuất ít nhất 1536 sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng.

Câu 51. Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là $20\text{USD}/$ người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm $1\text{USD}/$ người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi $1\text{USD}/$ người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. B iết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

Lời giải

Đáp án: 14

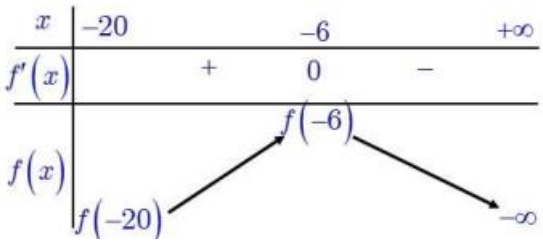
Gọi giá vé sau khi điều chỉnh là $20+x($ ĐK: $x>-20)$

Số khách là: $1000-100x$

Tổng thu nhập

$f(x)=(20+x+2)(1000-100x)=(22+x)(1000-100x)=-100x^2-1200x+22000$

Bảng biến thiên:



$\max\limits_{(-20;+\infty)} f(x)=f(-6)$. Suy ra giá vé là: $x+20=20-6=14$ USD

☞ BÀI TOÁN THIẾT KẾ TỐI ƯU (Cực trị hình học: độ dài, khoảng cách, diện tích, thể tích,...)

Quy tắc giải bài toán thực tế về thiết kế tối ưu

Bước 1: Đọc hiểu và phân tích đề bài

- Trong yêu cầu bài toán thường có cụm từ: ***độ dài, khoảng cách, diện tích hay thể tích lớn nhất (nhỏ nhất)***

Bước 2: Xây dựng mô hình toán học

- Gọi biến số và suy ra các đại lượng tương ứng.
- Lập hàm biểu thị đại lượng cần xác định theo yêu cầu của đề bài.

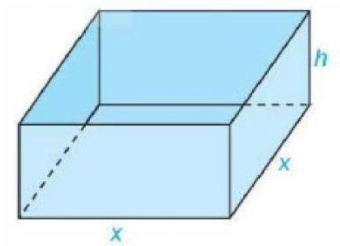
Bước 3: Giải mô hình toán học

- Tìm cực trị hay max – min theo yêu cầu của đề toán.
- Kiểm tra điều kiện của biến (nếu cần)

Bước 4: Trả lời đáp án và diễn giải kết quả

- Kết luận bằng lời, kèm đơn vị.

Ví dụ 8. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như hình bên dưới. Tìm chiều cao của chiếc hộp sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



Lời giải

Đáp án: 3

Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là $x(\text{cm}, x>0$ và chiều cao là $h(\text{cm}, h>0)$

Diện tích bề mặt của hình hộp là 108 cm^2 nên $x^2+4xh=108 \Rightarrow h=\dfrac{108-x^2}{4x}(\text{ cm})$

(điều kiện $0<x<\sqrt{108}$).

Thể tích của hình hộp là: $V=x^2\cdot h=x^2\cdot\dfrac{108-x^2}{4x}=\dfrac{108x-x^3}{4}(\text{ cm}^3)$.

Câu toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $V=-\dfrac{x^3}{4}+27x(0<x<\sqrt{108})$

Ta có: $V'=\dfrac{-3x^2+108}{4}, V'=0 \Leftrightarrow x=6$ (do $0<x<\sqrt{108}$)

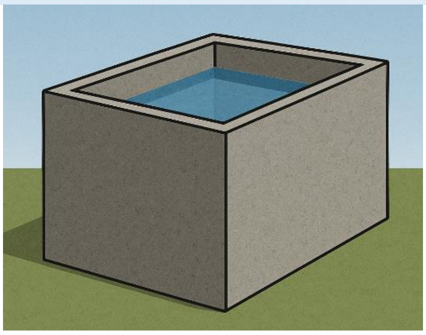
Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	0		6		$\sqrt{108}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	108	$\searrow$	0

Do đó, thể tích của chiếc hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x=6$ cm

Khi đó, chiều cao của chiếc hộp là: $\dfrac{108-6^2}{4.6}=3\left(\text{ cm}\right)$.

Ví dụ 9. Để tích trữ nước ngọt sinh hoạt chuẩn bị cho mùa hạn mặn ở Đồng bằng sông Cửu Long, một hộ dân muốn xây một bể nước không nắp dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $200m^3$. Đáy bể là hình hộp chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Biết chi phí xây bể là 850 nghìn đồng/m^2. Hãy tính chi phí thấp nhất mà hộ gia đình cần bỏ ra để xây dựng bể chứa nước ngọt dự trữ (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).



Lời giải

Đáp án: 144

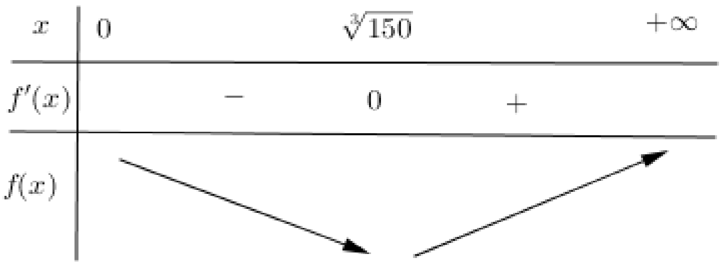
Gọi x (m) là chiều rộng đáy bể $(x>0)$, chiều dài đáy bể là $2x$ (m)

Diện tích đáy bể: $S=2x^2$. Thể tích bể chứa nước: $V=S.h\Rightarrow h=\dfrac{200}{2x^2}=\dfrac{100}{x^2}$

Diện tích xung quanh bể nước: $S_{xq}=6x.\dfrac{100}{x^2}=\dfrac{600}{x}$. Diện tích xây dựng: $S_{xd}=2x^2+\dfrac{600}{x}$

Chi phí xây dựng bể: $f\left(x\right)=850.\left(2x^2+\dfrac{600}{x}\right)$

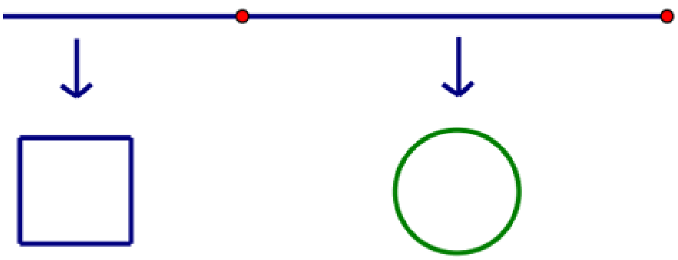
Ta có: $f'\left(x\right)=850\left(4x-\dfrac{600}{x^2}\right)=850\left(\dfrac{4x^3-600}{x^2}\right)$; $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{150}$



$f\left(\sqrt[3]{150}\right)\approx 143979$

Chi phí thấp nhất hộ gia đình cần bỏ ra để xây dựng bể dự trữ nước ngọt là: 144 triệu đồng.

Ví dụ 10. Một sợi dây kim loại dài 60 dm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\dfrac{a}{r}$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $4a+2\pi r=60\Leftrightarrow \pi r=30-2a$

Điều kiện: $0<4a<60\Leftrightarrow 0<a<15$.

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn:

$$S=a^2+r^2\pi=a^2+\frac{(30-2a)^2}{\pi}=\frac{1}{\pi}\left[(\pi+4)a^2-120a+900\right]$$

Xét $f(a)=(\pi+4)a^2-120a+900$ với $a\in(0,15)$

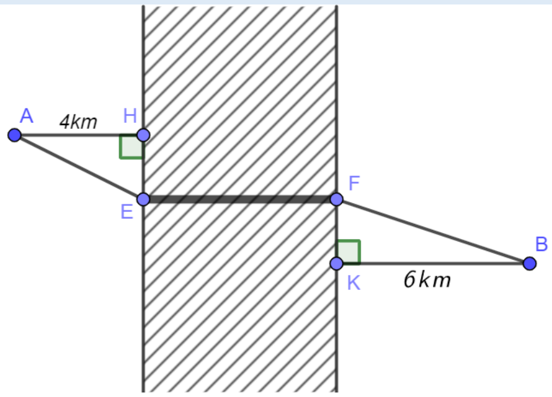
$f(a)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $a=\dfrac{120}{2(\pi+4)}=\dfrac{60}{\pi+4}\in(0,15)$.

S đạt giá trị nhỏ nhất khi $a=\dfrac{60}{\pi+4}\Rightarrow \pi r=30-2\cdot\dfrac{60}{\pi+4}=\dfrac{30\pi}{\pi+4}\Rightarrow r=\dfrac{30}{\pi+4}$

Khi đó: $\dfrac{a}{r}=\dfrac{60}{\pi+4}:\dfrac{30}{\pi+4}=2$.

Kết luận: $\dfrac{a}{r}=2dm$.

Ví dụ 11. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông. Biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là $4km$ và thành phố B cách con sông một khoảng là $6km$ (hình vẽ), biết $HE+KF=20km$ và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu tại vị trí E cách thành phố A là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? *(kết quả làm tròn đến phần trăm)*.



Lời giải

Đáp án: 8,94

Đặt $HE=x$, $FK=y$, với $x,y>0$

Ta có: $HE+KF=20\Rightarrow x+y=20$, $\begin{cases} AE=\sqrt{16+x^2} \\ BF=\sqrt{36+y^2}=\sqrt{36+(20-x)^2} \end{cases}$

Nhận xét: Vì EF không đổi nên AB ngắn nhất khi $AE+BF$ nhỏ nhất.

Ta có $AE+BF=\sqrt{x^2+16}+\sqrt{(20-x)^2+36}=\sqrt{x^2+16}+\sqrt{x^2-40x+436}=f(x)$

$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}+\dfrac{x-20}{\sqrt{x^2-40x+436}},\forall x\in(0;20)$.

Cho $f'(x)=0\Rightarrow x=8$

Bảng biến thiên

x	0		8		20
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$10\sqrt{5}$	$\nearrow$	

Vậy $AE=\sqrt{8^2+16}\approx 8,94km$.

BAI TẬP THAM KHẢO

Câu 52. Để tạo một kiện hàng dạng hình lăng trụ đứng với đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, người ta dùng các thanh gỗ ghép khít đóng lại với nhau. Biết rằng, dung tích kiện hàng bằng $9\,\text{m}^3$ và giá thành $1\,\text{m}^2$ gỗ sử dụng là $200\,000$ đồng. Hỏi sau khi hoàn thành kiện hàng đó, người ta cần bỏ ra ít nhất bao nhiêu triệu đồng? (diện tích các mép giữa hai mặt kề nhau không đáng kể).

Lời giải

Đáp án: 5,4.

Gọi $x(x>0)$ là chiều rộng của đáy bể. Khi đó chiều dài của kiện hàng là $2x$ là chiều cao của kiện hàng là $\dfrac{9}{2x^2}$. Khi đó diện tích của kiện hàng là $4x^2+\dfrac{27}{x}$

Xét hàm số $f(x)=4x^2+\dfrac{27}{x}$ có $f'(x)=8x-\dfrac{27}{x^2}=0\Leftrightarrow x=1,5$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0		1,5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	27	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min f(x)=f(1,5)=27$ Vậy chi phí thấp nhất làm kiện hàng là: $200\,000.27=5400000$ đồng.

Câu 53. Nhà sản suất dự định sử dụng hết 6 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, có đáy là hình vuông (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Xác định kích thước đáy của bể cá để bể cá có dung tích là lớn nhất? (đơn vị mét và làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp án: 1,41

Gọi x,y lần lượt là cạnh đáy và chiều cao của bể cá (điều kiện $x,y>0$).

Ta có, thể tích bể cá là $V=x^2y$.

Theo đề Câu ta có: $4xy+x^2=6 \Leftrightarrow y=\dfrac{6-x^2}{4x}$ (điều kiện $y>0 \Leftrightarrow 6-x^2>0 \Rightarrow 0<x<\sqrt{6}$)

Khi đó: $V=x^2\cdot\dfrac{6-x^2}{4x}=\dfrac{6x-x^3}{4} \Rightarrow V'=\dfrac{6-3x^2}{4}$

$V'=0 \Leftrightarrow 6-3x^2=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

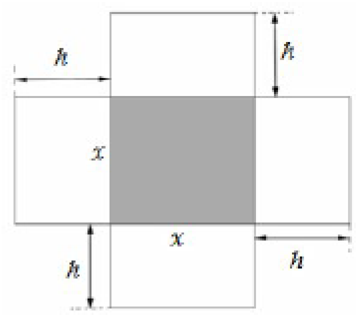
Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{6}$
V'		+	0	–	
V	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0

Suy ra $V_{\max}=\sqrt{2}$ tại $x=\sqrt{2}; y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy bể cá có kích thước là cạnh đáy là $\sqrt{2}$, chiều cao là $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì dung tích là lớn nhất.

Câu 54. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh $x(\text{cm})$, chiều cao là $h(\text{cm})$ và thể tích là $4000\,\text{cm}^3$. Tìm $x(\text{cm})$ sao cho chiếc hộp làm ra tốn ít bìa các tông nhất.



Lời giải

Đáp án: 20.

Điều kiện $x>0$

Ta có thể tích của chiếc hộp là $V=x^2.h$

Theo giả thiết thể tích chiếc hộp bằng $4000\,\text{cm}^3$ nên ta có $x^2.h=4000 \Leftrightarrow h=\dfrac{4000}{x^2}$

Ta có diện tích xung quanh và đáy của chiếc hộp là $S=x^2+4xh=x^2+4x.\dfrac{4000}{x^2}=x^2+\dfrac{16000}{x}$

Ta khảo sát hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{16000}{x}$

Ta có $f'(x)=2x-\dfrac{16000}{x^2}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=20$

x	0		20		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1200	$\nearrow$	

Ta có $x=20\left(\text{cm}\right)$ thì chiếc hộp làm ra tốn ít bìa nhất.

Câu 55. Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật không nắp có chiều cao là 60 cm , thể tích 96000 cm^3. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70000 VND/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100000 VND/m^2. Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

Lời giải

Đáp án: 83200

Gọi $x,y\left(m\right)\left(x>0,y>0\right)$ là chiều dài và chiều rộng của đáy bể.

Khi đó theo đề ta suy ra: $0,6xy=0,096\Leftrightarrow y=\dfrac{0,16}{x}$.

Giá thành của bể cá được xác định theo hàm số sau:

$$f\left(x\right)=2\cdot 0,6\left(x+\frac{0,16}{x}\right)\cdot 70000+100000\cdot x\cdot\frac{0,16}{x}\Leftrightarrow f\left(x\right)=84000\left(x+\frac{0,16}{x}\right)+16000$$

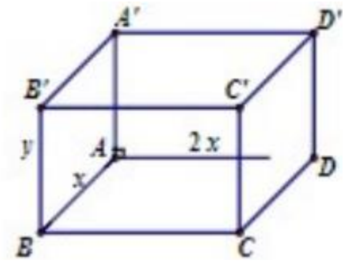
Ta có: $f'\left(x\right)=84000\left(1-\dfrac{0,16}{x^2}\right)\Rightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=0,4$

Bảng biến thiên:

x	0		$0,4$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(0,4)$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là $f\left(0,4\right)=83200\text{ VND}$.

Câu 56. Ông A dự định sử dụng hết 5 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?



Lời giải

Đáp án: 1,01

Gọi x và y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá.

Ta có: Thể tích của bể cá là $V=2x^2y$.

Theo đề, ta có:

$$2xy+2.2xy+2x^2=5 \Leftrightarrow 6xy+2x^2=5 \Leftrightarrow y=\frac{5-2x^2}{6x}$$

$$\Rightarrow V=2x^2\cdot\frac{5-2x^2}{6x}=\frac{5x-2x^3}{3} \Rightarrow V'=\frac{5-6x^2}{3}$$

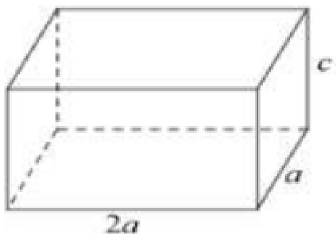
$$\Rightarrow V'=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{5}{6}}$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt{\frac{5}{6}}$		$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{30}}{27}$	$\searrow$	0

Vậy thể tích lớn nhất của bể cá là $\frac{5\sqrt{30}}{27}\approx 1,01\ \mathrm{m}^3$

Câu 57. Ông Khoa muốn xây một bể cá chứa nước dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích $288\ \mathrm{m}^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê công nhân xây bể là 500000 đồng $/\mathrm{m}^2$. Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước một cách hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể cá đó là bao nhiêu?



Lời giải

Đáp án: 108

Theo Câu ra ta có chi phí thuê nhân công thấp nhất thì bể phải xây dung có tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy nhỏ nhất.

Gọi ba kích thước của bể là $a,2a,c$ với $(a,c>0)$.

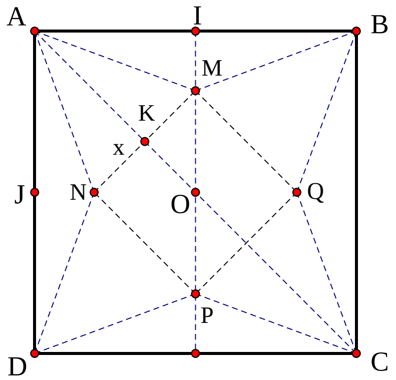
Diện tích các mặt cần xây là $S=2a^2+4ac+2ac=2a^2+6ac$.

Thể tích bể là $V=a\cdot 2a\cdot c=2a^2c=288 \Rightarrow c=\frac{144}{a^2}$

Khi đó: $S=2a^2+6a\cdot\frac{144}{a^2}=2a^2+\frac{864}{a}=2a^2+\frac{432}{a}+\frac{432}{a}\ge 3\sqrt[3]{2a^2\cdot\frac{432}{a}\cdot\frac{432}{a}}=216$.

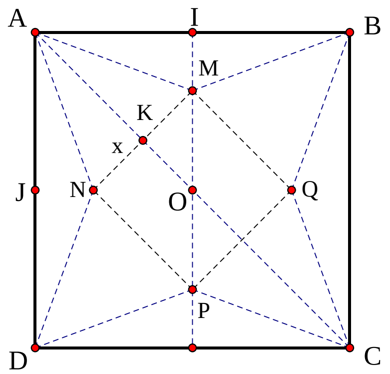
Vậy chi phí thấp nhất là $216.500000=108$ triệu đồng.

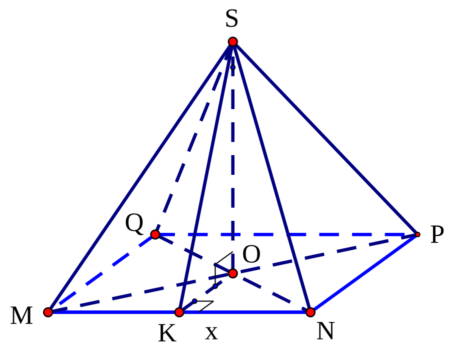
Câu 58. Cho một tấm bìa hình vuông có cạnh $2m$. Từ tấm bìa này làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là các cạnh của hình vuông rồi gấp lên và ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Thể tích của mô hình lớn nhất khi cạnh đáy của mô hình bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{b}(m)$ ($a,b\in\mathbb{Z};a,b$ nguyên tố cùng nhau). Tính tổng a^2+b^2?



Lời giải

Đáp án: 41





Gọi độ dài cạnh đáy của hình chóp là $x(m)$. Do $MN<IJ=\sqrt{2}\Rightarrow x\in\left(0;\sqrt{2}\right)$.

Ta có: $OK=\dfrac{x}{2};OA=\dfrac{AC}{2}=\sqrt{2}\Rightarrow SK=AK=\sqrt{2}-\dfrac{x}{2}$.

Do vậy: $SO=\sqrt{SK^2-OK^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-\dfrac{x}{2}\right)^2-\dfrac{x^2}{4}}=\sqrt{2-\sqrt{2}x}$.

Khi đó thể tích khối chóp là: $V=\dfrac{1}{3}x^2\sqrt{2-\sqrt{2}x}$.

Xét $f(x)=\dfrac{1}{3}x^2\sqrt{2-\sqrt{2}x},\left(x\in\left(0;\sqrt{2}\right)\right)$, ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(2x\sqrt{2-\sqrt{2}x}-x^2\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}x}}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{4x\left(2-\sqrt{2}x\right)-\sqrt{2}x^2}{2\sqrt{2-\sqrt{2}x}}\right)=\frac{8x-5\sqrt{2}x^2}{3\left(2\sqrt{2-\sqrt{2}x}\right)}$$

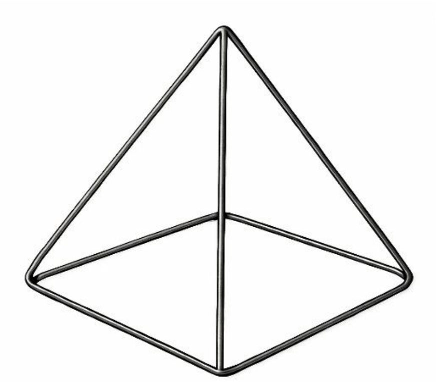
$$f'(x)=0\Leftrightarrow 8x-5\sqrt{2}x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\frac{4\sqrt{2}}{5}$		$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

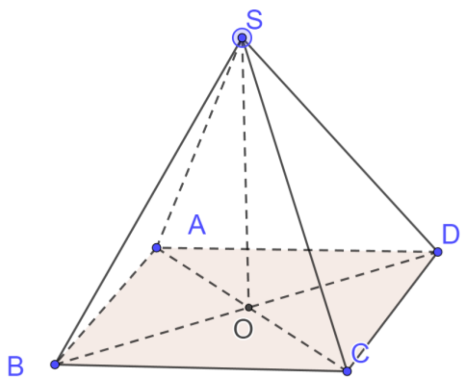
Ta thấy thể tích của mô hình lớn nhất khi cạnh đáy của mô hình là $x=\frac{4\sqrt{2}}{5}\Rightarrow a=4,b=5\Rightarrow a^2+b^2=41$.

Câu 59. Bạn An có một đoạn dây thép dài 16 dm muốn uốn thành một kim tự tháp có dạng chóp tứ giác đều (đoạn dây thép được uốn thành 4 cạnh bên và 4 cạnh đáy của kim tự tháp). Hỏi thể tích lớn nhất của kim tự tháp bạn An có thể làm được là bao nhiêu? (đơn vị: dm^3, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 1.95



Kí hiệu kim tự tháp dạng chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ có đáy tâm O như hình vẽ.

Đặt $AB=x$. Khi đó $SA=4-x\Rightarrow 0<x<4$. Lại có $OC=\frac{x}{\sqrt{2}}$ nên $SO=\sqrt{(4-x)^2-\frac{x^2}{2}}=\sqrt{16-8x+\frac{x^2}{2}}$.

Để SO xác định thì $16-8x+\frac{x^2}{2}>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<8-4\sqrt{2}\\ x>8+4\sqrt{2}\end{array}\right.$. Kết hợp với điều kiện $0<x<4$ ta có $0<x<8-4\sqrt{2}$

.

Thể tích của chóp là $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}x^2.\sqrt{16-8x+\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{32x^4-16x^5+x^6}$.

Đặt $f(x)=32x^4-16x^5+x^6$. Ta xét $f(x)$ trên $\left[0;8-4\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $f'(x)=128x^3-80x^4+6x^5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{4(5-\sqrt{13})}{3} \\ x=\dfrac{4(5+\sqrt{13})}{3}\,(L) \end{array}\right.$.

Thay vào ta được $f(0)=f(8-4\sqrt{2})=0$; $f\left(\dfrac{4(5-\sqrt{13})}{3}\right)\approx 1.95$.

Vậy thể tích lớn nhất của kim tự tháp bạn An có thể làm được là $1,95$.

Câu 60. Khi sản xuất vỏ lon sữa DUTCH LADY, các nhà sản xuất luôn đặt tiêu chí sao cho chi phí sản xuất vỏ lon là nhỏ nhất. Biết rằng lon sữa có hình trụ và thể tích của lon sữa là $530\ cm^3$. Khi diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất thì bán kính đáy của nó bằng bao nhiêu centimet? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp án: 4,39.

Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của lon sữa.

Điều kiện: $r>0$, $h>0$

+ Ta có: $V=530 \Rightarrow \pi r^2 h=530 \Rightarrow h=\dfrac{530}{\pi r^2}$

+ Diện tích toàn phần của lon sữa là:

$$S=2\pi rh+2\pi r^2=\frac{1060}{r}+2\pi r^2$$

+ Ta có: $S'=-\dfrac{1060}{r^2}+4\pi r=0 \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{265}{\pi}}$

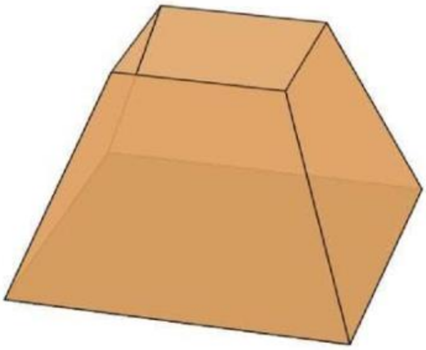
+ Bảng biến thiên:

r	0		$\sqrt[3]{\dfrac{265}{\pi}}$		$+\infty$
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy: $S_{\min} \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{265}{\pi}}\approx 4,39$.

Câu 61. Một xưởng thủ công mỹ nghệ sản xuất loại chụp đèn trang trí dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Gọi x là độ dài cạnh đáy lớn (đơn vị:dm). Tính toán cho thấy tổng chi phí vật liệu (tính bằng nghìn đồng) cho một chụp đèn là $C(x)=x^2+108$ (nghìn đồng). Thời gian sản xuất cho một chụp đèn được xác định là

$T(x) = x + 6$ (giờ). Xưởng muốn xác định kích thước x để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất, nhằm tối ưu hóa hiệu quả sử dụng thời gian và vật liệu. Hãy tìm giá trị của x.



Lời giải

Đán án: 6

Gọi hàm chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là $f(x) = \dfrac{C(x)}{T(x)} = \dfrac{x^2 + 108}{x + 6}, x > 0$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2 + 12x - 108}{(x+6)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -18 (L) \\ x = 6 \end{array}\right.$

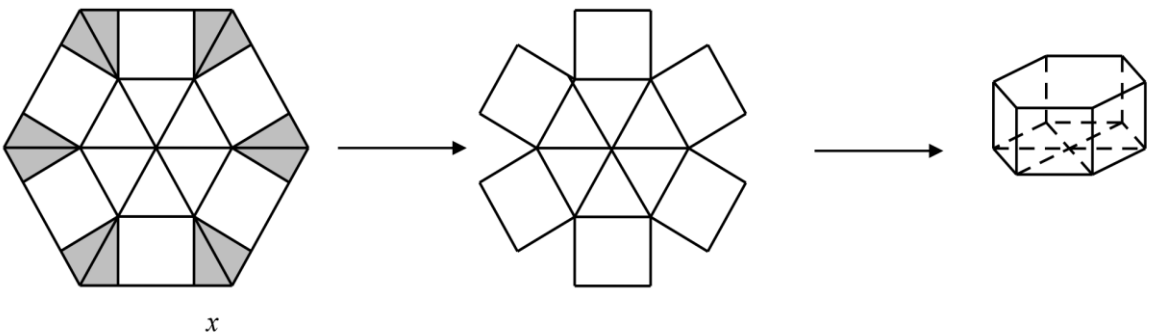
Ta có bảng biến thiên :

x	0		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	18	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt GTNN bằng 12 khi $x = 6$.

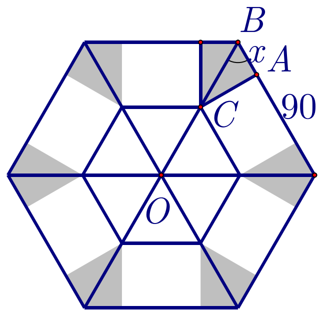
Vậy để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất thì $x = 6$.

Câu 62. Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh 90 cm. Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau, biết cạnh góc vuông nhỏ bằng x (cm) (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi gập tấm nhôm như hình vẽ để được một hình lăng trụ lục giác đều không có nắp. Tìm x để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất (Nếu kết quả là số thập phân thì làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp án: 15.



Lăng trụ có:

Diện tích đáy:

$$S = 6.\frac{OC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.(OB - BC)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(OB - \frac{x}{\cos \widehat{ABC}}\right)^2$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}(90-2x)^2 = 6\sqrt{3}(45-x)^2$$

Chiều cao: $h = AC = x.\tan \widehat{ABC} = x\sqrt{3}$

Thể tích lăng trụ: $V = Sh = 18x(45-x)^2 = 18(x^3 - 90x^2 + 45^2)$

Đạo hàm: $V' = 18(3x^2 - 180x + 45^2); V' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15 \Rightarrow y = 243000 \\ x = 45 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$

x	0		15		45
V'		+	0	–	0
V	0	↗	243000	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta nhận $x = 15$.

Câu 63. Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải ruy băng này quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10 cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ). Dải ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích bằng $a.\pi\left(cm^3\right), a \in \mathbb{N}^*$. Giá trị lớn nhất của a là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 1000.

Gọi $x(cm); y(cm)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ $(x, y > 0; x < 30)$.

Độ dài dải dây ruy băng còn lại khi đã thắt nơ là: 120 cm.

Ta có: $(2x + y)\cdot 4 = 120 \Leftrightarrow y = 30 - 2x > 0 \Rightarrow 0 < x < 15$.

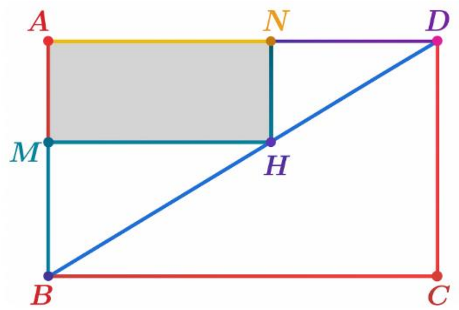
Thể tích khối hộp quà là: $V = \pi x^2 \cdot y = \pi x^2(30-2x)$. Thể tích V lớn nhất khi hàm số $f(x) = x^2(30-2x)$, $(0 < x < 15)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $f'(x) = -6x^2 + 60x$;

Cho $f'(x) = -6x^2 + 60x = 0 \Rightarrow x = 10$.

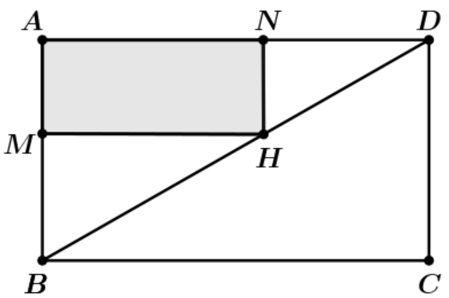
Lập bảng biến thiên ta thấy thể tích đạt GTLN là: $V = \pi \cdot f(10) = 1000\pi\left(cm^3\right)$

Câu 64. Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $25\,\text{m}^2$, người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H, với H thuộc cạnh BD. Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng) với chi phí trồng cỏ là 70.000 đồng/ m^2 ?



Lời giải

Đáp án: 438



Ta có $AB.AD = 25\left(m^2\right); \dfrac{NH}{AB} = \dfrac{DN}{DA}$.

Đặt $\dfrac{NH}{AB} = \dfrac{DN}{DA} = x \Rightarrow NH = x.AB; AN = (1-x)AD$

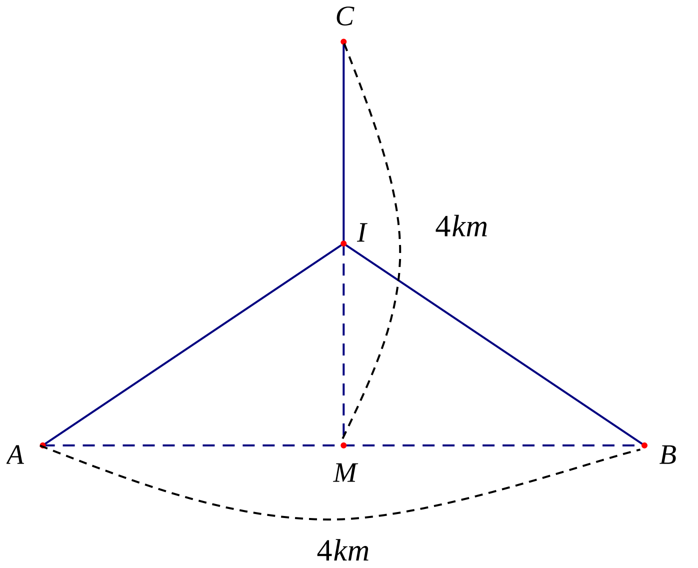
Diện tích đất trồng cỏ là: $S = AN.NH = x.(1-x).AB.AD = 25.x.(1-x)$

Diện tích lớn nhất khi $x.(1-x)$ lớn nhất mà $x.(1-x) \le \dfrac{(x+1-x)^2}{4} = \dfrac{1}{4}$

Diện tích đất trồng cỏ lớn nhất $S = \dfrac{1}{4}.25 = \dfrac{25}{4}$

Số tiền lớn nhất để trồng cỏ: $T = \dfrac{25}{4}.70000 = 437500$ (đồng) ≈ 438 (nghìn đồng)

Câu 65. Hai nhà máy sản xuất đặt tại các vị trí A và B cách nhau $4km$. Một nhà máy cung cấp nước được đặt ở vị trí C nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB, cách trung điểm M của đoạn thẳng AB một khoảng $4km$. Người ta muốn làm một đường ống dẫn nước từ nhà máy nước C đến một vị trí I nằm giữa đoạn thẳng MC sau đó chia ra hai nhánh dẫn tới hai nhà máy A và B (hình vẽ). Tổng độ dài đường ống dẫn nước nhỏ nhất bằng bao nhiêu km? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Lời giải

Đáp án: 7,46

+ Gọi $CI = x(km), (0 \le x \le 4) \Rightarrow IM = 4 - x$.

+ Khi đó, $IA = IB = \sqrt{4 + (4-x)^2} = \sqrt{20 - 8x + x^2}$ (Định lý Pi-ta-go).

Tổng độ dài đường ống dẫn nước là $T = CI + IA + IB = x + 2\sqrt{x^2 - 8x + 20}$.

Xét $T(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 8x + 20}, 0 \le x \le 4$.

$$T'(x) = 1 + \frac{2x-8}{\sqrt{x^2 - 8x + 20}}$$

Xét $T'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{2x-8}{\sqrt{x^2 - 8x + 20}} = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 8x + 20} = -(2x - 8)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 4 \\ x^2 - 8x + 20 = (2x-8)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 4 \\ 3x^2 - 24x + 44 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{12 - 2\sqrt{3}}{3}$ (thỏa mãn điều kiện)

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		$\frac{12-2\sqrt{3}}{2}$		4	$+\infty$
T'			$-$	0	$+$		
T			$\searrow$	$4 + 2\sqrt{3}$	$\nearrow$		

Tổng độ dài đường ống dẫn nước nhỏ nhất xấp xỉ bằng $7,46km$.

Câu 66. Một sân điền kinh gồm hai sân hình bán nguyệt có bán kính $x(\text{m})$ $(x > 0)$ và một sân hình chữ nhật như hình vẽ. Biết chu vi của sân điền kinh là 400 m, tìm diện tích lớn nhất của sân hình chữ nhật theo mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp án: 6366.

Chu vi phần hình bán nguyệt là $2\pi x$.

Độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là $200-\pi x$.

Diện của sân hình chữ nhật là $S(x)=2x(200-\pi x)=400x-2\pi x^2$.

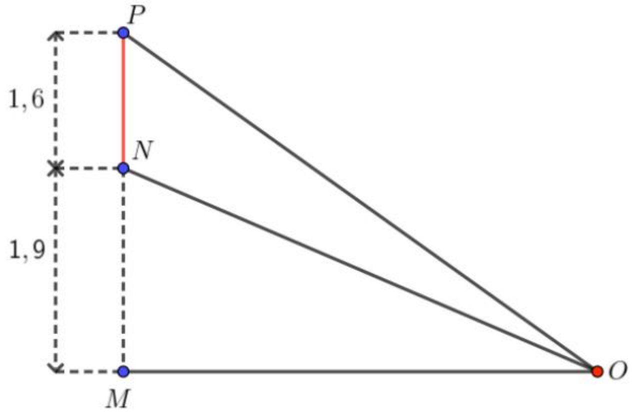
$S'(x)=400-4\pi x$.

$S'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{100}{\pi}$.

x	0		$\dfrac{100}{\pi}$		$+\infty$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là $S\left(\dfrac{100}{\pi}\right)\approx 6366\ \text{ m}^2$.

Câu 67. Một màn hình NP có chiều cao $1,6$ mét được đặt thẳng đứng và mép dưới của màn hình cách mặt đất một khoảng NM bằng $1,9$ mét. Một chiếc đèn chiếu sáng màn hình đặt ở vị trí O trên mặt đất (xem hình minh họa). Để góc chiếu sáng $\widehat{NOP}$ lớn nhất thì độ dài đoạn OM bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 2,59

Đặt $OM=x(\text{m})$. Ta có:

$$\frac{NP}{\sin\widehat{NOP}}=\frac{ON}{\sin\widehat{OPM}}\Leftrightarrow \sin\widehat{NOP}=\frac{NP.\sin\widehat{OPM}}{ON}$$

$$\Rightarrow \sin\widehat{NOP}=\frac{NP.\dfrac{OM}{OP}}{ON}=\frac{NP.OM}{\sqrt{OM^2+MN^2}.\sqrt{OM^2+MP^2}}=\frac{1,6.x}{\sqrt{x^2+1,9^2}.\sqrt{x^2+3,5^2}}$$

Xét hàm số $y=\dfrac{1,6x}{\sqrt{x^2+1,9^2}.\sqrt{x^2+3,5^2}}=\dfrac{1,6x}{\sqrt{x^4+15,86x^2+44,2225}}$

$y'=\dfrac{1,6(44,2225-x^4)}{\left(\sqrt{x^4+15,86x^2+44,2225}\right)^3}$

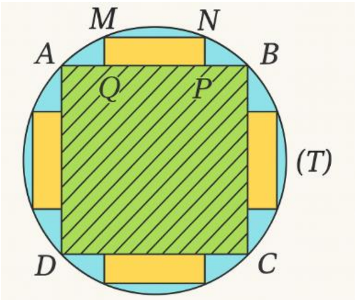
$y'=0\Leftrightarrow x^4=44,2225\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{665}}{10}\approx\pm2,59$

Lập bảng biến thiên với điều kiện $x>0$ ta được giá trị lớn nhất của y đạt được tại $x=2,59$.

Ta thấy $\widehat{NOP}$ lớn nhất khi và chỉ khi $\sin\widehat{NOP}$ lớn nhất hay y lớn nhất.

Vậy $x=OM=2,59$.

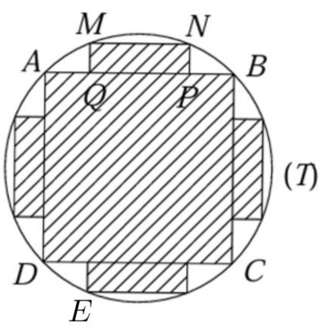
Câu 68. Bác Bình sử dụng một khúc gỗ hình trụ có đường kính bằng 32 cm để làm một chiếc xà nhà. Để đảm bảo tính thẩm mĩ thì bác Bình dự định sẽ cho thợ xẻ khúc gỗ thành một chiếc xà có tiết diện ngang (là miền gạch sọc như hình vẽ bên) bao gồm một hình vuông $ABCD$ và 4 miếng phụ là 4 hình chữ nhật bằng nhau. Bốn điểm A,B,C,D nằm trên đường tròn (T); miếng phụ $MNPQ$ có hai đỉnh M,N nằm trên đường tròn (T) và hai đỉnh P,Q nằm trên cạnh AB. Mặt khác, diện tích của tiết diện ngang càng lớn thì chiếc xà chịu lực càng tốt. Hỏi bác Bình có thể tạo ra một tiết diện ngang có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu centimet vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Đáp án: 684.

Đặt $MQ=x$, $MN=y$ (Đk: $0<x,y<8\sqrt{2}$)



Có $AC=32=NE$ và $AD=\dfrac{32}{\sqrt{2}}=16\sqrt{2}$, $ME=16\sqrt{2}+2x$.

Xét tam giác MNE: $NE^2=ME^2+MN^2$

$\Rightarrow y=\sqrt{512-64\sqrt{2}x-4x^2}$.

Do đó $S_{MNPQ}=x\cdot y=x\sqrt{512-64\sqrt{2}x-4x^2}$

$=\sqrt{512x^2-64\sqrt{2}x^3-4x^4}$.

Xét hàm số $f(x)=512x^2-64\sqrt{2}x^3-4x^4$, $x\in\left(0;8\sqrt{2}\right)$.

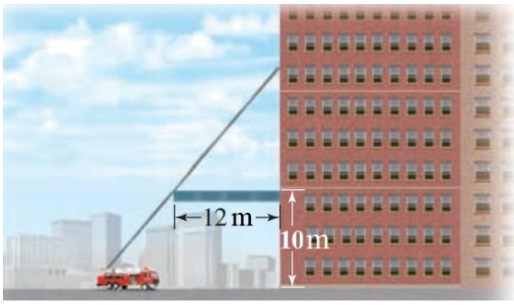
Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1024x-192\sqrt{2}x^2-16x^3=0$

Sử dụng casio, ta tìm được $x_0 \approx 3,17$.

Khi đó: $\left(S_{MNPQ}\right)_{\max}=\sqrt{f\left(x_0\right)} \approx 43,1$

Vậy $S_{\max}=S_{ABCD}+4\sqrt{f\left(x_0\right)}=\left(16\sqrt{2}\right)^2+4.43,1 \approx 684$

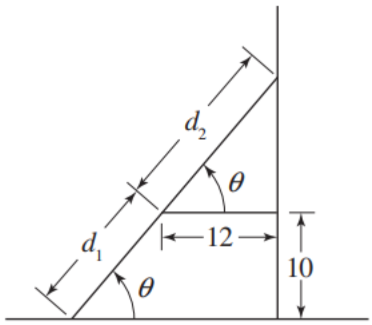
Câu 69. Hình bên mô tả một mặt cắt ngang của một tòa nhà cao tầng. Một chiếc thang từ xe cứu hỏa lên đến mặt tường phía trước của tòa nhà phải vượt qua phần mái che cao 10m so với mặt đất và vùng mái này nhô ra 12m so với tường. Giả sử, độ cao của xe cứu hỏa là không đáng kể, hãy tìm độ dài ngắn nhất của chiếc thang để các lính cứu hỏa có thể thực hiện nhiệm vụ này (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Lời giải

Đáp án: 31,1

Đặt L là độ dài của chiếc thang, và θ là góc tạo bởi thang với phương ngang, gọi d_1 là đoạn thẳng từ mặt đất lên tới mái hiên, d_2 là đoạn từ mái hiên tới tường. Khi đó $L=d_1+d_2=\dfrac{10}{\sin\theta}+\dfrac{12}{\cos\theta}$



Miền xác định của $L(\theta)$ là $\theta \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Hàm số $f(\theta)=\dfrac{10}{\sin\theta}+\dfrac{12}{\cos\theta}$ liên tục trên $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta tính đạo hàm $f'(\theta)=-\dfrac{10}{\sin\theta}\cot\theta+\dfrac{12}{\cos\theta}\tan\theta$

Giải $f'(\theta)=0$:

$$\frac{12}{\cos\theta}\tan\theta=\frac{10}{\sin\theta}\cot\theta \Rightarrow 12\frac{1}{\cos\theta}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=10\frac{1}{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Leftrightarrow \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}=\frac{10}{12} \Leftrightarrow \tan^3\theta=\frac{5}{6}.$$

Do đó $\theta \approx 0,76rad$

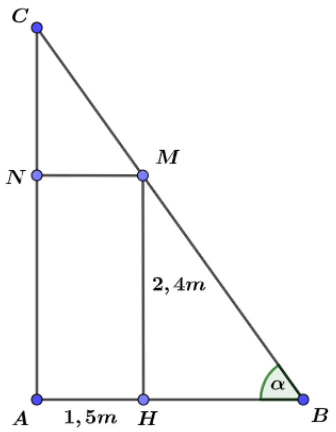
Lập bảng xét dấu $f'(\theta)$, ta thấy đây là điểm cực tiểu duy nhất trên $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Cuối cùng $f(0,76) \approx 31,07$ nên độ dài thang ngắn nhất cần thiết là $31,1m$.

Câu 70. Một ông chủ nhà muốn làm một cái thang cứu hộ khi có nguy hiểm xảy ra. Ông ta muốn làm cái thang để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (tham khảo hình vẽ). Với hàng rào cao 2,4 mét được đặt song song và cách bức tường của ngôi nhà một khoảng bằng 1,5 mét. Chiều dài ngắn nhất của cây thang bao nhiêu centimet (cm) để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Đáp án: 547.



Gọi góc hợp bởi thang và mặt đất là $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Chiều dài thang là $BC=BM+MC$.

Tam giác vuông MHB có $BM=\dfrac{2,4}{\sin\alpha}$. Tam giác vuông MNC có $MC=\dfrac{1,5}{\cos\alpha}$.

$BC=BM+MC=\dfrac{2,4}{\sin\alpha}+\dfrac{1,5}{\cos\alpha}$. Xét hàm số với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$y'=\dfrac{-2,4.\cos x}{\sin^2 x}+\dfrac{1,5.\sin x}{\cos^2 x}=\dfrac{-2,4.\cos^3 x+1,5.\sin^3 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}$,

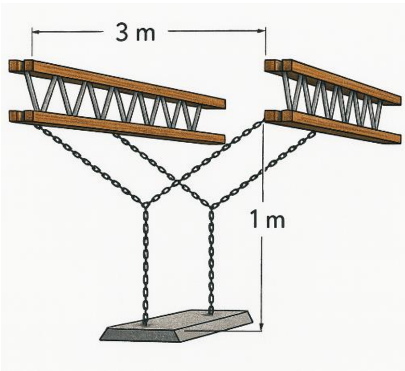
$y'=0\Leftrightarrow 2,4.\cos^3 x=1,5.\sin^3 x\Leftrightarrow \tan^3 x=\dfrac{2,4}{1,5}\Leftrightarrow \tan x=\sqrt[3]{\dfrac{8}{5}}$, do $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $x\approx 0,863\,\text{rad}$

Ta có bảng biến thiên

x	0		$0,863$		$\frac{\pi}{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$5,47$	$\nearrow$	

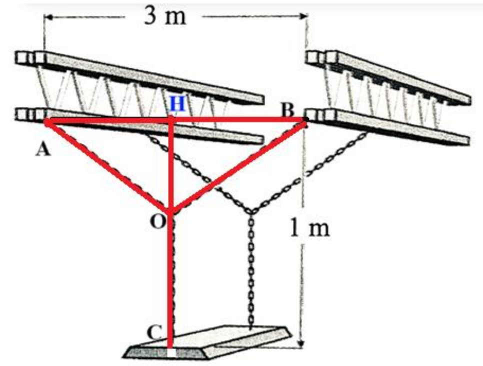
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy chiều dài thang bé nhất xấp xỉ 5,47 mét hay 547 cm.

Câu 71. Trong một cửa hàng, nhà quản lý dự định treo một đồ trang trí trên cao. Vật trang trí được đặt trên giá đỡ nằm dưới thanh treo 1m. Biết khoảng cách giữa hai thanh treo là 3m. Biết tổng độ dài nhỏ nhất của các đoạn dây xích là $a+b\sqrt{c}$ (trong đó a,b,c là các số tự nhiên). Tính $a-b-c$.



Lời giải

Đáp án: –4.



Đặt $OH=x\left(0\le x\le 1\right)$ ta có $OA=OB=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+x^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+x^2}$ và $OC=1-x$.

Tổng độ dài các dây xích là

$$L\left(x\right)=2\left(OA+OB+OC\right)=2\left(2\sqrt{\frac{9}{4}+x^2}+1-x\right)=4\sqrt{\frac{9}{4}+x^2}+2-2x.$$

$$L'\left(x\right)=\frac{4x}{\sqrt{\frac{9}{4}+x^2}}-2=0\Leftrightarrow\sqrt{\frac{9}{4}+x^2}=2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4x^2=x^2+\frac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

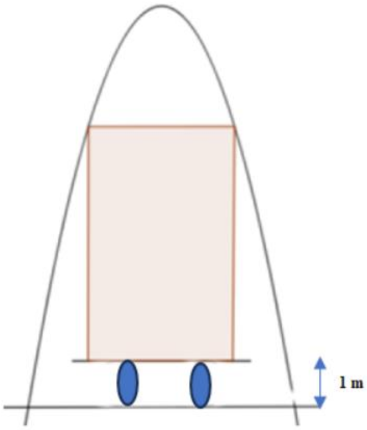
Bảng biến thiên

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$L'(x)$		$-$	0	$+$	
$L(x)$		$\searrow$	$2+3\sqrt{3}$	$\nearrow$	

Vậy chiều dài tối thiểu của dây xích là $L\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2+3\sqrt{3}$.

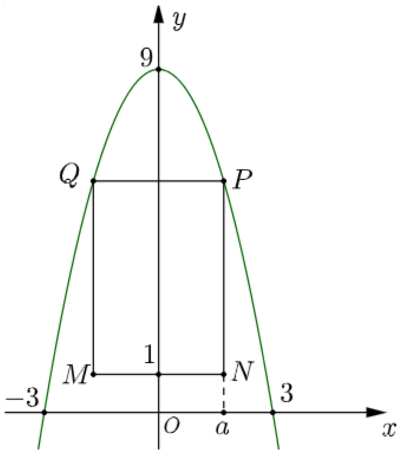
Suy ra $\begin{cases}a=2\\b=3\\c=3\end{cases}\Rightarrow a-b-c=-4$.

Câu 72. Một chiếc cổng hình Parabol có chiều cao $9\,m$, khoảng cách giữa hai chân cổng là $6\,m$. Để vận chuyển thùng hàng hình chữ nhật qua cổng, người ta dùng một xe kéo có chiều cao $1\,m$. Biết rằng mặt cắt của thùng hàng qua cổng là hình chữ nhật, hỏi diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất là bao nhiêu m^2 để xe chở thùng hàng có thể đi qua được cổng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải

Đáp án: 17,4.



Trong hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ, chiếc cổng hình parabol có phương trình $y=-x^2+9$

Xe chở hàng có thể đi qua được cổng nếu điểm P thuộc parabol với hoành độ điểm P bằng a, $a\in(0;3)$. Khi đó tung độ của điểm P bằng $-a^2+9$ và $\begin{cases} MN=2a \\ NP=-a^2+9-1=-a^2+8 \end{cases}$

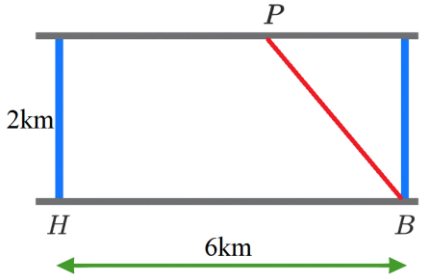
Diện tích của hình chữ nhật là $S=MN.NP=2a.\left(-a^2+8\right)=-2a^3+16a$

Ta có: $S'=-6a^2+16=0 \Leftrightarrow a=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. Do $a\in(0;3)$ nên $a=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

a	0		$\frac{2\sqrt{6}}{3}$		3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\nearrow$	$S(\frac{2\sqrt{6}}{3})$	$\searrow$	

Khi đó $S_{\max}=S\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right);\ 17,4\left(m^2\right)$.

Câu 73. Người ta muốn lắp một ống dẫn dầu từ nhà máy lọc dầu ở vị trí A đến kho chứa dầu đặt ở vị trí B qua một con sông rộng 2 km, dài 6 km. Chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu trên mặt đất để nối từ nhà máy lọc dầu đến trạm trung chuyển tại vị trí P là 4 tỷ VND/1km và chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu dưới dòng sông để nối từ P đến kho chứa dầu tại vị trí B là 8 tỷ VND/1km (như hình vẽ)

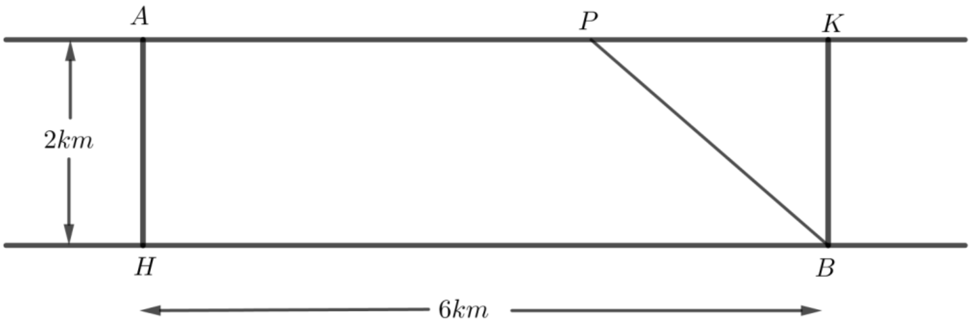


Hỏi chi phí lắp đặt ít nhất, cần đặt vị trí P cách nhà máy lọc dầu là bao nhiêu kilômét? (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*)

Lời giải

Đáp án: 4,85.

Đặt $AP = x$ ($0 \le x \le 6$, km).



Khi đó, chiều dài quãng đường $PK = 6 - x$.

Tổng chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu là: $T = 4x + 8\sqrt{(6-x)^2 + 2^2}$.

Ta có $T'(x) = 4 + 8\dfrac{x-6}{\sqrt{x^2 - 12x + 40}}$;

$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 - 12x + 40} + 8x - 48 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 12x + 40} = 12 - 2x\,(ĐK: 0 < x \le 6)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 36x + 104 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{18 \pm 2\sqrt{3}}{3}$

Kết hợp đk ta thấy: $x = \dfrac{18 - 2\sqrt{3}}{3} \approx 4,85$ là nghiệm của pt.

$T'(x) < 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 - 12x + 40} + 8x - 48 < 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 12x + 40} < 12 - 2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 2x > 0 \\ x^2 - 12x + 40 < 144 - 48x + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 6 \\ 3x^2 - 36x + 104 > 0 \end{cases}$

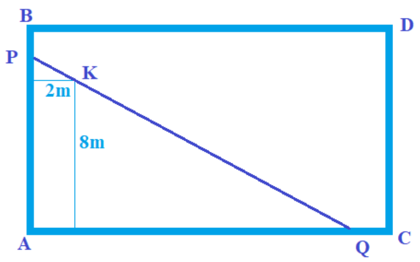
$\Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{18 - 2\sqrt{3}}{3} \approx 4,85$

Từ đây ta có bảng biến thiên

x	0		$4,85$		6
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra chi phí thấp nhất khi $x = 4,85$.

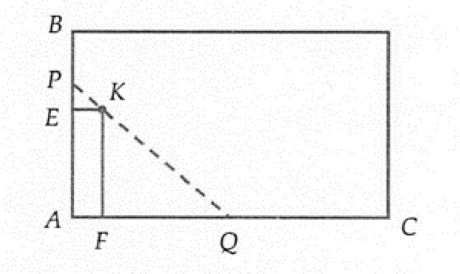
Câu 74. Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là $2m$ và cách bờ AC là $8m$, rồi dùng một cây sào thẳng PQ ngăn một góc của hồ để thả bèo (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào hai bờ AB, AC và cây cọc (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).



Lời giải

Đáp án: 174.

Đặt $AP = a, AQ = b(a > 8; b > 2)(m)$.



Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K xuống AB và AC. Suy ra $KE = 2m, KF = 8m$.

Ta có: $\dfrac{KE}{AQ} = \dfrac{PK}{PQ}; \dfrac{KF}{AP} = \dfrac{QK}{PQ} \Rightarrow \dfrac{KF}{AP} + \dfrac{KE}{AQ} = 1$ hay $\dfrac{8}{a} + \dfrac{2}{b} = 1$.

Vì $\dfrac{8}{a} + \dfrac{2}{b} = 1$ nên $b = \dfrac{2a}{a-8}$.

Khi đó $PQ^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\dfrac{2a}{a-8}\right)^2$.

Xét hàm số $y = f(a) = a^2 + \left(\dfrac{2a}{a-8}\right)^2$ trên khoảng $(8; +\infty)$.

Ta có:

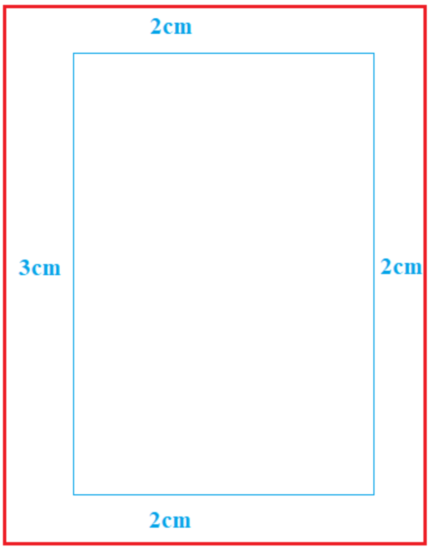
$f'(a) = 2a + \dfrac{4a}{a-8} \cdot \dfrac{-16}{(a-8)^2} = \dfrac{2a\left[(a-8)^3 - 32\right]}{(a-8)^3}$; $f'(a) = 0 \Rightarrow (a-8)^3 = 32 \Rightarrow a = 8 + \sqrt[3]{32} > 8$. Bảng biến thiên:

a	8		$8+\sqrt[3]{32}$		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(8+\sqrt[3]{32}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $\min_{(8,+\infty)} f(a)=f(8+\sqrt[3]{32})\approx 174,43$.

Vậy chiều dài ngắn nhất của cây sào có thể chạm vào hai bờ AB, AC và cây cọc là 174 m.

Câu 75. Diện tích một trang của một cuốn sách là $600cm^2$. Do yêu cầu kĩ thuật, cần để lề trên và lề dưới là $2cm$, lề trái là $3cm$ và lề phải là $2cm$. Tính diện tích lớn nhất của phần chữ in vào cuốn sách được (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Đáp án: 401

Gọi chiều dài của trang giấy là $x\,cm$ ta có chiều rộng là $\dfrac{600}{x}cm$.

Chiều dài và chiều rộng của phần in chữ lần lượt là $x-4$ và $\dfrac{600}{x}-5$

Diện tích phần in chữ là $f\left(x\right)=\left(\dfrac{600}{x}-5\right)\left(x-4\right)=620-5x-\dfrac{2400}{x}$

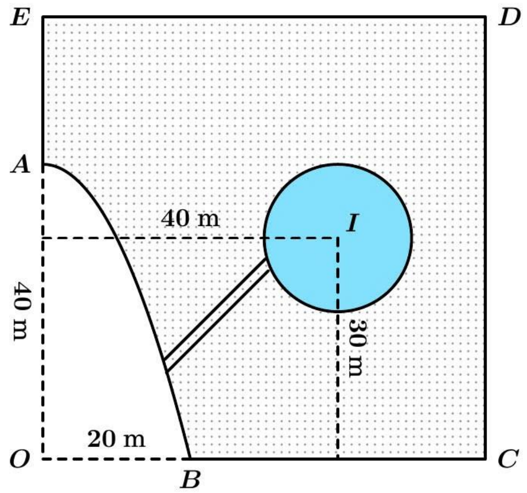
$f'\left(x\right)=\dfrac{2400}{x^2}-5=0\Leftrightarrow x=\pm 4\sqrt{30}$

x	0		$4\sqrt{30}$		$+\infty$
$f\left(x\right)$	$-\infty$	$\nearrow$	$620-40\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy diện tích lớn nhất của phần in chữ xấp xỉ $620-40\sqrt{3}\approx 401401\ cm^2$.

Câu 76. Một cái ao có hình *ABCDE* (như hình vẽ), ở giữa ao có một mô đất hình tròn bán kính 10m, người ta muốn bắc một cây cầu từ bờ *AB* của ao đến vườn. Hỏi độ dài ngắn nhất l (đơn vị mét) của cây cầu là bao nhiêu (*làm tròn đến chữ số hàng phần chục*), biết:

- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O;
- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40m và 20m;
- Tâm I của mảnh vườn cách đường thẳng AE và BC lần lượt là 40m và 30m.



Lời giải

Đáp án: 17,7

Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc như sau: Gốc O, chiều dương trục hoành là tia OC, chiều dương trục tung là tia OE, đơn vị hai trục là đơn vị độ dài (1m).

Khi đó ta có phương trình Parabol là: $y=-\dfrac{1}{10}x^2+40$ và phương trình đường tròn là

$(x-40)^2+(y-30)^2=100$

Đường tròn có tâm $I(40;30)$ và bán kính $R=10$

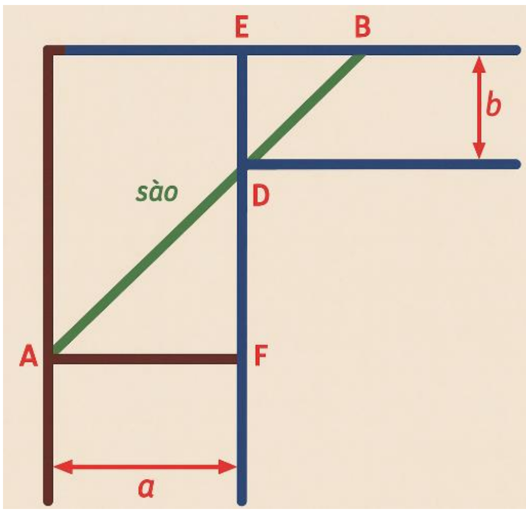
Lấy điểm $M\left(t;-\dfrac{1}{10}t^2+40\right)$ (với $0\le t\le 20$) nằm trên parabol thì khoảng cách ngắn nhất từ M đến đường tròn là

$$IM-R=\sqrt{\frac{1}{100}t^4-t^2-80t+1700}-10$$

Tìm GTNN của hàm số $f(t)=\dfrac{1}{100}t^4-t^2-80t+1700$ trên đoạn $[0;20]$ ta được $\min\limits_{[0;20]} f(t)\approx 768,0877$

Do đó độ dài ngắn nhất $l\approx\sqrt{768,0877}-10\approx 17,7$.

Câu 77. Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a=24$ và $b=3$. Biết chiều dài tối thiểu của que sào thỏa mãn điều kiện trên là l. Tính giá trị của l^2.



Lời giải

Đáp án: 1125

Đặt các điểm như hình vẽ.

Đặt $DF=x$, $x>0$, ta có ΔADF đồng dạng với ΔBED nên $\dfrac{EB}{ED}=\dfrac{AF}{DF}\Rightarrow EB=\dfrac{ab}{x}$.

Gọi l là chiều dài của que sào, ta có $l^2 = AB^2 = (x+b)^2 + \left(a + \frac{ab}{x}\right)^2 = f(x)$.

$f'(x) = 2(x+b) - 2\frac{ab}{x^2}\left(a + \frac{ab}{x}\right) = 2(x+b)\left(1 - \frac{a^2b}{x^3}\right)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a^2b} = 12$.

Xét bảng sau:

x	0		12		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1125	$\nearrow$	

Vậy giá trị nhỏ nhất của que sào là $l = \sqrt{1125}$. Giá trị $l^2 = 1125$.

☞ BÀI TOÁN LIÊN QUAN CÁC VẤN ĐỀ TỰ NHIÊN, CÔNG NGHỆ, CUỘC SỐNG,…

Quy tắc giải bài toán thực tế liên quan các vấn đề tự nhiên, công nghệ, cuộc sống,..

☑ **Bước 1: Đọc hiểu và phân tích đề bài**

- Trong yêu cầu bài toán thường có cụm từ: "***không vượt quá bao nhiêu***" hay "***không thấp hơn (không dưới) bao nhiêu***"

☑ **Bước 2: Xây dựng mô hình toán học**

- Gọi biến số (thường là ***thời gian***) và suy ra các đại lượng tương ứng.
- Lập hàm biểu thị đại lượng cần xác định theo yêu cầu của đề bài.

☑ **Bước 3: Giải mô hình toán học**

- Tìm cực trị, max– min cảu các đại lượng theo yêu cầu của đề toán
- Kiểm tra điều kiện của biến (nếu cần)

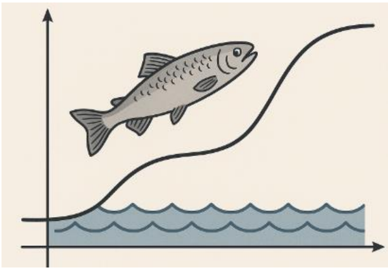
☑ **Bước 4: Đáp án và diễn giải kết quả**

- Kết luận bằng lời, kèm đơn vị.

Nhận xét

Những bài toán dạng này thường cho sẵn công thức hàm hoặc xây dựng công thức hàm dễ dàng. Khi đó ta khảo sát hàm số có được và trả lời theo yêu cầu bài toán

Ví dụ 12. Một con cá bơi ngược dòng để vượt khoảng cách $250km$. Tốc độ dòng nước là $5km/h$. Nếu tốc độ boi của cá khi nước đứng yên là $v(km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$, trong đó c là một hằng số và năng lượng E tính bằng Jun. Khi tốc độ bơi của cá nằm trong khoảng $(m;n)$ lớn nhất (m,n là số nguyên hoặc là phân số tối giản) thì năng lượng tiêu hao của cá giảm. Tính $m+2n$.



Lời giải

Đáp án: 20

Tốc độ của cá khi bơi ngược dòng nước là $v-5\ (km/h)$. Điều kiện: $v>5$.

Thời gian để cá vượt qua quãng đường 250 km là $t=\dfrac{250}{v-5}$ (giờ).

Năng lượng tiêu hao của cá để vượt qua quãng đường đó là $E(v)=cv^3\cdot\dfrac{250}{v-5}$ (Jun).

Ta có: $E'(v)=250c\cdot\dfrac{2v^3-15v^2}{(v-5)^2}$; $E'(v)=0\Leftrightarrow v=0$ (loại) hoặc $v=\dfrac{15}{2}$.

Bảng biến thiên:

v	5		$\frac{15}{2}$		$+\infty$
$E'(v)$	‖	$-$	0	$+$	
$E(v)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{84\,375c}{2}$	↗	$+\infty$

Khi đó tốc độ bơi của cá nằm trong khoảng $\left(5;\dfrac{15}{2}\right)$ thì năng lượng tiêu hao của cá giảm.

Vậy $m=5;n=\dfrac{15}{2}\Rightarrow m+2n=20$.

Ví dụ 13. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=180t+42t^2-t^3, t=0,1,\ldots,30$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0;30]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (đơn vị: người/ngày) tại thời điểm t. Hỏi trong 30 ngày đó, có bao nhiêu ngày mà tốc độ truyền bệnh giảm?

Lời giải

Đáp án: 16.

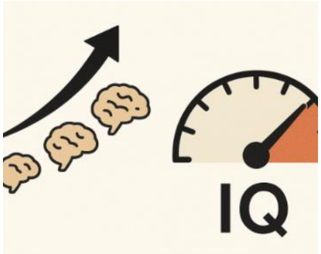
Ta có:

$f'(t)=180+84t-3t^2;\ f''(t)=84-6t;\ f''(t)=0\Leftrightarrow t=14.$

t	0		14		30
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	180	↗	768	↘	0

Do đó trong khoảng $(14;30)$ tức là từ ngày thứ 15 đến ngày thứ 30, thì tốc độ truyền bệnh giảm. Do đó có $30-15+1=16$ ngày mà tốc độ truyền bệnh giảm.

Ví dụ 14. Trong một nghiên cứu tại Viện Sức khỏe Tâm thần Quốc gia, các nhà khoa học theo dõi độ dày vỏ não (cortex) của 307 trẻ em có IQ cao (121-149) qua tuổi t (tính bằng năm), với mô hình $S(t)=0,000989t^3-0,0486t^2+0,7116t+1,46,\quad 5\le t\le 19$. Hỏi vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng bao nhiêu tuổi (làm tròn kết quản đến hàng đơn vị)



Lời giải

Đáp án: 11

Ta có: $S'(t)=3\cdot 0,000989t^2-2\cdot 0,0486t+0,7116=0,002967t^2-0,0972t+0,7116$

Giải $S'(t)=0\Leftrightarrow 0,002967t^2-0,0972t+0,7116=0$

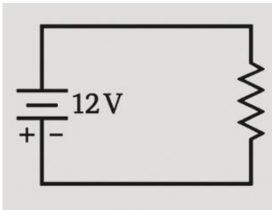
Ta có $t=\dfrac{0,0972\pm 0,0316}{2\cdot 0,002967}\approx\dfrac{0,0972\pm 0,0316}{0,005934}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t_1\approx\dfrac{0,1288}{0,005934}\approx 21,7\quad (\notin[5;19]),\\ t_2\approx\dfrac{0,0656}{0,005934}\approx 11,1\quad (\in[5;19]).\end{array}\right.$

Vậy nghiệm khả dụng duy nhất trên [5,19] là $t\approx 11,1$

Lập bảng biến thiên hàm số $S(t)$ suy ra $t\approx 11,1$ là điểm cực đại.

Vậy độ dày vỏ não của nhóm trẻ IQ cao đạt cực đại tại $t\approx 11$ tuổi.

Ví dụ 15. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin 12V được cho bởi công thức $P=15I-1,5I^2, 0\le I\le 10$, với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Biết công suất P tăng trong khoảng cường độ dòng điện từ 0 đến P_M thì giảm, tìm P_M ?



Lời giải

Đáp án: 5

Xét hàm số $P=15I-1,5I^2$ với $0\le I\le 10$.

Ta có: $P'=15-3I; P'=0\Leftrightarrow I=5\in[0;10]$.

Bảng biến thiên:

I	0		5		10
P'		$+$	0	$-$	
P	0	$\nearrow$	$37,5$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta có công suất P tăng trong khi cường độ dòng điện thuộc khoảng $(0;5)$.

BAI TẬP THAM KHẢO

Câu 78. Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) vượt khoảng cách $300km$ để tới nơi sinh sản. Tốc độ dòng nước là $6km/h$. Giả sử tốc độ hơi của cả khi mước đứng yên là $v\ km/h$ thì năng lượng tiêu hao của cả trong t giờ cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$ trong đó c là hằng số cho trước. E tính hằng Jun. Tình tốc độ bơi của cả khi nước đứng yên, để năng lượng của cả tiêu hao ít nhất?

Lời giải

Đáp án: 9

Theo đề bài, tốc độ của cá khi bơi trên sông là $v-6$, khi đó thời gian để cá bơi đến nơi sinh sản là $t=\dfrac{300}{v-6}$

Khi đó, $E(v)=cv^3\dfrac{300}{v-6}$ với $v>6$. Đặt $x=v-6$.

Bài năng lượng tiêu hao của cá được tính bởi hàm số:

$$f(x)=300c\frac{(x+6)^3}{x}=300c\left(x^2+18x+108+\frac{216}{x}\right) \text{ với } x>0.$$

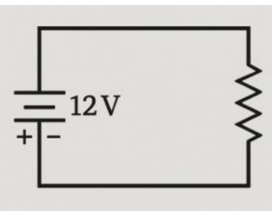
Ta có: $f'(x)=300c\left(2x+18-\dfrac{216}{x^2}\right)=0\Leftrightarrow 2x^3+18x^2-216=0\Rightarrow x=3$.

Bảng biến thiên:

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x)=f(3)$ hay khi tốc độ của cá khi nước đứng yên là $v=9km/h$ thì cá ít tốn năng lượng nhất.

Câu 79. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin 12V được cho bởi công thức $P=15I-1,5I^2, 0\le I\le 10$, với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Biết công suất P tăng trong khoảng cường độ dòng điện từ 0 đến P_M thì giảm, tìm P_M ?



Lời giải

Đáp án: 5

Xét hàm số $P = 15I - 1,5I^2$ với $0 \le I \le 10$.

Ta có: $P' = 15 - 3I; P' = 0 \Leftrightarrow I = 5 \in [0;10]$.

Bảng biến thiên:

I	0		5		10
P'		+	0	−	
P	0	↗	37,5	↘	0

Từ bảng biến thiên ta có công suất P tăng trong khi cường độ dòng điện thuộc khoảng $(0;5)$.

Câu 80. Hiệu quả nhiên liệu E, tính bằng số kilômét đi được trên mỗi lít xăng (km/l), của một mẫu xe ôtô được mô hình hóa theo tốc độ v (km/h) bằng công thức sau: $E(v) = -0,000025v^3 + 0,003v^2 + 13,5$. Mô hình này được áp dụng cho các tốc độ v từ $20\,km/h$ đến $120\,km/h$ $(20 \le v \le 120)$. Tìm giá trị nhiên liệu hiệu quả nhất (tức là đi được nhiều km nhất trên mỗi lít xăng, làm tròn đến hàng phần mười)?

Lời giải

Đáp án: 19,9.

Ta có: $E'(v) = -0,000075v^2 + 0,006v$

$$E'(v) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 0 \\ v = 80 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm số $E(v)$ với $20 \le v \le 120$ như sau:

v	20		80		120
$E'(v)$		+	0	−	
$E(v)$	$E(20)$	↗	$E(80)$	↘	$E(120)$

Do đó giá trị nhiên liệu hiệu quả nhất là $E(80) = 19,9$.

Câu 81. Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \le t \le 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (đơn vị là trăm người) và t là thời gian (tuần). Gọi $(a;b)$ là khoảng thời gian lâu nhất mà số người bị nhiễm bệnh tăng lên. Tính giá trị $P = 2a^2 - b^2$.

Lời giải

Đáp án: –64.

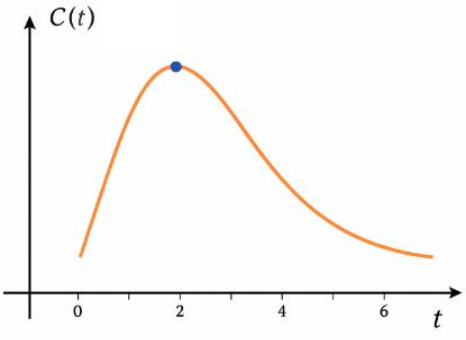
Ta có $N'(t) = -3t^2 + 24t = 0 \Rightarrow t = 0; t = 8$. Bảng biến thiên như sau:

t	0		8		12
N'	0	+	0	−	
N	0	↗	256	↘	0

Số người bị nhiễm bệnh tăng trên khoảng thời gian $(0;8)$.

Vậy $P = 2\cdot 0^2 - 8^2 = -64$.

Câu 82. Nồng độ C của một hoá chất sau t giờ tiêm vào cơ thể được xác định bởi công thức $C(t) = \dfrac{3t}{27+t^3}$, với $t \ge 0$. Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hoá chất trong máu là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Lời giải

Đáp án: 2,38

Ta có $C'(t) = \dfrac{3(27+t^3) - 3t.3t^2}{(27+t^3)^2} = \dfrac{81-6t^3}{(27+t^3)^2}$.

$\begin{cases} C'(t) = 0 \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

Ta có bảng biến thiên

t	0		$\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$		$+\infty$
$C'(t)$		$+$	0	$-$	
$C(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{6}{27\sqrt[3]{2}}$	$\searrow$	0

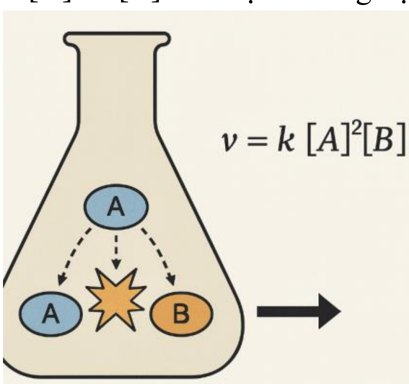
Do đó ở thời điểm $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2,38$ giờ thì nồng độ của hoá chất trong máu là lớn nhất.

Câu 83. Trong một phản ứng hóa học, tốc độ phản ứng v được biểu diễn theo công thức: $v = k\cdot[A]^2\cdot[B]$, trong đó:

□ v là tốc độ phản ứng (mol/l/s),

□ $k = 0,1$ là hằng số tốc độ phản ứng,

□[A] và [B] lần lượt là nồng độ của hai chất phản ứng (mol/l).



Giả sử tổng nồng độ ban đầu của [A] và [B] là $C = 2\text{mol/l}$, tức là $[A]+[B]=2$. Hãy tìm nồng độ của [A] tại đó tốc độ phản ứng v đạt cực đại.

Lời giải

Đáp án: 1,33

Ta có $[B]=2-[A]$ nên $v=0,1\cdot[A]^2\cdot(2-[A])=0,1\cdot(2[A]^2-[A]^3)$ với $0\le[A]\le 2$.

Đạo hàm của v theo [A] là $v=0,1\cdot(4[A]-3[A]^2)$.

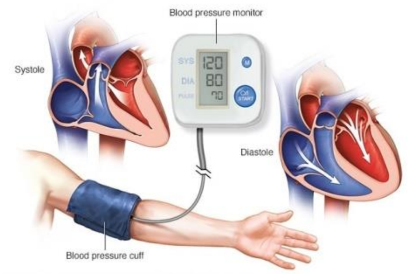
$v'=0\Leftrightarrow[A]=0$ hoặc $[A]=\dfrac{4}{3}$.

* Với $[A]=0$ tốc độ phản ứng $v=0$ (loại vì không có ý nghĩa thực tế).

* Với $[A]=\dfrac{4}{3}$ thì $v=\dfrac{16}{135}$ (mol/l/s), đây là giá trị hợp lý.

Kết luận: Với $[A]=\dfrac{4}{3}\approx 1,33$ (mol/l) thì tốc độ phản ứng v đạt cực đại.

Câu 84. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.



Lời giải

Đáp án 10.

Đk: $x\in[0;15]$. (vì độ giảm huyết áp không thể là số âm)

Có $G'(x)=0,035\left[2x(15-x)-x^2\right]=0,105x(10-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=10\end{array}\right.$.

$G(0)=0$; $G(10)=\dfrac{35}{2}$; $G(15)=0$.

Vậy huyết áp bệnh nhân giảm nhiều nhất khi tiêm cho bệnh nhân liều $x=10$ miligam.

Câu 85. Khi một vật lạ mắc kẹt trong khí quản khiến ta phải ho, cơ hoành đẩy lên trên gây ra tăng áp lực trong phổi, theo đó cuống họng co thắt làm hẹp khí quản khiến không khí đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng không khí bị đẩy ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Tốc độ luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn.

Qua nghiên cứu một số trường hợp, người ta nhận thấy tốc độ v của luồng khí liên hệ với bán kính x của khí quản theo công thức: $v(x)=k(x_0-x)\cdot x^2$ voi $\dfrac{1}{2}x_0\le x\le x_0$, trong đó k là hằng số $(k>0)$ và x_0 là bán kính khí quản ở trạng thái bình thường (Theo James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning).

Khi đó $x=k.x_0$ thì tốc độ luồng khí của một cơn ho trong trường hợp này là lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). Tính k.

Lời giải

Đáp án: 0,67

Xét hàm số $f(x)=(x_0-x)x^2$ với x_0 cố định và $\frac{1}{2}x_0\le x\le x_0$.

Do k là hằng số dương nên tốc độ của luồng khí của một cơn ho lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có:

$f(x)=-x^3+x_0x^2;\ f'(x)=-3x^2+2x_0x;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ hoac $x=\frac{2}{3}x_0.$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}x_0$		$\frac{2}{3}x_0$		x_0
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$f\left(\frac{1}{2}x_0\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{2}{3}x_0\right)$	$\searrow$	$f(x_0)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\max_{\left[\frac{1}{2}x_0;x_0\right]} f(x)=f\left(\frac{2}{3}x_0\right)$.

Vậy tốc độ của luồng khí của một con ho lớn nhất khi $x=\frac{2}{3}x_0$.

Đáp án: $k=\frac{2}{3}\approx 0,67$.

Câu 86. Một bể ban đầu chứa 10 gallon dung dịch muối với 2 lb (pound) muối. Dung dịch vào có nồng độ 1,5 lb/gallon chảy vào với tốc độ 3 gallon/phút, và hỗn hợp trong bể chảy ra với tốc độ 4 gallon/phút. Người ta cho biết lượng muối trong bể sau t phút là m (pound), với:

$$m=f(t)=1,5(10-t)-0,0013(10-t)^4,\quad 0\le t\le 10.$$

Hỏi lượng muối tối đa có thể có trong bể tại một thời điểm nào đó là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp án: 7,43

Ta có công thức lượng muối m (pound) trong bể sau t phút:

$m=f(t)=1,5(10-t)-0,0013(10-t)^4;\quad 0\le t\le 10$

Đặt $u=10-t$. Khi t chạy từ 0 đến 10 thì u chạy từ 10 xuống 0.

Khi đó $m=1,5u-0,0013u^4;\quad 0\le u\le 10$

Tính đạo hàm theo u ta được: $m'=1,5-0,0013\cdot 4u^3=1,5-0,0052u^3$

Xét $1,5-0,0052u^3=0\Rightarrow u^3=\dfrac{1,5}{0,0052}\approx 288,46\Rightarrow u\approx\sqrt[3]{288,46}\approx 6,62$

Lập bảng xét dấu ta được:

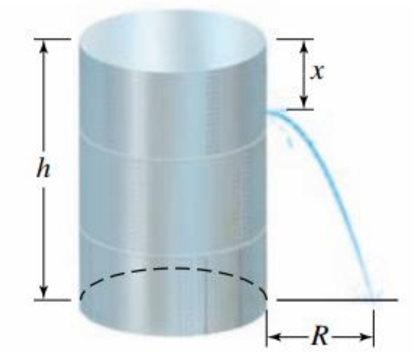
u	0		$6,62$		10
$x'(u)$		$+$	0	$-$	

Suy ra tại $u \approx 6,62$: $x_{CD} = 1,5 \cdot 6,62 - 0,0013(6,62)^4 \approx 9,93 - 2,50 \approx 7,43\ lb.$

Lượng muối trong bể đạt tối đa khoảng 7,43 lb tại thời điểm $t = 10 - u \approx 10 - 6,62 = 3,38$ phút .

Câu 87. Một bồn hình trụ cao h chứa nước. Theo định luật Torricelli, tốc độ tia nước chảy qua lỗ ở độ sâu x so với mặt nước là $V = \sqrt{2gx}$. Người ta cho rằng tầm xa R (feet) của tia nước được cho bởi $R = 2\sqrt{x(h-x)}$.

Biết lỗ phun nên đặt ở độ cao $x = K.h, (K \in ¡\ )$ so với mặt bồn thì tầm xa R đạt cực đại. Tìm K?



Lời giải

Đáp án: 0,5

Xét hàm $y = R^2(x) = 4x(h-x) = 4\left(hx - x^2\right)$

Tính đạo hàm: $y' = \left(R^2(x)\right)' = 4(h-2x)$

Giải $y' = \left(R^2\right)' = 0 \Leftrightarrow h - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{h}{2}.$

Lập bảng biến thiên, ta có $x = \frac{h}{2}$ là điểm cực đại.

Vậy lỗ phun nên đặt ở độ cao $x = \frac{h}{2}$ để tầm xa R của tia nước đạt tối đa.

Câu 88. Khi chất thải hữu cơ được đổ vào một cái ao, quá trình ôxy hóa xảy ra sẽ làm giảm hàm lượng ôxy trong nước. Tuy nhiên, theo thời gian, tự nhiên sẽ phục hồi lại mức ôxy về giá trị bình thường. Trong đồ thị kèm theo, $P(t)$ cho biết phần trăm hàm lượng ôxy (so với mức bình thường) sau t ngày kể từ khi chất thải được đổ vào ao.

Giả sử hàm số biểu thị hàm lượng ôxy là $P(t) = 100\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}$ (% mức bình thường), $t \geq 0$.

Tìm thời điểm mà hàm lượng ôxy thấp nhất.

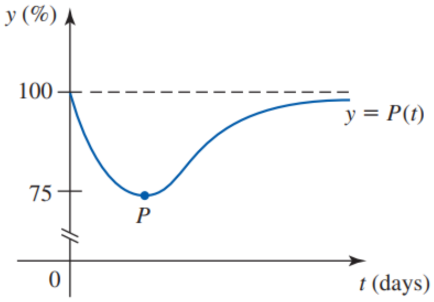
Lời giải

Đáp án: 10

Ta có:

$$P'(t)=\frac{(2t+10)\left(t^2+20t+100\right)-(2t+20)\left(t^2+10t+100\right)}{\left(t^2+20t+100\right)^2}$$

$$=\frac{10t^2-1000}{\left(t^2+20t+100\right)^2}$$



Khi đó:

$P'(t)=0 \Rightarrow 10t^2-1000=0 \Rightarrow t^2=100 \Rightarrow t=10 \quad (t\geq 0)$

Lập bảng biến thiên, ta có: $t=10$ là điểm cực tiểu của hàm số và giá trị cực tiểu là $P(10)=75$

Vậy thời điểm mà hàm lượng ôxy thấp nhất là $t=10$

Câu 89. Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t)=\dfrac{a}{b+e^{-0,75t}}$ (với $a,b\in\mathbb{R}$), trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Đạo hàm của hàm số $y=P(t)$ biểu thị tốc độ sinh trưởng của nấm men (tính bằng tế bào/giờ) tại thời điểm t (giờ). Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 10 tế bào/giờ. Tìm số lượng tế bào của quần thể nấm men tại thời điểm tốc độ sinh trưởng của quần thể đạt mức tối đa.

Lời giải

Đáp án: 30

Theo đề bài ta có tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 10 tế bào/giờ suy ra $P(0)=20$ và $P'(0)=10$, ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}\dfrac{a}{b+1}=20\\ \dfrac{0,75a}{(b+1)^2}=10\end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b+1}:\frac{0,75a}{(b+1)^2}=20:10 \Rightarrow \frac{b+1}{0,75}=2 \Rightarrow b=\frac{1}{2} \Rightarrow a=30.$$

Xét hàm số $P'(t)=\dfrac{0,75a\cdot e^{-0,75t}}{\left(b+e^{-0,75t}\right)^2}=\dfrac{22,5e^{-0,75t}}{\left(0,5+e^{-0,75t}\right)^2}, \forall t\geq 0$

Đặt $m=e^{-0,75t}$, $\forall t\geq 0 \Rightarrow 0<m\leq 1$.

$$P'(m)=\frac{22,5m}{(0,5+m)^2} \Rightarrow P''=\frac{-22,5m^2+5,625}{(0,5+m)^4}=0 \Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên

m	0		$\frac{1}{2}$		1
P'	0	$\nearrow$	$11,25$	$\searrow$	-10

Suy ra giá trị lớn nhất của tốc độ sinh trưởng của quần thể khi $m=\dfrac{1}{2} \Rightarrow t=-\dfrac{4}{3}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Vậy số lượng tế bào của quần thể nấm men tại thời điểm $t=-\dfrac{4}{3}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ là $P=$ 30 tế bào.

Câu 90. Trong vật lý, một dao động điều hòa là dao động có phương trình chuyển động $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, trong đó A là biên độ của dao động, $\omega(rad/s)$ là tần số góc, $\varphi(rad)$ là pha ban đầu. Động năng (Tiếng Anh: Kinetic energy) của một vật là năng lượng nó có được từ chuyển động của nó, được xác định bởi công thức $W=\frac{1}{2}m.v^2(t)$ (đơn vị J). Trong đó $m(kg)$ là khối lượng của vật, $v(t)(m/s)$ là tốc độ của vật tại thời điểm $t(s)$. Giả sử một vật có khối lượng $m=100g$ dao động điều hòa với phương trình chuyển động $x(t)=40\cos\left(200\pi t-\frac{\pi}{3}\right)(cm)$. Khi đó, động năng vật đó đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (J) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Đáp án: 3158.

Ta có $v(t)=40\cos\left(200\pi t-\frac{\pi}{3}\right)(cm)=0,4\cos\left(200\pi t-\frac{\pi}{3}\right)(m)$

$v(t)=x'(t)=-80\pi\sin\left(200\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$.

$m=100g=0,1kg$

Suy ra: $W=\frac{1}{2}.0,1.\left[-80\pi\sin\left(200\pi t-\frac{\pi}{3}\right)\right]^2\Leftrightarrow W=320\pi^2\sin^2\left(200\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$.

Ta có: $0\le\sin^2\left(200\pi t-\frac{\pi}{3}\right)\le 1\Rightarrow 0\le W\le 320\pi^2$.

$W_{\max}=320\pi^2\approx 3158(J)\Leftrightarrow\sin^2\left(200\pi t-\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow\cos\left(200\pi t-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

Vậy động năng đạt giá trị lớn nhất bằng $3158(J)$.

Câu 91. Nếu một điện trở R được nối với một ắc-quy có suất điện động E và điện trở trong r thì công suất tiêu thụ trên điện trở R là $P=\frac{E^2R}{(R+r)^2}$, trong đó R,r được tính bằng ôm (Ω), E được tính bằng vôn (V) và P được tính bằng oát (W). Cho $E=12(\text{V})$ và $r=2(\Omega)$, còn R biến thiên thì công suất P đạt giá trị cực đại bằng bao nhiêu W?

Lời giải

Đáp án: 18

Khi $E=12(V)$ và $r=2(\Omega)$, thì $P=\frac{144R}{(R+2)^2}$.

Xét hàm số $P=\frac{144R}{(R+2)^2}$ với $R\in(0;+\infty)$.

Ta có $P'(R)=\frac{144(R+2)(2-R)}{(R+2)^4}=0\Leftrightarrow R=2$

Khi đó $P(R)$ đạt giá trị cực đại tại $R=2$ và $\max\limits_{(0;+\infty)}P=P(2)=18$.

Vậy công suất P đạt cực đại bằng $18(\text{W})$.

Câu 92. Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ t của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi hàm số $f(t)=-\frac{1}{300}t^3+bt^2+ct+12000$ (con), $0\le t\le 365$ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng cá thể sinh vật

X nhiều nhất với 55740 con. Ngày 25/11/2014 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Đáp án: 49,6

Năm 2024, tháng một có 31 ngày, tháng hai có 29 ngày, tháng ba có 31 ngày, tháng tư có 30 ngày, tháng năm có 31 ngày, tháng sáu có 30 ngày, tháng bảy có 31 ngày, tháng tám có 31 ngày, tháng chín có 30 ngay, tháng mười có 31 ngày, tháng mười một có 30 ngày.

Ta có $f\left(t\right)=-\dfrac{1}{300}t^3+bt^2+ct+12000$

$f'\left(t\right)=-\dfrac{1}{100}t^2+2bt+c$

Ngày 26/09/2024 ứng với $t=270$ là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con nên hàm số đạt cực đại tại $t=270$.

$f'\left(270\right)=0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{100}270^2+540b+c=0\Leftrightarrow 540b+c=729\ \ (1)$

$f\left(270\right)=55740\Leftrightarrow -\dfrac{1}{300}270^3+b\ 270^2+270c+12000=55740\Leftrightarrow 72900\ b+270c=109350\ (2)$ Từ

$(1),(2)$ suy ra $b=\dfrac{6}{5},\ \ c=81$, vậy hàm số đã cho là $f\left(t\right)=-\dfrac{1}{300}t^3+\dfrac{6}{5}t^2+81\,t+12000$

Thử lại $f'\left(t\right)=-\dfrac{1}{100}t^2+\dfrac{12}{5}t+81,\ \ f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=270 \\ t=-30\ (l)\end{array}\right.$

BBT

t	0		270		365
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Hàm số đạt cực đại tại $t=270$.

Ngày 25/11/2014 ứng với $t=330$, khi đó số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bằng: $f\left(330\right)=-\dfrac{1}{300}330^3+\dfrac{6}{5}.330^2+81.\ 330+12000=49\,620$ (con).

Câu 93. Ngày khai giảng năm học $2024-2025$. Học sinh khối 12 trường THPT Nguyễn Hiền thả chùm bóng bay gắn thông điệp “Học Sinh khối 12 chiến thắng CT 2018”. Ước tính độ cao h (tính bằng km) của chùm bóng bay so với mặt đất vào thời điểm t (đơn vị giờ) được cho bởi công thức $h\left(t\right)=-t^3+3t^2,\left(0\le t\le 3\right)$. Chùm bóng bay đạt độ cao lớn nhất so với mặt đất là: $a\left(km\right)$. Tìm a?

Lời giải

Đáp án: 4.

Ta có $h'\left(t\right)=-3t^2+6t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $h\left(t\right)=-t^3+3t^2,\left(0\le t\le 3\right)$

t	0		2		3
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	0	↗	4	↘	0

Vậy chùm bóng bay đạt độ cao lớn nhất so với mặt đất là $4(km)$.

Câu 94. Giả sử tỷ lệ sinh của Tỉnh A tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t)=\dfrac{200}{1+4e^{-t}};t\ge 0,t\in N$, trong đó thời gian t được tính bằng tháng. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng dân số của tỉnh A. Hỏi sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng trưởng của dân số tỉnh A là lớn nhất?

Lời giải

Đáp án: 1,39.

Ta có $f(t)=\dfrac{200}{1+4e^{-t}}=\dfrac{200e^t}{e^t+4}$

Khi đó $f'(t)=\dfrac{800e^t}{\left(e^t+4\right)^2}$

$\Rightarrow f''(t)=\dfrac{800e^t\left(4-e^t\right)}{\left(e^t+4\right)^3}$. Khi đó $f''(t)=0\Leftrightarrow t=\ln 4$.

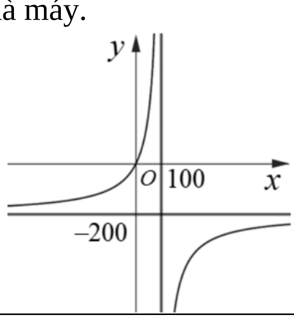
Bảng biến thiên

t	0		$\ln 4$		$+\infty$
$f''(t)$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$		↗		↘	

Vậy tốc độ tăng trưởng của dân số tỉnh A lớn nhất là $f'(\ln 4)=\dfrac{800e^{\ln 4}}{\left(e^{\ln 4}+4\right)^2}=\dfrac{800.4}{16^2}=\dfrac{25}{2}$ tại thời điểm $t=\ln 4\approx 1,39$

Câu 95. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm môi trường từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí (triệu đồng) cần bỏ ra được mô hình hóa bởi hàm số có dạng $C(x)=\dfrac{ax+b}{-x+d}$ (như hình vẽ), $(0\le x<100)$.

Tính chi phí chênh lệch (tỉ đồng) phải bỏ ra để loại bỏ 90% và loại bỏ 99% chất gây ô nhiễm từ khí thải của nhà máy.



Lời giải

Đáp án: 18.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: Đồ thị đi qua gốc tọa độ nên $b=0$.

Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x=100 \Rightarrow d=100$.

Đồ thị có đường tiệm cận ngang $y=-200 \Rightarrow -a=-200 \Rightarrow a=200$.

Vậy ta có $C(x)=\dfrac{200x}{-x+100}$.

Suy ra chi phí chênh lệch (tỉ đồng) phải bỏ ra để loại bỏ 90% và loại bỏ 99% chất gây ô nhiễm từ khí thải của nhà máy là:

$C(99)-C(90)=\dfrac{200.99}{-99+100}-\dfrac{200.90}{-90+100}=18000$ (triệu đồng) $=18$ tỉ đồng.

Câu 96. Nồng độ C của một loại hóa chất trong máu sau t giờ tiêm vào cơ thể được cho bởi công thức $C(t)=\dfrac{4t}{64+t^3}$ với $t\geq 0$. Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hóa chất trong máu là cao nhất? *(kết quả làm tròn tới hàng phần trăm)*

Lời giải

Đáp án: 3,17.

Ta có $C'(t)=\dfrac{-8t^3+256}{\left(64+t^3\right)}$.

$C'(t)=0 \Leftrightarrow -8t^3+256=0 \Leftrightarrow t=\sqrt[3]{32}$.

Bảng biến thiên

t	0		$\sqrt[3]{32}$		$+\infty$
$C'(t)$		$+$	0	$-$	
$C(t)$		$\nearrow$	$C(\sqrt[3]{32})$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên thì nồng độ hóa chất trong máu cao nhất khi $t=\sqrt[3]{32}\approx 3{,}17$ (giờ).

Câu 97. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2002 được tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số $y=f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là $0{,}075$ nghìn người/năm?

Lời giải

Đáp án: 2037.

Ta có: $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$

Vì t là số năm nên $t>0$.

Hàm số xác định với $\forall t>0$.

$f'(t)=\dfrac{120}{(t+5)^2}$.

$\Rightarrow f'(t)=0{,}075 \Leftrightarrow \dfrac{120}{(t+5)^2}=0{,}075 \Leftrightarrow (t+5)^2=1600 \Leftrightarrow (t+5)^2=40^2$.

Vì $t>0$ nên $t=35$.

Vậy sau 35 năm kể từ năm 2002, tức là vào năm 2037 thì tốc độ tăng dân số của thi trấn đó là $0,075$ nghìn người/năm.

Câu 98. Biết rằng tốc độ đánh máy trung trình S (tính bằng từ trên phút) của một học viên lớn tuổi sau t tuần (kể từ khi chưa biết đánh máy) được cho bởi một trong hai công thức sau $S(t)=\dfrac{at^2+b}{ct^2+d}$ và $S(t)=\dfrac{at^2+b}{ct+d}$ $(a,b,c,d\in \mathbb{R};ac\neq 0)$.

Ông A (một người lớn tuổi chưa biết đánh máy) sau 4 tuần đi học thì tốc độ đánh máy trung bình đạt 20 từ trên phút, sau 6 tuần đạt 30 từ trên phút. Em hãy dự đoán xem, sau khóa học 15 tuần thì tốc độ đánh máy trung bình của ông A là bao nhiêu từ trên phút.

Lời giải

Đáp án: 45.

+) Do $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{at^2+b}{ct+d}=\pm\infty$ nên $S(t)=\dfrac{at^2+b}{ct+d}$ loại.

+) Ta có $S(0)=0\Leftrightarrow b=0\Rightarrow S(t)=\dfrac{at^2}{ct^2+d}$.

+) Mặt khác có $\begin{cases}S(4)=20\\S(6)=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16a=20(16c+d)\\36a=30(36c+d)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a=80c+5d & (1)\\6a=180c+5d & (2)\end{cases}$

Lấy (2) trừ (1) ta được $a=50c$ thay vào (1) ta được $d=24c$.

Vậy $S(t)=\dfrac{50ct^2}{ct^2+24c}=\dfrac{50t^2}{t^2+24}$.

+) Do đó $S(15)=\dfrac{50.15^2}{15^2+24}\approx 45.$

☞ BÀI TOÁN VỀ TIỆM CẬN

Quy tắc giải bài toán thực tế về tiệm cận

Bước 1: Đọc hiểu và phân tích đề bài

- Trong yêu cầu bài toán thường có cụm từ: "***không vượt quá bao nhiêu***" hay "***không thấp hơn (không dưới) bao nhiêu***"

Bước 2: Xây dựng mô hình toán học

- Gọi biến số (thường là ***thời gian***) và suy ra các đại lượng tương ứng.
- Lập hàm biểu thị đại lượng cần xác định theo yêu cầu của đề bài.

Bước 3: Giải mô hình toán học

- Tính giới hạn của hàm .
- Kiểm tra điều kiện của biến (nếu cần)

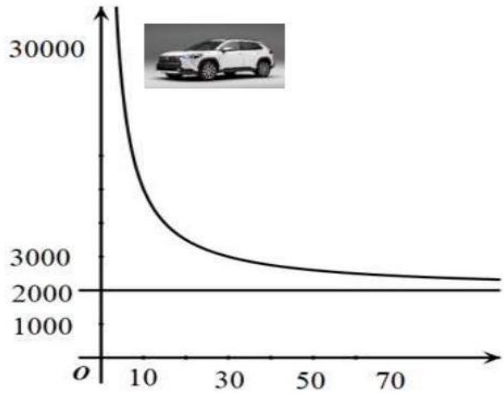
Bước 4: Đáp án và diễn giải kết quả

- Kết luận bằng lời, kèm đơn vị.

Ví dụ 16. Một chiếc xe ô tô mới mua có giá 30 000 USD. Sau thời gian t (năm), người ta xác định giá trị của xe ô tô đó là $f\left(t\right)=\dfrac{30000+2000t}{t}\left(\text{USD}\right)$. Khi thời gian tăng lên, hỏi giá trị của xe ô tô đó không thể thấp hơn hơn bao nhiêu (USD)?

Lời giải

Đáp án: 2000



Ta có: $f\left(t\right)=\dfrac{30000+2000t}{t}$.

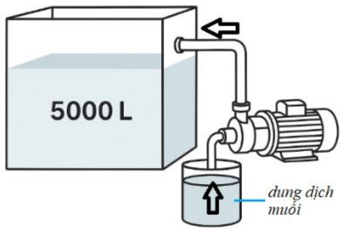
Ta có:

$$\lim_{t\to+\infty} f\left(t\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{30000+2000t}{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{30000}{t}+2000\right)=2000.$$

Suy ra, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f\left(t\right)$ là $y=2000$.

Vậy khi thời gian tăng lên, giá trị của xe ô tô đó ngày càng giảm về và gần bằng 2000 USD.

Ví dụ 17. Một bể đang chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút. Nồng độ muối không vượt quá bao nhiêu sau một thời gian dài bơm nước muối?



Lời giải

Đáp án: 30

Sau t phút, ta có khối lượng muối trong bể là $30.25t=750t$ (gam).

Thể tích của lượng nước trong bể sau t phút là $25t+5000$ (lít).

Vậy nồng độ muối sau t phút là $f\left(t\right)=\dfrac{750t}{25t+5000}$ (gam/lit)

Sau một thời gian dài bơm nước muối thì nồng độ muối trong bể không vượt quá

$$\lim_{t\to+\infty} f\left(t\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{750t}{25t+5000}=30 \text{ (gam/lít)}$$

Ví dụ 18. Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 34567 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi X , công ty phải trả 8 USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi $x(x\geq 1)$ là số đồ chơi X mà công ty đã sản xuất và $C(x)$ (đơn vị: USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi X. Khi đó chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X là hàm số $\bar{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}$ xác định trên $[1;+\infty)$. Khi số đồ chơi sản xuất tăng lên thì chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X giảm xuống nhưng không xuống dưới mức tối thiểu là bao nhiêu USD?

Lời giải

Đáp án: 8

Ta có: $C(x)=34567+8x$.

Khi đó: $\bar{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}=\dfrac{34567+8x}{x}=8+\dfrac{34567}{x}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\bar{C}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(8+\dfrac{34567}{x}\right)=8$.

Mà: $\bar{C}(x)$ là hàm nghịch biến trên $[1;+\infty)$ nên chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X giảm xuống thấp nhất và không dưới 8 USD.

BAI TẬP THAM KHẢO

Câu 99. Một bể đang chứa 1000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 15 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Sau một thời gian tương đối dài bơm nước muối thì nồng độ muối trong bể không vượt quá bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 15

Sau t phút, ta có khối lượng muối trong bể là $20.15t=300t$ (gam).

Thể tích của lượng nước trong bể sau t phút là $1000+20t$ (lít).

Vậy nồng độ muối sau t phút là $f(t)=\dfrac{300t}{1000+20t}=\dfrac{30t}{100+2t}$ (gam/lit)

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{30t}{100+2t}=15$

Sau một thời gian dài bơm nước muối thì nồng độ muối trong bể không vượt quá 15 (gam/lít)

Câu 100. Một bể chứa 1000 lít nước muối có nồng độ 0,1 (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích bể, đơn vị gam/lít). Người ta bơm nước muối có nồng độ 0,2 vào bể với tốc độ 20 lít/phút. Gọi $f(t)$ là nồng độ muối trong bể sau t phút. Sau một thời gian tương đối dài bơm nước muối thì nồng độ muối trong bể không vượt quá bao nhiêu?

Câu 101. **Lời giải**

Đáp án : 0,2

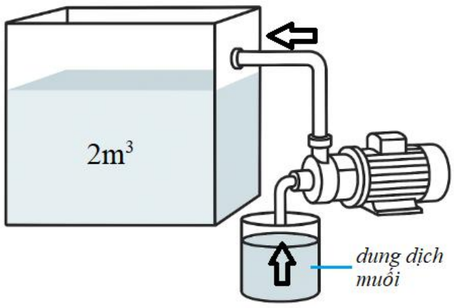
Khối lượng muối có trong bể trong t phút là $1000\cdot 0,1+20\cdot 0,2t=100+4t$.

Nồng độ muối trong bể sau t phút là $\dfrac{100+4t}{1000+20t}=\dfrac{25+t}{250+5t}$.

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0,2$

Sau một thời gian dài bơm nước muối thì nồng độ muối trong bể không vượt quá 0,2 (gam/lít)

Câu 102. Một bể chứa $2m^3$ nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ không đổi với tốc độ 20 lít/phút. Nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối có trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian tính bằng phút. Biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y=10$. Nồng độ muối trong bể sau khi bơm được 1 giờ là bao nhiêu?



Lời giải

Đáp án: 3,75.

Giả sử nước muối bơm vào có nồng độ a gam/lít.

Sau t phút ta có khối lượng muối trong bể là $20at$ (gam).

Thể tích của lượng nước trong bể sau t phút là $2000+20t$ (lít).

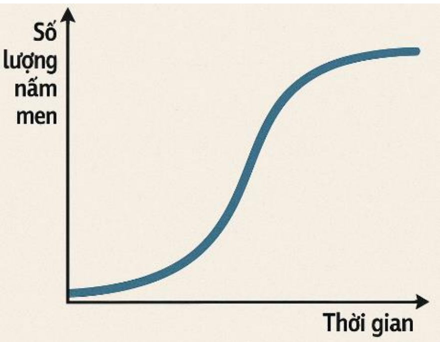
Vậy nồng độ muối sau t phút là $f(t)=\dfrac{20at}{2000+20t}=\dfrac{at}{100+t}$ (gam/lít).

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{at}{100+t}=a$, nên đồ thị hàm số $f(t)$ có tiệm cận ngang là $y=a$. Suy ra $a=10$.

Do đó hàm nồng độ muối trong bể sau khi bơm được t phút là $f(t)=\dfrac{10t}{100+t}$.

Nồng độ muối sau 1 giờ bơm là $f(60)=\dfrac{10.60}{100+60}=3,75$ (gam/lít).

Câu 103. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t)=\dfrac{a}{b+e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Theo mô hình này số lượng nấm men không vượt quá bao nhiêu con?



Lời giải

Đáp án: 100

Ta có: $P'(t)=\dfrac{0,75ae^{-0,75t}}{\left(b+e^{-0,75t}\right)^2}$, $t\ge 0$.

Theo đề bài, ta có: $P(0)=20$ và $P'(0)=12$.

Do đó, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{a}{b+1}=20 \\ \dfrac{0,75a}{(b+1)^2}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=20(b+1) \\ \dfrac{15}{b+1}=12 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình này, ta được $a=25$ và $b=\dfrac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t)=\dfrac{18,75e^{-0,75t}}{\left(\dfrac{1}{4}+e^{-0,75t}\right)^2}>0$, $\forall t\ge 0$, tức là số lượng nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{25}{\dfrac{1}{4}+e^{-0.75t}}=100$ nên số lượng nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

Câu 104. Một bể chứa ban đầu có 300 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 60 lít nước và 20 gam chất khử trùng (hoà tan). Biết rằng nồng độ chất khử trùng luôn tăng theo thời gian và không vượt ngưỡng $\dfrac{1}{a}$ gam/lít. Tìm a.

Lời giải

Ta có 1 giờ $=$ 60 phút.

Khối lượng chất khử trùng trong bể sau t phút là $20t$ (gam).

Thể tích nước trong bể sau t phút là $300+60t$ (lít).

Nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút là $\dfrac{20t}{300+60t}$ (gam/lít).

Vì $t\ge 0$; $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\dfrac{1}{3}$. Suy ra đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{3}$. Do đó khi thời gian t trở nên rất lớn, nồng độ chất khử trùng ngày càng tiến về $\dfrac{1}{3}$. Vậy $a=3$.

Câu 105. Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x)=400\left(2+\dfrac{3}{x+2}\right)$ với $x\ge 1$. Ta coi $y=S(x)$ là một hàm số xác định trên $[1;+\infty)$. Khi đó, hãy tính xem số lượng sản phẩm của công ty bán được trong một khoảng thời gian dài không thể thấp hơn bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Đáp án: 800.

Ta có: $S'(x)=-\dfrac{1200}{(x+2)^2}<0$, với mọi $x\ge 1$.

Suy ra hàm số $y=S(x)$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$.

Mặt khác, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}S(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}400\left(2+\dfrac{3}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(800+\dfrac{\dfrac{1200}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}\right)=800$

Suy ra, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=S(x)$ là $y=800$.

Vậy số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn 800 sản phẩm.

Câu 106. Một tác giả muốn xuất bản một cuốn sách với phí xuất bản là 10 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 70000 đồng. Gọi $t(t\ge 1)$ là số cuốn sách sẽ in và $f(t)$ (đơn vị: nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách. Khi đó, người ta tính toán được chi phí trung bình của mỗi cuốn sách không thể thấp hơn $\overline{ab}$ nghìn đồng. Tìm $a+b$.

Lời giải

Đáp án: 7.

Tổng số tiền cần bỏ ra để in t cuốn sách là: $10000+70t$ (nghìn đồng).

Chi phí trung bình của mỗi cuốn sách là $f(t)=\dfrac{10000+70t}{t}$ (nghìn đồng).

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=70$. Suy ra $y=70$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(t)$. Vậy chi phí trung bình của mỗi cuốn sách thấp nhất không thể thấp hơn 70000 đồng. Khi đó, $a=7, b=0$.

Câu 107. Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 40 000 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất đư c một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải trả 6 USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi $x\left(x\ge 1\right)$ là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $P\left(x\right)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x dồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $F\left(x\right)=\dfrac{P\left(x\right)}{x}$. Xem $F\left(x\right)$ là hàm số theo x xác định trên nửa khoảng $\left[1;+\infty\right)$. Khi đó, chi phí trung bình của mỗi đồ chơi A thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu (USD)?

Lời giải

Đáp án: 6

Một đồ chơi A công ty phải trả 6 USD nên x đồ chơi A công ty phải trả $6x$ (USD) $(x>1)$. Khi đó tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A là: $P\left(x\right)=6x+40000 \Rightarrow F\left(x\right)=\dfrac{P\left(x\right)}{x}=\dfrac{6x+40000}{x}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} F\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{6x+40000}{x}\right)=6$

Suy ra $y=6$ là phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $F\left(x\right)$.

Vậy chi phí trung bình của mỗi đồ chơi A thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn 6 USD.

Câu 108. Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong x (tháng) được tính bởi công thức $S\left(x\right)=300\left(2+\dfrac{4}{x+2}\right)$ với $x\ge 1$. Xem $y=S\left(x\right)$ là một hàm số xác định trên $\left[1;+\infty\right)$. Khi đó, hãy tính xem số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Đáp án: 600

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} S\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} 300\left(2+\dfrac{4}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(600+\dfrac{\frac{1200}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right)=600$.

Suy ra, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=600$.

Vậy số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn 600 sản phẩm.

Câu 109. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N\left(x\right)=\dfrac{50x}{x+4}\left(x\ge 0\right)$ bộ phận mỗi ngày sau x ngày đào tạo. Xem $y=N\left(x\right)$ là một hàm số xác định trên $[0;+\infty)$, khi số ngày đào tạo tăng lên, hãy tính số bộ phận một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 50

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} N(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{50x}{x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{50}{1+\dfrac{4}{x}}=50$

Vậy một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá 50 bộ phận máy tính.

Câu 110. Một cơ sở sản xuất tính toán rằng số sản phẩm trung bình mà một nhân viên làm được mỗi ngày là $f(x)=\dfrac{100x}{x+10}$ với x là số ngày kinh nghiệm làm việc $(x\ge 0)$. Xem $y=f(x)$ là một hàm số xác định trên $[0;+\infty)$. Khi số ngày kinh nghiệm làm việc tăng lên thì số sản phẩm trung bình tối đa mà một nhân viên có thể làm được trong một ngày là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 99

Ta có: $f(x)=\dfrac{100x}{x+10}=100-\dfrac{1000}{x+10}<100$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=100$ nên số sản phẩm tối đa mà một nhân viên làm được trong một ngày là không quá 99 sản phẩm.

Ta có $f(x)=99 \Leftrightarrow \dfrac{100x}{x+10}=99 \Leftrightarrow x=990$.

Vậy khi số ngày kinh nghiệm làm việc tăng lên thì số sản phẩm trung bình tối đa mà một nhân viên có thể làm được trong một ngày là 99.

Câu 111. Một bể chứa 3000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam/lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử nồng độ muối trong nước bể sau t phút được xác định bởi một hàm số $f(t)$ trên $t\in[0;+\infty)$ (gam/lit). Khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến bao nhiêu gam/lít.

Lời giải

Đáp án: 25

Sau t phút khối lượng muối trong bể là $25.20.t=500t$ (gam).

Thể tích của bể sau t phút là $3000+20.t$ (lít).

Khi đó nồng độ muối có trong nước bể là: $f(t)=\dfrac{500t}{3000+20t}=\dfrac{25t}{150+t}$ (gam/lít).

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{25t}{150+t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{25}{\frac{150}{t}+1}=25.$$

Vậy hi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến 25 gam/lít.

Câu 112. Một bể chứa ban đầu có 250 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 25 lít nước, đồng thời cho vào bể 8 gam chất khử khuẩn (ClO_2) được hòa tan. Giả sử $C(t)$ là nồng độ chất khử khuẩn trong bể sau t phút (với $C(t)=\dfrac{m(t)}{V(t)}$, đơn vị gam/lít, trong đó $m(t)$ là khối lượng chất khử khuẩn trong bể và $V(t)$ là thể tích nước trong bể). Gọi c là số dương nhỏ nhất mà nồng độ chất khử khuẩn là $C(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt quá ngưỡng c gam/lít. Tìm c

Lời giải

Đáp án: 0,32

Nồng độ chất khử khuẩn trong bể sau t phút là $C\left(t\right)=\dfrac{8t}{25t+250}, t>0$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $C\left(t\right)$ trên khoảng xác định

Ta có: $C'\left(t\right)=\dfrac{2000}{(25t+250)^2}>0, \forall t>0$

Do đó $C\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{8t}{25t+250}=\dfrac{8}{25}=0,32$

Vậy nồng độ chất khử khuẩn tăng theo thời gian và không vượt quá 0,32

Câu 113. Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Gọi $f\left(t\right)$ (gam/lít) là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t\geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f\left(t\right)$, ta thấy giá trị $f\left(t\right)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p (kết quả viết dưới dạng số thập phân).

Lời giải

Đáp án: 0,4.

Thể tích nước trong bể sau t phút là $150+50t$ (lít).

Khối lượng chất khử trùng trong bể sau t phút là $20t$ (gam).

Nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút là $f\left(t\right)=\dfrac{20t}{50t+150}$ (gam/lít).

Ta có $f'\left(t\right)=\dfrac{3000}{\left(50t+150\right)^2}>0, \forall t\geq 0$ và $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{20t}{50t+150}=\dfrac{2}{5}=0,4$.

Vậy giá trị hàm $f\left(t\right)$ luôn tăng nhưng không vượt ngưỡng 0,4 gam/lít.

☞ BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ HÀM SỐ - ĐỒ THỊ

Quy tắc giải bài toán thực tế về hàm số và đồ thị

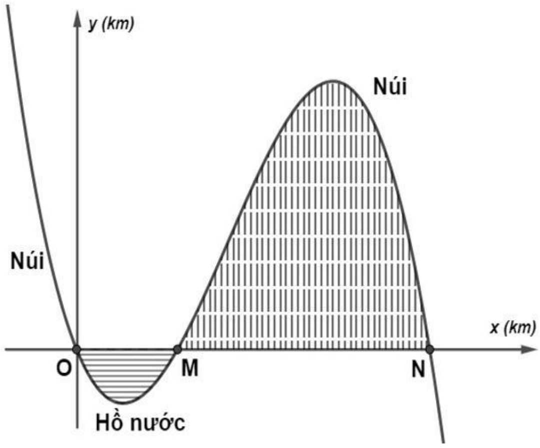
Bước 1: Đọc hiểu và phân tích đề bài
- Bài toán thường cho hình ảnh có sẵn dạng đồ thị

Bước 2: Xây dựng mô hình toán học
- Gọi biến số và suy ra các đại lượng tương ứng.
- Lập hàm biểu thị đại lượng cần xác định theo yêu cầu của đề bài.

Bước 3: Giải mô hình toán học
- Khảo sát hàm số và tính các đại lượng theo yêu cầu.
- Kiểm tra điều kiện của biến (nếu cần)

Bước 4: Đáp án và diễn giải kết quả
- Kết luận bằng lời, kèm đơn vị.

Ví dụ 19. Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa bởi hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách $OM = 2km$; độ rộng của núi $MN = 3,5km$. Độ sâu của hồ nước là 450m. Chiều cao của ngọn núi là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp án: 1191

Hàm số bậc ba $y = f(x)$ có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$

Ta có: $ON = OM + MN = 2 + 3,5 = 5,5(km)$

Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại các điểm: $O(0;0)$, $M(2;0)$ và $N(5,5;0)$

Khi đó, phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt là $x = 0; x = 2; x = 5,5$.

$\Rightarrow f(x) = k.x(x-2)(x-5,5) = k(x^3 - 7,5x^2 + 11x)$ với đồ thị hàm số $\lim\limits_{x \to +\infty} = -\infty$ nên $k < 0$

Ta có: $f'(x) = k(3x^2 - 15x + 11)$

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow k(3x^2 - 15x + 11) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 15x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{15 \pm \sqrt{93}}{6}$.

Độ sâu của hồ nước là $450m = 0,45km$ nên ta có giá trị cực tiểu của đồ thị hàm số trên là $y_{CT} = -0,45$.

Suy ra, $f\left(\dfrac{15 - \sqrt{93}}{6}\right) = -0,45 \Leftrightarrow k.\dfrac{-135 + 31\sqrt{93}}{36} = -0,45 \Leftrightarrow k = \dfrac{-16,2}{-135 + 31\sqrt{93}}$.

Chiều cao của ngọn núi tương ứng với $y_{CĐ} = f\left(\dfrac{15+\sqrt{93}}{6}\right) \approx 1{,}19106(km) \approx 1191(m)$.

Vậy ngọn núi cao khoảng $1191m$.

Ví dụ 20. Đường đi của một khinh khí cầu được gắn trong hệ trục tọa độ là một đường cong bậc hai trên bậc nhất có đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ là $(1;0)$ và $(8;0)$ với đơn vị trên hệ trục tọa độ là 1 (km). Biết rằng điểm cực đại của đồ thị hàm số là điểm $(6;5)$. Hỏi khi khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất 3875 (m) thì khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang bao nhiêu? (đơn vị: km)

Lời giải

Đáp án: 7,2.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử phương trình của đường cong là $y = \dfrac{x^2+bx+c}{dx+e}$

Vì đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm có tọa độ là $(1;0)$ và $(8;0)$ nên

$x^2+bx+c = (x-1)(x-8) = x^2-9x+8$

Suy ra $y = \dfrac{x^2-9x+8}{dx+e} \Rightarrow y' = \dfrac{(2x-9)(dx+e)-d(x^2-9x+8)}{(dx+e)^2}$

Vì đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(6;5)$ nên suy ra

$$\begin{cases} y'(6)=0 \\ y(6)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(6d+e)+10d=0 \\ \dfrac{-10}{6d+e}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28d+3e=0 \\ 30d+5e=-10 \end{cases} \Leftrightarrow d=\frac{3}{5}; e=-\frac{28}{5}$$

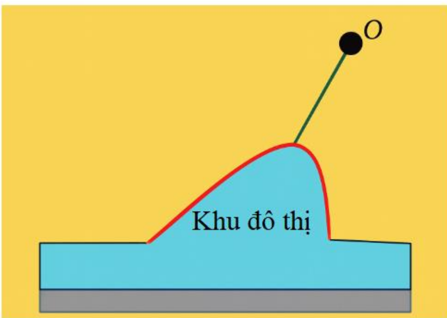
Vậy phương trình của hàm số là: $y = \dfrac{5(x^2-9x+8)}{3x-28}$. Kiểm tra lại điểm cực trị của hàm số này ta thấy điểm $(6;5)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tìm nghiệm $x>6$ của phương trình

$$\frac{5(x^2-9x+8)}{3x-28} = 3{,}875 \Leftrightarrow 5x^2-56{,}625x+148{,}5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7{,}2 \\ x=4{,}125 \ (L) \end{array}\right.$$

Vậy khi khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất 3875 (m) thì khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang là 7,2 km.

Ví dụ 21. Ở một vịnh biển, ngoài khơi xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây dựng khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị tương ứng 1km có hòn đảo ở O thì đường bao của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x^2+2}{x}$. Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải

Đáp án: 1,29

Lấy điểm $M\left(x;\dfrac{-x^2+2}{x}\right)$, $x\neq 0$ thuộc đồ thị $(C): y=\dfrac{-x^2+2}{x}$

Khi đó $OM^2=x^2+\left(\dfrac{-x^2+2}{x}\right)^2=2x^2+\dfrac{4}{x^2}-4\geq 4\sqrt{2}-4$

Suy ra $OM\geq 2\sqrt{\sqrt{2}-1}$

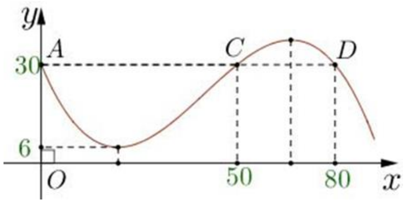
Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $2x^2=\dfrac{4}{x^2}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Vậy độ dài tuyến cáp treo ngắn nhất bằng $OM_{\min}=2\sqrt{\sqrt{2}-1}\approx 1,29$.

BAI TẬP THAM KHẢO

Câu 114. Một phần đường chạy của tàu lượn siêu tốc (hình 1) khi gắn hệ trục toạ độ Oxy được mô phỏng ở hình 2, đơn vị trên mỗi trục là mét. Biết đường chạy của nó là một phần đồ thị hàm bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (0\leq x<90)$; tàu lượn siêu tốc xuất phát từ điểm A, đi qua các điểm C, D đồng thời đạt độ cao nhỏ nhất so với mặt đất là $6m$. Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là bao nhiêu mét so với mặt đất? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).*

Hình 1



Hình 2

Lời giải

Đáp án: 39,9

Dựa vào hình 2 ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a<0)$ và đường thẳng $y=30$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x=0; x=50; x=80$.

$\Rightarrow ax^3+bx^2+cx+d=30\Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx+d-30=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x=0; x=50; x=80$.

$\Rightarrow ax^3+bx^2+cx+d-30=ax(x-50)(x-80)=a\left(x^3-130x^2+4000x\right)$

Suy ra $f(x)=a\left(x^3-130x^2+4000x\right)+30\ \Rightarrow f'(x)=a\left(3x^2-260x+4000\right)$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=20\ (TM)\\ x=\dfrac{200}{3}(TM)\end{array}\right..$$

Theo bài ra độ cao nhỏ nhất bằng 6 hay $f(20)=6\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{1500}$

Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là $f\left(\dfrac{200}{3}\right)=\dfrac{3230}{81}\approx 39,9.$

Câu 115. Một giáo viên theo dõi sự tiến bộ của học sinh qua thang đo điểm, được mô hình hóa bằng hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các hệ số. Trong đó $x\ (0\leq x\leq 9, x\in ¥)$ là số tháng kể từ đầu năm học và $f(x)$ là điểm trong tháng thứ x. Qua theo dõi, giáo viên ghi nhận tháng đầu tiên học sinh đạt 19 điểm, sau đó giảm trong tháng thứ hai và đến tháng thứ ba học sinh đạt mức điểm thấp nhất trong năm học là 3 điểm. Kể từ tháng thứ ba trở đi, điểm của học sinh tăng lên. Tính điểm của học sinh đó ở tháng thứ sáu.

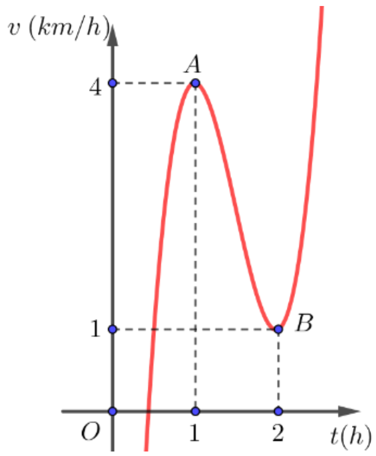
Lời giải

Đáp án: 84.

Dựa vào đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} f(1)=19 \\ f'(3)=0 \\ f(3)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=28 \\ 6a+b=-27 \\ 9a+3b+c=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-9 \\ c=30 \end{cases}$.

$\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2-9x+30 \Rightarrow f(6)=84$.

Câu 116. Một vật chuyển động với tốc độ $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của hàm số dạng hàm bậc ba như hình bên. Biết rằng tại thời điểm $t_1=1\text{h}$ vật có tốc độ $v_1=4\text{km/h}$ và tại thời điểm $t_2=2\text{h}$ vật có tốc độ $v_2=1\text{km/h}$. Hỏi tốc độ của vật tại thời điểm $t=3\text{h}$ bằng bao nhiêu km/h?



Lời giải

Đáp án: 16

Giả sử hàm số tốc độ có dạng: $v(t)=at^3+bt^2+ct+d$ (với $a\neq 0$ và $t\geq 0$).

Ta có: $v'(t)=3at^2+2bt+c$.

Dựa vào đồ thị hàm số, tại các thời điểm t_1,t_2 đồ thị hàm tốc độ đi qua các điểm cực trị $A(1;4)$, $B(2;1)$

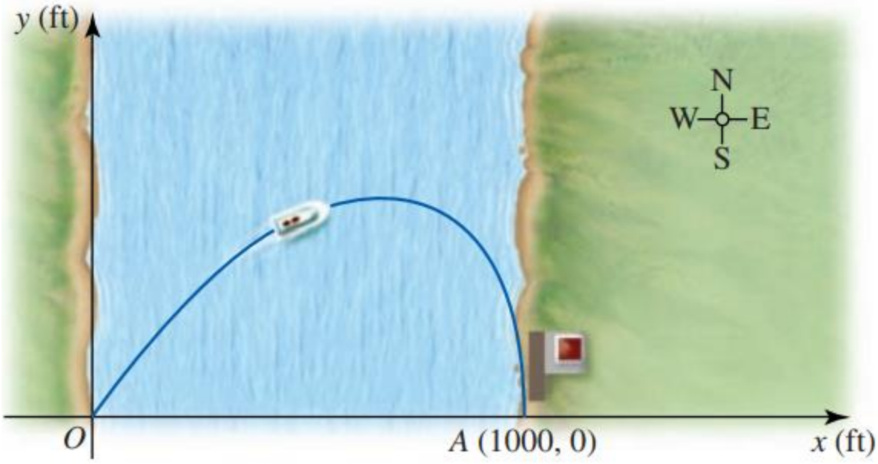
Khi đó: $\begin{cases} v(1)=4 \\ v'(1)=0 \\ v(2)=1 \\ v'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=4 \\ 3a+2b+c=0 \\ 8a+4b+2c+d=1 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-27 \\ c=36 \\ d=-11 \end{cases}$.

Suy ra: $v(t)=6t^3-27t^2+36t-11\ (\text{km/h})$.

Vậy tốc độ của vật tại thời điểm $t=3h$ là: $v(3)=6\cdot 3^3-27\cdot 3^2+36\cdot 3-11=16\text{km/h}$.

Câu 117. Một con thuyền rời bến $O(0,0)$ trên một bờ sông, luôn đi với tốc độ không đổi 20 dặm/giờ hướng về bến $A(1000,0)$ (phía đông của O); đồng thời nước sông chảy ngược lên phía bắc với tốc độ 5 dặm/giờ. Người ta cho rằng đường đi của thuyền là $y=500\left[\left(\dfrac{1000-x}{1000}\right)^{3/4}-\left(\dfrac{1000-x}{1000}\right)^{5/4}\right]$, $0\leq x\leq 1000$

Tìm độ lệch bắc lớn nhất mà thuyền đạt được trong suốt hành trình.



Lời giải

Đáp án: 76,6

Đặt $u=\dfrac{1000-x}{1000}$, thì $0\le u\le 1$, $x=1000(1-u)$.

Khi đó $y(u)=500\left(u^{3/4}-u^{5/4}\right)$.

Tính đạo hàm theo u: $y'(u)=500\left(\dfrac{3}{4}u^{-1/4}-\dfrac{5}{4}u^{1/4}\right)=500\cdot\dfrac{1}{4}u^{-1/4}(3-5u)$

Vì $u^{-1/4}>0$ trên $(0,1]$, ta chỉ cần giải $3-5u=0\Rightarrow u=\dfrac{3}{5}=0,6$

Lập bảng xét dấu ta có

u	0		$0,6$		1
$y'(u)$		$+$	0	$-$	

Suy ra $y(u)$ đạt điểm cực đại tại $u=0,6$

Chuyển lại thành x và tính $y_{CĐ}$

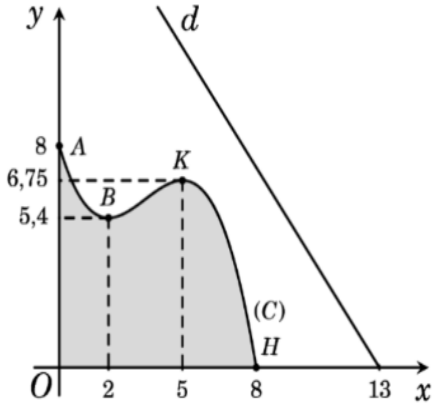
- Tương ứng $x=1000(1-u)=1000\cdot 0,4=400$.
- Độ lệch bắc cực đại là $y_{CĐ}=500\left((0,6)^{3/4}-(0,6)^{5/4}\right)\approx 500(0,6817-0,5286)\approx 76,6$

Do đó giá trị $y_{CĐ}\approx 76,6$ tại $x=400$

Kết luận:

Trong suốt hành trình, con thuyền bị dòng nước đẩy lệch về phía bắc cực đại khoảng 76,6 (đơn vị chiều dài) khi nó đã đi được $x=400$ (đơn vị tương ứng) về phía đông.

Câu 118. Một khu vực trồng hoa được xây dựng trong khu du lịch sinh thái. Trong mô hình minh họa (như hình vẽ bên), nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị (C) của một hàm số bậc ba. Biết rằng đồ thị (C) đi qua các điểm $A(0;8), B(2;5,4), K(5;6,75)$ và $H(8;0)$. Trong khu du lịch sinh thái có một con đường chạy dọc theo đường thẳng $d: y=-\dfrac{13}{9}x+\dfrac{169}{9}$. Tìm hoành độ của điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến d là nhỏ nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 6,16.

Đồ thị (C) của một hàm số bậc ba có dạng: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$.

Vì đồ thị (C) đi qua các điểm $A(0;8), B(2;5,4), K(5;6,75)$ và $H(8;0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} d=8 \\ 8a+4b+2c+d=5,4 \\ 125a+25b+5c+d=6,75 \\ 512a+64b+8c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{10} \\ b=\dfrac{21}{20} \\ c=-3 \\ d=8 \end{cases}.$$

Suy ra $f(x)=-\dfrac{1}{10}x^3+\dfrac{21}{20}x^2-3x+8$.

Điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến d là nhỏ nhất khi và chỉ khi tiếp tuyến của (C) tại M song song với d $((x_M>5)$.

Ta có: $f'(x)=-\dfrac{3}{10}x^2+\dfrac{21}{10}x-3$.

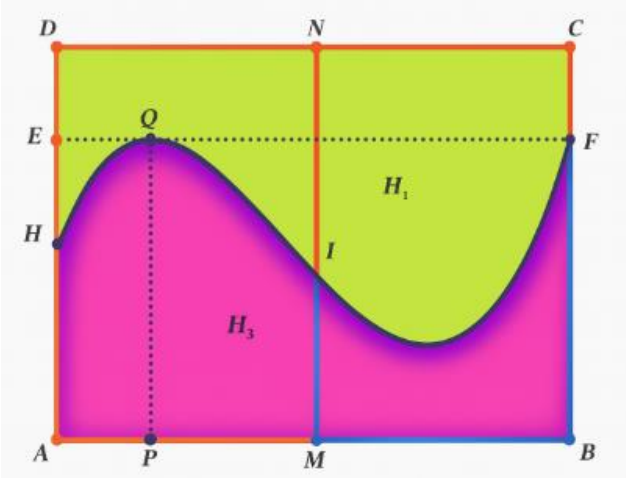
Đường thẳng d có hệ số góc $k=-\dfrac{13}{9}$.

Suy ra: $-\dfrac{3}{10}x^2+\dfrac{21}{10}x-3=-\dfrac{13}{9} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6,16 \\ x=0,84<5 \end{array}\right.$.

Do $x_M>5$ nên $x_M=6,16$ thỏa mãn.

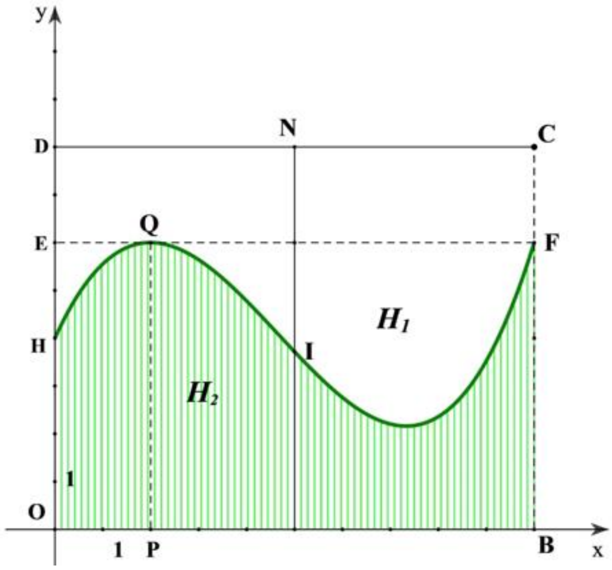
Câu 119. Khuôn viên của một công viên có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=100\ m$; $AD=80\ m$. Người ta muốn chia công viên thành hai khu, một khu dành cho trẻ em, một khu dành cho người lớn. Để tạo thiết kế độc đáo và lạ mắt, người ta dùng một đường cong chia khuôn viên thành hai phần H_1 (không tô màu) dành cho trẻ em và H_2 (tô màu) dành cho người lớn như hình vẽ bên với $AH=40\ m$; $AE=60\ m$; $AP=20\ m$ và $EF//AB$; $PQ//AD$.

Biết rằng khi xét trong một hệ tọa độ Oxy, đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số bậc ba. Phần chính giữa công viên người ta muốn mắc dây đèn trang trí dọc đoạn thẳng MN như hình. Biết giá tiền mỗi mét dây trang trí của phần dành cho trẻ em là 140 nghìn đồng và phần dành cho người lớn là 180 nghìn đồng. Tổng số tiền mắc dây đèn trang trí trên đoạn MN là bao nhiêu triệu đồng.



Lời giải

Đáp án: 13,9.



Xét trục tọa độ Oxy, với gốc tọa độ là điểm A. Tia Ox trùng với tia AB, tia Oy trùng với tia AD thì đường cong ranh giới giữa hai khu vực là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Theo giả thiết đồ thị hàm số này đi qua các điểm $H(0;40)$; $Q(20;60)$; $F(100;60)$ và có điểm cực trị là $Q(20;60)$ nên ta có hệ

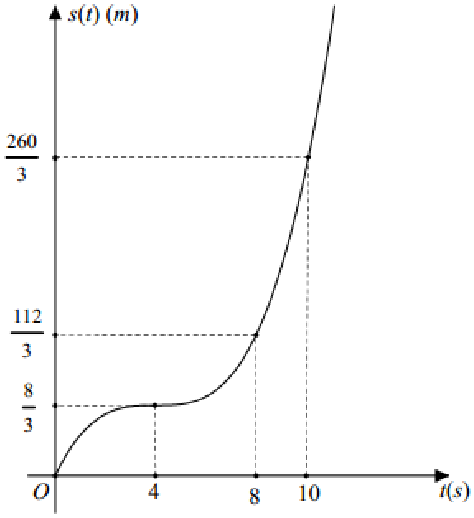
$$\begin{cases} d = 40 \\ 60 = 8000a + 400b + 20c + d \\ 60 = 1000000a + 10000b + 100c + d \\ 3.10000a + 2.100b + c = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = \dfrac{1}{10000}; b = \dfrac{-11}{500}; c = \dfrac{7}{5}; d = 40$.

Do M là trung điểm của AB nên tọa độ điểm I là $(50;67,5)$. Do đó chiều dài đoạn dây thuộc phần dành cho người lớn là $67,5\ m$, chiều dài đoạn dây thuộc phần dành cho trẻ em là $12,5\ m$.

Tổng số tiền mắc dây đèn là $67,5.0,18 + 12,5.0,14 = 13,9$ (triệu đồng).

Câu 120. Một vật chuyển động. Quãng đường $s(t)$ (tính theo mét) vật đi được sau khoảng thời gian t (tính theo giây), $t \geq 0$, được mô tả là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hỏi trong 10 giây đầu tiên, khoảng thời gian vật chuyển động nhanh dần kéo dài bao nhiêu giây?

Lời giải

Đáp án: 8.

Giả sử $s(t)=at^3+bt^2+ct+d\ (a\neq 0)$.

Vì đồ thị hàm số $s(t)$ đi qua các điểm $(0;0)$, $\left(4;\frac{8}{3}\right)$, $\left(8;\frac{112}{3}\right)$ và $\left(10;\frac{260}{3}\right)$ nên ta có

$$\begin{cases}64a+16b+4c=\frac{8}{3}\\512a+64b+8c=\frac{112}{3}\\1000a+100b+10c=\frac{260}{3}\\d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{6}\\b=-1\\c=2\\d=0\end{cases}.$$

Do đó $s(t)=\frac{1}{6}t^3-t^2+2t.$

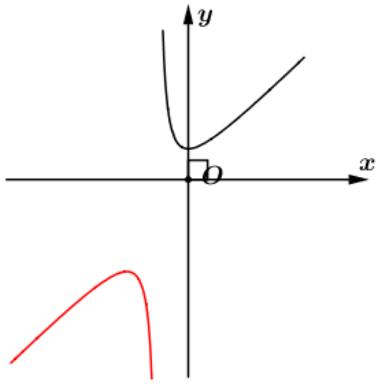
Ta có $v(t)=s'(t)=\frac{1}{2}t^2-2t+2\Rightarrow v'(t)=t-2=0\Leftrightarrow t=2.$

Bảng biến thiên:

t	0		2		10
v'		$-$	0	$+$	
v	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	32

Dựa vào bảng biến thiên, từ giây thứ 2 trở đi tốc độ của vật tăng dần theo thời gian. Do đó trong 10 giây đầu tiên, khoảng thời gian vật chuyển động nhanh dần kéo dài trong 8 giây.

Câu 121. Trong hệ trục tọa độ (Oxy) cho đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ mô tả chuyển động của hai tàu đánh cá A và B (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng km). Biết quỹ đạo chuyển động của hai tàu luôn thuộc về hai nhánh khác nhau của đồ thị (C). Tính khoảng cách ngắn nhất (đơn vị km) giữa hai tàu đánh cá A và B (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 4,39.

Ta có $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=x+\dfrac{1}{x+1},\ (x\neq -1)$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-1$, gồm hai nhánh nằm về hai phía của đường thẳng $x=-1$.

Gọi A là điểm thuộc nhánh trái của đồ thị hàm số, khi đó $x_A<-1$.

Đặt $a=-1-x_A>0\Rightarrow x_A=-1-a$

$\Rightarrow y_A=-1-a+\dfrac{1}{-1-a+1}=-1-a-\dfrac{1}{a}\ \Rightarrow A\left(-1-a;-1-a-\dfrac{1}{a}\right)$

Gọi B là điểm thuộc nhánh phải của đồ thị hàm số, khi đó $x_B>-1$.

Đặt $b=x_B+1>0\Rightarrow x_B=b-1$

$\Rightarrow y_B=b-1+\dfrac{1}{b-1+1}=b-1+\dfrac{1}{b}\ \Rightarrow B\left(b-1;\,b-1+\dfrac{1}{b}\right)$

$\Rightarrow AB^2=(b+a)^2+\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}\right)^2=(b+a)^2+(b+a)^2.\left(\dfrac{1}{ab}\right)^2\ =(a+b)^2\left(2+\dfrac{2}{ab}+\dfrac{1}{a^2b^2}\right)$

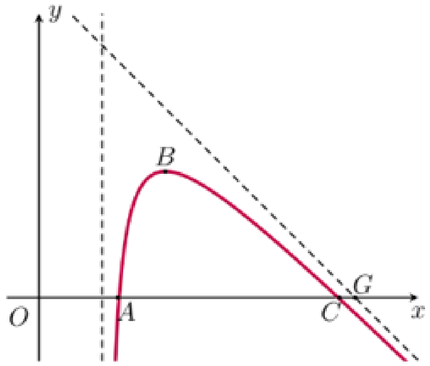
Với $a>0,b>0$ ta có $\begin{cases}(a+b)^2\geq 4ab\\ 2+\dfrac{1}{a^2b^2}\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{a^2b^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{ab}\end{cases}$

Nên $AB^2\geq 4ab.\left(\dfrac{2}{ab}+\dfrac{2\sqrt{2}}{ab}\right)=8+8\sqrt{2}\Rightarrow AB\geq\sqrt{8+8\sqrt{2}}\approx 4,39$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ 2=\dfrac{1}{a^2b^2}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Vậy khoảng cách ngắn nhất (đơn vị km) giữa hai tàu đánh cá A và B là 4,39 (km).

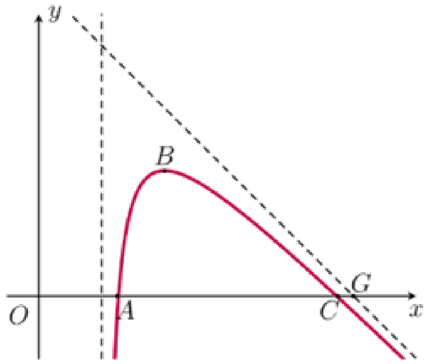
Câu 122. Một máy bay trình diễn có đường bay gắn với hệ trục Oxy được mô phỏng như hình vẽ, trục Ox gắn với mặt đất.



Đường bay có dạng là một phần của đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất $y=f\left(x\right)$ có đường tiệm cận đứng là $x=2$. Điểm G là giao điểm của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và trục Ox được gọi là điểm giới hạn. Biết máy bay bay từ vị trí A cách tọa tọa độ O một khoảng $2,5$ đơn vị và máy bay khi ở vị trí cao nhất cách điểm xuất phát $1,5$ đơn vị theo phương song song với trục Ox và cách mặt đất $4,5$ đơn vị. Vị trí máy bay tiếp đất cách điểm giới hạn một khoảng bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 0,5.



Vì tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ (hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất) là $x=2$.

Hàm số có dạng $y=f\left(x\right)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}\left(a<0\right)$.

Đồ thị hàm số qua điểm $A\left(\dfrac{5}{2};0\right)$ và nhận $B\left(4;\dfrac{9}{2}\right)$ làm điểm cực trị, suy ra:

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{5}{2}\right)=0 \\ f\left(4\right)=\dfrac{9}{2} \\ f'\left(4\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{2}a+b+2c=0 \\ 4a+b+\dfrac{1}{2}c=\dfrac{9}{2} \\ a-\dfrac{1}{4}c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=\dfrac{21}{2} \\ c=-4 \end{cases}.$$ Khi đó: $f\left(x\right)=-x+\dfrac{21}{2}-\dfrac{4}{x-2}$.

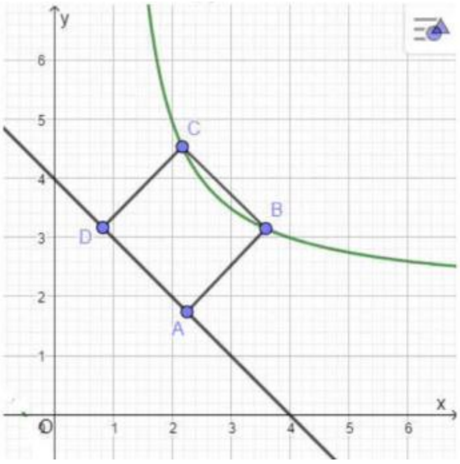
Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên: $y=-x+\dfrac{21}{2}$. Tọa độ điểm $G\left(\dfrac{21}{2};0\right)$.

Phương trình cho hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ với trục Ox là

$$-x+\frac{21}{2}-\frac{4}{x-2}=0\Rightarrow -x^2+\frac{25}{2}x-25=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2} \\ x=10 \end{array}\right. \Rightarrow C\left(10;0\right).$$

$CG=\frac{21}{2}-10=\frac{1}{2}$.

Câu 123. Trong một công viên có một hồ nước và một đường đi lát gạch hoa. Thiết lập hệ trục Oxy như hình vẽ dưới, kiến trúc sư thấy rằng bờ hồ có thể coi như một nhánh của đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ và đường đi khi đó ứng với đường thẳng $(d): y=-x+4$. Để đảm bảo ánh sáng, kiến trúc sư muốn đặt 2 cột đèn trên bờ hồ và 2 cột đèn trên đường đi sao cho 4 cột đèn này tạo thành một hình vuông. Tính khoảng cách giữa hai cột đèn trên bờ hồ (làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 1,92.

Gọi $(d_1): y=-x+m$ (với $m>4$) song song với $(d): y=-x+4$ và cắt $(C): y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt B,C $(x_B;x_C>1)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (C): $\frac{2x+1}{x-1}=-x+m \Leftrightarrow x^2+(1-m)x+m+1=0$.

$\Delta=m^2-6m-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3+2\sqrt{3} \\ m<3-2\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow m>3+2\sqrt{3}$ (vì $m>4$) (1)

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_C+x_B=m-1 \\ x_C.x_B=m+1 \end{cases}$

Suy ra: $CB=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(-x_B+m+x_C-m)^2}=\sqrt{2(x_B-x_C)^2}$

$\Rightarrow CB^2=2(x_B-x_C)^2=2(x_B+x_C)^2-8x_B.x_C=2m^2-12m-6$

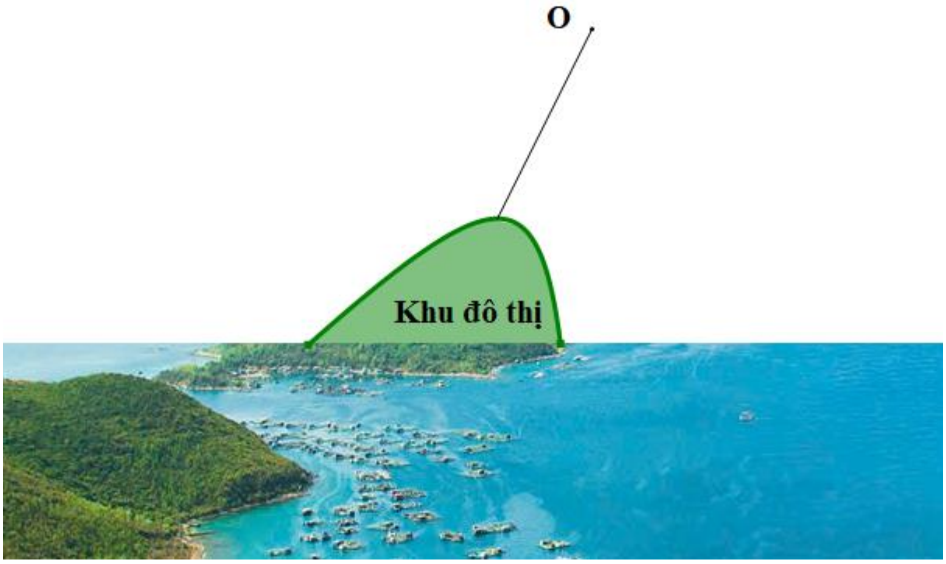
Mặt khác chọn $I(0;4)\in(d)$, ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng $(d);(d_1)$ bằng $AB=d(I;(d_1))=\frac{|4-m|}{\sqrt{2}}=\frac{m-4}{\sqrt{2}}$

Để $ABCD$ là hình vuông thì $AB^2=BC^2 \Leftrightarrow \frac{(m-4)^2}{2}=2m^2-12m-6 \Leftrightarrow m=\frac{8\pm2\sqrt{37}}{3}$

Kết hợp điều kiện (1) suy ra $m=\frac{8+2\sqrt{37}}{3}$

Vậy khoảng cách giữa hai cột đèn bên bờ hồ bằng $\frac{\frac{8+2\sqrt{37}}{3}-4}{\sqrt{2}}\approx 1,92$.

Câu 124. Ở một vịnh biển, ngoài xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây một khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị đo tương ứng 1km có hòn đảo ở O thì đương bao của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x}$. Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải

Đáp án: 2,2.

Độ dài ngắn nhất của tuyến cáp treo nối với đường bao của khu đô thị chính là khoảng cách từ O tới điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Xét hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ với $x\neq 0$.

Ta có $y'=\dfrac{x^2-1}{x^2}=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có điểm cực đại là $A(-1;-2)$.

Khi đó $OA=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}\approx 2,2$.

Vậy độ dài của tuyến cáp treo xấp xỉ $2,2\,\text{km}$.

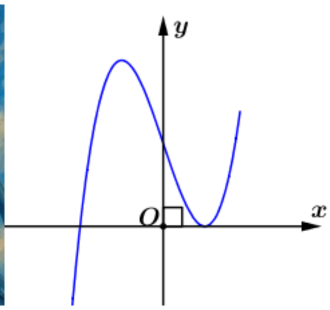
Câu 125. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$. Đồ thị hàm số $y=f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y=a$. Giá trị của a là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 26.

Ta có: $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{26t+10}{t+5} = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{26+\dfrac{10}{t}}{1+\dfrac{5}{t}} = 26 \Rightarrow$ TCN: $y = 26$.

Câu 126. Một đường ray tàu lượn trong khu vui chơi giải trí có hình dáng được mô phỏng theo đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$, ký hiệu là (C). Để đảm bảo an toàn và tính thẩm mỹ, người ta chọn hai điểm $A(a;b)$ và $B(c;d)$ trên đường ray sao cho tiếp tuyến tại hai điểm này có cùng độ dốc (cùng hệ số góc). Đồng thời, đoạn đường nối hai trụ đỡ tại các điểm A và B phải vuông góc với một đường dây điện có phương trình $x + y - 5 = 0$. Tìm $b + d$



Lời giải

Đáp án: 4

$y = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3$

Tiếp tuyến với (C) tại A, B có cùng hệ số góc và chỉ khi $f'(x_A) = f'(x_B) \Leftrightarrow x_A^2 = x_B^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = x_B\ (L) \\ x_A + x_B = 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow A, B$ đối xứng nhau qua $I(0;2)$ là tâm đối xứng của (C).

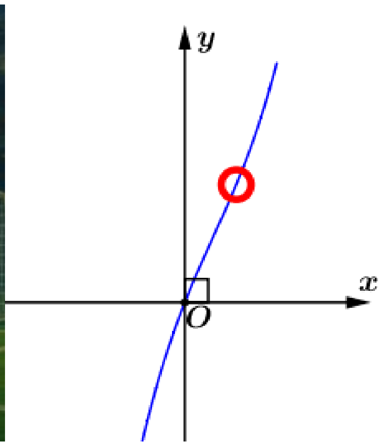
$AB \perp d: x + y - 5 = 0 \Rightarrow AB: x - y + m = 0.$

AB qua I nên ta có $m = 2 \Rightarrow AB: x - y + 2 = 0.$

Khi đó hoành độ A, B thỏa mãn phương trình

$x^3 - 3x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\ (L) \\ x = \pm 2 \end{array}\right. \Rightarrow A(2;4), B(-2;0).$

Câu 127. Một cầu thủ thực hiện cú sút bóng xoáy (banana kick), làm bóng bay theo đường cong hình bậc ba thay vì một parabol thông thường. Quỹ đạo bóng trong hệ trục tọa độ Oxy được mô tả bởi phương trình $y = \dfrac{x^3}{100} - \dfrac{x^2}{10} + \dfrac{253x}{100}$, với y là độ cao của bóng (m). Biết chiều cao chuẩn của khung thành là $2.44\,m$. Khi bóng chạm xà ngang thì góc lệch của bóng và mặt đất là bao nhiêu? Biết góc lệch của bóng và mặt đất là góc của đường tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3}{100} - \dfrac{x^2}{10} + \dfrac{253x}{100}$ tại điểm chạm xà ngang và trục Ox (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp án: 67

Ta có bóng chạm xà ngang nên ta có tung độ

$$y = 2,44 \Leftrightarrow 2,44 = \frac{x^3}{100} - \frac{x^2}{10} + \frac{253x}{100} \Leftrightarrow x^3 - 10x^2 + 253x - 244 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Hệ số góc của tiếp tuyến là $k_{tt} = f'(1) = \frac{3}{100} - \frac{1}{5} + \frac{253}{100} = \frac{59}{25}$

Gọi α là góc của tiếp tuyến với trục Ox, ta có $\tan\alpha = \frac{59}{25} \Rightarrow \alpha \approx 67^0$